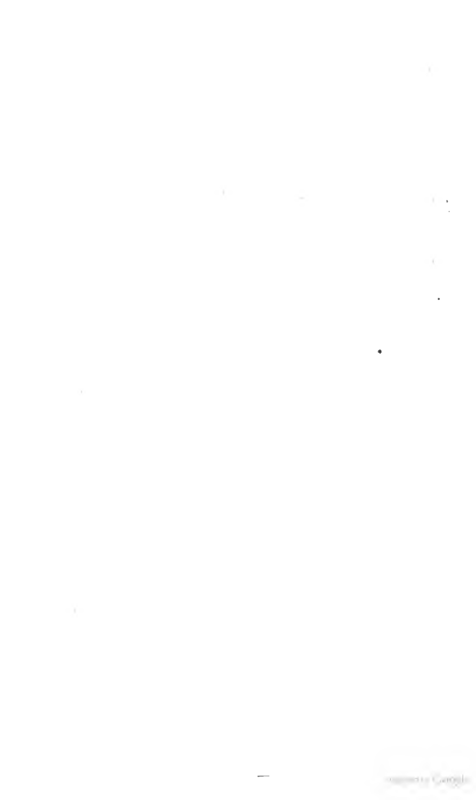




# MATHEMATISCHES

# WÖRTERBUCH

## ALPHABETISCHE ZUSAMMENSTELLUNG

SÄMMTLICHER

IN DIE MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN GEHÖRENDER GEGENSTÄNDE IN ERKLÄRENDEN UND BEWEISENDEN SYNTHETISCH UND ANALYTISCH BEARBEITETEN ABHANDLUNGEN

VON

**LUDWIG HOFFMANN**
WEILAND BAUMEISTER IN BERLIN.



**V. BAND**

**Q.**

Von **L. NATANI.**

BERLIN
VERLAG VON WIEGANDT UND HEMPEL
1866.

# Q.

**Quadrant.** Der vierte Theil der Kreislinie. Man pflegt auch oft den vierten Theil jeder Curve, die geschlossen ist, und in vier congruente Stücke zerfällt, z. B. einer Ellipse oder Lemniscate als Quadrant zu bezeichnen.

**Quadrant (elliptischer).** So werden die beiden bestimmten Integrale:

$$K=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin\varphi^2}}$$

und

$$K'=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k'^2\sin\varphi^2}}$$

oft genannt, wo $k$ und $k'$ die Gleichung erfüllen:

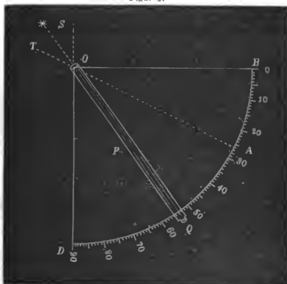
$$k^2+k'^2=1.$$

Wie nämlich bei den Kreisfunctionen der vierte Theil der Periode, also $\frac{\pi}{2}$, zugleich der Quadrant einer Kreislinie ist, deren Radius gleich der Einheit gesetzt wird, so drücken auch diese beiden Integrale in Bezug auf die elliptischen Functionen erster Ordnung die vierten Theile beider Perioden aus.

**Quadrant (Mauer-) Astronomie.** Ein im Ortsmeridian befestigter, getheilter und mit einem Fernrohre versehener Quadrant, welcher dazu dient, die Declination und Rectascension der Sterne und ihre Höhe zu bestimmen. (Fig. 1.) Sei $DPO$ die Ebene des Ortsmeridians, $OB$ der Durchschnitt des Horizontes mit derselben, $OA$ der Durchschnitt des Aequators. $DB$ selbst ist eingetheilt, und in $O$ befindet sich das in der Meridianebene verschiebbare Fernrohr $P$. Soll nun ein Stern $S$ beobachtet werden, so wartet man den Augenblick ab, wo derselbe in seiner obern Culmination durch den Meridian geht, und richtet dann das Fernrohr auf denselben. Winkel $AOQ$, den die Gesichtslinie des Sternes mit dem Aequator macht, oder Bogen $AQ$ gibt unmittelbar die Declination; dieselbe ist positiv, wenn der Stern, wie hier angenommen wurde, oberhalb des Aequators, negativ, wenn er unterhalb desselben culminirt. Bogen $BQ$ oder Winkel $BOQ$ gibt die Höhe des Sternes an.

Um die Rectascension zu bestimmen, ist die Zeit zu messen, in welcher der Stern culminirt. Die Uhr, mittels welcher dies geschieht, wird am besten nach Sternenzeit gestellt, und als Null oder 12 Uhr ist der Zeitpunkt zu bezeichnen, in welchem der aufsteigende Knoten oder Frühlingspunkt culminirt. Da die Rectascension die Entfernung des Sternes von dem durch den Frühlingspunkt gehenden Meridian ist, und entgegengesetzt der Bewegung des Himmels gezählt wird, so ist die Uhrzeit, welche zur Zeit der Culmination des fraglichen Sternes stattfindet, seine Rectascension, und man braucht

Figur 1.




die Stundenzahl, welche die Uhr angibt, nur mit 15 zu multipliciren, um die Rectascensien in Graden zu haben.

Mauerquadranten sind jetzt nicht mehr gebräuchlich; man bedient sich jetzt statt deren der Vollkreise, deren Einrichtung aber auf demselben Principe beruht.

Aber auch diese Instrumente sind nur für solche Sterne und zu solchen Zeiten anwendbar, welche nicht bei Tage oder während der Dämmerung culminiren. Dies hat keinen Einfluss auf diejenigen Fixsterne und Planeten, welche das ganze Jahr oder einen grossen Theil desselben hindurch sichtbar sind, und bei denen man, da Sternen- und Sonnenzeit nicht gleich sind, immer eine Zeit bestimmen kann, wo sie während der Nacht culminiren.

Bei solchen Sternen dagegen, die, wie z. B. einige Cometen, nur kurze Zeit sichtbar sind, bedarf man solcher Instrumente, welche nicht bloss im Ortsmeridian, sondern in jedem beliebigen Meridian aufzustellen sind. Dies sind die Aequatorialinstrumente.

**Quadrant (Spiegel- oder Reflections-).** Ist ganz wie der Spiegelsextant eingerichtet (siehe den Artikel Sextant), nur mit dem Unterschiede, dass ersterer einen Viertelkreis enthält.

**Quadrat (Geometrie).** Ein Parallelogramm mit vier gleichen Seiten und vier rechten Winkeln.

Vermöge der ersten Eigenschaft gehört das Quadrat zu den Rhomben oder Rauten, nimmt daher an der Eigenschaft derselben, dass beide Diagonalen auf einander senkrecht stehen, Theil. Der letztern Eigenschaft wegen gehört das Quadrat zu den Oblengen oder Rechtecken, und daher sind auch beide Diagonalen gleich.

Bei fast allen Messungen dient das Quadrat als Grundeinheit der Flächenmasse, derart, dass man dazu immer dasjenige Quadrat wählt, dessen Seite die gewählte Längeneinheit ist. Ist also ein Fuss oder ein Meter als Längeneinheit gewählt, so ist der Quadratfuss oder Quadratmeter die Einheit des Flächenmasses.

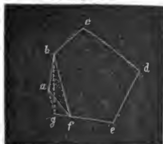
Auf diese Ausdrucksweise beziehen sich alle Formeln in der Theorie der Flächenmasse.

Aus den ersten Sätzen der Elementargeometrie folgt die Art und Weise, wie man auf geometrischem Wege jede von graden Linien begränzte Figur in ein Quadrat verwandeln kann, und zwar ist der Gang hierbei der folgende.

Aufgabe I. Eine beliebige gradlinige Figur oder ein Vieleck in ein anderes

zu verwandeln, welches eine Seite weniger hat.

Fig. 2.



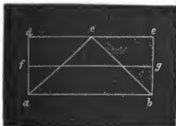

Auflösung. Sei Sechseck *abcdef* die gegebene Figur. Man schneidet Dreieck *abf* ab, zieht Linie *ag* parallel *bf*, verlängert *ef*, bis sie *ag* in *g* schneidet, und verbindet *b* und *g*; *gbcde* ist dann die verlangte Figur, welche der gegebenen gleich ist und eine Seite weniger hat.

Offenbar nämlich ist *gbcde* ein Fünfeck, hat also eine Seite weniger als *abcdef*. Mit letzterer Figur hat *bcdeg* aber Stück *bcdef* gemein. Das Stück *gbf* aber ist mit *abf* flächengleich, da beide die Grundlinie *bf* gemein haben, und zwischen den Parallelen *bf* und *ag* liegen.

Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann also jedes Vieleck in ein Dreieck verwandelt werden.

Aufgabe II. Ein Dreieck in ein Rechteck zu verwandeln.

Fig. 3.



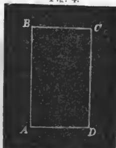

Auflösung. Sei *abc* das Dreieck. Ziehe durch *c de* parallel *ab*, *ad* und *be* auf *ab* senkrecht, halbire *da* und *be* in *f* und *g*, so ist *fgba* das verlangte Rechteck.

Denn offenbar hat es mit dem Dreiecke die Grundlinie *ab* gemein, seine Höhe *af* ist aber die Hälfte von der Höhe *ad* des Dreiecks.

Angabe III. Ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

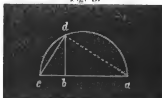
Von dieser wichtigen Aufgabe gibt es viele Auflösungen, von denen wir die einfachsten anführen.

Fig. 4.




Auflösung I. Seien *AB*, *BC* die anstossenden Seiten des Rechtecks. Mache Fig. 5. $ab = AB$, $bc = BC$, errichte

Fig. 5.

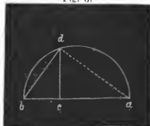



über *ac* als Durchmesser einen Halbkreis, und ziehe *bd* senkrecht auf *ac*, so ist *bd* die Seite des verlangten Quadrats.

Zieht man nämlich *cd* und *ad*, so ist *cad* ein rechter Winkel; in jedem rechtwinkligen Dreieck aber ist das Quadrat des aus der Spitze des rechten Winkels auf die Hypotenuse gefällten Lothes *db* gleich dem Rechteck aus beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Auflösung II. Mache Fig. 6. $ab = AB$, $bc = BC$, ziehe über *ab* einen

Fig. 6.

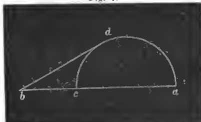


Halbkreis, $cd$ senkreckt auf $ab$, und $bd$, so ist $bd$ die Seite des Quadrates.

Denn da $bda$ ein rechtwinkliges Dreieck ist, muss das Quadrat der Kathete $bd$ gleich dem Rechteck aus der Projection derselben $bc$ auf die Hypotenuse und der ganzen Hypotenuse $ba$ sein.

Auflösung III. Mache Fig. 7. $ab = AB$, $bc = BC$, errichte über $ac$ einen

Fig. 7.




Halbkreis, und ziehe von $b$ an denselben Tangente $bd$, so ist diese die Seite des Quadrates. Denn das Quadrat einer Tangente $bd$ ist gleich dem Rechteck aus den Abschnitten $bc$ und $ba$ einer Secante, welche dieselbe schneidet.

Durch diese Constructionen lässt sich also in der That jedes Vieleck in ein Quadrat verwandeln. Wie krummlinige Figuren in Quadrate zu verwandeln sind, siehe in dem Artikel Quadratur.

**Quadrat (Algebra).** Die zweite Potenz einer Zahl, oder das Product derselben mit sich selbst.

Da der Flächeninhalt eines Rechtecks gleich dem Product zweier anstossenden Seiten, beim Quadrat dieselben aber gleich sind, so ist $a \cdot a = a^2$ in der That der Ausdruck für den Flächeninhalt eines Quadrates mit Seite $a$, und daher die Uebertragung dieses Namens. Das Quadrat eines Binomen gibt die Formel

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

die sich durch Multiplication von $(a+b)\cdot(a+b)$ unmittelbar ergibt. Eben so wird angenblicklich gefunden das Quadrat eines Polynomen:

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+a_3+ \cdots a_n)^2 = a_1^2+a_2^2+a_3^2+ \cdots &+a_n^2 \\ +2a_1a_2+2a_1a_3+ \cdots &+2a_1a_n \\ +2a_2a_3+ \cdots &+2a_2a_n \\ \cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots & \\ &+2a_{n-1}a_n\end{aligned}$$

oder abgekürzt:

$$(\sum(a_s))^2 = \Sigma(a_s)^2 + 2\Sigma(a_s a_t),$$

wo $s$ und $t$ alle Werthe von 1 bis $n$ annehmen. Oder in Worten: das Quadrat eines Polynomen ist gleich der Summe der Quadrate aller Glieder plus der Summe aller doppelten Producte von je zweien derselben.

Sehr wichtig ist auch die Formel, welche lehrt, eine homogene ganze Function zweiten Grades von beliebig viel Variablen in eine Summe von soviel Quadraten, als Variable vorhanden sind, zu verwandeln. Es sei die gegebene Function:

$$\begin{aligned}a_{1,1}x_1^2+a_{2,2}x_2^2+ \cdots +a_{n,n}x_n^2+2a_{1,2}x_1x_2+2a_{1,3}x_1x_3+ \cdots &+2a_{1,n}x_1x_n \\ +2a_{2,3}x_2x_3+ \cdots &+2a_{2,n}x_2x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ &+2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n,\end{aligned}$$

so setze man dafür:

$$\begin{aligned}(b_{1,1}x_1+b_{1,2}x_2+b_{1,3}x_3+ \cdots +b_{1,n}x_n)^2+(b_{2,2}x_2+b_{2,3}x_3+ \cdots +b_{2,n}x_n)^2 \\ + \cdots\cdot +(b_{n-1,n-1}x_{n-1}+b_{n-1,n}x_n)^2+(b_{n,n}x_n)^2.\end{aligned}$$

Es ergeben sich dann durch Vergleichung der Coefficienten $a$ und $b$ leicht die nöthigen Gleichungen zur Bestimmung der $b$. Sind $s$ und $t$ beliebige Zahlen zwischen 1 und $n$, so sind diese Gleichungen von der Form:

$$\begin{aligned}b_{1,s}^2+b_{2,s}^2+b_{3,s}^2+ \cdots +b_{s,s}^2 &= a_{s,s} \\ b_{1,s}b_{1,t}+b_{2,s}b_{2,t}+b_{3,s}b_{3,t}+ \cdots +b_{s,s}b_{s,t} &= a_{s,t}.\end{aligned}$$

Man hat hieraus also zum Beispiel, wenn man $s=1$ setzt:

$$b_{1,1}^2=a_{1,1},\ b_{1,1}b_{1,t}=a_{1,t},$$

also:

$$b_{1,1}=\sqrt{a_{1,1}},\ b_{1,t}=\frac{a_{1,t}}{\sqrt{a_{1,1}}},$$

wo $t$ grösser als 1 ist.

Sotat man $s=2$, so ergibt sich:

$$b_{1,2}^2+b_{2,2}^2=a_{2,2}$$

$$b_{1,2}b_{1,t}+b_{2,2}b_{2,t}=a_{2,t},$$

woraus mit Hülfe der vorigen Gleichung sich $b_{2,t}$ nnd $b_{2,2}$ ergeben, wo $t$ grösser als 2 ist.

Setzt man dann $s=3$, so kommt:

$$b_{1,3}^2+b_{2,3}^2+b_{3,3}^2=a_{3,3},$$

$$b_{1,3}b_{1,t}+b_{2,3}b_{2,t}+b_{3,3}b_{3,t}=a_{s,t}$$

nnd so fort.

Die Theorie der Determinanten bietet aber auch das Mittel die independenten Ausdrücke für die Grössen $b$ zu finden. Setzt man nämlich die für $b_{1,1}$ nnd $b_{1,t}$ gefundenen Werthe in das aweite System von Gleichnngen ein, so kommt:

$$\frac{a_{1,2}^2}{a_{1,1}}+b_{2,2}^2=a_{2,2},$$

also:

$$b_{2,2}=\sqrt{\frac{a_{2,2}a_{1,1}-a_{1,2}^2}{a_{1,1}}};$$

der Zähler dieses Wurzelansdruckes hat die Form einer Determinante.

Sei:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,s} \\ a_{1,s} & a_{s,s} \end{vmatrix}=\vartheta_{s,s},$$

es ist dann:

$$b_{2,2}=\sqrt{\frac{\vartheta_{2,2}}{a_{1,1}}};$$

ferner erhält man ans der zweiten Gleichnng des Systems:

$$\frac{a_{1,2}a_{1,t}}{a_{1,1}}=\sqrt{\frac{\vartheta_{2,2}}{a_{1,1}}}\ b_{2,t}=a_{2,t},$$

d. h.

$$b_{2,t}=\frac{(a_{2,t}a_{1,1}-a_{1,2}a_{1,t})}{\sqrt{\vartheta_{2,2}\cdot a_{1,1}}},$$

d. h., wenn man

$$\vartheta_{s,t}=\vartheta_{t,s}=\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,s} \\ a_{1,s} & a_{s,t} \end{vmatrix}$$

setzt,

$$b_{2,t}=\frac{\vartheta_{2,t}}{\sqrt{\vartheta_{2,2}a_{1,1}}}.$$

Diese Werthe werden in's nächste System gesetzt, also:

$$\frac{a_{1,3}^2}{a_{1,1}}+\frac{\vartheta_{2,3}^2}{\vartheta_{2,2}a_{1,1}}+b_{3,3}^2=a_{3,3},$$

d. h. mit Berücksichtigung des Werthes von $\vartheta_{s,s}$:

$$b_{3,3}^2=\frac{\vartheta_{3,3}}{a_{1,1}}-\frac{\vartheta_{2,3}^2}{\vartheta_{2,2}a_{1,1}}=\frac{\vartheta_{2,2}\vartheta_{3,3}-\vartheta_{2,3}^2}{\vartheta_{2,2}a_{1,1}}$$

oder, wenn man setzt:

$$\vartheta'_{s,s}=\begin{vmatrix} \vartheta_{2,2} & \vartheta_{2,s} \\ \vartheta_{2,s} & \vartheta_{s,s} \end{vmatrix},\quad b_{3,3}=\sqrt{\frac{\vartheta'_{3,3}}{\vartheta_{2,2}a_{1,1}}}$$

nnd vermöge der zweiten Gleichnng des Systems:

$$\frac{a_{1,3}a_{1,t}}{a_{1,1}}+\frac{\vartheta_{2,3}\vartheta_{2,t}}{\vartheta_{2,2}\cdot a_{1,1}}+\sqrt{\frac{\vartheta'_{3,3}}{\vartheta_{2,2}\cdot a_{1,1}}}\ b_{3,t}=a_{3,t},$$

d. h.

$$\sqrt{\frac{\vartheta'_{3,3}}{\vartheta_{2,2}a_{1,1}}}b_{3,t}=\frac{\vartheta_{3,t}}{a_{1,1}}-\frac{\vartheta_{2,3}\vartheta_{2,t}}{\vartheta_{2,2}a_{1,1}}=\frac{\vartheta'_{3,t}}{a_{1,1}\vartheta_{2,2}},$$

$$\text{wo}\quad \vartheta'_{s,t}=\vartheta'_{t,s}=\begin{vmatrix} \vartheta_{2,2} & \vartheta_{2,s} \\ \vartheta_{2,t} & \vartheta_{s} \end{vmatrix}$$

gesetzt worden ist, also:

$$b_{3,t}=\frac{\vartheta'_{3,t}}{\sqrt{\vartheta'_{3,3}\cdot\vartheta_{2,2}\cdot a_{1,1}}}.$$

Man sieht augenblicklich, dass die Werthe $b_{2,2}$ in $b_{2,t}$ nnd $b_{3,3}$ in $b_{3,t}$ mit eingeschlossen sind.

Nnn ist zu erkennen, dass man allgemein haben wird

$$b_{s,t}=\frac{\vartheta^{(s-2)}_{s,t}}{\sqrt{\vartheta^{(s-2)}_{s,s}\vartheta^{(s-3)}_{s-1,s-1}\cdots\vartheta_{2,2}a_{1,1}}},$$

wo $\vartheta^{(r-2)}_{s,t}$ gegeben ist dnrch die recurrente Formel:

$$\vartheta^{(r-2)}_{s,t}=\begin{vmatrix} \vartheta^{(r-3)}_{r-1,r-1}, & \vartheta^{(r-3)}_{r-1,s} \\ \vartheta^{(r-3)}_{r-1,t} & \vartheta^{(r-3)}_{s,t} \end{vmatrix}.$$

Sei jetzt $a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,n}x_n=0$

$a_{2,1}x_2+a_{2,2}x_2+\cdots+a_{2,n}x_n=0$

. . . . . . . . . . .

**Tafel der Quadrate der Zahlen von 1 bis 1000.**

| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 10201 | 40401 | 90601 | 160801 | 251001 | 361201 | 491401 | 641601 | 811801 |
| 2 | 4 | 10404 | 40804 | 91204 | 161604 | 252004 | 362404 | 492804 | 643204 | 813604 |
| 3 | 9 | 10609 | 41209 | 91809 | 162409 | 253009 | 363609 | 494209 | 644809 | 815409 |
| 4 | 16 | 10816 | 41616 | 92416 | 163216 | 254016 | 364816 | 495616 | 646416 | 817216 |
| 5 | 25 | 11025 | 42025 | 93025 | 164025 | 255025 | 366025 | 497025 | 648025 | 819025 |
| 6 | 36 | 11236 | 42436 | 93636 | 164836 | 256036 | 367236 | 498436 | 649636 | 820836 |
| 7 | 49 | 11449 | 42849 | 94249 | 165649 | 257049 | 368449 | 499849 | 651249 | 822649 |
| 8 | 64 | 11664 | 43264 | 94864 | 166464 | 258064 | 369664 | 501264 | 652864 | 824464 |
| 9 | 81 | 11881 | 43681 | 95481 | 167281 | 259081 | 370881 | 502681 | 654481 | 826281 |
| 10 | 100 | 12100 | 44100 | 96100 | 168100 | 260100 | 372100 | 504100 | 656100 | 828100 |
| 11 | 121 | 12321 | 44521 | 96721 | 168921 | 261121 | 373321 | 505521 | 657721 | 829921 |
| 12 | 144 | 12544 | 44944 | 97344 | 169744 | 262144 | 374544 | 506944 | 659344 | 831744 |
| 13 | 169 | 12769 | 45369 | 97969 | 170569 | 263169 | 375769 | 508369 | 660969 | 833569 |
| 14 | 196 | 12996 | 45796 | 98596 | 171396 | 264196 | 376996 | 509796 | 662596 | 835396 |
| 15 | 225 | 13225 | 46225 | 99225 | 172225 | 265225 | 378225 | 511225 | 664225 | 837225 |
| 16 | 256 | 13456 | 46656 | 99856 | 173056 | 266256 | 379456 | 512656 | 665856 | 839056 |
| 17 | 289 | 13689 | 47089 | 100489 | 173889 | 267289 | 380689 | 514089 | 667489 | 840889 |
| 18 | 324 | 13924 | 47524 | 101124 | 174724 | 268324 | 381924 | 515524 | 669124 | 842724 |
| 19 | 361 | 14161 | 47961 | 101761 | 175561 | 269361 | 383161 | 516961 | 670761 | 844561 |
| 20 | 400 | 14400 | 48400 | 102400 | 176400 | 270400 | 384400 | 518400 | 672400 | 846400 |
| 21 | 441 | 14641 | 48841 | 103041 | 177241 | 271441 | 385641 | 519841 | 674041 | 848241 |
| 22 | 484 | 14884 | 49284 | 103684 | 178084 | 272484 | 386884 | 521284 | 675684 | 850084 |
| 23 | 529 | 15129 | 49729 | 104329 | 178929 | 273529 | 388129 | 522729 | 677329 | 851929 |
| 24 | 576 | 15376 | 50176 | 104976 | 179776 | 274576 | 389376 | 524176 | 678976 | 853776 |
| 25 | 625 | 15625 | 50625 | 105625 | 180625 | 275625 | 390625 | 525625 | 680625 | 855625 |
| 26 | 676 | 15876 | 51076 | 106276 | 181476 | 276676 | 391876 | 527076 | 682276 | 857476 |
| 27 | 729 | 16129 | 51529 | 106929 | 182329 | 277729 | 393129 | 528529 | 683929 | 859329 |
| 28 | 784 | 16384 | 51984 | 107584 | 183184 | 278784 | 394384 | 529984 | 685584 | 861184 |
| 29 | 841 | 16641 | 52441 | 108241 | 184041 | 279841 | 395641 | 531441 | 687241 | 863041 |
| 30 | 900 | 16900 | 52900 | 108900 | 184900 | 280900 | 396900 | 532900 | 688900 | 864900 |
| 31 | 961 | 17161 | 53361 | 109561 | 185761 | 281961 | 398161 | 534361 | 690561 | 866761 |
| 32 | 1024 | 17424 | 53824 | 110224 | 186624 | 283024 | 399424 | 535824 | 692224 | 868624 |
| 33 | 1089 | 17689 | 54289 | 110889 | 187489 | 284089 | 400689 | 537289 | 693889 | 870489 |
| 34 | 1156 | 17956 | 54756 | 111556 | 188356 | 285156 | 401956 | 538756 | 695556 | 872356 |
| 35 | 1225 | 18225 | 55225 | 112225 | 189225 | 286225 | 403225 | 540225 | 697225 | 874225 |
| 36 | 1296 | 18496 | 55696 | 112896 | 190096 | 287296 | 404496 | 541696 | 698896 | 876096 |
| 37 | 1369 | 18769 | 56169 | 113569 | 190969 | 288369 | 405769 | 543169 | 700569 | 877969 |
| 38 | 1444 | 19044 | 56644 | 114244 | 191844 | 289444 | 407044 | 544644 | 702244 | 879844 |
| 39 | 1521 | 19321 | 57121 | 114921 | 192721 | 290521 | 408321 | 546121 | 703921 | 881721 |
| 40 | 1600 | 19600 | 57600 | 115600 | 193600 | 291600 | 409600 | 547600 | 705600 | 883600 |
| 41 | 1681 | 19881 | 58081 | 116281 | 194481 | 292681 | 410881 | 549081 | 707281 | 885481 |
| 42 | 1764 | 20164 | 58564 | 116964 | 195364 | 293764 | 412164 | 550564 | 708964 | 887364 |
| 43 | 1849 | 20449 | 59049 | 117649 | 196249 | 294849 | 413449 | 552049 | 710649 | 889249 |
| 44 | 1936 | 20736 | 59536 | 118336 | 197136 | 295936 | 414736 | 553536 | 712336 | 891136 |
| 45 | 2025 | 21025 | 60025 | 119025 | 198025 | 297025 | 416025 | 555025 | 714025 | 893025 |
| 46 | 2116 | 21316 | 60516 | 119716 | 198916 | 298116 | 417316 | 556516 | 715716 | 894916 |
| 47 | 2209 | 21609 | 61009 | 120409 | 199809 | 299209 | 418609 | 558009 | 717409 | 896809 |
| 48 | 2304 | 21904 | 61504 | 121104 | 200704 | 300304 | 419904 | 559504 | 719104 | 898704 |
| 49 | 2401 | 22201 | 62001 | 121801 | 201601 | 301401 | 421201 | 561001 | 720801 | 900601 |
| 50 | 2500 | 22500 | 62500 | 122500 | 202500 | 302500 | 422500 | 562500 | 722500 | 902500 |

. . . . . . . . . . . .

$$a_{n-1,1}x_1 + a_{n-1,2}x_2 + \cdots + a_{n-1,n}x_n = 0$$
$$a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_n + \cdots + a_{n,n}x_n = a,$$

Tafel der Quadrate der Zahlen von 1 bis 1000.

| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 2601 | 22801 | 63001 | 123201 | 203401 | 303601 | 423801 | 564001 | 724201 | 904401 |
| 52 | 2704 | 23104 | 63504 | 123904 | 204304 | 304704 | 425104 | 565504 | 725904 | 906304 |
| 53 | 2809 | 23409 | 64009 | 124609 | 205209 | 305809 | 426409 | 567009 | 727609 | 908209 |
| 54 | 2916 | 23716 | 64516 | 125316 | 206116 | 306916 | 427716 | 568516 | 729316 | 910116 |
| 55 | 3025 | 24025 | 65025 | 126025 | 207025 | 308025 | 429025 | 570025 | 731025 | 912025 |
| 56 | 3136 | 24336 | 65536 | 126736 | 207936 | 309136 | 430336 | 571536 | 732736 | 913936 |
| 57 | 3249 | 24649 | 66049 | 127449 | 208849 | 310249 | 431649 | 573049 | 734449 | 915849 |
| 58 | 3364 | 24964 | 66564 | 128164 | 209764 | 311364 | 432964 | 574564 | 736164 | 916764 |
| 59 | 3481 | 25281 | 67081 | 128881 | 210681 | 312481 | 434281 | 576081 | 737881 | 919681 |
| 60 | 3600 | 25600 | 67600 | 129600 | 211600 | 313600 | 435600 | 577600 | 739600 | 921600 |
| 61 | 3721 | 25921 | 68121 | 130321 | 212521 | 314721 | 436921 | 579121 | 741321 | 923521 |
| 62 | 3844 | 26244 | 68644 | 131044 | 213444 | 315844 | 438244 | 580644 | 743044 | 925444 |
| 63 | 3969 | 26569 | 69169 | 131769 | 214369 | 316969 | 439569 | 582169 | 744769 | 927369 |
| 64 | 4096 | 26896 | 69696 | 132496 | 215296 | 318096 | 440896 | 583696 | 746496 | 929296 |
| 65 | 4225 | 27225 | 70225 | 133225 | 216225 | 319225 | 442225 | 585225 | 748225 | 931225 |
| 66 | 4356 | 27556 | 70756 | 133956 | 217156 | 320356 | 443556 | 586756 | 749956 | 933156 |
| 67 | 4489 | 27889 | 71289 | 134689 | 218089 | 321489 | 444889 | 588289 | 751689 | 935089 |
| 68 | 4624 | 28224 | 71824 | 135424 | 219024 | 322621 | 446224 | 589824 | 753424 | 937024 |
| 69 | 4761 | 28561 | 72361 | 136161 | 219961 | 323761 | 447561 | 591361 | 755161 | 938961 |
| 70 | 4900 | 28900 | 72900 | 136900 | 220900 | 324900 | 448900 | 592900 | 756900 | 940900 |
| 71 | 5041 | 29241 | 73441 | 137641 | 221841 | 326041 | 450241 | 594441 | 758641 | 942841 |
| 72 | 5184 | 29584 | 73984 | 138384 | 222784 | 327184 | 451584 | 595984 | 760384 | 944784 |
| 73 | 5329 | 29929 | 74529 | 139129 | 223729 | 328329 | 452929 | 597529 | 762129 | 946729 |
| 74 | 5476 | 30276 | 75076 | 139876 | 224676 | 329476 | 454276 | 599076 | 763876 | 948676 |
| 75 | 5625 | 30625 | 75625 | 140625 | 225625 | 330625 | 455625 | 600625 | 765625 | 950625 |
| 76 | 5776 | 30976 | 76176 | 141376 | 226576 | 331776 | 456976 | 602176 | 767376 | 952576 |
| 77 | 5929 | 31329 | 76729 | 142129 | 227529 | 332929 | 458329 | 603729 | 769129 | 954529 |
| 78 | 6084 | 31684 | 77284 | 142884 | 228484 | 334084 | 459684 | 605284 | 770884 | 956484 |
| 79 | 6241 | 32041 | 77841 | 143641 | 229441 | 335241 | 461041 | 606841 | 772641 | 958441 |
| 80 | 6400 | 32400 | 78400 | 144400 | 230400 | 336400 | 462400 | 608400 | 774400 | 960400 |
| 81 | 6561 | 32761 | 78961 | 145161 | 231361 | 337561 | 463761 | 609961 | 776161 | 962361 |
| 82 | 6724 | 33124 | 79524 | 145924 | 232324 | 338724 | 465124 | 611524 | 777924 | 964324 |
| 83 | 6889 | 33489 | 80089 | 146689 | 233289 | 339889 | 466489 | 613089 | 779689 | 966289 |
| 84 | 7056 | 33856 | 80656 | 147456 | 234256 | 341056 | 467856 | 614656 | 781456 | 968256 |
| 85 | 7225 | 34225 | 81225 | 148225 | 235225 | 342225 | 469225 | 616225 | 783225 | 970225 |
| 86 | 7396 | 34596 | 81796 | 148996 | 236196 | 343396 | 470596 | 617796 | 784996 | 972196 |
| 87 | 7569 | 34969 | 82369 | 149769 | 237169 | 344569 | 471969 | 619369 | 786769 | 974169 |
| 88 | 7744 | 35344 | 82944 | 150544 | 238144 | 345744 | 473344 | 620944 | 788544 | 976144 |
| 89 | 7921 | 35721 | 83521 | 151321 | 239121 | 346921 | 474721 | 622521 | 790321 | 978121 |
| 90 | 8100 | 36100 | 84100 | 152100 | 240100 | 348100 | 476100 | 624100 | 792100 | 980100 |
| 91 | 8281 | 36481 | 84681 | 152881 | 241081 | 349281 | 477481 | 625681 | 793881 | 982081 |
| 92 | 8464 | 36864 | 85264 | 153664 | 242064 | 350464 | 478864 | 627264 | 795664 | 984064 |
| 93 | 8649 | 37249 | 85849 | 154449 | 243049 | 351649 | 480249 | 628849 | 797449 | 986049 |
| 94 | 8836 | 37636 | 86436 | 155236 | 244036 | 352836 | 481636 | 630436 | 799236 | 988036 |
| 95 | 9025 | 38025 | 87025 | 156025 | 245025 | 354025 | 483025 | 632025 | 801025 | 990025 |
| 96 | 9216 | 38416 | 87616 | 156816 | 246016 | 355216 | 484416 | 633616 | 802816 | 992016 |
| 97 | 9409 | 38809 | 88209 | 157609 | 247009 | 356409 | 485809 | 635209 | 804609 | 994009 |
| 98 | 9604 | 39204 | 88804 | 158404 | 248004 | 357604 | 487204 | 636804 | 806404 | 996004 |
| 99 | 9801 | 39601 | 89401 | 159201 | 249001 | 358801 | 488601 | 638401 | 808201 | 998001 |
| 100 | 10000 | 40000 | 90000 | 160000 | 250000 | 360000 | 490000 | 640000 | 810000 | 1000000 |

so ergibt sich, wenn man $x_1$ eliminirt:

$$\begin{array}{l}
\vartheta_{2,2}x_2+\vartheta_{2,3}x_3+\cdots+\vartheta_{2,n}x_n=0\\
\vartheta_{3,2}x_2+\vartheta_{3,3}x_3+\cdots+\vartheta_{3,n}x_n=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vartheta_{n,2}x_2+\vartheta_{n,3}x_3+\cdots+\vartheta_{n,n}x_n=\alpha\cdot a_{1,1},
\end{array}$$

wo gesetzt wird:

$$\vartheta_{s,t}=\begin{vmatrix}a_{1,1}a_{1,t}\\ a_{s,1}a_{s,t}\end{vmatrix}$$

und durch Elimlnation von $x_2$:

$$\begin{array}{l}
\vartheta'_{3,3}x_3+\vartheta'_{3,4}x_4+\cdots+\vartheta'_{3,n}x_n=0\\
\vartheta'_{4,3}x_3+\vartheta'_{4,4}x_4+\cdots+\vartheta'_{4,n}x_n=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vartheta'_{n,3}x_3+\vartheta'_{n,4}x_4+\cdots+\vartheta'_{n,n}x_n=\alpha\vartheta_{2,2}a_{1,1},
\end{array}$$

$$\text{wo } \vartheta'_{s,t}=\begin{vmatrix}\vartheta_{2,2}\vartheta_{2,t}\\ \vartheta_{s,1}\vartheta_{s,t}\end{vmatrix}.$$

Eliminirt man auch $x_3$ u. s. w. so erhält man:

$$\begin{array}{l}
\vartheta^{(r-2)}_{r,r}x_r+\vartheta^{(r-2)}_{r,r+1}x_{r+1}+\cdots+\vartheta^{(r-2)}_{r,n}x_n=0\\
\vartheta^{(r-2)}_{r+1,r}x_r+\vartheta^{(r-2)}_{r+1,r+1}x_{r+1}+\cdots+\vartheta^{(r-2)}_{r+1,n}x_n=0\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vartheta^{(r-2)}_{n,r}x_n+\vartheta^{(r-2)}_{n,r+1}x_{r+1}+\cdots+\vartheta^{(r-2)}_{n,n}x_n=\alpha\vartheta^{(r-3)}_{r-1,r-1}\vartheta^{(r-4)}_{r-2,r-2}\cdots\vartheta_{2,2}a_{1,1}
\end{array}$$

nnd so fort: $\vartheta^{(n-2)}_{n,n}x_n=\alpha\vartheta^{(n-3)}_{n-1,n-1}\vartheta^{(n-4)}_{n-2,n-2}\cdots\vartheta_{2,2}a_{1,1}.$

Wollte man aber $x_n$ direct berechnen, so erhielte man:

$$\triangle\cdot x_n=\triangle_1\cdot\alpha,$$

wo $\triangle=\begin{vmatrix}a_{1,1}a_{1,2}\cdots a_{1,n}\\ a_{2,1}a_{2,2}\cdots a_{2,n}\\ \vdots\quad\vdots\quad\quad\vdots\\ a_{n,1}a_{n,2}\cdots a_{n,n}\end{vmatrix}$ $\quad\triangle_1=\begin{vmatrix}a_{1,1}a_{1,2}\cdots\cdots a_{1,n-1}\\ a_{2,1}a_{2,2}\cdots\cdots a_{2,n-1}\\ \vdots\quad\vdots\quad\quad\vdots\\ a_{n-1,1}a_{n-2,2}\cdots a_{n-1,n-1}\end{vmatrix}$;

also durch Vergleich beider Ausdrücke ergibt sieb:

$$\frac{\triangle}{\triangle_1}=\frac{\vartheta^{(n-2)}_{n,n}}{\vartheta^{(n-3)}_{n-1,n-1}\vartheta^{(n-4)}_{n-2,n-2}\cdots\vartheta_{2,2}a_{1,1}}.$$

Da nun die eben gegebenen Determinanten mit denen, welcher wir nns früher bedienten, in der Form übereinstimmen, so ist auch

$$b_{n,n}=\sqrt{\frac{\vartheta^{(n-2)}_{n,n}}{a_{1,1}\vartheta_{2,2}\cdots\vartheta^{(n-3)}_{n-1,n-1}}}=\sqrt{\frac{\triangle}{\triangle_1}}.$$

Dieser Satz wird darum hier gegeben, weil bei Gelegenheit der Methode der kleinsten Quadrate anf ihn wird znrückgewiesen werden müssen.

**Quadrat (magisches oder Zauber-).** Seine Entstehungsweise ist die folgende. Man theilt ein Quadrat in eine Anzahl kleinerer Quadrate. In jedes der letzteren wird eine Zahl geschrieben, welche alle eine arithmetische Reihe bilden. Die Zahlen müssen dann so angeordnet werden, dass alle diejenigen, welche in einer vertikalen oder in einer horizontalen Reihe stehen, oder eine Diagonale bilden, dieselbe Summe geben.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 9 | 2 |
| 3 | 5 | 7 |
| 8 | 1 | 6 |

Das einfachste Zauberquadrat ist das hier befindliche. Es sind die 9 Zahlen 1 bis 9 so vertheilt: dass die senkrechten Spalten:- 4, 3, 8 — 9, 5, 1 — 2, 7, 6, eben so wie die horizontalen 4, 9, 2—3, 5, 7—8, 1, 6 und die Diagonalen 4, 5, 6—2, 5, 8 dieselbe Summe, nämlich 15, ergeben. Die Anzahl der Zahlen muss offenbar immer eine Quadratzahl, also gleich $n^2$ sein, und die constante Summe der einzelnen Reihen wird der $n$te Theil der Summe aller vorhandenen Zahlen sein. Sie wird also in unserm Beispiele

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{3} = 15$$

betragen, denn es sind $n$ Reihen (horizontale oder vertikale) vorhanden, die zusammen alle gegebenen Zahlen enthalten und da eine jede Reihe dieselbe Summe gibt, so muss letztere der $n$te Theil der Gesammtsumme sein.

Wir wenden uns zu einigen Regeln über die Anfertigung von Zauberquadraten, wobei wir annehmen wollen, dass die Glieder eines solchen die natürlichen Zahlen von 1 an seien. Auf diesen Fall lassen sich nämlich die andern zurückführen. Wir unterscheiden folgende Fälle:

Fall I. Die Seite des Quadrats enthalte eine ungrade Anzahl von Theilen, also $2n+1$.

Zauberquadrat mit 25 Feldern.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 11 | 18 | 25 | 2 | 9 |
| 10 | 12 | 19 | 21 | 3 |
| 4 | 6 | 13 | 20 | 22 |
| 23 | 5 | 7 | 14 | 16 |
| 17 | 24 | 1 | 8 | 15 |

**Auflösung.** Man schreibt die Zahl **1 in das** mittlere Feld der untersten **Horizontalreihe**, und fährt fort die **natürlichen Zahlen 2, 3** u. s. w. in folgender

Zauberquadrat mit 49 Feldern.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 22 | 31 | 40 | 49 | 2 | 11 | 20 |
| 21 | 23 | 32 | 41 | 43 | 3 | 12 |
| 13 | 15 | 24 | 33 | 42 | 44 | 4 |
| 5 | 14 | 16 | 25 | 34 | 36 | 45 |
| 46 | 6 | 8 | 17 | 26 | 35 | 37 |
| 38 | 47 | 7 | 9 | 18 | 27 | 29 |
| 30 | 39 | 48 | 1 | 10 | 19 | 28 |

Weise zu schreiben, jede Zahl kommt rechts von der vorhergehenden in der unter derselben befindlichen Reihe, z. B. 7 rechts unter 6 zu stehen. Würde in dieser Weise irgend eine Zahl, wie z. B. schon 2 unterhalb der untersten Horizontalreihe kommen, so substituirt man an deren Stelle die oberste Reihe derart, dass die Vertikalreihe der oben gegebenen Regel nach gewählt wird. Ebenso wenn eine Zahl rechts von der letzten Vertikalreihe stehen würde. Sie nimmt dann ihren Platz in der ersten Vertikalreihe links, ohne dass die Horizontalreihe, die sich aus unserer Regel ergibt, geändert wird. Z. B. in dem aus 25 Feldern bestehenden Quadrate müsste 2 in der unterhalb 1 befindlichen Horizontalreihe und im vierten Felde derselben stehen, da eine solche Horizontalreihe nun nicht vorhanden ist, so wird 2 ins vierte Feld der ersten Horizontalreihe kommen. 23 müsste in die rechts von 22 befindliche Vertikalreihe und im vierten Felde derselben stehen, da sich aber 22 in der letzten Vertikalreihe befindet, so kommt 23 ins vierte Feld der ersten Vertikalreihe. Ist ferner der Platz, auf welchen nach diesen Regeln eine Zahl gestellt werden muss, schon ausgefüllt, so ist die fragliche Zahl vertikal über die zuletzt geschriebene zu stellen. Z. B. in dem aus 25 Feldern bestehenden Quadrat ist das Feld rechts und unterhalb der 5 schon durch 1 ausgefüllt, 6 wird also über 5 geschrieben, der Platz der 7 ergibt sich nach der ersten Regel. Nach diesen Regeln sind die beiden hier hinzugefügten Quadrate construirt.

Beweis der Regel. Unser Quadrat besteht aus $(2n+1)^2$ Feldern, auf denen, wie leicht zu sehen ist, je $2n+1$ auf einanderfolgende Zahlen so nach unserer Regel gruppirt werden, dass unter denselben

nie 2 in derselben Vertikalreihe nnd aneh nicht in derselben Horizontalreibe zu stehen kommen. Dies ergibt sich darans, dass man ja immer zugleich nach unten nnd nach rechts fortschreitet. Wir beweisen znnächst, dass die Vertikalreiben gleiche Snmmen geben, für diesen Beweis können wir die derselben Vertikalreihe angebörigen Zahlen beliebig in dieser Reihe verrücken, wenn nur ihre Horizontalstellnng dadurch nicht berührt wird. Statt daher die Zahlen zugleich nach rechts, und nacb nnten vorschreiten zn lassen, ist es nns gestattet, nur nach reebts in derselhen Horizontalreihe vorzurücken. Die Ordnnng wird dann die folgende:

Allgemeine Formel.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $q$, | $q-(p-1)$, | $q-(p-2)$, | | $q-3$, | $q-2$, | $q-1$ |
| . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . |
| . | . | . | . | . | . | . |
| $2p+3$, | $2p+4$, | $2p+5$, | ..... | $3p$, | $2p+1$, | $2p+2$ |
| $p+2$, | $p+3$, | $p+4$, | ..... | $2p-1$, | $2p$, | $p+1$ |
| 1, | 2, | 3, | | $p-2$, | $p-1$, | $p$ |

Zahlenbeispiel für $2n+1=5$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 25, | 21, | 22, | 23, | 24 |
| 19, | 20, | 16, | 17, | 18 |
| 13, | 14, | 15, | 11, | 12 |
| 7, | 8, | 9, | 10, | 6 |
| 1, | 2, | 3, | 4. | 5, |

wo in der allgemeinen Formel $p$ für $2n+1$, $q$ für $(2n+1)^2$ gesetzt ist. Es ist bier nur die Ordnnng der Zahlen innerhalb der einzelnen Vertikalreihen geändert, wodurch die Summe dieser Vertikalreihen nicht berührt wird. Die ersten $p$ (im Zahlenbeispiel 5) Zahlen bilden die unterste Reihe, über der letzten dieser Zahlen $p$ oder 5 kommt der Regel gemäss $p+1$ oder 6, also ins letzte horizontale Feld, ins erste Feld $p+2$ oder 7 nnd so fort, über $2p$ odor 10 kommt $2p+1$ oder 11, in gleicher Weise wird fortgefahren. Die unterste Reihe enthält also die Zahlen von 1 bis $p$, die znnächst darüber stebende die von $p+1$ bis $2p$ u. s. w. Jede Zahl der ersten Reihe hat also die Form $\alpha$, jede Zahl der nächsten Reihe die Form $p+\alpha'$, der folgenden $2p+\alpha''$ u. s. w,, wo die Grössen $\alpha, \alpha', \alpha''$ alle Werthe von 1 bis $p$ annehmen. Die Anordnung aber ist, wie augenblicklich zn seben, der Art, dass in derselben Vertikalreihe nie dasselbe $\alpha$ 2mal vorkommen kann; es rührt dies daher, dass jede Reihe gegen die vorhergehende um eine Stelle verschoben ist. Da nnn jede dieser Verticalreihen aus $p$ Gliedern besteht, nnd in jedem Gliede ein anderes $\alpha$, also alle Zahlen von $\alpha=1$ bis $\alpha=7$ vorkommen, so ist die Summe einer jeden dieser Reihen:

$$p+2p+\ldots+(p-1)p+1+2+3+\ldots+p.$$

Die Vertikalreihen haben also in der That dieselbe Snmme.

Wir wollen jetzt die Summen der Horizontalreihen bestimmen, und können ans diesem Grunde die Zahlen beliebig ans einer Vertikalreihe in die andere setzen, wenn wir nur die Ordnung innerhalb der Horizontalreihen bewahren. Wir wählen folgende Anordnnng:

Allgemeine Formel.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 2, | $2p-1$ | .... | $q$ |
| 3, | $2p$ | .... | $q-p-1$ |
| . | . | .... | . |
| . | . | .... | . |
| . | . | .... | . |
| . | . | .... | . |
| $p-1$, | $p+1$ | .... | $q-3$ |
| $p$, | $p+2$ | .... | $q-2$ |
| 1, | $p+3$ | .... | $q-1$ |

Zahlenbeispiel.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2, | 9, | 11, | 18, | 25 |
| 3, | 10, | 12, | 19, | 21 |
| 4, | 6, | 13, | 20, | 22 |
| 5, | 7, | 14, | 16, | 23 |
| 1, | 8, | 15, | 17, | 24 |

Die 1 beginnt unten, 2 steht darüher in der ersten Horizontalreihe, wie es die Regel verlangt; wir haben nns eben nnr gestattet, diese Zahl nicht nach rechts zu verrücken, was ja nur die 2 in eine andre Vertikalreihe bringen würde, worauf wir jetzt keine Rücksicht nehmen. $p+1$ oder 6 kommt der Regel gemäss in die zweite Vertikalreihe über $p$ oder 5, $p+2$ oder 7 unmittelbar unter $p+1$ oder 6 nnd so fort; es ist klar, dass sich nunmehr die horizontalen Reihen ganz wie früher die vertikalen ans den Zahlen $\alpha$, $p+\alpha'$, $2p+\alpha''$ ... zusammensetzen; auch kann dasselbe $\alpha$ nicht 2mal in derselben Vertikalreihe vorkommen, denn wie man sieht, springen die Grössen 1, $p+1$, $2p+1$, oder im Zahlen-Beispiel 1, 6, 11 immer um 2 Felder gegen das vorhergehende in die Höhe. Es könnte hierbei nur dann eine Horizontalreihe 2 der Zahlen $sp+1$ nnd $kp+1$ enthalten, wenn $p$ durch 2 theilbar wäre; $p$ aber

ist nach unserer Annahme ungerade, es werden also alle Horizontalreihen einmal und nur einmal $\alpha=1, \alpha=2 \ldots \alpha=p$ enthalten. Die Summe einer solchen Horizontalreihe ist also gleich der bei den Vertikalreihen gefundenen.

Jetzt haben wir noch die Diagonalen zu untersuchen. Es ist leicht ersichtlich, dass die von links nach rechts hinabsteigende Diagonale die natürliche Reihe derjenigen $p$ auf einander folgenden Zahlen enthält, welche in der Mitte der $p^2$ ersten Zahlen liegen; diese sind offenbar: wenn $s+1$ die kleinste dieser Zahlen ist:

$$s+1,\ s+2,\ \ldots\ s+p,$$

also ihre Summe $ps+1+2+3\ \ldots\ +p$. Es ist aber leicht ersichtlich, dass $s+1$ gleich $\frac{p^2+1}{2}-\frac{p-1}{2}$ oder gleich $1+\frac{p(p-1)}{2}$ ist; es ergibt sich also: $s=\frac{p(p-1)}{2}=1+2+\ldots+p-1$ also:

$$ps=p+2p+\ldots+(p-1)p,$$

so dass für diese Diagonale die oben gegebene Summe der Vertikal- und Horizontalreihen ebenfalls stattfindet.

Betrachten wir jetzt die von Rechts nach Links hinabsteigende Diagonale. Da dieselbe sich in entgegengesetzter Richtung nach unten bewegt, als wir bei der Bildung des Quadrats jeden Cyclus von $p$ auf einander folgenden Zahlen fortschreiten liessen, so wird immer eine Zahl aus jeder der $p$ Gruppen einmal diese Diagonale treffen, und sie besteht also ebenfalls aus den Zahlen $\alpha$, $p+\alpha'$, $2p+\alpha''$ u. s. w. Jedoch ist nicht erwiesen und auch nicht allgemein richtig, dass jedes $\alpha$ hier nur einmal vorkommt. Indess sieht man leicht, wenn $p$ wieder gleich $2n+1$ gesetzt wird, dass jede Reihe von $2n+1$ Zahlen $n$ Felder tiefer als die vorhergehende die Diagonale trifft (also für $2n+1=5$ um 2 Felder, für $2n+1=7$ um 3 Felder tiefer), vorausgesetzt dass die unter dem tiefsten gedachten Felder durch die am höchsten liegenden der Diagonale ersetzt werden, wie dies ja unsre Regel verlangt.

Man sieht dies am leichtesten ein, wenn man bemerkt, dass die mittlere Zahlenreihe (bei $2n+1=5$ die Reihe 11, 42, 13, 44, 15) unsere Diagonale in der Mitte trifft, die folgende Gruppe aber im äussersten Felde unten, also in der That $n$ Felder tiefer; dies findet aber allgemein statt, da die Gruppen ja in gleicher Weise sich gegen einander verhalten.

Es ist aber auch anerkennen, dass wenn $s(2n+1)+\alpha$ die Zahl einer Gruppe ist, welche die Diagonale trifft, $(s+1)(2n+1)+\alpha-(n-1)$ die entsprechende der nächsten Gruppe, also dafür $\alpha'=\alpha-(n-1)$ sein muss. Dies erhellt ebenfalls augenblicklich für die mittlere Reihe, wo $\alpha=n+1$ ist, und für die folgende, wo $\alpha'$ die zweite Zahl der Gruppe, also $\alpha'=2=n+1-(n-1)$ ist; allgemein folgt dies aus dem gleichen Verhalten zweier auf einander folgenden Gruppen gegen einander. Für den Fall wo $\alpha-(n-1)$ negativ wird, ist $2n+1$ hinzu zu fügen; dies ergibt sich daraus, dass eine Zahl, die unterhalb des untersten Feldes zu stehen kommen würde, oben zu schreiben ist.

Es möge nun $\alpha$ die der mittleren Gruppe angehörende Zahl der Diagonale sein, so ist:

$$\alpha=\frac{(2n+1)^2+1}{2}=n(2n+1)+n+1$$

und also das zugehörige $\alpha$ wird gleich $n+1$, die Summe der $\alpha$ aber wird dann:

$$\alpha+\alpha'+\alpha''+\ \ldots\ =(n+1-2n)+(n+1-2n-2)+\ \ldots\ +(n+1-2)+(n+1)$$
$$+(n+1+2)+(n+1+4)+\ \ldots\ +(n+1+2n),$$

wo für jede dieser Zahlen, die negativ wird, $2n+1$ hinzuzufügen, für jede die grösser als $2n+1$ ist, diese Zahl abzuziehen ist, dies gleicht sich jedoch vollständig aus, und man erhält schliesslich:

$$\alpha+\alpha'+\alpha''+\ \ldots\ =(2n+1)(n+1)=1+2+3+\ \ldots\ +2n+1=1+2+3\ \ldots\ +p.$$

Diese Summe ist also genau dieselbe, als die Summe der $\alpha$ in den Horizontal- und Vertikalreihen, hiezu kommt noch ganz wie dort $p+2p+\ \ldots\ +(p-1)p$, wie oben gezeigt wurde, so dass in der That beide Diagonalen unter einander und mit den Horizontal- und Vertikalreihen dieselbe Summe geben.

Fall II. Die Seite des Quadrats enthalte eine grade Anzahl von Theilen und sei von der Form $4n$.

Aufl. Man theilt das Quadrat in kleinere Quadrate, deren jedes 4 Theile des grösseren enthält, so dass die mittlern 4 Felder ein Quadrat bilden; nach aussen hin werden dann Felder übrig bleiben, die nicht im Quadrate unterzubringen sind, wie dies das beigefügte Quadrat, dessen Seite 8 Theile hat, anzeigt. In diese Zeichnung trägt man nun von links oben beginnend die Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge der-

art ein, dass immer abwechselnd eins der durch die Zeichnung gegebenen Quadrate und Rechtecke ausgefüllt wird, und eins leer bleibt; die zu den leeren Feldern gehörigen Zahlen bleiben darum weg. Z. B.:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | | | 4 |
| | 6 | 7 | |
| | 10 | 11 | |
| 13 | | | 16 |

Die Zahlen 2, 3, 5, 8 u. s. w. würden hier in die übersprungenen Felder kommen und bleiben darum weg.

Nun fängt man die Zahlenreihe von neuem an, aber von unten rechts, derart, dass man nur die vorhin übergangenen Felder mit den zugehörigen Zahlen ausfüllt, also:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | 14 | 4 |
| 12 | 6 | 7 | 9 |
| 8 | 10 | 11 | 5 |
| 13 | 3 | 2 | 16 |

1, 4 u. s. w. bleiben fort, weil die entsprechenden Felder schon ausgefüllt sind.

So sind die beifolgenden Zauberquadrate gebildet:

64 Elemente.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 63 | 62 | 4 | 5 | 59 | 58 | 8 |
| 56 | 10 | 11 | 53 | 52 | 14 | 15 | 49 |
| 48 | 18 | 19 | 45 | 44 | 22 | 23 | 41 |
| 25 | 39 | 38 | 28 | 29 | 35 | 34 | 32 |
| 33 | 31 | 30 | 36 | 37 | 27 | 26 | 40 |
| 24 | 42 | 43 | 21 | 20 | 46 | 47 | 17 |
| 16 | 50 | 51 | 13 | 12 | 54 | 55 | 9 |
| 57 | 7 | 6 | 60 | 61 | 3 | 2 | 64 |

144 Elemente.

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 143 | 142 | 4 | 5 | 139 | 138 | 8 | 9 | 135 | 134 | 12 |
| 132 | 14 | 15 | 129 | 128 | 18 | 19 | 125 | 124 | 22 | 23 | 121 |
| 120 | 26 | 27 | 117 | 116 | 30 | 31 | 113 | 112 | 34 | 35 | 109 |
| 37 | 107 | 106 | 40 | 41 | 103 | 102 | 44 | 45 | 99 | 98 | 48 |
| 49 | 95 | 94 | 52 | 53 | 91 | 90 | 56 | 57 | 87 | 86 | 60 |
| 84 | 62 | 63 | 81 | 80 | 66 | 67 | 77 | 76 | 70 | 71 | 73 |
| 72 | 74 | 75 | 69 | 68 | 78 | 79 | 65 | 64 | 82 | 83 | 61 |
| 85 | 59 | 58 | 88 | 89 | 55 | 54 | 92 | 93 | 51 | 50 | 96 |
| 97 | 47 | 46 | 100 | 101 | 43 | 42 | 104 | 105 | 39 | 38 | 108 |
| 36 | 110 | 111 | 33 | 32 | 114 | 115 | 29 | 28 | 118 | 119 | 25 |
| 24 | 122 | 123 | 21 | 20 | 126 | 127 | 17 | 16 | 130 | 131 | 13 |
| 133 | 11 | 10 | 136 | 137 | 7 | 6 | 140 | 141 | 3 | 2 | 144 |

**Beweis der Regel.** Zunächst sieht man augenblicklich, dass beim Schreiben der ersten Hälfte der Zahlen bereits heide Diagonalen ausgefüllt sind, dass sich also in ihnen dieselben Zahlen befinden, welche darin enthalten sein würden, wenn man die natürliche Zahlenreihe in Form eines Quadrats schriebe. Ist $p$ die Anzahl der Theile der Seite, so werden diese Diagonalen von den Zahlen: 1, $p+2$, $2p+3$, $3p+4 \ldots p \,.\, p$ und von: $p, 2p-1, 3p-2, 4p-3 \ldots (p-1)p+1$ gebildet. Die Summe beider arithmetischen Reihen ist aber gleich: $(1+2+\ldots+p-1,\ p+1+2+3+\ \ldots\ p$, ganz wie schon bei Fall I. die Summe der einzelnen Reihen des Quadrats angegeben wurde.

Was nun die Horizontal- und Vertikalreihen anbetrifft, so wollen wir $2n = s$ und die $(2s)^2$ ersten Zahlen wirklich in der Form eines Quadrats geschrieben denken, also $2s$ in jede Horizontal- und Vertikalreihe. Je zwei Reihen (vertikale oder horizontale), welche von den Seiten des Quadrats gleichweit abstehen, mögen entsprechende Reihen heissen, also die $k$te und die $2s-k+1$te; wenn man dann die Hälfte der Zahlen einer (horizontalen oder vertikalen) Reihe mit denjenigen der entsprechenden Reihe vertauscht, welche so weit vom Ende entfernt sind, als die ersten vom Anfang, so haben alle Reihen gleiche Summen. Denn die $k$te Reihe ist:

$$2(k-1)\,s+1,\ 2(k-1)\,s+2\ \ldots\ 2(k-1)\,s+i\ \ldots\ 2(k-1)\,s+2s-1,\ 2ks,$$

die entsprechende, also $2s-k+1$te:

$$2(2s-k)\,s+1,\ 2(2s-k)\,s+2\ \ldots\ 2(2s-k)\,s+2s-i+1\ \ldots\ 2(2s-k)\,s+2s-1,\ 2(2s-k+1)\,s.$$

Die Summe zweier beliebigen Glieder beider Reihen, die gleich weit von den Enden stehn, ist: $4s^2+1$, also die Summe jeder der beiden Reihen $2s\,(4s^2+1)$.

Es ist aber leicht zu sehen, dass bei unserm Verfahren diese Vertauschung sowohl für die vertikalen als für die horizontalen Reihen vorgenommen ist, woraus die Richtigkeit des Verfahrens folgt.

**Fall III.** Die Theile der Seite des Quadrats seien grade und von der Form $4n+2$.

**Aufl.** Die Auflösung beruht auf denselben Prinzipien, als die des vorhergehenden Falles, ist jedoch complicirter.

I.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\underline{2}$ | $\overline{3}$ | $\overline{4}$ | $\underline{5}$ | 6 |
| 2 | $\overline{7}$ | 8 | $\underline{9}$ | $\underline{10}$ | 11 | $\overline{12}$ |
| 3 | $\underline{13}$ | $\overline{14}$ | 15 | 16 | $\overline{17}$ | $\underline{18}$ |
| 4 | $\underline{19}$ | $\overline{20}$ | 21 | 22 | $\overline{23}$ | $\underline{24}$ |
| 5 | $\overline{25}$ | 26 | $\underline{27}$ | $\underline{28}$ | 29 | $\overline{30}$ |
| 6 | 31 | $\underline{32}$ | $\overline{33}$ | $\overline{34}$ | $\underline{35}$ | 36 |

II

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $\underline{2}$ | $\overline{3}$ | 4 | 5 | **6** | 7 | $\overline{8}$ | $\underline{9}$ | 10 |
| 2 | 11 | 12 | $\underline{13}$ | $\overline{14}$ | 15 | 16 | $\overline{17}$ | $\underline{18}$ | 19 | **20** |
| 3 | 21 | **22** | 23 | $\underline{24}$ | $\overline{25}$ | $\overline{26}$ | $\underline{27}$ | 28 | **29** | 30 |
| 4 | $\overline{31}$ | 32 | **33** | 34 | $\underline{35}$ | $\underline{36}$ | 37 | **38** | $\underline{39}$ | $\overline{40}$ |
| 5 | 41 | $\overline{42}$ | 43 | **44** | 45 | 46 | **47** | 48 | $\underline{49}$ | $\underline{50}$ |
| 6 | $\underline{51}$ | $\overline{52}$ | 53 | **54** | 55 | 56 | **57** | 58 | 59 | $\underline{60}$ |
| 7 | $\overline{61}$ | 62 | **63** | 64 | $\underline{65}$ | $\underline{66}$ | 67 | **68** | 69 | $\overline{70}$ |
| 8 | 71 | **72** | 73 | $\underline{74}$ | $\overline{75}$ | $\overline{76}$ | $\underline{77}$ | 78 | **79** | 80 |
| 9 | 81 | 82 | $\underline{83}$ | $\overline{84}$ | 85 | 86 | $\overline{87}$ | $\underline{88}$ | 89 | **90** |
| 10 | 91 | $\underline{92}$ | $\overline{93}$ | 94 | **95** | **96** | 97 | $\overline{98}$ | $\underline{99}$ | 100 |

Man ordnet zunächst alle Zahlen von 1 bis $(4n+2)^2$ in eine quadratische Form, derart, dass die 1 das erste Feld links oben inne hat, wie dies hier für die Werthe $n=1$ und $n=2$ geschehen ist. Die links geschriebene vertikale Zifferreihe zeigt die Ordnungszahl der horizontalen Spalten an, während die Ordnung der vertikalen Spalten durch die erste Zifferreihe bestimmt ist. Durch die Vereinigung zweier dieser Ordnungszahlen ist dann jedes Feld und die darin befindliche Zahl bestimmt, so nimmt z. B. in der ersten Figur die Zahl 28 das Feld (4, 5) ein, d. h. sie ist die vierte Zahl in der fünften Vertikalreihe.

Nun bilde man folgendes Schema, das aus $2n+1$ Zeilen und $2n+1$ Verticalcolumnen besteht.

In die erste Columne kommen alle Zahlen von 1 bis $2n+1$ und neben ihnen ihre Ergänzungen zu $4n+3$. Die erste horizontale Reihe wird gebildet, indem man neben 1 noch $n+1$ der übrigen Glieder als Anfangsglieder der Columnen schreibt, diese Columnen werden dann so ausgefüllt, dass unter dem Anfangsglied die folgenden in der Ordnung, wie sie in der ersten Columne stehen, sich befinden, indem man das erste Glied als auf das letzte folgend betrachtet.

Die in der ersten Columne befindlichen Zahlen werden mit den horizontalen, die der übrigen mit den vertikalen Ordnungszahlen der Columnen in I. und II. identificirt. Die Glieder unserer Quadrate I. und II., welche dann durch die Verbindung einer der Zahlen der ersten Columnen aus unserm Schema mit einer der beiden in der letzten Columne befindlichen Zahlen in derselben Zeile bestimmt sind, haben wir durch einen Strich unter der Zahl bezeichnet, diejenigen, welche durch Verbindung einer der Zahlen der ersten Columne im Schema mit einer daneben stehenden der vorletzten Columne bestimmt sind, wurden mit einem Strich oberhalb versehen. Diejenigen Zahlen der Quadrate, welche der Verbindung einer Zahl der ersten Columne mit einer danebenstehenden irgend einer andern im Schema (mit Ausnahme der letzten und vorletzten Columne) entsprechen, sind mit hervorstechender Schrift gedruckt. Dies wird sich durch Vergleich der Quadrate I. und II. mit den hier beigefügten beiden Schema ergeben.

Hier ist z. B. in Fig. II. 51 mit dem Strich unterhalb versehen, weil sie der Combination (1,6) aus der letzten Columne als Schema entspricht, 76 hat den Strich

Schema zu Fig. I.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 6 | 2 | 5 | 3 | 4 |
| 2 | 5 | 3 | 4 | 1 | 6 |
| 3 | 4 | 1 | 6 | 2 | 5 |

Schema zu Fig. II.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 2 | 9 | 4 | 7 | 5 | 6 |
| 2 | 9 | 3 | 8 | 5 | 6 | 1 | 10 |
| 3 | 8 | 4 | 7 | 1 | 10 | 2 | 9 |
| 4 | 7 | 5 | 6 | 2 | 9 | 3 | 8 |
| 5 | 6 | 1 | 10 | 3 | 8 | 4 | 7 |

oberhalb, weil die Combination (6,8) aus der ersten und vorletzten Spalte entnommen ist, 68 ist fett gedruckt, weil die Combination (8,7) von der ersten und zweiten Spalte des Schema herrührt. Das Quadrat enthält nun 4 Arten Zahlen, mit denen man folgendermaassen verfährt. 1) Die weder gestrichenen noch fett gedruckten behalten ihren Platz. 2) Von den oben gestrichenen vertauscht man je vier zusammengehörige, d. h. welche von den einander gegenüber liegenden Seiten des Quadrats gleich weit entfernt, wenn sie

a · · · b
die Stellung : : haben, derart, dass
c · · · d

d · · · c
ihre Stellung : : wird. 3) Von den
a · · · b

unten gestrichenen werden immer 4 zusammengehörige so vertauscht, dass sie

a · · · b
aus der Stellung : : in die Stellung
c · · · d

d · · · a
: : übergeben (statt dessen kann
b · · · c

c · · · d
in 2. auch Stellung : : in 3.
a · · · b

b · · · c
: : genommen werden). So z. B.
a · · · d

verwechselten in Fig. 2 die oben gestri-

3 · · 8

chenen Zahlen : : ibre Stelle, so

93 · · 98

98 · · 93

dass daraus : : wird, dagegen ge-

3 · · 8

35 · · 36

hen die unten gestriehenen Zahlen : :

65 · · 66

66 · · 35

in : : üher, wo die zuerst be-

36 · · 65

zeichnete Stellung gewählt ist. 4) Die fett gedruckten Zahlen aber werden wie in Fall II. ersetzt. man fängt nämlich die natürliche Zahlenreihe abermals an, aher von rechts nnten heginnend, und füllt die den fett gedruckten Zahlen entsprechenden Felder dnrch die nunmehr auf sie fallenden Zahlen ans. Anf diese Weise nehmen die Figuren I. nud II. folgende Gestalt an.

Fig. I.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 35 | 34 | 3 | 32 | 6 |
| 30 | 8 | 28 | 27 | 11 | 7 |
| 24 | 23 | 15 | 16 | 14 | 19 |
| 13 | 17 | 21 | 22 | 20 | 18 |
| 12 | 26 | 9 | 10 | 29 | 25 |
| 31 | 2 | 4 | 33 | 5 | 36 |

Fig. II.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 99 | 3 | 97 | 96 | 5 | 94 | 8 | 92 | 10 |
| 90 | 12 | 88 | 14 | 86 | 85 | 17 | 83 | 19 | 11 |
| 80 | 79 | 23 | 77 | 25 | 26 | 74 | 28 | 22 | 71 |
| 31 | 69 | 68 | 34 | 66 | 65 | 37 | 33 | 62 | 40 |
| 60 | 42 | 58 | 57 | 45 | 46 | 44 | 53 | 49 | 51 |
| 50 | 52 | 43 | 47 | 55 | 56 | 54 | 48 | 59 | 41 |
| 61 | 32 | 38 | 64 | 36 | 35 | 67 | 63 | 39 | 70 |
| 21 | 29 | 73 | 27 | 75 | 76 | 24 | 78 | 72 | 30 |
| 20 | 82 | 18 | 84 | 15 | 16 | 87 | 13 | 89 | 81 |
| 91 | 9 | 93 | 4 | 6 | 95 | 7 | 98 | 2 | 100 |

Der Beweis der Richtigkeit beruht auf denselben Principien, wie der zum Fall II. Anf die angegehene Weise werden nämlich in jeder Horizontal- nnd Vertikalreihe die Hälfte der Zahlen dnrch die Zahlen der entsprechenden Reihe ersetzt; der Unterschied vom vorigen Falle ist indess der, dass mit den zurückbleibenden Zahlen Verwechselnngen innerhalb ihrer Reihen geschehen, was natürlich die Summen nicht herührt. Uebrigens behalten die Diagonalzahlen die Stelle, welche sie in der natürlichen Zahlenreihe einnehmen, und somit gilt für sie das oben in Fall II. Gesagte ebenfalls.

Ausser diesen Constructionen gibt es noch viele undere, und sind dieselben anch mancberlei Bedingungen zu unterwerfen. So kann man z. B. einem Zauberquadrate eine magische Einfassnng geben, d. h durch Einfassung ein neues grösseres Qnadrat hilden, welches ebenfalls die Eigenschaft eines magischen hat.

Wir haben immer in die Quadrate die mit 1 beginnende natürliche Zahlenreibe gesetzt. Es ist jedocb ohne Weiteres ersichtlich, dass, wenn man statt dessen eine beliebige arithmetische Reiho:

$a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b \cdots$

nimmt, es eben nur auf die Zahlenfactoren von $b$ 1, 2, 3, 4 . . . ankommt und mit diesen, so wie hier gezeigt wurde, verfahren werden kann.

Was die Geschichte der magischen Quadrate anbetrifft, so sind sie wahrscheinlich indischen Ursprungs, und haben wohl zunächst als Talisman oder in irgend anderer Weise dem Aberglauben gedient. In Europa hat, soviel man weiss, zuerst der Grieche Emanuel Moschopulos, der ums Jahr 1400 lebte, über magische Quadrate geschrieben, wahrscheinlich auch mit Rücksicht auf ihre angenommenen übernatürlichen Eigenschaften, dann Agrippa von Nettesheim (gestorben 1535), welcher die Quadrate, deren Seiten 3 bis 9 Zahlen enthalten, aufstellte. Er ist deshalb der Zauberei angeklagt worden. Bachet de Meziriac, sein Schüler, fand eine Methode für alle Quadrate, deren Wurzel ungrade ist. Frenicle (im 17. Jahrhundert) zeigte die Art, wie und wie oft man Quadrate versetzen könne, auch lehrte er den Quadraten magische Einfassungen zu geben.

Poignard, Canonicus in Brüssel, schrieb 1703 über magische Quadrate; er zeigte, wie man z. B. ein Quadrat von 36 Feldern in der Weise der magischen mit nur den 6 ersten Zahlen ausfüllen könne, derart, dass eine Zahl nie zweimal in derselben horizontalen oder vertikalen Reihe oder in einer Diagonale vorkomme; auch ersetzte er die arithmetische Reihe, welche die Zahlen bilden sollen, durch eine geometrische. La Hire, welcher 1705 über diesen Gegenstand in den *mémoires de l'académie* geschrieben hat, gibt ebenfalls allgemeine Methoden für die ungraden Zahlen, und in denselben Memoiren hat sich 1710 Sauveur hiermit beschäftigt. Von Deutschen ist Adam Riese (1550) zu nennen. In neuerer Zeit hat Mollweide (*De quadratis magicis commentatio. Lipsiae* 1816) diesem Gegenstande eine Schrift gewidmet.

Wissenschaftliche Anwendung haben die magischen Quadrate selbstverständlich nicht gefunden.

**Quadrate (Methode der kleinsten).**
1) Der Zweck dieser von Gauss herrührenden Theorie ist es, in einer Function, welche gewisse Constanten enthält, welche durch Beobachtung specieller Fälle zu bestimmen sind, diese Constanten auch dann zu bestimmen, wenn die Anzahl der Beobachtungen die Anzahl der zur Bestimmung erforderlichen Gleichungen übersteigt. Da nämlich in der angewandten Mathematik, Astronomie Physik und in den verschiedenen praktischen Rechnungen dergleichen Beobachtungen durch Wägen, Messen u. s. w. erfolgen, jede dieser Beobachtungen aber einen von verschiedenen Ursachen herrührenden Fehler enthält, so wird auch dem Resultat ein mehr oder minder grosser Fehler ankleben. Bestimmte man also die Constanten durch nur soviel Beobachtungen, als um die erforderlichen Gleichungen zu haben nöthig ist, liesse dann gewisse Beobachtungen weg und ersetzte sie durch eben so viele neue und bestimmte aus diesen die Constanten, so würden in der Regel von den Ersten mehr oder minder abweichende Resultate sich ergeben, und man wüsste nicht, welches Resultat dem andern vorzuziehen wäre.

Es empfiehlt sich also, gleich alle gemachten Beobachtungen, so viel auch deren seien, zu benutzen, und aus diesen die Constanten so zu bestimmen, dass der Fehler, der sich daraus ergibt, gemäss den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit möglichst klein sei. Der Zweck der Methode der kleinsten Quadrate ist es, dies zu erreichen, und sie ist also als eine Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung auf die angewandte Mathematik zu betrachten.

Sei $F(a, b, c \ldots u, v, w \ldots)$ eine beliebige Function der Variablen $u, v, w$ und $a, b, c$ stellen Constanten vor, deren Zahlenwerthe durch Beobachtungen zu bestimmen sind. Man braucht dazu die Beobachtung so vieler specieller Fälle als Grössen $a, b, c \ldots$ vorhanden sind. Seien in einem dieser Fälle, $u_1, v_1, w_1 \ldots$ die Werthe der Variablen $u, v, w$, $C$ der Werth von $F(a, b, c \ldots u_1, v_1, w_1 \ldots)$, wie er sich durch die Beobachtung ergibt, so wäre, wenn die letztere vollkommen genau wäre,

$$F = C;$$

da aber dies nicht der Fall ist, so setzen wir

$$F - C = x$$

und nennen $x$ den Beobachtungsfehler. Er ist desto kleiner, je besser die gebrauchten Instrumente und je gewandter der Beobachter ist.

Wir haben jetzt gemäss den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bestimmen, wie gross die Wahrscheinlichkeit sei, dass ein gegebener Fehler $x$ wirklich vorkomme.

Hierbei macht Gauss folgende Schlüsse.

Der einfachste Fall unserer Aufgabe wäre der, den wahrscheinlichen Werth einer Grösse ($u$) durch verschiedene Be-

obachtungen zu bestimmen, die nicht völlig gleiches Resultat geben. Seien die Beobachtungswerthe:

$$u = C_1,\ u = C_2,\ \ldots\ u = C_n$$

so ist es ein allgemein angenommener Grundsatz, dass die arithmetische Mitte:

$$\frac{C_1 + C_2 + \ldots + C_n}{n}$$

der wahrscheinlichste Werth von $u$ sei. Von diesem Grundsatze ausgehend, gelingt es Gauss, die Wahrscheinlichkeit eines gegebenen Fehlers im allgemeinen Falle zu ermitteln.

Es sind

$$u - C_1 = x_1,\ u - C_2 = x_2\ \ldots\ u - C_n = x_n$$

die Beobachtungsfehler bei der Bestimmung von $u$, der wahrscheinlichste Werth von $u$ aber ist:

$$f = \frac{C_1 + C_2 + \ldots + C_n}{n},$$

also auch die wahrscheinlichsten Werthe der Fehler:

$\varphi(x)$ soll der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens eines gegebenen Fehlers $x$ sein, also die zu bestimmende Grösse. Nach einem Satze der Wahrscheinlichkeitsrechnung (siehe Artikel Wahrscheinlichkeitsrechnung) wird nun die Wahrscheinlichkeit des gleichzeitigen Vorkommens mehrerer von einander unabhängiger Ereignisse durch das Produkt der Wahrscheinlichkeiten des Vorkommens jedes einzelnen gegeben, und es ist somit

$$W = \varphi(x_1)\ \varphi(x_2) \ldots \varphi(x_n)$$

der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit, dass die Fehler $x_1, x_2 \ldots x_n$ gleichzeitig vorkommen. Setzt man also hier in $W$ für $x_1, x_2 \ldots$ ihre wahrscheinlichsten Werthe, so wird $W$ ein Maximum, d. h.:

$$W = \varphi(f - C_1)\ \varphi(f - C_2) \ldots \varphi(f - C_n) = \text{Maximum}$$

und da für diesen Fall

$$\frac{dW}{df} = 0$$

$x_1 = f - C_1,\ x_2 = f - C_2, \ldots\ x_n = f - C_n$ wird, so ist:

$$\frac{1}{\varphi(f - C_1)} \frac{d\varphi(f - C_1)}{df} + \frac{1}{\varphi(f - C_2)} \frac{d\varphi(f - C_2)}{df} + \ldots + \frac{1}{\varphi(f - C_n)} \frac{d\varphi(f - C_n)}{df} = 0$$

Da diese Gleichung richtig sein muss, welches auch die beobachteten Werthe von $u$ seien, so setzen wir $n - 1$ derselben unter einander gleich, also:

$$C_2 = C_3 = C_4 \ldots = C_n = C$$

und es wird:

$$\frac{1}{\varphi(f - C_1)} \frac{d\varphi(f - C_1)}{df} = -\frac{(n-1)}{\varphi(f - C)} \frac{d\varphi(f - C)}{df};$$

es war aber:

$$f = \frac{1}{n}(C_1 + C_2 + \ldots + C_n) = \frac{1}{n}(C_1 + (n-1)C)$$

Wir setzen diese Werthe in die vorige Gleichung, indem wir noch

$$\frac{1}{\varphi(\lambda)} \frac{d\varphi(\lambda)}{d\lambda} = \psi(\lambda)$$

setzen, also:

$$\psi[(n-1)(C - C_1)] = -(n-1)\psi[-(C - C_1)]$$

oder, wenn man

$$C_1 - C = B$$

setzt, und durch $(1-n)B$ dividirt:

$$\text{I)}\quad \frac{\psi[(1-n)B]}{(1-n)B} = \frac{\psi(B)}{B}.$$

$n$ ist zunächst eine beliebige ganze Zahl. Es lässt sich aber leicht zeigen, dass sie eine ganz willkürliche reelle Zahl sein kann.

Denn setzt man zunächst $n = 2$, so kommt:

$$\psi(B) = -\psi(-B),$$

also

$$\frac{\psi(-B)}{-B} = \frac{\psi B}{B};$$

da aber

$$\frac{\psi(-B)}{-B} = \frac{\psi(n-1)B}{(n-1)B}$$

ist, so folgt, wenn man $n - 1 = s$ setzt, aus dieser Gleichung in Verbindung mit Gleichung I:

$$\text{II)}\quad \frac{\psi(B)}{B} = \frac{\psi(sB)}{sB} = \frac{\psi(-sB)}{-sB}$$

d. h. $s$ kann auch eine negative ganze Zahl sein. — Es sei nun $B = \frac{\gamma}{t}$, so ist, wenn man in II) $B = \frac{\gamma}{t}$, $s = t$ setzt:

$$\frac{\psi\left(\frac{\gamma}{t}\right)}{\frac{\gamma}{t}} = \frac{\psi(\gamma)}{\gamma}$$

und ausserdem:

$$\frac{\psi\left(\frac{s\gamma}{t}\right)}{\frac{s\gamma}{t}} = \frac{\psi\left(\frac{\gamma}{t}\right)}{\frac{\gamma}{t}}$$

woraus sich ergiebt, wenn man den beliebigen positiven oder negativen Bruch $\frac{s}{t} = q$ setzt:

$$\frac{\psi(q\gamma)}{q\gamma} = \frac{\psi(\gamma)}{\gamma}$$

Es kann aber auch $q$ eine Irrationalzahl sein, da solche immer als Grenzwerthe eines Bruches zu denken ist, dessen Zähler und Nenner ins Unendliche wachsen. Wenn man also irgend einen angenäherten Werth von dem irrationalen $q$ in die letzte Gleichung setzt, so bleibt sie richtig, und da diese Annäherung kleiner als jede gegebene Grösse sein kann, so ist damit die Allgemeinheit der Gleichung

$$\frac{\psi(\beta)}{\beta} = \frac{\psi(\gamma)}{\gamma} = \text{const.}$$

erwiesen, wo $q\gamma = \beta$ gesetzt, und $\beta$ ganz beliebig ist. Mit Rücksicht auf den Werth von $\psi(\gamma)$ kommt nun:

$$\frac{d\varphi(\gamma)}{\gamma\varphi(\gamma)d\gamma} = \text{const.}$$

und durch Integration:

$$\lg \varphi(\gamma) = -\alpha^2\gamma^2 + C$$

wo const. $= 2\alpha$ gesetzt wurde und $C$ eine neue Constante ist, also:

$$\varphi(\gamma) = Ce^{-\alpha^2\gamma^2}$$

ist der Ausdruck für das Vorkommen des Beobachtungsfehlers $\gamma$.

So strenge diese Schlüsse sind, die sich aus der Annahme ergeben, dass die arithmetische Mitte der Beobachtungen der wahrscheinlichste Werth einer zu bestimmenden Constanten ist, so ist doch diese Annahme eigentlich noch zu rechtfertigen.

Die Formel

$$f = \frac{C_1 + C_2 + \ldots C_n}{n}$$

ergiebt sich aus der Gleichung:

$$f - C_1 + f - C_2 + \ldots + f - C_n = 0;$$

es ist also unser Satz gleichbedeutend mit dem, dass der wahrscheinlichste Werth der Grösse der wäre, welcher sich ergiebt, wenn man die Summe aller Beobachtungsfehler gleich Null setzt. Es möchte dieser Satz vielleicht unmittelbar einleuchten, für den Fall, wo $n = 2$ ist, denn die Formel

$$f - C_1 + f - C_2 = 0$$

oder

$$f - C_1 = -(f - C_2)$$

spricht eben nur aus, dass beide Beobachtungsfehler (abgesehen vom Zeichen) gleich sind. Ist nun, wie man doch annehmen kann, irgend ein Beobachtungsfehler der wahrscheinlichste, so ist auch am wahrscheinlichsten, dass man einen gleichen bei jeder der beiden Beobachtungen gemacht habe, und da nicht anzunehmen ist, dass beide Fehler dasselbe Zeichen haben, da eben so gut nach einer als nach der andern Seite eine Abweichung möglich ist, so sind sie mit entgegengesetzten Zeichen zu nehmen. Indess selbst diese Betrachtung findet keine Anwendung mehr, wenn $n$ grösser als 2 ist. Es empfiehlt sich also aus diesem Grunde, den Werth für die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens eines gegebenen Fehlers noch auf eine andere Art abzuleiten. Wir thun dies nach Hagen (Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung, 1837). Die Schlüsse, welche derselbe macht, sind folgende:

Jede Beobachtung besteht aus verschiedenen Manipulationen, und man kann im Allgemeinen die Anzahl derselben als sehr gross betrachten, um so mehr, da jede Manipulation wieder in andere, und zwar so viel man deren will, zerlegt werden kann. Aus jeder dieser Manipulationen ergiebt sich ein Fehler, der im Allgemeinen als sehr klein angenommen werden muss; aus der Summe dieser vielen kleinen Fehler setzt sich dann der ganze Beobachtungsfehler $x$ zusammen. Wir nehmen an, diese unendlich vielen kleinen Elementarfehler seien alle unter sich gleich; es rechtfertigt sich diese Annahme dadurch, dass jede Manipulation doch wieder als aus andern zusammengesetzt betrachtet werden kann. Sind also die sich aus gewissen Manipulationen ergebenden Fehler ungleich, so kann man diejenigen, welche grössere Fehler geben, sich derart getheilt denken, dass schliesslich die Fehler gleich werden. Diese Gleichheit gilt aber nur für die absoluten Werthe der Fehler; was ihr Zeichen anbetrifft, so nehmen wir an, dass jeder derselben sowohl in positiver als in negativer Richtung einwirken könne, in der That ist eins so gut möglich als das andere. — Bezeichnen wir nun einen dieser Elementarfehler durch $g$ und sei $2m$ die Anzahl aller Elementarfehler; der wirk-

liche Beobachtungsfehler summirt sich dann aus den positiven und negativen $q$. Ist nun der Fehler $2mq$, so kann dies nur eintreten, wenn alle Elementarfehler positiv sind; ist er $(2m-2)q$, so ist dies nur möglich, wenn $2m-1$ Manipulationen positive Elementarfehler und eine einen solchen negativ ergeben, dies aber kann nach den Gesetzen der Combinationsrechnung auf $2m$ verschiedene Arten geschehen. Ist der Fehler $(2m-4)q$, so müssen $2m-2$ Manipulationen positive und 2 negative Elementarfehler ergeben; dabei sind $\frac{2m(2m-1)}{2}$ Fälle möglich und so fort. Man erhält auf diese Weise folgende Tafel:

| Beobachtungsfehler. | Anzahl der Fälle. |
|---|---|
| $2mq$ | 1 |
| $2(m-1)q$ | $2m$ |
| $2(m-2)q$ | $\frac{2m(2m-1)}{1.\ 2}$ |
| $2(m-3)q$ | $\frac{2m(2m-1)(2m-2)}{1.\ 2.\ 3}$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| $2(m-m)q=0$ | $\frac{2m(2m-1)\ \ldots\ (m+2)(m+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ m}$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| $-2(m-1)q$ | $2m$ |
| $-2mq$ | 1 |

Von dem mittleren Gliede $2(m-m)q$ oder 0 an sind die Binomialcoefficienten, welche die Anzahl der Fälle angeben, alle symmetrisch, und die entsprechenden Beobachtungsfehler unterscheiden sich nur durch die Vorzeichen. Wir können also der Tafel auch folgende Gestalt geben, indem wir $2q=r$ setzen und von der Mitte beginnen:

| Beobachtungsfehler. | Anzahl der Fälle. |
|---|---|
| 0 | $\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ \ldots\ (m+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ m}$ |
| $\pm r$ | $\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ \ldots\ (m+2)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ (m-1)}$ |
| $\pm 2r$ | $\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ \ldots\ (m+3)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ (m-2)}$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| $\pm sr$ | $\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ \ldots\ (m+s+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ (m-s)}$ |
| $\pm(s+1)r$ | $\frac{2m(2m-1)\ \ldots\ldots\ (m+s+2)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ (m-s-1)}$ |
| . | . |
| . | . |
| . | . |
| $\pm mr$ | 1 |

Sei nun $sr=x$, $(s+1)r=x+\triangle x$, so ist $\triangle x$ der Zuwachs der Beobachtungsfehler. Zieht man die Zahl der Fälle, in welchen der Fehler $sr$ von derjenigen Zahl ab, welche angiebt, in welcher er $(s+1)r$ ist, so erhält man den Zuwachs oder die Abnahme, welche diese Zahl beim Uebergange von $x$ in $x+\triangle x$ erleidet; ist also $y$ die Anzahl der Fälle, in denen der Fehler $x$ vorkommen kann, so wird diese Zahl mit $\triangle y$ zu bezeichnen sein, und man hat:

$$\triangle y = \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ \ldots\ (m+s+2)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ (m-s-1)} - \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ \ldots\ (m+s+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ (m-s)}$$
$$= \frac{2m(2m-1)(2m-2)\ \ldots\ (m+s+1)}{1.\ 2.\ 3\ \ldots\ldots\ (m-s)}\left(\frac{m-s}{m+s+1}-1\right) = -y\frac{2s+1}{m+s+1}$$

oder da $s = \frac{x}{r} = \frac{x}{\triangle x}$ war:

$$\triangle y = -y\frac{2x+\triangle x}{(m+1)\triangle x + x}.$$

Hierbei ist Folgendes zu bemerken. Zunächst seien $x_1$ $x_2$ zwei beliebige Werthe von $x$ und $y_1$ $y_2$ die zugehörigen von $y$, so geben letztere offenbar das Verhältniss der Wahrscheinlichkeiten an, in welchem diese Fehler vorkommen werden, denn da die Wahrscheinlichkeit (siehe Artikel Wahrscheinlichkeit) der Anzahl der günstigen Fälle durch die Anzahl aller Fälle dividirt gleich ist, so ist das Verhältniss zweier Wahrscheinlichkeiten gleich dem Verhältnisse der Anzahlen $y_1$ und $y_2$ der entsprechenden Fälle. Man kann also die Grösse $y$ als die relative Wahrscheinlichkeit des Fehlers $x$ in Bezug auf andere mögliche Fehler betrachten.

Ferner nehmen wir jetzt an, dass die sehr kleine Grösse $r$ oder $\triangle x$ verschwindend klein, also gleich $dx$ sei, so ist auch $\triangle y = dy$. Die Anzahl der Elementarfehler $m$ ist dann als unendlich gross zu betrachten. Der grösste mögliche Fehler $mr$ oder $m\triangle x$, welcher entsteht, wenn alle Manipulationen nach derselben Richtung gehende Elementarfehler ergeben, ist im Allgemeinen als unendlich zu betrachten, die letztgefundene Formel giebt also, wenn man $\triangle x$ gegen $2x$, $x$ und $\triangle x$ gegen das unendliche $m\triangle x$ vernachlässigt, und übrigens durch $dx$ dividirt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{mdx^2}$$

$mdx^2$ wird wieder endlich sein, da das unendliche $mdx$ mit dem unendlich kleinen $dx$ multiplicirt ist; sei demnach $mdx = \frac{1}{\alpha^2}$, so ergiebt sich:

$$\frac{dy}{dx} = -2\alpha^2 xy$$

oder durch Integration:

$$\lg y = \lg C - \alpha^2 x^2,$$

d. h.

$$y = Ce^{-\alpha^2 x^2}$$

Dies ist der oben gefundene Werth. — Um die Constante $C$ zu bestimmen, sei für $x = 0$, $y = y_0$, so kommt $C = y_0$:

$$y = y_0 e^{-\alpha^2 x^2}$$

Da die Wahrscheinlichkeit nur eine relative ist, so ist der Werth von $y_0$ durchaus ohne Bedeutung. Suchen wir aber die absolute Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Fehlers $x$, so ist offenbar die Anzahl $y$ der Fälle, in denen der Fehler $x$ eintritt, durch die Zahl aller möglichen Fälle zu dividiren, welche wir mit $\Sigma y$ bezeichnen, denn dies ist die Definition des Begriffs der Wahrscheinlichkeit. Sei dieselbe gleich $\omega$, so ist also:

$$\omega = \frac{y}{\Sigma y},$$

aber da unendlich viele Fehler eintreten können:

$$\omega = \frac{y\triangle x}{\Sigma y\triangle x} = \frac{ydx}{\int_{-\infty}^{+\infty} ydx} = \frac{e^{-\alpha^2 x^2}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2}dx}$$

denn die Grösse $x$ kann ja alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen. Aus der Theorie der bestimmten Integrale hat man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2 x^2}dx = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{-\infty} e^{-s^2}ds = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha},$$

folglich

$$\omega = \frac{\alpha e^{-\alpha^2 x^2}dx}{\sqrt{\pi}}$$

Es darf nicht befremden, dass die Grösse $\omega$ mit $dx$ multiplicirt ist; denn da unendlich viele Fehler möglich sind, ist die absolute Wahrscheinlichkeit eines einzelnen unendlich klein.

Sucht man aber die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler zwischen zwei gegebenen Gränzen $x_0$ und $x_1$ liege, so ist die Summe aller zugehörigen $\omega$ der Ausdruck für diese Wahrscheinlichkeit,

die wir mit $w$ bezeichnen, d. h. da die Summe die Integralform annimmt:

$$w = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{x_0}^{x_1} e^{-\alpha^2 x^2} dx.$$

Namentlich ist

$$w = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{-x_1}^{+x_1} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_1} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha x_1} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

der Ausdruck dafür, dass der Fehler absolut genommen nicht grösser als $x_1$ sei.

Das Integral

$$\int_0^{x_1} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha x_1} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

ist in endlicher Form nicht darstellbar, jedoch durch mechanische Quadratur leicht annäherungsweise zu ermitteln. Man hat dafür Tafeln berechnet, aus denen sich ergiebt, dass es sich mit wachsendem $\alpha x_1$ bald dem Werthe nähert, den es für $\alpha x_1 = \infty$ annimmt.

Die Grösse $\alpha$ heisst auch Maass der Präzision, je grösser nämlich $\alpha$ ist, je kleiner wird $w$ oder die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler in gewissen gegebenen Grenzen eintrete, mit andern Worten, die Resultate werden mit wachsendem $\alpha$ verlässlicher.

Derjenige absolut genommene Werth von $x$, für den die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Fehler nicht überschritten werde, gerade $\frac{1}{2}$, d. h. für den es gerade eben so wahrscheinlich ist, dass die Beobachtungsresultate einen kleineren, als dass sie einen grössern Fehler ergeben, heisst wahrscheinlicher Fehler; sei er gleich $\varrho$, so ist:

$$\frac{1}{2} = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho} e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha\varrho} e^{-\lambda^2} d\lambda.$$

Hat man eine Tafel, die zu jedem $\alpha x_1$ das zugehörige $w$ giebt, so kann man umgekehrt, indem man $w = \frac{1}{2}$ setzt, das zugehörige $\alpha x_1 = \alpha\varrho$ finden, und in der That ergiebt sich:

$$\alpha\varrho = 0{,}4769360,$$

mithin ist

$$\varrho = \frac{0{,}4769360}{\alpha}$$

der wahrscheinliche Fehler; er ist folglich dem Maase der Präcision umgekehrt proportional, je genauer also die Beobachtung ist, desto kleiner ist der wahrliche Fehler.

3) Kehren wir jetzt zu unserer Aufgabe zurück. Es war, wenn $F$ die gegebene Function in einem bestimmten Falle, $C$ der beobachtete Werth derselben für diesen Fall ist,

$$F - C = x$$

der Beobachtungsfehler. Seien nun $F_1 F_2 F_3 \ldots$ bestimmte Werthe von $F$, und $C_1, C_2, C_3 \ldots$ die ihnen entsprechenden Beobachtungsresultate, ferner

$$F_1 - C_1 = x_1,\ F_2 - C_2 = x_2,\ \ldots\ F_m - C_m = x_m$$

die Beobachtungsfehler, $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \ldots \omega_m$ die Wahrscheinlichkeiten des Verkommens derselben, so ist die Wahrscheinlichkeit $\Omega$ des gleichzeitigen Vorkommens aller dieser Fehler nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung (s. Wahrscheinlichkeitsrechnung) gleich $\omega_1\ \omega_2 \ldots \omega_m$, oder wenn man die vorhin gefundenen Werthe von $\omega$ einsetzt:

$$\Omega = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x_1^2} dx \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x_2^2} dx \ldots \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x_m^2} dx,$$

d. h.

$$\Omega = \left(\frac{\alpha dx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-\alpha^2 (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2)}.$$

Wären die Werthe $a, b, c \ldots$ der in $F$ enthaltenen Constanten bekannt, so wäre $\Omega$ demnach gegeben. Da dies aber nicht der Fall ist, so ist zu untersuchen, welche Bestimmung der $a, b, c \ldots$ zu treffen sei, damit das Resultat ein so viel als möglich der Wahrheit sich annäherndes sei.

Hier ist nun folgende Betrachtung zu machen. Mögen verschiedene Ursachen $A_1, A_2 \ldots A_m$ eine gewisse Wirkung hervorbringen können, welche bei allen dieselbe sei, aber nur von einer der gegebenen Ursachen herrührt, wir wissen nicht welche, und fragen, wie gross die Wahrscheinlichkeit sei, dass etwa $A_1$ wirklich die Ursache sei. Möge $A_1$ in $p_1$ Fällen diese Wirkung herbeiführen können, $A_2$ in $p_2$ Fällen, und so weiter, so ist offenbar diese Wahrscheinlichkeit $\frac{p_1}{p_1 + p_2 + \ldots + p_m}$, im Nenner stehen nämlich, wie dies der Begriff der Wahrscheinlichkeit verlangt, alle möglichen Fälle, welche die entsprechende

Wirkung herbeiführen können, im Zähler die günstigen. Setzen wir voraus, dass alle Ursachen gleich möglich seien, und jede von ihnen überhaupt $q$ Erfolge habe, so ist unter dieser Voraussetzung der gleichen Wahrscheinlichkeit aller Ursachen dieses $q$ für alle Ursachen $A_1 A_2 A_m$ dasselbe; und mithin kann man in unserm Bruche für

$$p_1 p_2 \ldots p_m$$

bezüglich

$$\frac{p_1}{q} = r_1, \quad \frac{p_2}{q} = r_2, \quad \ldots \quad \frac{p_m}{q} = r_m$$

setzen, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass die Ursache $A_1$ stattgefunden habe, gleich $\frac{r_1}{\Sigma(r)}$ wird, d. h. gleich der Wahrscheinlichkeit $r_1$ dass die gegebene Wirkung eintreten könnte, wenn nur die Ursache $A_1$ vorausgesetzt würde, dividirt durch die Summe aller Wahrscheinlichkeiten, die unter Voraussetzung jeder der gegebenen Ursachen eintreten.

In unserm Falle nun bestehen die Ursachen des verlangten Erfolgs darin, dass irgend eine Verbindung der Constanten $a, b, c \ldots$ stattfindet, die Wirkung ist, dass die Beobachtungsfehler die Gestalt $x_1 x_2 \ldots x_m$ haben, und die Wahrscheinlichkeit, dass dies unter Voraussetzung der eben gegebenen Ursache eintrete, ist $\Omega = r_1$, also die Wahrscheinlichkeit, dass wirklich die Constanten die Gestalt $a, b, c \ldots$ hatten, ist nach Obigem gleich $\frac{\Omega}{\Sigma\Omega}$, wo im Zähler für die Constanten die Werthe $a, b, c \ldots$ zu setzen, im Nenner alle möglichen Werthe derselben von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen sind. Man erhält dann für die verlangte Wahrscheinlichkeit:

$$L = \frac{\Omega\, da\, db\, dc \ldots}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \Omega\, da\, db\, dc \ldots} = k\,\Omega\, da\, db\, dc \ldots,$$

wo

$$\frac{1}{k} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots \Omega\, da\, db\, dc \ldots \text{ gesetzt ist.}$$

Diejenige Auswahl der Constanten wird die vortheilhafteste sein, für welche diese Wahrscheinlichkeit ein Maximum ist. Hätte man nämlich Gewissheit, dass diese Constanten eine gewisse Grösse haben, so wäre die genaue Bestimmung von $F$ thunlich. Da dies unmöglich ist, muss man statt dessen sich mit der grösstmöglichen Wahrscheinlichkeit begnügen. Es ist also $k\Omega\, da\, db\, dc \ldots$ oder $\Omega \ldots$ als Maximum zu setzen. Es war aber:

$$\Omega = \left(\frac{\alpha dx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-\alpha^2(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2)},$$

welche Grösse ein Maximum wird, wenn

$$\Sigma x^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2$$

ein Minimum ist.

Somit sind die Constanten derart zu bestimmen, dass die Quadratsumme aller Beobachtungsfehler ein Minimum wird, daher rührt für diese Methode der Name der kleinsten Quadrate.

4) Es wurde bis jetzt die Sache so angesehen, dass alle Beobachtungen gleich gut seien und ihnen gleicher Einfluss eingeräumt werden müsse, d. h. dass die Präcision $\alpha$ constant sei. Heben wir jetzt diese Voraussetzung auf, und mögen den Beobachtungen die entsprechenden Präcisionen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ zukommen, so wird offenbar:

$$\Omega = \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m \left(\frac{dx}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-(\alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_2^2 x_2^2 + \ldots + \alpha_m^2 x_m^2)},$$

und es muss

$$\alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_2^2 x_2^2 + \ldots + \alpha_m^2 x_m^2 = \Sigma\alpha^2 x^2$$

ein Minimum werden. Dieser Fall lässt sich aber auch auf den vorigen zurückführen durch folgende Betrachtung. Da $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots$ jedenfalls nur annäherungsweise bestimmt werden können, so kann man sie mit einem beliebigen Grade der Genauigkeit als Brüche betrachten, und diese auf gleichen Nenner $\lambda$ bringen, es sind demgemäss:

$$\lambda^2\alpha_1^2, \ \lambda^2\alpha_2^2, \ \ldots \ \lambda^2\alpha_m^2$$

ganze Zahlen, die wir mit $\beta_1\, \beta_2 \ldots \beta_m$ bezeichnen, dann ist:

$$\Omega = \sqrt{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_m} \left(\frac{dx}{\lambda \sqrt{\pi}}\right)^m e^{-\frac{1}{\lambda^2}(\beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 + \ldots + \beta_m x_m^2)}$$

Der Ausdruck, welcher ein Minimum werden muss, ist dann:

$$\Sigma(\beta x^2) = \beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_2^2 + \ldots \beta_m x_m.$$

Nimmt man nun an, die Anzahl der Beobachtungen sei $\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m$, da sämmtliche $\beta$ ganze Zahlen sind, und giebt jeder die Präcision $\frac{1}{\lambda}$, den ersten $\beta_1$ den Beobachtungsfehler $x_1$, den folgenden $\beta_2$ den Beobachtungsfehler $x_2$, und so fort, so erhält man nach der in 2) gegebenen Regel den entsprechenden Werth von $\Omega$ ganz wie hier.

Die Coefficienten $\beta_1 \beta_2 \ldots$ bezeichnen die relative Günstigkeit oder das Gewicht der Beobachtungen. Es ist natürlich nur abschätzungsweise möglich, die Gewichte von Beobachtungen zu bestimmen. Es setzt die Prüfung der Instrumente und auch der Messenden voraus.

Hat man zwei Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit, und hat man sich irgend wie überzeugt, dass bei der einen der Fehler $x_1$ ebenso leicht vorkommen könne, als in der andern der Fehler $x_2$, so sind, wenn $\alpha_1 \alpha_2$ die entsprechenden Präcisionen sind, die relativen Wahrscheinlichkeiten des Vorkommens dieser Fehler, wie in 1) dargethan ist,

$$e^{-\alpha_1^2 x_1^2} \quad e^{-\alpha_2^2 x_2^2}$$

und diese Grössen sollen gleich sein, woraus sich ergiebt:

$$\frac{\alpha_1^2}{\alpha_2^2} = \frac{x_2^2}{x_1^2}$$

$\alpha_1^2$ und $\alpha_2^2$, sind aber die Verhältnisse der Gewichte, also: Die Gewichte verhalten sich umgekehrt, wie die Quadrate der als gleich vermutheten Fehler.

5) Da der Ausdruck

$$\Sigma(x^2) = \Sigma(F - C)$$

ein Minimum ist, so sind die partiellen Differentialquotienten nach $a, b, c \ldots$ gleich Null zu setzen. Man erhält:

$$\Sigma(F-C)\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \Sigma(F-C)\frac{\partial F}{\partial b} = 0, \quad \Sigma(F-C)\frac{\partial F}{\partial c} = 0.$$

Uebrigens ist die Annahme, dass die Function $F$ $(a, b, c \ldots u, v, w \ldots)$ dieselbe Form für alle Gleichungen habe, aus denen sich $a$ $b$ $c$ ergeben soll, eine durchaus unwesentliche, und alle bis jetzt gemachten und künftig zu machenden Schlüsse bleiben richtig, wenn man für die einzelnen Gleichungen sich die Form von $F$ geändert denkt.

Die Anzahl unserer eben entwickelten Gleichungen ist offenbar gleich der der Constanten $a, b, c \ldots$ und ist also durch deren Auflösung das Problem gelöst. Indessen werden die Gleichungen linear, wenn $a, b, c \ldots$ selbst linear in $F$ enthalten sind, und auf diesen Fall lässt sich, wie wir gleich sehen werden, die allgemeine Aufgabe zurückführen. Sei also

$$F = au + bv + cw \ldots,$$

so werden unsere Gleichungen, wenn wir wieder $F_1 - C_1 = x_1$, $F_2 - C_2 = x_2$ u. s. w. setzen, da $\frac{\partial F}{\partial a} = u$, $\frac{\partial F}{\partial b} = v$ u. s. w. ist,

$$\begin{array}{l} x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 + \ldots = 0 \\ x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + \ldots = 0 \\ x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 + \ldots = 0 \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Da aber

$$\begin{array}{l} x_1 = au_1 + bv_1 + cw_1 - C_1 \\ x_2 = au_2 + bv_2 + cw_2 - C_2 \end{array}$$

u. s. w., so erhält man

$$\begin{array}{l} a\Sigma u^2 + b\Sigma uv + c\Sigma uw + \ldots = \Sigma uC \\ a\Sigma uv + b\Sigma v^2 + c\Sigma vw + \ldots = \Sigma vC \\ a\Sigma uw + b\Sigma vw + c\Sigma w^2 + \ldots = \Sigma wC \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array}$$

Bei der Auflösung ist es, namentlich, wenn die Anzahl der Gleichung gross ist, wohlgethan, die Werthe der $u$ und $v$ einzusetzen, und die so entstehenden numerischen Gleichungen aufzulösen, statt $a, b, c \ldots$ zuerst in Buchstaben-Formeln zu entwickeln. Da übrigens z. B.

$$\Sigma(uv) = \frac{1}{2}\Sigma(u+v)^2 - \frac{1}{2}\Sigma(u-v)^2$$

ist, so lassen sich die Coefficienten der Unbekannten $a, b, c$ immer auf Quadrate zurückführen, und daher wird eine Tafel der Quadratzahlen, wie sie hier im Artikel Quadrat sich befindet, wesentliche Dienste leisten.

Wenn nun die Grössen $F(a, b, c \ldots u, v, w)$ nicht lineär sind, so kann man folgendes Verfahren einschlagen. Man berechne aus einer beliebigen Anzahl der Beobachtungen, die gleich der der Constanten $a, b, c$ ist, die letztern

seien $A$, $B$, $C$ ... die so gefundenen Werthe, man kann dann allgemein setzen:

$$a = A + \alpha,\ b = B + \beta,\ c = C + \gamma\ \ldots,$$

wo $A, B, C$ die gefundenen Zahlenwerthe und $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ im Allgemeinen nur klein sind. Betrachtet man nun $\alpha, \beta, \gamma$ als die zu bestimmenden Constanten, so ist

$$F(a,b,c \ldots u,v,w \ldots) = F(A,B,C \ldots u,v,w \ldots) + \frac{\partial F}{\partial A}\alpha + \frac{\partial F}{\partial B}\beta + \frac{\partial F}{\partial C}\gamma + \ldots,$$

wo $F$ in den partiellen Differenzialquotienten immer die Funktion $F(A,B,C \ldots u,v,w \ldots)$ bedeutet, und wo die höhern mit $\alpha^2$, $\alpha\beta \ldots$ multiplicirten Glieder der Taylorschen Reihe wegen ihrer Kleinheit ausser Betracht kommen. In diesen Gleichungen ist $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ aber lineär enthalten, und das oben entwickelte Verfahren hat statt. Sollte man die sich so ergebenden Werthe von $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ nicht für hinreichend genau halten, so setze man:

$$A + \alpha = A',\ + B + \beta = B'\ \ldots,$$

nehme

$$a = A' + \alpha',\ b = B' + \beta',\ c = C' + \gamma'\ \ldots$$

und wiederhole das obige Verfahren, wo dann $\alpha', \beta', \gamma'$ die neuen viel kleinern Unbekannten sind, mit denen man die Werthe der früheren verbessert.

Der einfachste mögliche Fall ist der, wo

$$F = a$$

ist, also

$$u = 1,\ v = w = \ \ldots\ = 0,$$

in diesem Falle ist also nur der wahrscheinlichste Werth einer Constante $a$ durch Beobachtungen, deren Anzahl $m$ sei, zu finden. Die Gleichung

$$a\Sigma u^2 + b\Sigma uv + c\Sigma uw + \ \ldots\ = \Sigma uC$$

verwandelt sich hierbei in

$$am = \Sigma C,\ a = \frac{C_1 + C_2 + \ \ldots\ + C_m}{m}$$

wo die Ausdrücke $C$ die beobachteten Werthe von $F$ oder $a$ sind, d. h. der wahrscheinlichste Werth einer durch Beobachtungen zu bestimmenden Constante ist die arithmetische Mitte aller Beobachtungen. Von diesem Satze ging, wie wir sahen, Gauss aus, und leitete von ihm den Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit des jedesmaligen Fehlers ab. Geht man von der Hagenschen Annahme aus, so lässt sich dagegen der Satz von der arithmetischen Mitte erweisen.

6) Die durch die Methode der kleinsten Quadrate erhaltenen Werthe von $a$, $b$, $c$ ... sind, obgleich die wahrscheinlichsten, doch nie völlig genau. Hätte man dergleichen Werthe, so könnte man auch die Beobachtungen rectificiren, und die Fehler derselben $F_1 - C_1 = x_1$ u. s. w. bestimmen, woraus sich dann auch die Präcision $\alpha$ und der wahrscheinliche Fehler $\varrho = \frac{0{,}4769360}{\alpha}$ ergeben würde. Da aber die genauen Werthe von $a$, $b$, $c$ ... nicht bekannt sind, so kann es sich nur darum handeln, von den letztgenannten Grössen die wahrscheinlichsten Werthe zu ermitteln, und nach der Wahrscheinlichkeit zu fragen, welche stattfinde, dass zwischen diesen wahrscheinlichsten und den wahren Werthen eine gewisse gegebene Differenz stattfinde.

Diese Betrachtungen sollen hier noch ausgeführt werden.

Der Werth der Wahrscheinlichkeit, dass irgend eine Verbindung der Constanten $a$, $b$, $c$ stattfinde, war nach 2)

$$L = k\Omega da db dc \ldots,$$

wo

$$\frac{1}{k} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \ldots\ \Omega\, da db dc \ldots$$

ferner

$$\Omega = \left(\frac{\alpha d\delta x}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-\alpha^2 \Sigma x^2}$$

Unter $a, b, c$ ... sind die durch die Methode der kleinsten Quadrate gegebnen, also die wahrscheinlichsten Werthe dieser Constante jetzt zu verstehen; unter $x_1\ x_2 \ldots$ die denselben entsprechenden Fehler, das Maximum von $\Omega$ sei ferner jetzt durch $\omega$ bezeichnet. Mögen nun diese Constanten sich um sehr kleine Werthe $\delta a$, $\delta b$, $\delta c$ ... ändern, so dass die Fehler ebenfalls um $\delta x_1$, $\delta x_2$, $\delta x_3$ ... wachsen. Das Gesetz dieser Aenderung von $a, b, c$ ... ist ein beliebiges.

Da nunmehr $a$, $b$, $c$ ... constant, $\delta a$, $\delta b$, $\delta c$ ... als veränderlich betrachtet werden, so ist für $da$:

$$d(a + \delta a) = d\delta a,$$

$d\delta x$ für $dx$ u. s. w. zu setzen, also:

$$\omega = \left(\frac{\alpha d\delta x}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-\alpha^2 \Sigma x^2}$$

$$\Omega = \left(\frac{\alpha d\delta x}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-\alpha^2 \Sigma (x + \delta x)^2} = \omega e^{-\alpha^2 \Sigma (x + \delta x)^2 - \alpha^2 \Sigma x^2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eine Verbindung von Werthen um $\delta a$, $\delta b$, $\delta c$ ... von den gefundenen $a$, $b$, $c$ ... abweiche, ist gegeben durch Gleichung:

$$L = k\Omega d\delta a d\delta b d\delta c\ \ldots$$

wo

$$\frac{1}{k} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} . \Omega d\delta a d\delta b d\delta c \ldots$$

d. h.

$$L = k\omega e^{-\alpha^2[\Sigma(x+\delta x)^2 - \Sigma(x)^2]} d\delta a d\delta b d\delta c$$

Wir können aber auch voraussetzen, dass die Function $F$ eine lineare Function von $a, b, c \ldots$ sei, da sich die Aufgabe ja immer auf diesen Fall zurückführen liess. Es ist dann auch $\delta x$ eine lineare Funktion von $\delta a, \delta b, \delta c \ldots$, nämlich z. B.:

$$\delta x = u\delta a + v\delta b + w\delta c$$

und da

$$\frac{\partial x}{\partial a} = u, \frac{\partial x}{\partial b} = v \ldots$$

ist, so hat man:

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial a}\delta a + \frac{\partial x}{\partial b}\delta b + \frac{\partial x}{\partial c}\delta c + \ldots$$

es wird dann:

$$\Sigma(x+\delta x)^2 - \Sigma(x)^2 = 2\Sigma\left(x\frac{\partial x}{\partial a}\right)\delta a + \Sigma\left(x\frac{\partial x}{\partial b}\right)\delta b + \ldots + \Sigma(\delta x)^2$$

Da aber $\Sigma x^2$ ein Maximum, also:

$$\Sigma x\frac{\partial x}{\partial a} = \Sigma x\frac{\partial x}{\partial b} = \ldots = 0$$

war, so hat man:

$$L = k\omega e^{-\alpha^2\Sigma(\delta x)^2} d\delta a d\delta b d\delta c \ldots$$

wo die $\delta x$ durch die Gleichungen

$$\left|\begin{array}{l} \delta x_1 = u_1\delta a + v_1\delta b + w_1\delta c + \ldots \\ \delta x_2 = u_2\delta a + v_2\delta b + w_2\delta c + \ldots \end{array}\right|$$

gegeben sind, und

$$\omega = \left(\frac{\alpha d\delta x}{\sqrt{\pi}}\right)^m e^{-\alpha^2\Sigma x^2}$$

zu setzen ist. $L$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass die wahren Werthe der Constanten die Unterschiede $\delta a, \delta b, \delta c$ von den gefundenen wahrscheinlichsten haben. Suchen wir jetzt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der wahre Werth nur der ersten Constante um $\delta a$ von dem wahrscheinlichsten abweiche, während die andern Constanten völlig unbestimmt bleiben. Diese ist offenbar:

$$M = k\omega d\delta a \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots e^{-\alpha^2\Sigma(\delta x)^2} d\delta b d\delta c \ldots,$$

denn sie ist gleich der Summe aller Wahrscheinlichkeiten, dass $a$ und $\delta a$ wächst, während die Zunahme von $b$ und $c$ alle möglichen Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annehmen können, es ist also in Bezug auf $\delta b, \delta c$, nicht aber auf $\delta a$ zu integriren. Der Ausdruck $\Sigma(\delta x)^2$ lässt sich vermöge der Gleichungen für $\delta x_1, \delta x_2 \ldots$ leicht auf die Form bringen:

$$\Sigma\delta x^2 = \delta a^2\Sigma u^2 + \delta b^2\Sigma v^2 + \delta c^2\Sigma w^2 + \ldots + 2\Sigma uv\delta a\delta b + 2\Sigma uw\delta a\delta c + \ldots + 2\Sigma vw\delta b\delta c + \ldots$$

Dieser Ausdruck aber ist eine homogene Funktion zweiten Grades von den Grössen $\delta a, \delta b, \delta c$, und kann also in eine Summe von Quadraten verwandelt werden (siehe Artikel Quadrat).

Zu dem Ende wollen wir, um die Anzahl der Constanten anzudeuten, dieselben mit

$$a\, a_1 a_2 \ldots a_{n-1} \text{ statt mit } a\, b\, c \ldots$$

bezeichnen. dann ist:

$$\Sigma\delta x^2 = (e_{1,1}\delta a_1 + e_{1,2}\delta a_2 + \ldots + e_{1,n-1}\delta a_{n-1} + e_1\delta a)^2 + (e_{2,2}\delta a_2 + e_{2,3}\delta a_3 + \ldots + e_{2,n-1}\delta a_{n-1} + e_2\delta a)^2 \ldots + (e_{n-1,n-1}\delta a_{n-1} + e_{n-1}\delta a)^2 + (e\delta a)^2$$

wo die $e$ leicht zu bestimmende Grössen sind, die sich aus den Ausdrücken $\Sigma u^2$, $\Sigma uv$ u. s. w. ergeben. Setzen wir noch:

$$\begin{array}{l} e_{1,1}\delta a_1 + e_{1,2}\delta a_2 + \ldots + e_2\delta a = \lambda_1 \\ e_{2,2}\delta a_2 + e_{2,3}\delta a_3 + \ldots + e_2\delta a = \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e_{n-1,n-1}\delta a_{n-1} + e_{n-1}\delta a = \lambda_{n-1} \end{array}$$

so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots e^{-\alpha^2\Sigma\delta x^2}\,d\delta a_1\,d\delta a_2\;\ldots\,.$$

$$=\frac{1}{e_{1,1}e_{2,2}\ldots e_{n-1,n-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots e^{-\alpha^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots\lambda_{n-1}^2+(e\delta a)^2)}\,d\lambda_1\,d\lambda_2\ldots d\lambda_{n-1}$$

$$=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\right)^{n-1}\frac{e^{-\alpha^2 e^2\delta a^2}}{e_{1,1}e_{2,2}\ldots e_{n-1,n-1}}$$

also $$M=\frac{k\omega\,d\delta\alpha}{e_{1,1}e_{2,2}\ldots e_{n-1,n-1}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\right)^{n-1}e^{-\alpha^2e^2\delta a^2}$$

In 1) fanden wir für die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Beobachtungsfehlers den Ausdruck: $\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-\alpha^2x^2}dx$, wo $\alpha$ die Präcision der zugehörigen Beobachtung war; unsere Präcision in der Bestimmung des wahrscheinlichsten Werthes der Constante $a$ wird also sein:

$$H=\alpha e;$$

Für die andern Constanten $b, c \ldots$ oder $a_1 a_2 \ldots$ kann man ganz ähnliche Ausdrücke bilden:

$$H_1=\alpha e^{(1)},$$
$$H_2=\alpha e^{(2)}\ldots$$

indem man $e^{(1)}\,e^{(2)}$ so aus $e$ entstehen lässt, dass man in diesem Ausdrucke $a$ mit $a_1$ oder $a$ mit $a_2$ u. s. w. vertauscht.

Zur Bestimmung der Grösse $k$ hatten wir:

$$\frac{1}{k}=\omega\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\alpha^2\Sigma\delta x^2}\,d\delta a\,d\delta b\,d\delta c\ldots,$$

wie sich ergiebt, wenn man für $\Omega$ seinen Werth setzt. Dieser Ausdruck aber lässt sich wie oben finden, wenn man noch $e\delta a=\lambda$ setzt:

$$\frac{1}{k}=\frac{\omega}{e_{1,1}e_{2,2}\ldots e_{n-1,n-1}e}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cdots e^{-\alpha^2(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_{n-1}^2+\lambda^2)}\,d\lambda_1\ldots d\lambda_{n-1}d\lambda$$

$$=\frac{\omega}{e\cdot e_{1,1}e_{2,2}\ldots e_{n-1,n-1}}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\right)^{n-1}$$

$$M=\frac{H\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-H^2\delta a^2}$$

und eben so:

$$M_1=\frac{H_1\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-H_1^2\delta a_1^2}$$

$$M_2=\frac{H_2\alpha}{\sqrt{\pi}}e^{-H_2^2\delta a_2^2}$$

da $e\alpha=H$ war.

Der wahrscheinliche Fehler bei Bestimmung von $x$ war nach (1)

$$\varrho=\frac{0.4769360}{\alpha},$$

jetzt wo $H=e\alpha$ an die Stelle von $\alpha$ tritt, ist der wahrscheinliche Fehler in der Bestimmung der Constanten $a$:

$$P=\frac{0.4769360}{\alpha e}=\frac{\varrho}{e}$$

und ebenso:

$$P_1=\frac{\varrho}{e^{(1)}},\quad \varrho_2=\frac{\varrho}{e^{(2)}}\ldots$$

Was endlich den Ausdruck für $e$ anbetrifft, so erhält man, wenn man die Reihe

$$e_{1,1}\,e_{1,2}\ldots e_{1,n-1}\,e_1\,e_{2,2}\ldots e_{2,n-1}\,e_2\ldots e_{n-1,n-1}\,e_{n-1}\,e$$

mit der im Artikel Quadrat aufgestellten Reihe der $b$ vergleicht, $b_{n.n}=e$, also wie am Schlusse dieses Artikels dargethan worden ist:

$$e=\sqrt{\frac{\triangle}{\triangle_1}}$$

wo

$$\triangle=\begin{vmatrix}\Sigma(u)^2 & \Sigma(uv) & \Sigma(uw) & \cdot & \cdot & \cdot\\ \Sigma(uv) & \Sigma(v)^2 & \Sigma(vw) & \cdot & \cdot & \cdot\\ \Sigma(uv) & \Sigma(vw) & \Sigma(w)^2 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \end{vmatrix}$$

und $\triangle_1$ die betreffende Unterdeterminante ist, die sich mit Weglassung aller mit $u$ behafteten Glieder ergiebt, also:

$$\triangle_1=\begin{vmatrix}\Sigma(v)^2 & \Sigma(vw) & \cdot & \cdot & \cdot\\ \Sigma(vw) & \Sigma(w)^2 & \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \end{vmatrix}$$

Diese Betrachtungen geben ein Resultat, welches die Rechnung wesentlich erleichtert.

Es waren nämlich diejenigen Gleichungen, woraus die wahrscheinlichsten Werthe der Constanten bestimmt wurden:

$$
\begin{array}{l}
a\,\Sigma(u)^2 + b\,\Sigma(uv) + c\,\Sigma(uw) + \ldots = \Sigma Cu \\
a\,\Sigma(uv) + b\,\Sigma(v)^2 + c\,\Sigma(vw) + \ldots = \Sigma Cv \\
a\,\Sigma(uw) + b\,\Sigma(vw) + c\,\Sigma(w)^2 + \ldots = \Sigma Cw \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

und die daraus zu berechnenden Werthe der Constanten nehmen die Form an:

$$
\begin{array}{l}
a = A\,\Sigma uC + A^{(1)}\,\Sigma vC + A^{(2)}\,\Sigma wC + \ldots \\
b = A_1\,\Sigma uC + A_1^{(1)}\,\Sigma vC + A_1^{(2)}\,\Sigma uC + \ldots \\
c = A_2\,\Sigma uC + A_2^{(1)}\,\Sigma vC + A_2^{(2)}\,\Sigma wC + \ldots \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{array}
$$

Aus der Theorie der Gleichungen folgt aber, dass $A = \frac{\Delta_1}{\Delta}$ ist, ebenso ist $A_1$ derjenige Werth der aus $\frac{\Delta_1}{\Delta}$ entsteht, wenn man $u$ mit $v$ vertauscht u. s. w.; es ist also auch:

$$e = \sqrt{\frac{1}{A}},\ e^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{A_1}},\ e^{(2)} = \sqrt{\frac{1}{A_2^{(2)}}} \ldots, \text{ also:}$$

$$H = \alpha\sqrt{\frac{1}{A}},\ H_1 = \alpha\sqrt{\frac{1}{A_1^{(1)}}},\ H_2 = \sqrt{\frac{1}{A_2^{(2)}}} \ldots$$

$$P = \varrho\sqrt{A},\ P_1 = \varrho\sqrt{A_1^{(1)}},\ P_2 = \varrho\sqrt{A_2^{(2)}} \ldots$$

Diese Bemerkung erleichtert die Rechnung, wenn die Grössen $A$, $A_1^{(1)}$, $A_2^{(2)}$ bereits bekannt sind.

7) Es wurde im vorigen Abschnitt die Präcision $\alpha$ der gegebenen Beobachtung immer als bekannt vorausgesetzt. Da die Bestimmung derselben aber im Allgemeinen unthunlich ist, so muss man sich begnügen, den wahrscheinlichsten Werth dieser Grösse zu ermitteln, und dies geschieht auf folgende Art. Der Ausdruck:

$$\Omega = \left(\frac{\alpha dx}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-\alpha^2 \Sigma x^2}$$

zeigte die Wahrscheinlichkeit an, welche dafür stattfand, dass sich die Beobachtungswerthe $C_1$, $C_2$ ... $C_n$ für die zu bestimmende Function ergaben. Man denke sich darin jetzt die Grössen $a$ $b$ $c$ constant, und $\alpha$ veränderlich; dies findet z. B. statt wenn $a$, $b$, $c$ die wahren Werthe der Constanten, $\Sigma x^2$ die Summen der Quadrate der wahren Beobachtungsfehler ist. Die Wahrscheinlichkeit, dass den beobachteten Werthen $C_1$ $C_2$ ... $C_n$ ein gegebenes $\alpha$ entsprochen habe, ist dann, wie früher erörtert wurde,

$$\frac{\Omega}{\Sigma\Omega} = \frac{\Omega d\alpha}{\int_{-\infty}^{+\infty} \Omega d\alpha} = l\Omega d\alpha$$

wo

$$\frac{1}{l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega d\alpha$$

zu setzen ist.

Für den wahrscheinlichsten Werth der Präcision muss dieser Ausdruck ein Maximum sein. Zu dem Ende ist also

$$\frac{\partial\Omega}{\partial\alpha} = n\alpha^{n-1}\left(\frac{dx}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-\alpha^2\Sigma x^2} - 2\alpha\Sigma(x)^2\left(\frac{\alpha dx}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-\alpha\Sigma x^2} = 0$$

zu setzen; dies gibt:

$$\alpha = \sqrt{\frac{n}{2\Sigma x^2}}$$

als wahrscheinlichsten Werth der Präcision. Es wird dann, da

$$\varrho = \frac{0{,}4769360}{\alpha}$$

der wahrscheinlichste Fehler war, jetzt

$$\varrho = 0{,}4769360 \sqrt{\frac{2\Sigma x^2}{n}}$$

Man kann nun ganz denselben Weg einschlagen, der in Abschnitt 6) in Bezug auf die wahrscheinlichsten Werthe von $a$, $b$, $c$ ... eingeschlagen wurde. Wir verstehen also jetzt unter $\alpha$ immer den Ausdruck $\sqrt{\frac{n}{2\,\Sigma x^2}}$, also die wahrscheinlichste Präcision, unter $\omega$ den entsprechenden grössten Werth von $\Omega$, endlich sei $\alpha+\delta\alpha$ ein beliebiger Werth der Präcision. Es ist dann, wie oben gezeigt wurde:

$$\omega = \left(\frac{\alpha dx}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\alpha^2 \Sigma x^2}$$

$$\Omega = \left\{\frac{(\alpha+\delta\alpha)dx}{\sqrt{n}}\right\}^n e^{-(\alpha+\delta\alpha)^2 \Sigma x^2}$$

$$\omega\left(1+\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)^n e^{-\delta\alpha(2\alpha+\delta\alpha)\Sigma x^2}$$

und wegen der Gleichung $\alpha = \sqrt{\frac{n}{2\Sigma x^2}}$ ist:

$$\Sigma x^2 = \frac{n}{2\alpha^2}$$

also:

$$\Omega = \omega\left(1+\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)^n e^{-n\left(\frac{\delta\alpha}{\alpha}+\frac{1}{2}\frac{\delta\alpha^2}{\alpha^2}\right)}$$

zu setzen. Man hat aber:

$$1+\frac{\delta\alpha}{\alpha} = e^{lg\left(1+\frac{\delta\alpha}{\alpha}\right)} = e^{\left(\frac{\delta\alpha}{\alpha}-\frac{1}{2}\frac{\delta\alpha^2}{\alpha^2}+\frac{1}{3}\frac{\delta\alpha^3}{\alpha^3}-\ \dots\right)}$$

also auch:

$$\Omega = \omega e^{-n\frac{\delta\alpha}{\alpha}\left(1-\frac{1}{3}\frac{\delta\alpha}{\alpha}+\dots\right)}$$

Die Wahrscheinlichkeit eines gegebenen Werthes der Präcision $\alpha+\delta\alpha$, ist dann, wenn man ganz wie in 6) verfährt:

$$S = l\Omega d\delta\alpha,$$

wo

$$\frac{1}{l} = \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega d\delta\alpha$$

zu setzen ist. Es ergiebt sich aber mittels des Werthes von $\Omega$:

$$S = l\omega e^{-n\frac{\delta\alpha^2}{\alpha^2}\left(1-\frac{1}{3}\frac{\delta\alpha}{\alpha}+\dots\right)} d\delta\alpha$$

oder wenn wir annehmen, $\delta\alpha$ wäre im Vergleich mit $\alpha$ nur sehr klein:

$$S = l\omega e^{-n\frac{\delta\alpha^2}{\alpha^2}} d\delta\alpha$$

Dieser Ausdruck mit dem schon früher betrachteten $\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} dx$, welcher die Wahrscheinlichkeit des Beobachtungsfehlers darstellte, verglichen, zeigt, dass

$$\frac{\sqrt{n}}{\alpha}$$

der Werth der Präcision für unsere Grösse $\alpha$ ist; der wahrscheinliche Fehler in dieser Bestimmung ist dann:

$$\frac{0{,}4769360\,.\,\alpha}{\sqrt{n}}$$

also da dieser Fehler positiv und negativ sein kann, so ist die Wahrscheinlichkeit $= \frac{1}{2}$, dass die wahre Präcision sich in den Grenzen:

$$\alpha\left(1-\frac{0{,}4769360}{\sqrt{n}}\right) \text{ und } \alpha\left(1+\frac{0{,}4769360}{\sqrt{n}}\right)$$

befinde. Denn nach der Definition des wahrscheinlichen Fehlers, war ja dessen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Diese beiden Ausdrücke heissen daher wahrscheinliche Grenzen der Präcision. Eben so sind:

$$\frac{\varrho}{1-\frac{0{,}4769360}{\sqrt{n}}} \text{ und } \frac{\varrho}{1+\frac{0{,}4769360}{\sqrt{n}}}$$

oder wenn man die höheren Potenzen von $\frac{1}{\sqrt{n}}$ vernachlässigen kann:

$$\varrho\left(1-\frac{0{,}4769360}{\sqrt{n}}\right) \text{ und } \varrho\left(1+\frac{0{,}4769360}{\sqrt{n}}\right)$$

die wahrscheinlichen Grenzen des wahrscheinlichen Beobachtungsfehlers.

Es spielt in diesen Betrachtungen der Ausdruck

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}$$

eine Rolle, sein Quadrat ist die arithmetische Mitte aus den Quadraten aller Beobachtungsfehler. Man nennt daher auch diesen Ausdruck den mittleren Fehler; es ist dann:

$$\alpha = \sqrt{\frac{n}{2\Sigma(x)^2}} = \frac{1}{\epsilon\sqrt{2}} = \frac{0{,}7071068}{\epsilon} \quad \text{und}$$

$$\varrho = 0{,}4769360\sqrt{\frac{2\Sigma x^2}{n}} = 0{,}6744897\,\epsilon.$$

Da das Quadrat des mittleren Fehlers $\epsilon$ die arithmetische Mitte aller Fehlerquadrate ist, so ist auch $\epsilon^2$ das wahrscheinlichste aller Fehlerquadrate.

8) Um den mittleren Fehler $\epsilon$ zu finden, müsste man $\Sigma(x)^2$ oder die Quadraten-Summe der wahren Beobachtungsfehler haben, sind unter $x_1\, x_2 \ldots$ die wahrscheinlichsten Beobachtungsfehler verstanden, so ist also

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\Sigma(x+\delta x)^2}{n}}$$

zu setzen, und man kann für $\Sigma(x+\delta x)^2$ wieder den wahrscheinlichsten Werth dieser Grösse substituiren. Ganz wie in 6. setzen wir unter Voraussetzung der linearen Form der Function:

$$\Sigma(x+\delta x)^2 - \Sigma x^2 = \Sigma(u\delta a + v\delta b + w\delta c + \ldots)^2,$$

also

$$\Sigma(x+\delta x)^2 = \Sigma x^2 + \Sigma(u\delta a + v\delta b + w\delta c)^2, \text{ und}$$

$\Sigma x^2$ ist bekannt. $\Sigma(u\delta a+v\delta b+w\delta c)$ wurde in 6) auf die Form gebracht:

$$\lambda_1^2+\lambda_2^2+\ldots+\lambda_{s-1}^2+\lambda^2$$

nach 6) aber war die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens dieses Fehlers:

$$k w\, e^{-\alpha^2(\lambda_1^2+\ldots\ldots+\lambda_{s-1}^2+\lambda^2)}\,\delta a\,\delta b\,\delta c = \frac{k w\, e^{-\alpha^2\Sigma\lambda^2}\, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{s-1} d\lambda}{\sqrt{e_{1,1}+e_{2,2}\ldots e_{s-1,s-1}}}$$

Es ist hier $s$ als Anzahl der Constanten genommen, um es von $n$, welches jetzt die Anzahl der Beobachtungen anzeigt, zu unterscheiden.

Da nun die Wahrscheinlichkeiten des Vorkommens von $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ nach dem Obigen gleich

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2\lambda_1^2} d\lambda_1,\ \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2\lambda_2^2} d\lambda_2 \ldots.$$

sein müssen (da $\frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2} dx$ die Wahrscheinlichkeit des Vorkommens von $x$ war), die wahrscheinlichsten Werthe dieser Quadrate aber durch die Grösse $\epsilon^2 = \frac{2}{\alpha^2}$ im vorigen Paragraphen gegeben wurden, so ist der wahrscheinlichste Werth von

$$\Sigma(u\delta a+v\delta b+w\delta c+\ \ldots)^2 = \Sigma\lambda^2 = \frac{2s}{\alpha^2} = s\epsilon^2$$

zu setzen, und man hat mithin

$$\Sigma(x+\delta x)^2 = \Sigma x^2 + s\epsilon^2.$$

Es war aber:

$$\Sigma(x+\delta x)^2 = n\epsilon^2$$

also

$$(n-s)\epsilon^2 = \Sigma x^2$$

oder

$$\epsilon = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n-s}}$$

Dies ist der wahrscheinlichste Werth des mittleren Fehlers, $s$ ist die Anzahl der Constanten, $n$ die der Beobachtungen, $\Sigma x^2$ die Summe der wahrscheinlichsten Fehlerquadrate; es werden dann die wahrscheinlichsten Werthe der Präcision:

$$\alpha = \frac{0{,}7071068}{\epsilon}$$

und des wahrscheinlichen Fehlers:

$$\varrho = 0{,}6744897\,\epsilon.$$

9) Ein einfaches Beispiel dieser Methode entnehmen wir einer Abhandlung von Theodor Wittstein über diesen Gegenstand, welche seiner Uebersetzung von Naviers Differenzial- und Integralrechnung (Hannover 1848) angehängt ist. Diese Abhandlung ist überhaupt bei diesem Artikel benutzt, obgleich mit mancherlei Ergänzungen und Vervollständigungen.

Es soll das specifische Gewicht des legirten Silbers als Funktion seines Feingehalts dargestellt werden. Sei $v$ der Feingehalt des Silbers in Grän (die Mark zu 288 Grän), $a$ das specifische Gewicht des zur Legirung verwandten Kupfers, $b$ die Zunahme des specifischen Gewichts der Legirung, wenn der Feingehalt um ein Grän vermehrt wird, dann ist

$$F = a + bv$$

die gesuchte Funktion, $a$ und $b$ sind zu bestimmen.

Es sind nun 95 Beobachtungen gemacht, welche die folgende Tabelle enthält, $C$ ist das beobachtete specifische Gewicht der Legirungen, sämmtlich in geprägten Münzen bestehend, $v$ der gesetzliche Feingehalt derselben.

Tafel 1.

| | $v$ | $C$ | | $v$ | $C$ | | $v$ | $C$ | | $v$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 286 | 10,492 | 25 | 259,2 | 10,315 | 49 | 240 | 10,190 | 73 | 162 | 9,746 |
| 2 | — | 10,487 | 26 | — | 10.302 | 50 | — | 10.198 | 74 | 150 | 9,663 |
| 3 | — | 10,458 | 27 | — | 10.289 | 51 | — | 10,202 | 75 | — | 9,662 |
| 4 | — | 10,480 | 28 | — | 10.289 | 52 | — | 10.203 | 76 | — | 9,646 |
| 5 | — | 10,505 | 29 | — | 10,271 | 53 | — | 10.189 | 77 | — | 9,640 |
| 6 | — | 10,497 | 30 | — | 10,300 | 54 | 216 | 10,100 | 78 | — | 9,667 |
| 7 | — | 10,467 | 31 | — | 10,288 | 55 | — | 10,092 | 79 | — | 9.662 |
| 8 | 284 | 10,464 | 32 | — | 10,273 | 56 | — | 10,072 | 80 | — | 9,681 |
| 9 | 266,4 | 10,374 | 33 | — | 10,291 | 57 | — | 10,067 | 81 | — | 9,672 |
| 10 | — | 10.345 | 34 | — | 10,281 | 58 | — | 10,074 | 82 | 144 | 9,637 |
| 11 | — | 10,351 | 35 | — | 10,272 | 59 | — | 10,073 | 83 | 126 | 9,532 |
| 12 | — | 10,355 | 36 | 252 | 10.260 | 60 | — | 10,055 | 84 | 108 | 9.439 |
| 13 | — | 10,373 | 37 | 250 | 10,265 | 61 | 213 | 10,068 | 85 | 96 | 9,385 |
| 14 | 264 | 10,332 | 38 | — | 10.261 | 62 | 193 | 9,944 | 86 | — | 9.383 |
| 15 | 261 | 10,306 | 39 | — | 10,257 | 63 | 192 | 9.890 | 87 | 90 | 9.333 |
| 16 | 260 | 10.312 | 40 | — | 10.250 | 64 | 190 | 9,888 | 88 | — | 9,306 |
| 17 | — | 10,274 | 41 | — | 10.252 | 65 | — | 9.931 | 89 | — | 9.317 |
| 18 | — | 10.321 | 42 | 240 | 10,237 | 66 | 168 | 9,810 | 90 | 64 | 9,203 |
| 19 | 259,2 | 10.314 | 43 | — | 10.211 | 67 | — | 9,776 | 91 | — | 9,196 |
| 20 | — | 10,309 | 44 | — | 10.211 | 68 | — | 9,767 | 92 | 63 | 9,196 |
| 21 | — | 10,296 | 45 | — | 10.208 | 69 | — | 9,765 | 93 | — | 9.237 |
| 22 | — | 10,282 | 46 | — | 10,207 | 70 | — | 9,744 | 94 | — | 9,153 |
| 23 | — | 10,297 | 47 | — | 10,204 | 71 | — | 9,766 | 95 | — | 9,197 |
| 24 | — | 10,316 | 48 | — | 10,202 | 72 | — | 9,768 | | | |

**Die in Abschnitt 3** gegebenen Gleichnngen für die wahren Werthe der Constanten sind jetzt, da $u=1$, $\Sigma u=95$ ist,

$$95a+\Sigma(v)\,.\,b=\Sigma C$$
$$\Sigma(v)\,a+\Sigma(v^2)\,.\,b=\Sigma(vC).$$

Die Berechnung der hierin vorkommenden Summen lässt sich erleichtern, wenn man diese Summen für diejenigen Beobachtungen einzeln ausrechnet, welche zu demselben $v$ gehören, wie z. B. die Werthe 1 bis 7, und dann alle Partialsummen addirt, also:

Tafel 2.

| | $\Sigma(v)$ | $\Sigma(v^2)$ | $\Sigma C$ | $\Sigma(vC)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1—7 | 2002 | 57572 | 73.386 | 20988,4 |
| 8 | 284 | 80656 | 10,464 | 2971,8 |
| 9—13 | 1332 | 354845 | 51,798 | 13799.0 |
| 14 | 264 | 69696 | 10,332 | 2727,6 |
| 15 | 261 | 68121 | 10,306 | 2689.9 |
| 16—18 | 780 | 202800 | 30,907 | 8035,8 |
| 19—35 | 4406,4 | 1142139 | 174.985 | 45356,1 |
| 36 | 252 | 63504 | 10 260 | 2585,5 |
| 37—41 | 1250 | 312500 | 51.285 | 12821,3 |
| 42—53 | 2880 | 691200 | 122,462 | 29390,9 |
| 54—60 | 1512 | 326592 | 70,533 | 15235,1 |
| 61 | 213 | 45369 | 10,068 | 2144,5 |
| 62 | 193 | 37249 | 9,944 | 1919,2 |
| 63 | 192 | 36864 | 9.890 | 1898,9 |
| 64—65 | 380 | 72200 | 19,819 | 3765,6 |
| 66—72 | 1176 | 197568 | 68,396 | 11490,5 |
| 73 | 162 | 26244 | 9,746 | 1578,9 |
| 74—81 | 1200 | 180000 | 77,298 | 11594,0 |
| 82 | 144 | 20736 | 9,637 | 1387,7 |
| 83 | 126 | 15876 | 9,532 | 1201,0 |
| 84 | 108 | 11664 | 9,439 | 1099,4 |
| 85—86 | 192 | 18432 | 18,768 | 1801,7 |
| 87—89 | 270 | 24300 | 27,956 | 2516,0 |
| 90—91 | 128 | 8192 | 18,399 | 11,775 |
| 92—95 | 252 | 15876 | 36,783 | 2317,3 |
| Summa | 19959,4 | 4595195 | 952,388 | 202413,6 |

Diese Werthe in die beiden Gleichungen für $a$ und $b$ gesetzt geben:

$$95a + 19959{,}46 = 952{,}388$$

$$19959{,}4a + 4595195b = 202413{,}6$$

hieraus folgt:

$$a = 8{,}81297\,, \quad b = 0{,}0057695$$

also

$$F = 8{,}81297 + 0{,}005695r.$$

Um die Genanigkeit der einzelnen Beobachtung zu prüfen, berechnet man für jedes in der ersten Tabelle enthaltene $v$ das zugehörige $F$ mittels dieser Formel. $F - C = x$ ist dann der Beobachtungsfehler. Derselbe und sein Quadrat ist in der folgenden Tafel enthalten.

Tafel 3.

| | $x$ | $x^2$ | | $x$ | $x^2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | − 0,002 | 0,000841 | 49 | + 0,008 | 0,000064 |
| 2 | − 24 | 576 | 50 | − 0 | 0 |
| 3 | + 5 | 25 | 51 | − 4 | 16 |
| 4 | − 17 | 289 | 52 | − 5 | 25 |
| 5 | − 42 | 1764 | 53 | + 9 | 81 |
| 6 | − 34 | 1156 | 54 | − 41 | 1681 |
| 7 | − 4 | 16 | 55 | − 33 | 1089 |
| 8 | − 12 | 144 | 56 | − 13 | 169 |
| 9 | − 24 | 576 | 57 | − 8 | 64 |
| 10 | + 5 | 25 | 58 | − 15 | 225 |
| 11 | − 1 | 1 | 59 | − 14 | 196 |
| 12 | − 5 | 25 | 60 | + 4 | 16 |
| 13 | − 23 | 529 | 61 | − 26 | 676 |
| 14 | + 4 | 16 | 62 | − 17 | 289 |
| 15 | + 13 | 169 | 63 | + 31 | 961 |
| 16 | + 01 | 0001 | 64 | + 21 | 441 |
| 17 | + 39 | 1521 | 65 | − 22 | 484 |
| 18 | − 8 | 64 | 66 | − 28 | 784 |
| 19 | − 5 | 25 | 67 | + 6 | 36 |
| 20 | − 0 | 0 | 68 | + 15 | 225 |
| 21 | + 13 | 169 | 69 | + 17 | 289 |
| 22 | + 27 | 729 | 70 | + 38 | 1444 |
| 23 | + 12 | 144 | 71 | + 16 | -256 |
| 24 | − 7 | 49 | 72 | + 14 | 196 |
| 25 | − 6 | 36 | 73 | + 2 | 4 |
| 26 | + 7 | 49 | 74 | + 15 | 225 |
| 27 | + 20 | 400 | 75 | + 16 | 256 |
| 28 | + 20 | 400 | 76 | + 32 | 1024 |
| 29 | + 38 | 1444 | 77 | + 38 | 1444 |
| 30 | + 9 | 81 | 78 | + 11 | 121 |
| 31 | + 21 | 441 | 79 | + 16 | 256 |
| 32 | + 36 | 1296 | 80 | − 3 | 9 |
| 33 | + 18 | 0324 | 81 | + 6 | 36 |
| 34 | + 28 | 784 | 82 | + 7 | 149 |
| 35 | + 37 | 1369 | 83 | + 8 | 64 |
| 36 | + 7 | 40 | 84 | − 3 | 9 |
| 37 | − 10 | 100 | 85 | − 18 | 324 |
| 38 | − 6 | 36 | 86 | − 16 | 256 |
| 39 | − 2 | 4 | 87 | − 1 | 1 |
| 40 | + 5 | 25 | 88 | + 26 | 676 |
| 41 | + 3 | 9 | 89 | + 15 | 225 |
| 42 | − 39 | 1521 | 90 | − 21 | 441 |
| 43 | − 13 | 169 | 91 | − 14 | 196 |
| 44 | − 13 | 169 | 92 | − 19 | 361 |
| 45 | − 10 | 100 | 93 | − 60 | 3600 |
| 46 | − 9 | 81 | 94 | + 24 | 576 |
| 47 | − 6 | 36 | 95 | + 20 | 400 |
| 48 | − 4 | 16 | | | |

$\Sigma x^2 = 0{,}038053$

Es ist also der wahrscheinlichste Werth des mittleren Fehlers:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n-s}} = \sqrt{\frac{0{,}038053}{93}} = 0{,}020228,$$

der wahrscheinlichste Werth des wahrscheinlichen Fehlers:

$$\varrho = 0{,}6744897\varepsilon = 0{,}013644$$

und die Werthe $\varrho\left(1-\frac{0{,}4769360}{\sqrt{n}}\right)$, $\varrho\left(1+\frac{0{,}4769360}{\sqrt{n}}\right)$, welche die wahrscheinlichen Grenzen des wahrscheinlichen Fehlers geben, sind:

$$0{,}012976,\quad 0{,}014312.$$

Die wahrscheinlichen Werthe der Constanten $a$ nnd $b$ haben die wahrscheinlichen Fehler (siehe 6):

$$p = \frac{\varrho}{e},\quad p_1 = \frac{\varrho}{e^1}$$

wo $e$ leicht mit Hülfe des unter dem Artikel Quadrat angezeigten directen Verfahrens, oder durch die Formeln in 6)

$$e = \sqrt{\frac{\triangle}{\triangle_1}},\quad \triangle = \begin{vmatrix} \Sigma(u)^2, & \Sigma(uv) \\ \Sigma(uv), & \Sigma(v^2) \end{vmatrix} = \Sigma(u)^2\Sigma(v)^2 - [\Sigma(uv)]^2,\quad \triangle_1 = \Sigma(v)^2$$

bestimmt wird, denn dies sind die Werthe der entsprechenden Determinanten für $n = 2$. Hier ist übrigens $u = 1$, also $\triangle = 95\,\Sigma v^2 - [\Sigma(v)]^2$, $\triangle_1 = \Sigma v^2$, nnd mit Hülfe der Werthe von $\Sigma v^2$ nnd $\Sigma(v)$:

$$e = \sqrt{\frac{38165877}{4595195}}$$

$$p = 0{,}00473$$

Für $e'$ erhält man, indem man $u$ mit $v$ vertauscht $\triangle'_1 = \Sigma u^2 = 95$, während $\triangle$ ungeändert bleibt; es kommt

$$e' = \sqrt{\frac{38165877}{95}}$$

$$p_1 = 0{,}0000215.$$

Setzt man aber in $p$ nnd $p_1$ für $\varrho$ die wahrscheinlichen Grenzen des wahrscheinlichen Beohachtungsfehlers, also:

$$0{,}012976 \text{ und } 0{,}014312$$

so erhält man als wahrscheinliche Grenzen des wahrscheinlichsten Werthes von $a$:

$$0{,}00450 \text{ und } 0{,}00496$$

und von $b$:

$$0{,}0000204 \text{ nnd } 0{,}0000226$$

10) Es ist noch eine Bemerkung über das Integral $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{ax} e^{-\lambda^2}\,d\lambda$ zu machen, welches die Wahrscheinlichkeit angab, dass der Fehler nicht grösser als $x$ ist. Bezeichnen wir dasselhe mit $\varphi(nx)$, so ergiebt sich mittelst mechanischer Quadratur oder durch Reihenentwickelung:

$$\begin{aligned}
&\varphi\ 0{,}4769363 = 0{,}5000000\\
&\varphi\ 0{,}5951161 = 0{,}6000000\\
&\varphi\ 0{,}7328691 = 0{,}7000000\\
&\varphi\ 0{,}9061939 = 0{,}8000000\\
&\varphi\ 1 \quad\quad\;\; = 0{,}8472008\\
&\varphi\ 1{,}1630872 = 0{,}9000000\\
&\varphi\ 2{,}326754 \;\, = 0{,}9990000\\
&\varphi\ 2{,}7510654 = 0{,}9999000\\
&\varphi\ (\infty) \quad\;\; = \quad 1.
\end{aligned}$$

War $\varrho$ der mittlere Fehler, so ergab sich $a\varrho = 0{,}4769360$; es ist also

$$\frac{nx}{0{,}4769360}$$

der Werth des Fehlers ausgedrückt in Theilen des wahrscheinlichen Fehlers. Es sei noch $0{,}4769360 = \sigma$, so nimmt unsere Tafel auch die Form an:

$$\begin{aligned}
&\varphi\ 0 = 0\\
&\varphi\ \sigma = 0.5\\
&\varphi\ 1{,}247790\sigma = 0{,}6\\
&\varphi\ 1{,}536618\sigma = 0{,}7\\
&\varphi\ 1.900032\sigma = 0.8\\
&\varphi\ 2.096716\sigma = 0.8427008\\
&\varphi\ 2{,}438664\sigma = 0.9\\
&\varphi\ 3{,}818930\sigma = 0.99\\
&\varphi\ 4{,}880475\sigma = 0{,}999\\
&\varphi\ 5{,}768204\sigma = 0{,}9999\\
&\varphi\ \infty \quad\quad\quad\;\; = \;\; 1
\end{aligned}$$

also es ist z. B. die Wahrscheinlichkeit, dass der Beohachtungsfehler 1,247790 des wahrscheinlichenFehlers nicht überschreite, gleich 0,6 n. s. w.

Es würde also in unserm Beispiele die Wahrscheinlichkeit, dass der Fehler $x$ den wahrscheinlichen Fehler 0,0136 nicht überschreitet, $= \varphi(\sigma) = \frac{1}{2}$ sein, d. h. dies würde nnter 95 Fällen 47mal vorkommen, was aus Tafel 3 sich als zutreffend ergieht; in der That sind 47 der nnter $x$ enthaltenen Zahlen absolut genommen kleiner nls 0,0136. Dass der Fehler den wahrscheinlichen nicht um das Doppelte übertreffe, dafür ist, wenn man zwischen den Zahlen 1,9000326 nnd 2,0976716 interpolirt, $\varphi(2) = 0{,}82$, d. h. es würde dies nnter 95 Fällen 78mal vorkommen, was sich ebenfalls dnrch Tafel 3 hestätigt.

10) Auf den Nutzen der Anwendnng der kleinsten Quadratsummen der Fehler hat zuerst Legendre (*Nouvelles méthodes pour la détermination des orbites des comètes, Paris* 1806) öffentlich aufmerksam gemacht. Gauss hat dieselhe aber einerseits schon früher gekannt, andererseits

dieselbe aber auch zuerst genauer ansgeführt und begründet. Seine Arbeiten darüber sind enthalten in der *Theoria motus Corporum Coelestium* (*Hamburg* 1809) in zwei Abhandlnngen in der Monatlichen Correspondenz Theil XX, 14 und in der Zeitschrift für Astronomie Bd. I, ferner in der *Theoria Combinationis observationum erroribus minimus obnoxiae* (Göttingen 1828), sowie in einem Supplement zu dieser Arbeit.

Einschlagendes enthält auch Laplace *Théorie analytique de Probabilité Suppl.* Bessel *Fundamenta astronomiae* und eine Abhandlung desselben in den Astronomischen Nachrichten Bd. XV, 1838, Hagen Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung 1837, so wie die erwähnte Abhandlung von Theodor Wittstein, die den Anhang zur Uebersetzung von Naviers Differenzial- und Integralrechnung (Hannover 1848) bildet; auch ist die sehr vollständige Darstellung dieser Methode von Enke in den Berliner Astronomischen Jahrbüchern von 1834, 1835 und 1836 zu erwähnen.

## Quadratische Factoren.

1) Quadratische Factoren sind Factoren von der Form $x^2+2ax+b$. Es sind dieselben von Wichtigkeit, weil jede ganze algebraische Fnnction

$$f(x)=x^{2n}+A_1x^{2n-1}+A_2x^{2n-2}+\ldots+A_{2n}$$

sich in ein Prodnct von dergleichen Factoren zerlegen lässt, und zwar sind in jedem Factor $a$ und $b$ reelle Zahlen, wenn die Coefficienten $A\ A_1\ A_2 \ldots A_n$ dergleichen sind. Der Ausdruck:

$$fx=x^{2n+1}+A_1x^{2n}+A_2x^{2n-1}+\ldots+A_{2n+1}$$

lässt sich in einen linearen Factor $x+\alpha$, in welchem $\alpha$ reell ist, wenn $A, A_1 \ldots$ reell sind, und in ein Product von quadratischen Factoren zerlegen, ebenfalls unter der angeführten Bedingung reeller Coefficienten.

Da nun

$$x^2+2ax+b=(x+a+\sqrt{a^2-b})\,(x+a-\sqrt{a^2-b})$$

ist, $\sqrt{a^2-b}$ aber reell und imaginär sein kann, so lassen sich beide Sätze auch so aussprechen: „Jede ganze algebraische Fnnction lässt sich in ein Prodnct von linearen Factoren zerlegen, deren Anzahl ebenso gross ist, als die höchste Potenz der Fnnction, da sie sonst wirklich multiplicirt nicht ein der erstern gleiches Resultat geben könnte."

Sind die Coefficienten der Function reell, so sind diese Factoren entweder reell, oder von der Form $x+a+ci$, wo $i=\sqrt{-1}$ gesetzt wird. Ist letzteres der Fall, so muss einem Factor $x+a+ci$ immer ein andrer $x+a-ci$ entsprechen. Ist die Fnnction von einer ungraden Ordnung, so ist immer wenigstens ein reeller Factor darunter.

2) Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf folgende Hülfssätze:

I) Sei $f(x)$ eine beliebige ganze algebraische Fnnction von $x$ und $x-\alpha$ ein Faktor derselben, so dass

$$f(x)=(x-\alpha)\varphi(x)$$

wo $\varphi x$ eine andere um einen Grad niedrigere ganze Fnnction ist, so ist offenbar

$$f(\alpha)=0;$$

denn da $\alpha-\alpha$ gleich Null ist, könnte $(x-\alpha)\varphi x$ nur dann für besagten Werth von $x$ ungleich Null werden, wenn $\varphi(\alpha)$ gleich unendlich ist; dies ist aber unmöglich, da $\varphi(x)$ eine ganze Function ist, und folglich nur für $x=\infty$ den unendlichen Werth annehmen kann, ein Werth von $\alpha$, der hier ausgeschlossen bleibt.

II) Es lässt sich aber auch umgekehrt beweisen, dass wenn $f(\alpha)=0$ ist, nothwendig $x-\alpha$ ein Factor von $f(x)$ sein muss. Denn dividirt man $f(x)$ durch $x-\alpha$, so erhält man jedenfalls:

$$\frac{f(x)}{x-\alpha}=\psi x+\frac{B}{x-\alpha},$$

wo $\psi x$ eine ganze um einen Grad niedrigere Function als $f(x)$, $B$ aber der Divisionsrest, also eine Constante ist. Es folgt hieraus:

$$f(x)=(x-\alpha)\left(\psi x+\frac{B}{x-\alpha}\right)=(x-\alpha)\psi x+B,$$

oder wenn man $x=\alpha$ setzt:

$$f(\alpha)=B$$

Da aber nach der Voraussetzung $f(\alpha)=0$ war, so ist auch $B=0$, und

$$f(x)=(x-\alpha)\psi x$$

was zu beweisen war.

III) Wenn $f(\alpha)=0$ ist, so ist $\alpha$ eine Wurzel der Gleichung

$$f(x)=0$$

Unser Satz von der Zerlegung der ganzen Functionen kommt somit, wie leicht zu sehen, auf einen andern zurück:

„Jede algebraische Gleichung hat eine Wurzel von der Form $\alpha+\beta i$."

Wir werden von diesem wichtigen Satze zunächst einen elementaren, von Cauchy

herrührenden Beweis geben. Es geschieht dies an dieser Stelle, weil an ihn einige Betrachtungen angeknüpft werden sollen, die sich nicht mehr auf algebraische Gleichungen beziehen. — Dieser Beweis ist in dem bekannten Werke Cauchy's, „*Cours d'analyse algebrique*", mitgetheilt.

Zunächst lässt sich zeigen, dass jede Gleichung von der Gestalt

$$f(x)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\;.\;.\;.\;+A_{n-1}x-A_n=0$$

wo das von der Unbekannten freie Glied $A_n$ negativ ist, immer eine reelle Wurzel hat, die gleich oder grösser als Null ist. Der Ausdruck $f(x)$ ändert sich nämlich offenbar nur continuirlich, da er nicht für endliche Werthe von $x$ unendlich werden kann. Für $x=0$ ist nun $f(0)=-A_n$ also negativ, für $x=+\infty$ dagegen ist das erste Glied $x^n$ derart überwiegend, dass es das Zeichen von $f(x)$ bestimmt, so dass $f(+\infty)=+\infty$ wird; die Function $f(x)$ hat also, während $x$ von 0 bis $\infty$ sich ändert, auf continuirlichem Wege sich von einem negativen Werthe bis zu einem positiven geändert, und muss also für irgend einen dazwischen liegenden, also positiven Werth von $x$, der aber auch Null sein kann, durch Null gegangen sein; ist also $\alpha$ dieser Werth, so ist $f(\alpha)=0$, was zu beweisen war.

Sehen wir nun von dem Werthe des letzten Gliedes ab.

In dem Ausdruck

$$f(x)=x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\;.\;.\;.\;+A_n,$$

wo $A_1,\ A_2\ \ldots\ A_n$ beliebig reelle oder imaginäre Zahlen sind, setzen wir

$$A_s=\varrho_s\,e^{\mu_s i},\quad x=re^{\varphi i},\quad f(x)=Re^{\lambda i}$$

Die Module $\varrho_s, r, R$ sind hier als positiv zu betrachten. Man hat:

$$Re^{\lambda i}=r^ne^{n\varphi i}+\varrho_1r^{n-1}e^{(\widehat{n-1}\varphi+\mu_1)i}+\varrho_2r^{n-2}e^{(\widehat{n-2}\varphi+\mu_2)i}+\ldots+\varrho_ne^{\mu_n i},$$

oder, wenn wir mit $e^{n\varphi i}$ dividiren:

$$Re^{(\lambda-n\varphi)i}=r^n+\varrho_1r^{n-1}e^{(\mu_1-\varphi)i}+\varrho_2r^{n-2}e^{(\mu_2-2\varphi)i}+\;.\;.\;.\;\varrho_n\,e^{(\mu_n-n\varphi)i}.$$

Da hierin aber die reellen und imaginären Theile rechts und links einzeln verglichen gleich sein müssen, so ist auch:

$$Re^{-(\lambda-n\varphi)i}=r^n+\varrho_1r^{n-1}e^{-(\mu_1-\varphi)i}+\varrho_2r^{n-2}e^{-(\mu_2-2\varphi)i}+\;.\;.\;.\;+\varrho_ne^{-(\mu_n-n\varphi)i}.$$

Trennt man hier den reellen vom imaginären Theile, so erhält man, wenn man beide Gleichungen mit einander multiplicirt:

$$R^2=(r^n+\varrho_1r^{n-1}\cos\alpha_1+\varrho_2r^{n-2}\cos\alpha_2+\;.\;.\;.\;+\varrho_n\cos\alpha_n)^2$$
$$+(\varrho_1r^{n-1}\sin\alpha_1+\varrho_2r^{n-2}\sin\alpha_2+\;.\;.\;.\;+\varrho_n\sin\alpha_n)^2,$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$\alpha_s=\mu_s-s\varphi$$

Der kleinste mögliche Werth des Ausdruckes rechts ist offenbar der, wo alle Sinus gleich Null, alle Cosinus gleich $-1$ gesetzt werden, denn in diesem Ausdruck wird von dem stets positiven $r^n$ soviel als möglich abgezogen, während das letzte Quadrat ganz verschwindet. Es ist also:

$$R^2\geqq\left(r^n-\varrho_1r^{n-1}-\varrho_2r^{n-2}-\;.\;.\;.\;-\varrho_n\right)^2.$$

Die Gleichung

$$r^n-\varrho_1r^{n-1}-\varrho_2r^{n-2}-\;.\;.\;.\;-\varrho_n=0$$

deren letztes Glied negativ ist, hat aber nach dem Vorigen immer eine reelle positive Wurzel, und der Ausdruck links in dieser Gleichung wird für wachsendes $r$ über alle Grenzen hinaus zunehmen, aus diesem Grunde muss auch $R^2$, welches stets positiv und von $r$ und $\varphi$ abhängig ist, über alle Grenzen mit zunehmenden $r$ wachsen, und kann auch nicht unter Null sinken; es wird also $R^2$ für einen bestimmten Werth von $r$ und $\varphi$ einen kleinsten positiven Werth haben.

Dieser kleinste Werth sei eben $R$, welcher Ausdruck durch die Gleichung gegeben war:

$$Re^{\lambda i} = r^n e^{n\varphi i} + \varrho_1 r^{n-1} e^{(\widehat{n-1}\,\varphi+\mu_1)i} + \varrho_2 r^{n-2} e^{(\widehat{n-2}\,\varphi+\mu_2)i} + \ldots + \varrho_n e^{\mu_n i}.$$

Wir wollen nun $r$ ändern, also für $r$ $r+\sigma$ schreiben, wo dann $R$ und $\lambda$ auch andere Werthe, die wir mit $R_1$, $\lambda_1$ bezeichnen, annehmen; wie leicht zu ersehen ist, hat man dann:

$$R_1 e^{\lambda_1 i} = Re^{\lambda i} + \alpha_1\sigma + \alpha_2\sigma^2 + \ldots + \alpha_n\sigma^n,$$

wo die Ausdrücke $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ complexe Grössen sind, von denen jedoch einzelne Null sein können. — Sei $\alpha_p$ die erste der Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$, die nicht Null ist, und setzen wir $\alpha_p = Ae^{\vartheta i}$, so kommt:

$$R_1 e^{\lambda i} = Re^{\lambda i} + Ae^{\vartheta i}\sigma^p + \alpha_{p+1}\sigma^{p+1} + \ldots + \alpha_n\sigma_n$$

Es können nämlich nicht alle $\alpha$ Null werden, da $\alpha_n = e^{n\varphi i}$ ungleich Null ist.

Das bis jetzt beliebige $\sigma$ bestimmen wir, in dem wir setzen: $\sigma = \dfrac{R^{\frac{1}{p}} e^{\frac{(\lambda+\pi)i}{p}} \varepsilon}{A^{\frac{1}{p}} e^{\frac{\vartheta i}{p}}}$

$\varepsilon$ sei eine positive Zahl. Dann wird

$$R_1 e^{\lambda_1 i} = Re^{\lambda i}(1 - \varepsilon^p + \beta_{p+1}\varepsilon^{p+1} + \ldots + \beta_n\varepsilon^n),$$

wo $\beta_{p+1}, \ldots . \beta_n$ wieder complexe, leicht zu bestimmende Zahlen sind oder

$$R_1 e^{(\lambda_1-\lambda)i} = R(1 - \varepsilon^p + \beta_{p+1}\varepsilon^{p+1} + \ldots + \beta_n\varepsilon^n).$$

Es ist nun klar, dass mit abnehmenden $\varepsilon$ der reelle Theil des Ausdruckes

$$\varepsilon^p + \beta_{p+1}\varepsilon^{p+1} + \ldots + \beta_n\varepsilon^n$$

zuletzt das Zeichen seines ersten Gliedes, also das negative erhält, wodurch der reelle Theil des Ausdruckes in der Klammer zuletzt kleiner als Eins, folglich

$$R_1 \cos(\lambda - \lambda_1) > R$$

wird, wenn nicht $R = 0$ ist, denn $R_1 \cos(\lambda - \lambda_1)$ ist der reelle Theil des Ausdruckes links, und da $R_1$ und $R$ positiv sind, um so mehr

$$R_1 > R$$

Da aber $R$ der kleinste Werth war, so ist dies unmöglich, und es muss $R$, d. h. der Modul des Ausdruckes $f(x)$ gleich Null werden für irgend einen Werth von $r$ und $\varphi$, folglich auch $f(x)$ selbst, was zu beweisen war.

3) Wegen der Wichtigkeit dieses Satzes geben wir noch den letzten derjenigen 3 Beweise, welche von Gauss herrühren. Es sei

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots + A_n x^n = \sum_{p=0}^{p=n} A_p x^p,$$

wo die Grössen $A$ reel seien, und setze man

$$x = t + ui,$$

so ist:

$$t = \Sigma A_p r^p \cos \widehat{p\varphi}$$

$$u = \Sigma A_p r^p \sin \widehat{p\varphi},$$

wo $r$ der Modul von $x$ ist.

Wir setzen nun noch:

$$arctg \frac{u}{t} = s, \quad v = \frac{\partial s}{\partial r}, \quad w = \frac{\partial s}{\partial \varphi}, \quad y = \frac{\partial v}{\partial \varphi} = \frac{\partial w}{\partial r}$$

Um $v$ und $w$ zu bestimmen, sei

$$t_1 = \Sigma p A_p r^p \cos \widehat{p\varphi}$$

$$u_1 = \Sigma p A_p r^p \sin \widehat{p\varphi},$$

so ist

$$\frac{\partial t}{\partial r} = \frac{t_1}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{u_1}{r}$$

$$\frac{\partial t}{\partial \varphi} = -u_1$$

$$\frac{\partial u}{\partial q} = t_1;$$

und wenn unter $ds$ das vollständige Differenzial von $s$ verstanden wird:

$$ds = \frac{t\,du - u\,dt}{t^2 + u^2}.$$

Leitet man jetzt aus $ds$ das Differenzial nach $r$, und das nach $q$ ab, so kommt:

$$v = \frac{t u_1 - u t_1}{r(t^2 + u^2)}$$

$$w = \frac{t t_1 + u u_1}{t^2 + u^2}$$

Setzen wir ausserdem:

$$t_2 = \Sigma p^2 A p \cos pq$$
$$u_2 = \Sigma p^2 A p \sin pq,$$

so kommt, wenn man $w$ nach $r$ differenziirt:

$$y = \frac{(t^2 + r^2)\left(t\frac{\partial t_1}{\partial r} + u\frac{\partial u_1}{\partial r} + t_1\frac{\partial t}{\partial r} + u_1\frac{\partial u}{\partial r}\right) - 2(t t_1 + u u_1)\left(t\frac{\partial t}{\partial r} + u\frac{\partial u}{\partial r}\right)}{(t^2 + u^2)^2}$$

und wenn man für

$$\frac{\partial t}{\partial r},\quad \frac{\partial u}{\partial r},\quad \frac{\partial t_1}{\partial r},\quad \frac{\partial u_1}{\partial r}$$

ihre Werthe

$$\frac{t_1}{r},\quad \frac{u_1}{r},\quad \frac{t_2}{r},\quad \frac{u_2}{r}$$

einsetzt, so wird:

$$y = \frac{(t^2 + u^2)(t t_2 + u u_2 + t_1^2 + u_1^2) - 2(t t_1 + u u_1)^2}{r(t^2 + u^2)^2}$$

Diejenigen Glieder von $u$, $t_1$, $u_1$, $t_2$, $u_2$, welche zu $p = 0$ gehören, verschwinden ganz, da in $u$: $\sin \widehat{pq}$, in $t_1$, $u_1$, $t_2$, $u_2$ aber unter der Summe der Factor $p$ vorkommt; aus diesem Grunde kommt im Zähler kein mit $r^0$ multiplicirtes Glied vor, und derselbe ist durch $r$ theilbar; man hat:

$$q = \frac{M}{(t^2 + u^2)^2}$$

wo $M$ eine leicht zu bestimmende ganze Function von $r$, $\sin q$ und $\cos q$ ist.

Wir betrachten jetzt das Doppel-Integral:

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} y\,dq\,dr,$$

wo $R$ zunächst eine beliebige Constante sei. Giebt es nun zwei zusammengehörige Werthe von $r$ und $q$, wo $r$ zwischen 0 und $R$ liegt, und welche den Ausdruck $f(x)$ verschwinden machen, d. h. hat Gleichung $f(x) = 0$ eine Wurzel, deren Modul zwischen 0 und $R$ liegt, so wird für diese Werthe von $r$ und $q$:

$$t = u = 0,$$

also

$$y = \infty.$$

Unser Integral geht dann durch die Unendlichkeit und es ist nach einem bekannten Satz der Integralrechnung in diesem Falle, aber auch nur in diesem möglich, dass bei der Umkehrung der Ordnung des Integrirens unser Integral verschiedene Werthe annimmt. Geschieht letzteres also, so muss nothwendig auch die Gleichung

$$f(x) = 0$$

eine Wurzel in den bezeichneten Grenzen haben, denn $y$ kann nur unter dieser Bedingung unendlich werden, da nur dann der Nenner $(t^2 + u^2)^2$ gleich Null wird.

Es ist nun:

$$\int y\,dq = v = \frac{t u_1 - u t_1}{r(t^2 + u^2)}.$$

Setzt man in den Werth von $v$ zuerst $2\pi$ und dann 0, so geben beide Ausdrücke einzeln Null, da

$$\sin 2p\pi = \sin 0 = 0$$

ist, also:

$$\int_0^{2\pi} y\,dq = 0$$

und

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} y\,dq = 0.$$

Vertauschen wir jetzt die Grenzen In:

$$\int y\,dr = w = \frac{t t_1 + u u_1}{t^2 + u^2}$$

für $r$ Null setzend, erhält man auch $w = 0$, also

$$\int_0^R y\,dr = \frac{t t_1 + u u_1}{t^2 + u^2},$$

wo in den entsprechenden Ausdrücken $R$ für $r$ zu substituiren ist. Man hat dann:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^R y\,dr\,dq = \int_0^{2\pi} \frac{t t_1 + u u_1}{t^2 + u^2}\,dq.$$

Giebt es nun einen Werth von $R$, für welchen der Ausdruck $w = \frac{t t_1 + u u_1}{t^2 + u^2}$ für

jeden Werth von $\varphi$ dasselbe Zeichen hat, so kann das Integral nicht verschwinden. Es hat dann in der That die Umkehrung der Ordnung des Integrirens zu einem von Null abweichenden Werthe geführt, und Gleichung $f(x)=0$ hat eine Wurzel. Es lässt sich aber die Möglichkeit eines solchen Werthes von $R$ auf folgende Art beweisen:

Sei

$$T=\Sigma A_p r^p \cos\left(\frac{\pi}{4}+\widehat{n-p}\varphi\right)$$

$$U=\Sigma A_p r^p \sin\left(\frac{\pi}{4}+\widehat{n-p}\varphi\right)$$

$$T_1=\Sigma p A_p r^p \cos\left(\frac{\pi}{4}+\widehat{n-p}\varphi\right)$$

$$U_1=\Sigma p A_p r^p \sin\left(\frac{\pi}{4}+\widehat{n-p}\varphi\right)$$

Multiplicirt man $T$ mit $\cos\left(n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$ und $U$ mit $\sin\left(n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$ und addirt, so erhält man:

$$T\cos\left(n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+U\sin\left(n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=t.$$

Multiplicirt man aber $T$ mit $\sin\left(n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$ und $U$ mit $\cos\left(n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)$ und subtrahirt, so kommt:

$$T\sin\left(n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-U\cos\left(n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=u;$$

in derselben Weise ergiebt sich:

$$T_1\cos\left(n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)+U_1\sin\left(n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=t_1$$

$$T_1\sin\left(n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)-U_1\cos\left(n\varphi+\frac{\pi}{4}\right)=u_1,$$

und aus diesen Formeln folgt:

$$tt_1+uu_1=TT_1+UU_1$$

und

$$t^2+u^2=T^2+U^2,$$

also auch:

$$w=\frac{TT_1+UU_1}{T^2}$$

Dieser Ausdruck ist positiv, wenn $T, U, T_1, U_1$ positiv sind. Es handelt sich also darum, einen Werth von $R$ zu finden, der diese Ausdrücke für jedes $\varphi$ positiv macht. — Wir schreiben jetzt $A_n=1$, $A_{n-1}=A$, $A_{n-2}=B$, $A_{n-3}=C$ u. s. w., so wird:

$$T=r^n\cos\frac{\pi}{4}+r^{n-1}A\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)+r^{n-2}B\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\varphi\right)+r^{n-3}C\cos\left(\frac{\pi}{4}+3\varphi\right)+\dots,$$

$$U=r^n\sin\frac{\pi}{4}+r^{n-1}A\sin\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right)+r^{n-2}B\sin\left(\frac{\pi}{4}+2\varphi\right)+r^{n-3}C\sin\left(\frac{\pi}{4}+3\varphi\right)+\dots$$

Es ist aber:

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

also

$$r^n\cos\frac{\pi}{4}=\frac{nr^n}{n\sqrt{2}}$$

und folglich:

$$T=\frac{r^{n-1}}{n\sqrt{2}}(r+A\varepsilon_1 n\sqrt{2})+\frac{r^{n-2}}{n\sqrt{2}}(r^2+B\varepsilon_2 n\sqrt{2})+\frac{r^{n-3}}{n\sqrt{2}}(r^3+C\varepsilon_3 n\sqrt{2})+\dots$$

wo die Ausdrücke $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \dots$ positive oder negative echte Brüche bedeuten; die ersten Glieder jeder Klammer addirt geben nämlich $\frac{nr^n}{n\sqrt{2}}$ also das erste Glied von $T$, während die letzten Glieder der Klammern die übrigen Glieder von $T$ ergeben. Einen ganz ähnlichen Ausdruck erhält man für $U$, da $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$, und die sinus wie die cosinus stets echte Brüche sind. Es sind folglich nun $T$ und $U$ immer positiv, wenn

$$r>An\sqrt{2},\ r^2>Bn\sqrt{2},\ r^3>Cn\sqrt{2}\dots$$

d. h. wenn $r$ grösser als der absolut grösste Werth der Ausdrücke:

$$A\cdot n\sqrt{2},\ \sqrt{B\cdot n\sqrt{2}},\ \sqrt[3]{Cn\sqrt{2}}\dots$$

ist.

Für einen solchen Werth sind aber auch $T_1$ und $U_1$ positiv, denn es ist:

$$T_1 = nr^n \cos\frac{\pi}{4} + (n-1)r^{n-1}A\cos\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) + (n-2)r^{n-2}B\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\varphi\right) + \ldots$$

oder

$$T_1 = \frac{r^{n-1}}{\sqrt{2}}\left(r+(n-1)\sqrt{2}A\varepsilon_1\right) + \frac{r^{n-2}}{\sqrt{2}}\left(r^2+(n-2)\sqrt{2}B\varepsilon_2\right) + \frac{r^{n-3}}{\sqrt{2}}\left(r^3+(n-3)\sqrt{2}C\varepsilon^3\right) + \ldots$$

und ein ähnlicher Ausdruck findet auch für $U_1$ statt. Damit dieser Ausdruck stets positiv sei, muss $r$ grösser sein als der absolut grösste Werth von:

$$(n-1)\sqrt{2}A,\ \sqrt{(n-2)\sqrt{2}B},\ \sqrt[3]{(n-3)\sqrt{2}C}\ldots$$

Dies jedoch ist schon der Fall, wenn, wie oben angenommen, $r$ grösser als der grösste Werth von $An\sqrt{2}$, $\sqrt{Bn\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{Cn\sqrt{2}}$ u. s. w. ist, es kann also unser Integral nicht Null sein, und $t^2+u^2$ oder $t$ und $u$ werde gleich Null für einen Werth von $x$, dessen Modul innerhalb der Grenzen 0 und $R$ liegt, wenn man $R$ hinreichend gross nimmt; es ist also $f(x)$ einmal gleich Null für einen complexen Werth von $x$, was zu beweisen war.

Dieser Beweis gilt allerdings zunächst nur, wenn die Coefficienten der Gleichung reell sind, er lässt sich aber auch leicht auf den Fall ausdehnen, wo complexe Coefficienten vorkommen. Seien nämlich in $\Sigma A_p x^p$ in der That die $A$ complexe Zahlen, setze man $x=y+zi$, und trenne Reelles und Imaginäres, so kommt:

$$\Sigma A_p x^p = F(y,z)+i\varphi(y,z),$$

wo die algebraischen ganzen Functionen $F$ und $\varphi$ reelle Coefficienten haben. Setzt man nun einzeln:

$$F(y,z)=0,\quad \varphi(y,z)=0,$$

so lässt sich aus der Verbindung dieser Gleichungen, indem man $z$ eliminirt, jedenfalls nach unserm Satze ein Werth von $y=\alpha+\beta i$, und das zugehörige $z=\gamma+\delta i$ ableiten; es muss dann der Ausdruck $x=y+zi=\alpha-\delta+i(\beta+\gamma)$ die Gleichung

$$\Sigma A_p x^p = 0$$

erfüllen.

4) Ist nun $f(\alpha_2)=0$, so ist als

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_1(x),$$

wo $f_1(x)$ eine ganze rationale Function von $x$ ist, die einen Grad niedriger als $f(x)$ ist. Da auch $f_1(x)$ für einen Werth $\alpha_2$ von $x$ Null werden muss, so kommt

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)f_2(x)$$

und indem man so fortfährt

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ \ldots\ (x-\alpha_n)\,C,$$

wenn vorausgesetzt wird, dass $f(x)$ vom $n$ten Grade ist. $C$ wird dann eine Function vom Grade Null, d. h. eine Constante sein. Es lässt sich eher auch leicht beweisen, dass keine andre Zerlegung von $f(x)$ in lineäre Factoren möglich ist. Denn sei:

$$f(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\ \ldots\ (x-\beta_n)\,D,$$

so wäre nach dem Obigen z. B.

$$f(\beta_1)=0;$$

da aber

$$f(\beta_1)=(\beta_1-\alpha_1)(\beta_1-\alpha_2)\ \ldots\ (\beta_n-\alpha_n)\,C$$

ist, so müsste einer der Factoren $\beta_1-\alpha_s$ gleich Null sein, woraus

$$\beta_1=\alpha_s$$

folgt, und da dies für jedes $\beta$ gilt, so sind die $\beta$ mit den $\alpha$ identisch.

Seien jetzt alle Coefficienten von $f(x)$ reell. Die Ausdrücke $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ können reell oder complex sein. Sei z. B. $\alpha_1$ complex und gleich $r\cos\varphi + ir\sin\varphi$, so ist in:

$$f(x)=\Sigma A_s x^s = \Sigma\left(A_s r^s \cos\widehat{s\varphi} + iA_s r^s \sin\widehat{s\varphi}\right)$$

sowohl $\Sigma A_s r^s \cos s\varphi$ als auch $\Sigma A_s r^s \sin s\varphi$ einzeln gleich Null zu setzen, und hieraus folgt, dass $\alpha_2 = r\cos\varphi - ir\sin\varphi$ ebenfalls eine Wurzel unserer Gleichung sein muss.

Jedem complexen Factor von $f(x)$ $x-a-bi$ entspricht also ein andrer $x-a+bi$, und beide geben das Product

$$(x-a)^2+b^2.$$

$a$ und $b$ sind hier reell; also alle imaginären Factoren lassen zu zweien sich auf diese Form zurückführen, von den reellen aber immer je 2 ganz beliebige sich zu einem quadratischen Factor vereinen. Hieraus folgt, dass wenn die höchste Potenz von $x$ von grader Ord-

nung ist, sich die Gleichung in quadratische Factoren mit reellen Coefficienten zerlegen lässt. Ist die Ordnung ungrade, so muss ein linearer Factor wenigstens reell sein, da ja, wie wir gesehen haben, die imaginären Factoren paarweise vorkommen müssen.

5) Nur in wenigen Fällen lässt sich die Zerlegung in quadratische Factoren wirklich genau durchführen. Am leichtesten findet dies bei dem 2gliedrigen Ausdruck

$$x^n + a$$

statt, mit dem wir uns jetzt beschäftigen wollen. Es sind hierbei jedoch mehrere Fälle zu unterscheiden. Sei zunächst gegeben:

$$x^{2n} - a^{2n}$$

Die Gleichung

$$x^{2n} - a^{2n} = 0$$

führt zu den Wurzeln

$$x = a\sqrt[2n]{1}$$

wo

$$\sqrt[2n]{1} = e^{\frac{s\pi i}{n}}$$

und $s$ eine beliebige ganze positive oder negative Zahl ist. Da aber

$$e^{\left(2-\frac{s}{n}\right)\pi i} = e^{-\frac{s}{n}\pi i}$$

und

$$e^{\left(2+\frac{s}{n}\right)\pi i} = e^{\frac{s}{n}\pi i}$$

ist, so kann man sich $s$ immer als zwischen $-(n-1)$ und $+n$ einschliesslich liegend denken, denn jeder andre Werth von $s$ gibt der Exponentialgrösse einen Werth, welcher einem aus dieser Reihe gleich ist, und da die Anzahl dieser Wurzelwerthe von $x$ gleich dem Grade der Gleichung ist, so kann keine Doppelwurzel darunter sein. Die Wurzeln unserer Gleichung sind also:

$$x = ae^{\frac{s\pi i}{n}},$$

wo $s$ einen der angeführten Werthe hat und aus diesem Grunde:

$$x^{2n} - a^{2n} = \left(x - ae^{\frac{\pi i}{n}}\right)\left(x - ae^{\frac{-\pi i}{n}}\right)\left(x - ae^{\frac{2\pi i}{n}}\right)\left(x - ae^{\frac{-2\pi i}{n}}\right) \cdots\cdots$$
$$\left(x - ae^{\frac{(n-1)\pi i}{n}}\right)\left(x - ae^{\frac{-(n-1)\pi i}{n}}\right)(x-a)(x+a).$$

Es sind nämlich die entsprechenden positiven und negativen Exponenten von $e$ zusammengestellt und die den Werthen $s=0$ und $s=n$ entsprechenden Factoren zuletzt genommen. Man hat nun:

$$e^{\frac{s\pi i}{n}} = \cos\frac{s\pi}{n} + i\sin\frac{s\pi}{n}$$

$$e^{\frac{-s\pi i}{n}} = \cos\frac{s\pi}{n} - i\sin\frac{s\pi}{n},$$

also:

$$\left(x - ae^{\frac{s\pi i}{n}}\right)\left(x - ae^{\frac{-s\pi i}{n}}\right) = (x-a)^2\cos\frac{s\pi}{n}^2 + a^2\sin\frac{s\pi}{n}^2 = x^2 - 2ax\cos\frac{s\pi}{n} + a^2$$

also:

$$x^{2n} - a^{2n} = (x^2 - a^2)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{n} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{n} + a^2\right)\ldots$$
$$\left(x^2 - 2ax\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + a^2\right).$$

Sei jetzt

$$x^{2n+1} - a^{2n+1}$$

der zu zerlegende Ausdruck, so sind die Wurzeln der Gleichung

$$x^{2n+1} - a^{2n+1} = 0$$

von der Form

$$x = a\,e^{\frac{2s\,\pi i}{2n+1}} = a\sqrt[2n+1]{1},$$

wo $s$ jeden der Werthe von $-n$ bis $+n$ annimmt; es wird also:

$$x^{2n+1} - a^{2n+1} = (x-a)\left(x - a e^{\frac{2\pi i}{2n+1}}\right)\left(x - a e^{\frac{-2\pi i}{2n+1}}\right)\left(x - a e^{\frac{4\pi i}{2n+1}}\right)$$
$$\left(x - a e^{\frac{-4\pi i}{2n+1}}\right) \cdots \left(x - a e^{\frac{2n\pi i}{2n+1}}\right)\left(x - a e^{\frac{-2n\pi i}{2n+1}}\right)$$

oder, wenn man die Factoren zu zweien mit einander multiplicirt:

$$x^{2n+1} - a^{2n+1} = (x-a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{2n+1} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{2n+1} + a^2\right)$$
$$\ldots\ldots\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + a^2\right).$$

In gleicher Weise lassen sich die Ausdrücke

$$x^{2n} + a^{2n}, \quad x^{2n+1} + a^{2n+1}$$

zerlegen. Der erstere Ausdruck gleich Null gesetzt gibt nämlich

$$x = a\sqrt[2n]{-1} = a e^{\frac{2s+1\,\pi i}{2n}}$$

und der letztere

$$x = a\sqrt[2n+1]{-1} = a e^{\frac{2s+1\,\pi i}{2n+1}}.$$

Im ersteren hat man für $s$ alle Werthe von $-n$ bis $+(n-1)$, im letzteren von $-n$ bis $+n$ zu setzen, und erhält indem man ähnlich wie oben gruppirt:

$$x^{2n} + a^{2n} = \left(x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{2n} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{2n} + a^2\right)\ldots\ldots$$
$$\left(x^2 - 2ax\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} + a^2\right).$$

Es sind die Werthe von $s = 0$ mit $-1$, 1 mit $-2$ . . . , $n-1$ mit $-n$ entsprechend verbunden, und

$$x^{2n+1} + a^{2n+1} = (x+a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{\pi}{2n+1} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3\pi}{2n+1} + a^2\right)\ldots$$
$$\left(x^2 - 2ax\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} + a^2\right)$$

6) Functionen von der Form

$$x^{2p} + 2ax^p + b$$

lassen sich zunächst durch Auflösung einer quadratischen Gleichung in 2 Factoren, und dann nach der eben gegebenen Methode weiter zerlegen. Am einfachsten geschieht dies mit den Ausdrücken

$$x^{2p} - 2a^p x^p \cos\lambda + a^{2p}$$

und

$$x^{2p} + 2a^p x^p \cos\lambda + a^{2p}$$

von denen der erste gleich Null gesetzt gibt:

$$x^p = a^p\cos\lambda \pm a^p i \sin\lambda = a^p e^{\pm\lambda i},$$

also ist:

$$x^{2p} - 2a^p x^p \cos\lambda + a^{2p} = \left\{x^p - \left(a e^{\frac{\lambda i}{p}}\right)^p\right\}\left\{x^p - \left(a e^{\frac{-\lambda i}{p}}\right)^p\right\}$$

Der erste Factor gleich Null gesetzt gibt:

$$x = a e^{\frac{2s\pi + \lambda\, i}{p}}$$

der zweite

$$x = a e^{\frac{2s\pi - \lambda\, i}{p}}$$

Sei $p$ grade, also gleich $2n$, so nimmt $s$ alle Warthe von $-(n-1)$ bis $+n$, und wenn es ungrade gleich $2n+1$ ist, von $-n$ bis $+n$ an. Vereinigt man wieder je 2 Factoren, so ergibt sich:

$$x^{4n}-2a^{2n}x^{2n}\cos\lambda+a^{4n}=\left(x^2-2ax\cos\frac{\lambda}{2n}+a^2\right)\left(x^2+2ax\cos\frac{\lambda}{2n}+a^2\right)$$
$$\left(x^2-2ax\cos\frac{2\pi+\lambda}{2n}+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{2\pi-\lambda}{2n}+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{4\pi+\lambda}{2n}+a^2\right)$$
$$\left(x^2-2ax\cos\frac{4\pi-\lambda}{2n}+a^2\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\left(x^2-2ax\cos\frac{2(n-1)\ \pi+\lambda}{2n}+a^2\right)$$
$$\left(x^2-2ax\cos\frac{2(n-1)\ \pi-\lambda}{2n}+a^2\right).$$

Die ersten beiden Factoren rechts sind entstanden, indem man in $x=ae^{\frac{2s\pi+\lambda i}{p}}$ die Werthe $s=0$ und $s=+n$ mit den entsprechenden Werthen von $x=ae^{\frac{2s\pi-\lambda i}{p}}$ verbunden hat. In den übrigen Factoren sind aus jedem der beiden Werthe von $x$ immer die Werthe von $s$: $+s$ und $-s$ zusammengenommen. Sei nun $p$ ungrade, also gleich $2n+1$, so nimmt $s$ alle Werthe von $-n$ bis $+n$ an, verbindet man die den Werthen $s$ und $-s$ entsprechenden Factoren, und die beiden $s=0$ entsprechenden aus beiden Werthen von $x$, so kommt:

$$x^{4n+2}-2a^{2n+1}x^{2n+1}\cos\lambda+a^{4n+2}=\left(x^2-2ax\cos\frac{\lambda}{2n+1}+a^2\right)$$
$$\left(x^2-2ax\cos\frac{2\pi+\lambda}{2n+1}+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{2\pi-\lambda}{2n+1}+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{4\pi+\lambda}{2n+1}+a^2\right)$$
$$\left(x^2-2ax\cos\frac{4\pi-\lambda}{2n+1}+a^2\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\left(x^2-2ax\cos\frac{2n\pi+\lambda}{2n+1}+a^2\right)$$
$$\left(x^2-2ax\cos\frac{2n\pi-\lambda}{2n+1}+a^2\right).$$

Untersuchen wir jetzt den Ausdruck

$$x^{2p}+2a^px^p\cos\lambda+a^{2p}$$

welcher gleich Null gesetzt ergibt

$$x^p=-a^p(\cos\lambda\pm i\sin\lambda)=-a^pe^{(\pi\pm\lambda)i}.$$

also entweder:

$$x=ae^{\frac{(2s+1)\pi+\lambda i}{p}}$$

oder

$$x=ae^{\frac{(2s+1)\ \pi-\lambda i}{p}}.$$

Hierin setzen wir zuerst $p=2n$ und lassen $s$ alle Werthe von $-n$ bis $+(n-1)$ annehmen; von diesem gruppiren wir folgende Werthe von $s$ zusammen:

0 mit $-1$, 1 mit $-2$, 2 mit $-3$ u. s. w.,

so dass man erhält:

$$x^{4n}+2a^{2n}x^{2n}\cos\lambda+a^{4n}=\left(x^2-2ax\cos\frac{\pi+\lambda}{2n}+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{\pi-\lambda}{2n}+a^2\right)$$
$$\left(x^2-2ax\cos\frac{3\pi+\lambda}{2n}+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{3\pi-\lambda}{2n}+a^2\right),\left(x^2-2xa\cos\frac{5\pi+\lambda}{2n}+a^2\right)$$
$$\left(x^2-2ax\cos\frac{5\pi-\lambda}{2n}+a^2\right)\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;\left(x^2-2ax\cos\frac{\overline{2n-1}\,\pi+\lambda}{2n+1}+a^2\right)$$
$$\left(x^2-2ax\cos\frac{\overline{2n-1}\,\pi-\lambda}{2n+1}+a^2\right).$$

Ist dagegen $p=2n+1$, so nimmt $s$ alle Werthe von $-n$ bis $+n$ an und indem man ganz wie vorhin verbindet, bleiben dann die beiden $s=n$ entsprechenden Werthe

von $x$ frei; und die entstehenden beiden linearen Factoren werden mit einander multiplicirt, man erhält:

$$x^{4n+2} + 2a^{2n+1}x^{2n+1}\cos\lambda + a^{4n+2} = \left(x^2 + 2ax\cos\lambda + a^2\right)$$

$$\left(x^2 - 2ax\cos\frac{\pi+\lambda}{2n+1} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{\pi-\lambda}{2n+1} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3\pi+\lambda}{2n+1} + a^2\right)$$

$$\left(x^2 - 2ax\cos\frac{3\pi-\lambda}{2n+1} + a^2\right) \ldots\ldots\ldots\ldots \left(x^2 - 2ax\cos\frac{\widehat{2n-1}\,\pi+\lambda}{2n+1} + a^2\right)$$

$$\left(x^2 - 2ax\cos\frac{\widehat{2n-1}\,\pi-\lambda}{2n+1} + a^2\right).$$

7) Man kann indess der Zerlegung in quadratische Factoren eine weit grössere Allgemeinheit geben, indem man sie nicht allein auf algebraische, sondern auch auf transcendente Functionen bezieht, vorausgesetzt, dass diese Functionen eindeutig sind. Also auf Functionen wie $\sqrt{(x)}$, die 2 Werthe haben, und wie $\lg(x)$, die unendlich viel Werthe haben, ist diese Verallgemeinerung nicht zu übertragen.

Unter Function von $x$ ist hier jede Grösse $f(x)$ verstanden, die der Art von $x$ abhängt, dass wenn man $x = p + qi$ setzt, also eine complexe Grösse darunter versteht:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = -i\frac{\partial f}{\partial q}$$

also $f(x)$ so beschaffen ist, dass der Differenzialquotient davon unabhängig von der Art des unendlich kleinen Zuwachses wird, also gleiches Resultat giebt, man möge denselben als reell, rein imaginär oder complex betrachten. Man setzt dies in der Regel bei den Functionen voraus, indessen sind hier einige Betrachtungen nothwendig, die man unter dem Artikel Quantität (imaginäre) nachsehen möge. Unser Satz für eindeutige Functionen lautet nun:

Jede eindeutige Function $f(x)$ von $x$ lässt sich auf die Form bringen:

$$f(x) = \frac{\left(1-\frac{x}{\alpha_1}\right)^{n_1}\left(1-\frac{x}{\alpha_2}\right)^{n_2} \cdots\cdots \left(1-\frac{x}{\alpha_s}\right)^{n_s}}{\left(1-\frac{x}{\beta_1}\right)^{p_1}\left(1-\frac{x}{\beta_2}\right)^{p_2} \cdots\cdots \left(1-\frac{x}{\alpha_s}\right)^{p_s}}\,\varphi(x),$$

wo $\varphi(x)$ eine Function von $x$ ist, die für keinen der Werthe

$$x = \alpha_1,\ x = \alpha_2 \ldots x = \alpha_s$$

Null, und für keinen der Werthe

$$x = \beta_1,\ x = \beta_2 \ldots x = \beta_q$$

unendlich wird. Die Ausdrücke $n_1$, $n_2$ ... $p_1$, $p_2$ stellen ganze positive Zahlen vor, die Ausdrücke $\alpha$ sind die Wurzeln der Gleichung

$$f(x) = 0$$

und die Ausdrücke $\beta$ die der Gleichung

$$\frac{1}{f(x)} = 0.$$

Hat also jede dieser Gleichungen unendlich viel Wurzeln, so lässt sich aus diesen Betrachtungen die Zerlegung von $f(x)$ in ein unendliches Product herstellen. Ist übrigens $f(x)$ eine mit reellen Coefficienten versehene Reihe, oder der Quotient zweier solcher Reihen, so lassen sich die Wurzeln von $f(x) = 0$ und $\frac{1}{f(x)} = 0$ in so weit sie imaginär sind, ganz, wie oben gezeigt wurde, zu 2en, in quadratische Factoren ordnen.

8) Zum Beweise unseres Satzes sind einige Hülfssätze nöthig, bei denen wir auf Betrachtungen Rücksicht nehmen müssen, die in dem Artikel: imaginäre Quantitäten nachzuschlagen sind.

Satz I. Jede eindeutige Function von $x$ wird wenigstens einmal unendlich für einen complexen Werth von $x$, der jedoch auch selbst unendlich gross sein kann.

Beweis. Wir setzen hierbei voraus, dass die Function nur dann discontinuirlich wird, wenn sie unendliche Werthe annimmt. Es lässt sich dann $f(x)$ für alle Werthe von $x$ in eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x$ entwickeln, deren Modul kleiner ist, als der kleinste, für welchen $f(x)$ aufhört endlich zu sein. (Siehe den Artikel Quantitäten (imaginäre). Angenommen nun $f(x)$ werde für keinen end-

lichen Werth von $x$ unendlich, so muss diese Reihe also immer convergiren. Diese Reihe ist aber die Maclaurin'sche:

$$f(x) = f(0) + xf'0 + \frac{x^2}{1\cdot 2}f''0 + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}f'''0 + \ldots + \frac{x^n}{1\ldots n}f^{(n)}0 + \ldots$$

Nach einer von Cauchy herrührenden Entwickelung nimmt sie aber auch die Form an (siehe den oben angeführten Artikel):

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} f(Re^{\varphi i})d\varphi + x\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{\varphi i})}{Re^{\varphi i}}d\varphi + x^2\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{\varphi i})}{R^2e^{2\varphi i}}d\varphi + \ldots\right.$$

$$\left. + x^n\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{\varphi i})}{R^n e^{n\varphi i}}d\varphi + \ldots\right)$$

wo $R$ eine beliebige reelle Grösse ist. Aus der Vereinigung beider Gleichungen folgt:

$$f^{(n)}0 = 1\cdot 2\cdot 3\ldots n\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{\varphi i})d\varphi}{R^n e^{n\varphi i}}$$

Wird nun $f(x)$ überhaupt nie unendlich, so muss $f(x)$ irgend einen Werth haben, dessen Modul der grösstmögliche $M$ sei, und es ist dann offenbar der Modul von $\frac{f(Re^{\varphi i})}{e^{n\varphi i}}$ kleiner als $M$ oder höchstens gleich $M$, also auch der Modul von

$$\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{\varphi i})d\varphi}{e^{n\varphi i}} \leqq \int_0^{2\pi} Md\varphi = 2M\pi,$$

also wenn $A$ der Modul von $f^{(n)}0$ ist, auch:

$$A \leqq \frac{2M\pi\cdot 1\cdot 2\cdot 3\ldots n}{R^n}.$$

Da man aber $R$ beliebig gross machen kann, so muss $A$ ins Unendliche abnehmen, folglich

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Es wären also alle Differenzialquotienten Null und folglich, wie die Maclaurin'sche Reihe zeigt:

$$f(x) = f(0)$$

d. h. gleich einer Constanten.

**Satz II.** Jede eindeutige Function $f(x)$ wird wenigstens einmal gleich Null.

**Beweis.** Nach dem vorigen Satze wird die eindeutige Function $\frac{1}{f(x)}$ einmal gleich $\infty$, was voraussetzt, dass

$$f(x) = 0$$

geworden ist. Dieser Satz enthält die Verallgemeinerung des in 2 und 3 bewiesenen Satzes, dass jede algebraische Gleichung eine Wurzel habe, es gilt derselbe also auch für transcendente Gleichungen.

**Satz III.** Wenn der Werth $x = a$ die Gleichung

$$f(x) = 0$$

erfüllt, wo $f(x)$ wieder eine eindeutige Function ist, so ist auch allgemein

$$f(x) = (x-a)^n f_1(x),$$

wo $f_1(a)$ nicht gleich Null, $n$ eine ganz positive Zahl ist.

**Beweis.** $f(x) = f(a + x - a)$ lässt sich für Werthe von $x - a$, deren Modul eine gewisse Grenze nicht überschreitet, nach dem Taylorschen Satze entwickeln. Also:

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(a) + \ldots$$

Es ist aber $f(a) = 0$. Ausserdem kann noch eine Anzahl der ersten Differenzialquotienten Null sein, wenn $x = a$ wird. Sei nun $f^{(n)}(a)$ der erste Differenzialquotient, der nicht verschwindet, so ist offenbar:

$$f(x) = \frac{(x-a)^n}{1\cdot 2\ldots n}\left(f^{(n)}(a) + \frac{x-a}{n+1}f^{(n+1)}(a) + \frac{(x-a)^2}{(n+1)(n+2)}f^{(n+2)}(a) + \ldots\right)$$

Der Ausdruck in der Klammer wird $f^{(n)}(a)$ für $x = a$ geben, also nicht verschwinden: woraus unser Satz sogleich folgt.

**Satz IV.** Wenn der Werth $x=\beta$ die Gleichung

$$f(x)=\infty \text{ oder } \frac{1}{f(x)}=0$$

erfüllt, so ist

$$f(x)=\frac{\varphi_1(x)}{(x-\beta)^p},$$

wo $\varphi_1(\beta)$ nicht unendlich ist.

**Beweis.** Nach dem vorigen Satze ist, wenn wir

$$\frac{1}{f(x)}=\psi(x)$$

setzen, da

$$\psi(\beta)=0$$

wird:

$$\psi(x)=(x-\beta)^p\psi_1 x$$

wo $\psi_1(\beta)$ nicht gleich Null und $p$ eine ganze Zahl ist, also:

$$f(x)=\frac{1}{\psi(x)}=\frac{\psi_2(x)}{(x-\beta)^p}$$

wo

$$\psi_2(x)=\frac{1}{\psi_1(x)}$$

für $x=\beta$ nicht verschwindet.

Aus diesen vier Sätzen folgt der unserige augenblicklich. Man hat:

$$f(x)=(x-\alpha_1)^{n_1} f_1(x)=(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2} f_2(x)=(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}(x-\alpha_3)^{n_3}$$

$$\ldots\ldots f_3(x)=\ldots=(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\ldots\ldots(x-\alpha_s)^{n_s} f_s(x),$$

wenn $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_s$ Wurzeln der Gleichung $f(x)=0$ sind, denn es muss dann $\alpha_2$ auch eine Wurzel der Gleichung

$$f_1(x)=0$$

sein, folglich $f_1(x)=(x-\alpha_2)f_2(x)$; $\alpha_3$ ist eine Wurzel der Gleichung

$$f_2(x)=0$$

u. s. w. Ferner ist, wenn

$$f(\beta_1)=\infty$$

ist, auch

$$f_s(\beta_1)=\infty$$

und

$$\frac{1}{f_s(\beta_1)}=0$$

also:

$$f(x)=\frac{(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\ \ldots\ (x-\alpha\,)^{n_s}}{(x-\beta_1)^{p_1}}\varphi_1(x)$$

$$=\frac{(x-\alpha_1)^{n_1}(x-\alpha_2)^{n_2}\ \ldots\ (x-\alpha_s)^{n_s}}{(x-\beta_1)^{p_1}(x-\beta_2)^{p_2}\ \ldots\ (x-\beta_s)^{p_s}}\varphi_s x,$$

ein Ausdruck, der sich leicht auf die in 7 gegebene Form bringen lässt.

9) Der Beweis des Satzes I, auf den auch Satz II beruht, ist hier nach *Briot et Bouquet*, *Théorie des fonctions doublement périodiques* gegeben; obgleich einfach, setzt er doch Begriffe aus der Integralrechnung complexer Grössen voraus. Wir wollen hier daher versuchen, noch einen andern elementaren Beweis zu führen.

Wenn $f(x)$ nicht unendlich wird, so muss es irgend einen Werth $\lambda$ von $x$ geben, für den der reelle Theil von $f(x)$ ein Maximum wird. Setzen wir nun

$$x=\lambda+b,$$

wo $x$ beliebig ist, so wird, wenn $f(x)$ nie unendlich ist, immer eine Entwickelung nach positiven ganzen Potenzen von $h$ möglich sein. Wir setzen:

$$f(x)=Re^{\varphi i},\ f(\lambda)=\varrho e^{\alpha i},\ f^{(n)}(\lambda)=\varrho e^{\alpha_n i},\ \ h=re^{\vartheta i},$$

also:

$$Re^{\varphi i}=\varrho e^{\alpha i}+r\varrho_1 e^{(\vartheta+\alpha_1)i}+\frac{r^2\varrho_2}{1\cdot 2}e^{(2\vartheta+\alpha_2)i}+\ldots+\frac{r^n\varrho_n e^{(n\vartheta+\alpha_n)i}}{1\cdot 2\ldots n}+\ldots$$

Es können möglicher Weise einige der Grössen $\varrho_1\ \varrho_2 \ldots \varrho_s$ verschwinden; sei $\varrho_n$ die erste, wo dies nicht stattfindet, also:

$$Re^{\varphi i}=\varrho e^{\alpha i}\frac{+r^n}{1\cdot 2\cdots n}\left(\varrho_n e^{(n\vartheta+\alpha_n)i}+\frac{\varrho_{n+1}}{n+1} r e^{(\overline{n+1}\,\vartheta+\alpha_{n+1})i}+\ldots\right)$$

Bezeichnen wir nun mit

$$R_1\ \varphi_1,\ R_2\ \varphi_2$$

diejenigen Werthe von $R$ und $\varphi$, welche entstehen, wenn wir bezüglich $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{n}$ setzen, so ist:

$$R_1 e^{\varphi_1 i} = \varrho e^{\alpha i} + \frac{r^n}{1\cdot 2\cdots n}\left(\varrho_n e^{\alpha_n i} + \varrho_{\frac{n+1}{n+1}} r e^{\alpha_{n+1} i} + \ldots\right)$$

$$R_2 e^{\varphi_2 i} = \varrho e^{\alpha i} + \frac{r^n}{1\cdot 2\cdots n}\left(-\varrho_n e^{\alpha_n i} + \varrho_{\frac{n+1}{n+1}} r e^{\left(\frac{n+1}{n}\pi + \alpha_{n+1}\right) i} + \ldots\right)$$

Man kann nun das beliebige $r$ so klein nehmen, dass das erste Glied in den Klammern die übrigen dermaassen übertrifft, dass es das Vorzeichen des reellen Theils derselben bestimmt, denn die übrigen Glieder sind alle mit Potenzen von $r$ multiplicirt. Die reellen Theile der ersten Glieder in den Klammern bei $R_1 e^{\varphi_1 i}$ und $R_2 e^{\varphi_2 i}$ haben aber entgegengesetzte Vorzeichen, und gilt dies daher von den ganzen Klammern; es folgt daraus, dass auch je die reellen Theile von

$$R_1 e^{\varphi_1 i} - \varrho e^{\alpha i}$$

und

$$R_2 e^{\varphi_2 i} - \varrho e^{\alpha i}$$

entgegengesetzte Vorzeichen haben. Diese Theile sind:

$$R_1 \cos\varphi_1 - \varrho\cos\alpha$$
$$R_2 \cos\varphi_2 - \varrho\cos\alpha.$$

Ist also

$$R_1 \cos\varphi_1 < \varrho\cos\alpha,$$

so ist

$$R_2 \cos\varphi > \varrho\cos\alpha.$$

Dies ist unmöglich, weil $\varrho\cos\alpha$ der reelle Theil von $f(\lambda)$, also ein Maximum war. Es ist also

$$\varrho_n = 0$$

d. h. der Modul aller Differenzialquotienten von $f(\lambda)$ verschwindet, und da:

$$f(x) = f(\lambda) + hf'\lambda + \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(\lambda) + \ldots,$$

so würde

$$f(x) = f(\lambda)$$

also einer Constanten gleich sein, in jedem andern Falle aber $f(x)$ wenigstens einmal unendlich werden.

## Quadratische Form (Zahlenlehre).

1) Quadratische Form heisst eine ganze algebraische Function der Variablen $x, y, z \ldots$, welche dieselben nur höchstens in zweiter Dimension enthält, also der Ausdruck:

$$ax^2 + bxy + cy^2 + \partial xz + ez^2 + \ldots + fx + qy + hz + \ldots + k.$$

Wir setzen voraus, dass die Coefficienten ganze Zahlen sind, und betrachten nur die in der Zahlenlehre besonders wichtigen homogenen binären Formen von der Gestalt

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

Wir haben hier den Coefficienten des mittleren Gliedes $2b$ als grade angenommen. Sollte dies nicht der Fall sein, so wird er grade gemacht, indem man die ganze Form mit 2 multiplicirt. Von Wichtigkeit für die ferneren Betrachtungen ist der Ausdruck:

$$D = b^2 - ac$$

den wir als Determinante bezeichnen. Wir wollen ferner die gegebene Form mit $f$ oder wenn es nöthig sein sollte mit $f(a, b, c)$ bezeichnen. Von Wichtigkeit ist namentlich der Uebergang von einer quadratischen Form auf andere ähnliche auf dem Wege linearer Substitution.

Durch lineare Substitution wird die Form $f$ in eine andere ähnliche Form verwandelt $f'$. Wir setzen nämlich:

1) $x = \alpha x' + \beta y'$
2) $y = \gamma x' + \delta x'$

so ist:

3) $f' + a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$

die sich aus der ersten ergebende Form, wo zu setzen ist:

$$a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2$$
$$c' = a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2$$
$$b' = a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta$$

Sei noch

$$D' = b'^2 - a'c'$$

die Determinante der zweiten Form, so ergibt sich leicht durch Einsetzen:

$$D' = D(\alpha\delta - \beta\gamma)^2$$

Wir bezeichnen die zweite durch lineare Substitution aus der ersten entstandene Form als in derselben enthalten. Bemerken wir noch, dass man schreiben kann:

$$af = a^2x^2 + 2abxy + (b^2 - D)y^2 = (ax + by)^2 - Dy^2.$$

2) Es wird jetzt die Frage gestellt: Wie müssen die Formen $f$ und $f'$ beschaffen sein, damit sowohl die zweite in der ersten, als auch die erste in der zweiten enthalten sei?

Damit das erstere stattfinde, war

$$D' = Du^2$$

wo

$$u = \alpha\delta - \beta\gamma$$

war zu setzen; es muss also der zweiten Bedingung wegen auch

$$D = D'v^2$$

sein, wo $v$ eine ganze Zahl ist. Die Multiplication beider Gleichungen gibt

$$DD' = DD'u^2v^2$$

also

$$u^2v^2 = 1.$$

Die Auflösung dieser Gleichung in ganzen Zahlen ist offenbar:

$$u = \pm 1 \text{ und } v = \pm 1$$

so dass also:

$$u = \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1.$$

wird.

Nun aber fragt sich noch, ob immer, wenn die letzte Gleichung stattfindet, auch jede der Formen wirklich unter der anderen enthalten ist.

Wegen der Gleichungen

$$x = \alpha x' + \beta y'$$
$$y = \gamma x' + \delta y'$$

ist offenbar

$$ux' = \delta\alpha - \beta y$$
$$uy' = -\gamma x + \alpha y$$

wie man augenblicklich durch Auflösen dieser Gleichungen ersieht, welches auch der Werth von

$$u = \alpha\delta - \beta\gamma$$

sei. Ist nun $u = \pm 1$, so ist

$$x' = \pm(\delta x - \beta y) \quad y' = \pm(-\gamma x + \alpha y);$$

also es findet in der That eine lineäre Substitution mit ganzen Coefficienten statt. Also die Bedingung $u = \pm 1$ ist für das Enthaltensein der Formen untereinander nothwendig und ausreichend. Zwei Formen dieser Art heissen äquivalent, die Substitutionen, durch welche eine der äquivalenten Formen $f$ in die andere $f'$, und die, durch welche $f'$ in $f$ übergeht, heissen entsprechende. Ist $u = +1$, so heissen die Formen eigentlich äquivalent, ist $u = -1$ uneigentlich; es ist also im erstern Falle $D' = D$, im letztern $D' = -D$.

Führt eine Substitution von

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

auf die Form

$$ax_1^2 + 2bx_1y_1 + cy_1^2$$

so sagt man, sie führe die Form auf sich selbst zurück.

3) Wenn zwei Formen einer dritten äquivalent sind, so sind alle drei äquivalent. — Dieser Satz folgt leicht aus folgenden Betrachtungen. Seien:

$$1) \quad ax^2 + 2bxy + cy^2$$
$$2) \quad a_1x_1^2 + 2b_1x_1y_1 + c_1y_1^2$$
$$3) \quad a_2x_2^2 + 2b_2x_2y_2 + c_2y_2^2$$

die drei Formen. Die Substitution, durch welche die erste in die zweite übergeht, sei:

$$4) \quad x = \alpha x_1 + \beta y_1, \; y = \gamma x_1 + \delta y_1$$

und die, durch welche die zweite in die dritte übergeht

$$5) \quad x_1 = \alpha_1 x_2 + \beta_1 y_2, \; y_1 = \gamma_1 x_2 + \delta_1 y_2$$

Setzt man die Werthe von $x_1$ und $y_1$ aus Formel 4 in 5 ein, so hat man eine lineäre Substitution, die von 1 zu 5 führt. Sind ausserdem $D, D_1, D_2$ die Determinanten von 1, 2, 3, so ist, wenn 1 mit 2 äquivalent ist

$$D = \pm D$$

und wenn 2 mit 3 äquivalent ist

$$D_1 = \pm D_2$$

d. h. 1 und 3 sind ebenfalls äquivalent. Diese Aequivalenz ist eine eigentliche, wenn die Aequivalenzen von 1 und 2 und 2 und 3 gleichartig (eigentlich oder uneigentlich) sind, im andern Falle ist die Aequivalenz von 1 und 3 ungleichartig.

Die Ausdrücke, die wir in Abschnitt 1) für $a', b', c'$ hingeschrieben hatten, zeigen, dass in den Formen 1 und 2 die gemeinschaftlichen Theiler von $a, b, c$ auch solche von $a', b', c'$ sind. Da im Falle der Aequivalenz, wo $a, b, c$ auf ähnliche Weise aus $a', b', c'$ entstehen, dieser Satz sich auch umkehren lässt, so folgt: — „dass der grösste gemeinschaftliche Theiler von $a, b, c$ auch der grösste von $a_1, b_1, c_1$ ist." Multiplicirt man den Ausdruck für $b$ in Abschnitt 1) noch mit 2, so sieht man, dass Gleiches auch für $a, 2b, c$ und $a_1, 2b_1, c_1$ gilt. — Nehmen wir jedoch an, dass $a, b, c$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben, d. h. wenn ein solcher vorhanden ist, dividiren wir durch denselben. Es ist also hierbei nicht ausgeschlossen, dass $a, 2b, c$ noch den Factor 2 gemein haben.

4) Wir wollen jetzt ermitteln, wie alle gleichartigen Substitutionen gefunden werden können, die von einer Form zu einer gegebenen aequivalenten führen. — Die Formen seien:

1) $f(a, b, c)$ 2) $f(a_1, b_1, c_1)$ worunter die Ausdrücke 1 und 2 des vorigen Abschnitts verstanden sind. Die Substitution, welche von 1 zu 2 führt, wird bezeichnet durch

3) $\begin{vmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{vmatrix}$. Ferner soll eine Substitution, die aus zwei andern entsteht, wie z. B. diejenige, welche im vorigen Abschnitte von 1 zu 3 führte, bezeichnet werden durch

$$\left[\begin{vmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{vmatrix}\right].$$

Es ist dann offenbar:

$$\left[\begin{vmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{vmatrix}\right] = \begin{vmatrix}(\alpha\alpha_1+\beta\gamma_1), & (\alpha\beta_1+\beta\delta_1)\\ (\gamma\alpha_1+\delta\gamma_1), & (\gamma\beta_1+\delta\delta_1)\end{vmatrix}$$

Nun lässt sich beweisen, dass wenn

4) $\begin{vmatrix}\lambda, & \mu\\ \nu, & \varrho\end{vmatrix}$ alle eigentlichen Substitutionen bedeutet, durch welche $f(a, b, c)$ in sich selbst übergeht und man jede dieser Substitutionen mit der in 3) combinirt, also

$$\left[\begin{vmatrix}\lambda, & \mu\\ \nu, & \varrho\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{vmatrix}\right]=\begin{vmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{vmatrix}$$

man alle gleichartigen Substitutionen erhält, durch welche $f(a, b, c)$ in $f(a_1 b_1 c_1)$ übergeht, und zwar jede nur einmal. — Denn zunächst kommt jede Substitution nur einmal vor, da die Gleichungen:

$$\alpha_1=\lambda\alpha+\mu\gamma,\ \beta_1=\lambda\beta+\mu\delta,\ \gamma_1=\nu\alpha+\varrho\gamma,\ \delta_1=\mu\beta+\varrho\delta$$

immer einen Werth von $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ ergeben.

Auch ist

$$\lambda\varrho-\mu\nu=1,$$

weil die Substitution eine eigentliche war; Es sind übrigens diese Werthe von $\lambda, \mu, \nu, \varrho$, wenn man

$$\alpha\delta-\beta\gamma=\varepsilon$$

setzt:

$$5)\ \lambda=\varepsilon(\alpha_1\delta-\beta_1\gamma),\ \nu=\varepsilon(\gamma_1\delta-\delta_1\gamma),\ \mu=\varepsilon(\beta_1\alpha-\alpha_1\beta),\ \varrho=\varepsilon(\delta_1\alpha-\gamma_1\beta)$$

Noch ist zu beweisen, dass wenn irgend eine Substitution $\begin{vmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{vmatrix}$ von $f(a, b, c)$ zu $f(a_1, b_1, c_1)$ führt, man diese aus $\begin{vmatrix}\lambda, & \mu\\ \nu, & \varrho\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{vmatrix}$ zusammengesetzt sich denken kann, wo $\begin{vmatrix}\lambda, & \mu\\ \nu, & \varrho\end{vmatrix}$ eine eigentliche Substitution ist, welche $f(a, b, c)$ auf sich selbst zurückführt. — Es ist zunächst:

$$(\lambda\varrho-\mu\nu)(\alpha\delta-\beta\gamma)=\alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1$$

wie in 2) bewiesen war. Da nun

$$\alpha\delta-\beta\gamma \text{ und } \alpha_1\delta_1-\beta_1\gamma_1 \text{ beide gleich } +1 \text{ oder } =-1$$

sind, da die Substitutionen gleichartig sein sollen, so ist

$$\lambda\varrho-\mu\nu=+1,$$

also die Substitution in der That eine eigentliche. Aber jede gegebene Substitution $\begin{vmatrix}\alpha_1, & \beta_1\\ \gamma_1, & \delta_1\end{vmatrix}$ kann ja auf diese Weise aus $\begin{vmatrix}\lambda, & \mu\\ \nu, & \varrho\end{vmatrix}$ und der andern gegebenen $\begin{vmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{vmatrix}$ zusammengesetzt werden, wenn man für $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ die obigen Werthe 5 nimmt. — Sei nun $\varphi$ die Form, in welche $f(a, b, c)$ durch Substitution $\begin{vmatrix}\lambda, & \mu\\ \nu, & \varrho\end{vmatrix}$ übergeht, so geht $\varphi$ durch Substitution $\begin{vmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{vmatrix}$ in $f(a_1, b_1, c_1)$, und durch dieselbe Substitution geht auch $f(a, b, c)$ in $f(a_1, b_1, c_1)$ über. Eine Substitution nun, durch welche $f(a_1 b_1 c_1)$ in $\varphi$ übergeht, kann vollständig durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ nach Abschnitt 2) bestimmt werden; auch durch letztere geht also $f(a_1, b_1, c_1)$ in $f(a, b, c)$ über, und folglich ist $f(a, b, c)=\varphi$, also die Substitution $\begin{vmatrix}\lambda, & \mu\\ \nu, & \varrho\end{vmatrix}$ führt $f(a, b, c)$ auf sich selbst zurück.

5) Durch den eben bewiesenen Satz ist die Aufgabe, alle gleichartigen Substitutionen zu finden, die von $f(a, b, c)$ zu $f(a_1, b_1, c_1)$ führen, auf die Aufgabe zurückgebracht, die eigentlichen Substitutionen zu finden, die $f(a, b, c)$ auf sich selbst zurückführen.

Es sei jetzt wieder

1) $f(a, b, c)=ax^2+2bxy+cy^2$

2) $x=\lambda x_1+\mu y_1,\ y=\nu x_1+\varrho y_1$

$$\lambda\varrho-\mu\nu=1.$$

Wir setzen voraus, dass die Determinante weder eine Quadratzahl noch gleich Null sei, verlangen jedoch noch nicht, dass $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ auch ganze Zahlen sind. Gleichung 1) mit $a$ multiplicirt gibt:

$$af=a^2x^2+2abxy+(b^2-D)y^2=(ax+(b+\sqrt{D})y)(ax+(b-\sqrt{D})y).$$

Setzt man aus 2 die Werthe für $x$ und $y$ ein, so kommt:

$$[(a\lambda+b\nu+\nu\sqrt{D})x_1+(a\mu+b\varrho+\varrho\sqrt{D})y_1]\;[(a\lambda+b\nu-\nu\sqrt{D})x_1+(a\mu+b\varrho-\varrho\sqrt{D})y_1]$$

oder:

$$(px+qy)(rx+sy)=(p_1x_1+q_1y_1)(r_1x_1+s_1y_1),$$

wo

$$p=r=a,\; q=b+\sqrt{D}, s=b-\sqrt{D},$$

$$p_1=a\lambda+b\nu+\nu\sqrt{D},\; q_1=a\mu+b\varrho+\varrho\sqrt{D},\; r_1=a\lambda+b\nu-\nu\sqrt{D},\; s_1=a\mu+b\varrho-\varrho\sqrt{D}$$

zu setzen ist. — Da aber die Form auf sich selbst zurückführt, sind die Coefficienten von $x^2$ und $x_1^2$ gleich, d. h.

$$3)\quad \frac{p_1r_1}{pr}=1$$

ebenso die Coefficienten von $xy$ und $x_1y_1$, sowie von $y^2$ und $y_1^2$, d. h.

$$ps+qr=p_1s_1+q_1r_1 \text{ und } qs=q_1s_1$$

oder durch $pr=p_1r_1$ dividirt:

$$\frac{s}{r}+\frac{q}{p}=\frac{s_1}{r_1}+\frac{q_1}{p_1} \text{ und } \frac{q}{p}\cdot\frac{s}{r}=\frac{q_1}{r_1}\cdot\frac{s_1}{r_1}$$

d. h. entweder:

$$4)\quad \frac{p_1}{p}=\frac{q_1}{q},\; \frac{r_1}{r}=\frac{s_1}{s}$$

oder:

$$5)\quad \frac{r_1}{p}=\frac{s_1}{q},\; \frac{p_1}{r}=\frac{q_1}{s}$$

Wenn Gleichungen 4) stattfinden, setzen wir:

$$\varphi+\psi\sqrt{D}=\frac{p_1}{p},$$

und wenn Gleichungen 5) stattfinden:

$$\varphi+\psi\sqrt{D}=\frac{r_1}{q}$$

wo $\varphi$ und $\psi$ rational sind. Setzt man dann den mit $\sqrt{D}$ multiplicirten und den von $\sqrt{D}$ freien Theil des Ausdruckes rechts bezüglich gleich $\varphi$ und $\psi$, so zerfällt die Gleichung in zwei andere, welche dann die entsprechenden zweiten Gleichungen: $\frac{r_1}{r}=\frac{s_1}{s}$ oder $\frac{p_1}{r}=\frac{q_1}{s}$ identisch machen, so dass diese letzteren nicht weiter zu betrachten sind. — Im Falle der Gleichungen 4) ist nun, wenn man für $\frac{p_1}{p}=\frac{q_1}{q}$ die obigen Werthe setzt:

$$\varphi+\psi\sqrt{D}=\frac{a\lambda+b\nu+\nu\sqrt{D}}{a}=\frac{a\mu+b\varrho+\varrho\sqrt{D}}{b+\sqrt{D}}$$

oder im Falle der Gleichungen 5):

$$\varphi+\psi\sqrt{D}=\frac{a\lambda+b\nu-\nu\sqrt{D}}{a}=\frac{a\mu+b\varrho-\varrho\sqrt{D}}{b+\sqrt{D}},$$

aber in beiden Fällen:

$$\varphi^2-\psi^2D=\frac{p_1r_1}{pr}=1,$$

denn, wenn man die Werthe von $p$, $r$, $p_1$, $r_1$ vergleicht, so sieht man, dass im Falle wo

$$\varphi+\psi\sqrt{D}=\frac{p_1}{p}$$

ist,

$$\varphi-\psi\sqrt{D}=\frac{r_1}{r}$$

und, wenn

$$\varphi+\psi\sqrt{D}=\frac{r_1}{r},$$

$$\varphi-\psi\sqrt{D}=\frac{p_1}{r}$$

sein muss. Die zwei Ausdrücke in jedem Falle mit einander multiplicirt, geben aber das obige Resultat. — Durch Sondern des rationalen und irrationalen Theiles erhält man noch im Falle der Gleichungen 4):

$$a\lambda+b\nu=a\varphi,\; \nu=a\psi,\; a\mu+b\varrho=b\varphi+D\psi,\; \varrho=\varphi+b\psi,$$

oder wenn die Gleichungen 5 gelten:

$$a\lambda+b\nu=a-\varphi,\; \nu=-a\psi,\; a\mu+b\varrho=b\varphi+D\psi,\; \varrho=-(\varphi+b\psi).$$

Aus der ersten Reihe von Gleichungen ergibt sich:

$$\lambda=\varphi-b\psi,\; \mu=-c\psi,\; \nu=a\psi,\; \varrho=\varphi+b\psi,$$

also

$$\lambda\varrho-\mu\nu=\varphi^2-D\psi^2=1,$$

wie dies auch sein muss.

Die zweite Reihe von Gleichungen dagegen würde geben:

$$\lambda=\varphi+b\psi,\; \mu=\frac{2b\varphi}{a}+\frac{D+b^2}{a}\psi,\; \gamma=-a\psi,\; \varrho=-\varphi-b\psi,$$

also

$$\lambda\varrho-\mu\nu=-(\varphi^2-D\psi^2)=-1.$$

Da aber die Aequivalenz eine eigentliche sein soll, ist diese Reihe von Werthen, also die Gleichnngen 5 ganz zu verwerfen.

Die Gleichung

$$\varphi^2 - D\psi^2 = 1$$

wird gewöhnlich die Pellsche Gleichnng genannt.

6) Sei jetzt $\omega$ der grösste gemeinschaftliche Faktor von $a$, $2b$ nnd $c$, so lässt sich zeigen, dass, um $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ zu ganzen Zahlen zu machen, die Bedingung nothwendig und ausreichend sei, dass auch $\omega\varphi$ nnd $\omega\psi$ ganze Zahlen sind. Dies soll jetzt bewiesen werden. Es ist nach Abschnitt 5)

$$\varrho - \lambda = 2b\psi = \frac{2b}{\omega}\omega\psi,$$

$$u = -\frac{c}{\omega}\omega\psi,$$

$$\nu = \frac{a}{\omega}\omega\psi.$$

Da die Ausdrücke $\frac{a}{\omega}$, $\frac{2b}{\omega}$, $\frac{c}{\omega}$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, so kann, wenn $\varrho - \lambda$, $\mu$ $\nu$ ganze Zahlen sind, $\omega\psi$ kein Bruch sein.

Sei jetzt

$$u = \omega\psi$$

eine ganze Zahl, dann ist

$$\omega\lambda = \omega\varphi - bu,$$

also auch $\omega\varphi$ eine ganze Zahl, wenn $\varrho - \lambda$, $\mu$, $\nu$ dergleichen sind. Unsere Bedingung ist also nothwendig; sie ist aber auch ausreichend. Denn seien jetzt

$$u = \omega\varphi, \quad t = \omega\psi$$

in der That ganze Zahlen, dann ist:

1) $\lambda = \frac{t - bu}{\omega}$, $\mu = -\frac{cu}{\omega}$, $\nu = \frac{au}{\omega}$, $\varrho = \frac{t + bu}{\omega}$

und wegen

$$\lambda\varrho - \mu\nu = 1$$

hat man

$$\omega^2 = t^2 - Du^2$$

oder

$$t^2 - b^2u^2 = \omega^2 - acu^2.$$

Da $\frac{a}{\omega}$ und $\frac{c}{\omega}$ ganze Zahlen sind, so sind auch

$$\frac{acu^2}{\omega^2} \text{ nnd } \frac{t^2 - b^2u^2}{\omega^2}$$

ganze Zahlen. Es ist aber auch

$$4t^2 - 4b^2u^2 = 4\omega^2 - 4acu^2$$

und deshalb auch $\frac{4t^2}{\omega^2}$ also auch $\frac{2t}{\omega}$ eine ganze Zahl, und aus diesem Grunde:

$$2\lambda = \frac{2t - 2bu}{\omega}$$

eine eben solche, so wie auch:

$$2\varrho = \frac{2t + 2bu}{\omega}$$

Es ist nun

$$2\lambda + 2\varrho = \frac{4t}{\omega}$$

d. h., da der Ausdruck rechts immer grade ist, $2\lambda$ nnd $2\varrho$ zu gleicher Zeit beide grade oder beide ungrade.

Aber

$$2\lambda \cdot 2\varrho = \frac{4t^2 - 4b^2u^2}{\omega^2},$$

also gleich einer durch 4 theilbaren Zahl, da $\frac{t^2 - b^2u^4}{\omega^2}$ eine ganze Zahl war; hieraus folgt, dass $2\lambda \cdot 2\varrho$ immer grade ist, also auch $2\lambda$ und $2\varrho$ einzeln genommen, das heisst $\lambda$ und $\varrho$ sind ganze Zahlen.

Die obigen Werthe von $\mu = -\frac{cu}{\omega}$, $\nu = \frac{au}{\omega}$ zeigen ohne Weiteres, dass $\mu$ nnd $\nu$ ebenfalls ganze Zahlen sind.

$t$ und $u$ sind durch die oben gegebene Gleichung

$$t^2 - Du^2 = \omega^2$$

zu bestimmen, wo $\omega$ der grösste gemeinschaftliche Factor von $a$, $2b$ nnd $c$ ist; und alle Werthe von $t$ und $u$, welche diese Gleichnng erfüllen, geben entsprechende Werthe von $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ durch die Gleichnng 1). Es sind dies also auch alle Werthe, welche $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ annehmen können. Wir haben oben gezeigt, dass wenn $\begin{vmatrix}\alpha_1, \beta_1 \\ \gamma_1, \delta_1\end{vmatrix}$ irgend eine Substitution war, die zu einer aeqnivalenten Form führte, zu setzen war:

$$\alpha_1 = \alpha\lambda + \gamma\mu, \; \beta_1 + \beta\lambda \ldots \delta\mu, \; \gamma_1 = \alpha\nu + \gamma\varrho, \; \delta_1 = \beta\nu + \delta\varrho,$$

also, wenn jetzt für $\lambda, \mu, \nu, \varrho$ die bezüglichen Werthe eingesetzt werden:

$$\alpha_1 = \frac{\alpha(t - bu) - c\gamma u}{\omega}, \; \beta_1 = \frac{\beta(t - bu) - c\delta u}{\omega}, \; \gamma_1 = \frac{a\alpha u + \gamma(t + b\alpha)}{\omega}, \; \delta_1 = \frac{a\beta u + \gamma(t + bu)}{\omega}.$$

7) Sei jetzt:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$$

d. h. es sollen $x$ nnd $y$ ganze Zahlen sein, welche diese Gleichnng erfüllen. Man sagt dann, $m$ sei durch die Form $(a, b, c)$ dargestellt oder ausgedrückt. Haben $x$ und $y$ keinen gemeinschaftlichen Factor, und sind auch nicht beide gleich Null, so kann auch nicht $m = 0$ sein, denn sonst wäre, wenn man mit $a$ multiplicirt:

$$(ax + by)^2 - Dy^2 = 0,$$

d. h.

$$ax + by = y\sqrt{D}$$

Da also $D$ kein vollständiges Quadrat und nicht gleich Null ist, wie wir angenommen haben (Abschnitt 5), so müsste $ax+by=0$ und $y=0$, d. h. $x=y=0$ sein. Seien jetzt $r$ und $s$ die Werthe von $x$ und $y$, die unsere Gleichung erfüllen, so dass wir setzen können:

$$1)\quad ar^2+2brs+cs^2=m$$

Sei $\begin{vmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{vmatrix}$ irgend eine Substitution, die von $f(a, b, c)$ zu einer eigentlich äquivalenten Form $f(a_1, b_1, c_1)$ führt, so ist nach Abschnitt 1)

$$a_1=a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2.$$

Wenn also der erste Coefficient dieser äquivalenten Form

$$a_1=m$$

ist, so wird:

$$2)\quad m=a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2$$

und es ist nach Gleichung 1) zu setzen

$$\alpha=r,\ \gamma=s$$

und die Substitution hat den Ausdruck

$$3)\quad \begin{vmatrix}r, & \varrho\\ s, & \sigma\end{vmatrix},$$

wo

$$4)\quad r\sigma-\varrho s=1$$

ist, $\sigma$ und $\varrho$ aber unendlich viel Werthe annehmen können.

Sei $f(m, n, p)$ der Ausdruck für die Form, in welche 1) auf diese Weise übergeht, so ist wegen der Aequivalenz

$$5)\quad n^2-mp=D;$$

der Ausdruck für die neue Form also auch

$$f\left(m,\ n,\ \frac{n^2-D}{m}\right).$$

Der eben hingestellte Werth der Determinante erfüllt offenbar die Congruenz:

$$n^2\equiv D \bmod m$$

(siehe den Artikel: Quadratischer Rest und Zahlenlehre wegen der Bedeutung dieser Zeichen) – und hieraus folgt der Satz: „Wenn eine Zahl $m$ durch eine quadratische Form ausgedrückt werden kann, so dass die Unbekannten $r$ und $s$ relative Primzahlen sind, so muss die Determinante dieser Form quadratischer Rest dieser Zahl $m$ sein."

Wegen des Werthes von $b_1$ in Abschnitt 1) ist aber auch

$$6)\quad n=ar\varrho+b(r\sigma+s\varrho)+cs\sigma;$$

in dieser Gleichung sind für $\varrho$ und $\sigma$ diejenigen Werthe zu nehmen, welche die unbestimmte Gleichung 4) $r\sigma-s\varrho=1$ erfüllen.

Sind nun $\varrho_0$, $\sigma_0$ irgend ein Paar zusammengehöriger Wurzeln dieser Gleichung, so ist allgemein:

$$\varrho=\varrho_0+rt,\ \sigma=\sigma_0+st,$$

wo $t$ eine beliebige ganze Zahl ist. Es folgt dies aus den Elementen der Theorie der unbestimmten Gleichungen. Diese Werthe in 6) eingesetzt zeigen aber, dass

$$n=n_0+mt$$

ist, wo $n_0$ der $\varrho_0$ und $\sigma_0$ entsprechende Werth von $n$ ist. Es ergibt sich nämlich zunächst

$$n=ar\varrho_0+b(r\sigma_0+s\varrho_0)+cs\sigma_0+f(ar^2+brs+cs\ ),$$

was mit Hülfe der Gleichung 1) zu dem obigen allgemeinen Werthe von $n$ führt. Es ist also immer:

$$n\equiv n_0 \bmod m,$$

was auch $\varrho$ und $\sigma$ für Werthe haben mögen.

8) Nach dem im vorigen Abschnitte Gesagten lässt sich die Aufgabe, eine gegebene Zahl $m$ durch eine gegebene quadratische Form auszudrücken, auf die andre Aufgabe zurückführen, zu einer Form alle ihr eigentlich aequivalenten Formen zu finden, worin der Coefficient des ersten Gliedes gleich $m$ ist.

Jede Darstellung der Zahl $m$ durch Form $f(a, b, c)$ gehört dann zu einem Werthe von $n$, welcher die Gleichung $n^2-mp=D$ oder die Congruenz $n^2\equiv D \bmod m$ erfüllt. Man kann also sagen, $m$ entspreche einem Werthe $n$ von der Quadratwurzel aus $D$ für den Modul $m$. Um diesen Satz zu beweisen, bemerken wir zunächst, dass jede Darstellung von $m$ durch Form $f(a, b, c)$ auch eine Form $f(m, n, p)$ ergibt, die $f(a, b, c)$ eigentlich äquivalent ist, denn solche Darstellung gibt einen Werth von $r$ und $s$. Nehmen wir nun die Gleichungen 4 des vorigen Abschnittes als bestehend an, so sind durch dieselbe $\varrho$ und $\sigma$ auf unendlich viel Arten zu bestimmen. Nach Abschnitt 3 spricht die Gleichung 4) aber aus, dass die Determinante der aus $f(a, b, c)$ durch die Substitution $\begin{vmatrix}r, & \varrho\\ s, & \sigma\end{vmatrix}$ entstehenden Formen gleich der von $f(a, b, c)$ ist, dass also eine eigentliche Aequivalenz stattfindet.

Es ist indessen noch zu beweisen, dass wenn $f(m, n, p)$ irgend eine mit $f(a, b, c)$ eigentlich äquivalente Form ist, $m$ immer durch $f(a, b, c)$ darstellbar ist, dass jede Substitution $\begin{vmatrix}r, & \varrho\\ s, & \sigma\end{vmatrix}$ die von $f(a, b, c)$ zu $f(m, n, p)$ führt, eine andre Darstellung von $m$ gibt, wenn man $x=r$, $y=s$ in die Form setzt, deren jede zu einem Werthe von $\sqrt{D} \bmod m$ gehört, dass endlich jede dieser Darstellungen nur einmal vorkommt.

Dieser Beweis ergibt sich aus folgenden Betrachtungen. Sind $f(a, b, c)$ und

$f(m, n, p)$ eigentlich äquivalent, so gelten die Gleichungen 2, 4, 5, 6 des vorigen Abschnittes. Gleichung 2 aber sagt, dass $m$ durch $f(a, b, c)$ darstellbar ist, Gleichung 5), dass die Darstellung zu einem Werthe von $\sqrt{D} \bmod m$ gehört. Käme nun eine Darstellung 2 Mal vor, so gaben 2 Transformationen mit verschiedenen $\varrho$ und $\sigma$ dasselbe $r$ und $s$, was unmöglich ist, da die Gleichungen 4) und 6) $\varrho$ und $\sigma$ durch $r$ und $s$ völlig bestimmen. Endlich aber kann auch keine Darstellung ausfallen, denn für eine solche würden immer noch die Gleichungen 4) und 6) als richtig anzunehmen sein, die zur Bestimmung von $\varrho$, $\sigma$ und $n$ führen, und nach dem ersten Theile unseres Beweises geben diese Gleichungen eine mit $f(a, b, c)$ eigentlich äquivalente Form.

9) Die Entwickelungen in 6) zeigen, wie man aus einer Substitution $\begin{vmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{vmatrix}$, die von $f(a, b, c)$ zu $f(m, n, p)$ führt, alle andern $\begin{vmatrix}\alpha_1, & \beta_1 \\ \gamma_1, & \delta_1\end{vmatrix}$ finden kann, welche dasselbe bewirken, und zu demselben Werthe von $\sqrt{D} \bmod m$ gehören. Eine solche Reihe von Darstellungen möge jetzt Gruppe heissen. Für unsern Fall ist in den am Schlusse von Abschnitt 6) gegebenen Formeln für $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ nur $r, \varrho, s, \sigma$ an die Stelle von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ zu schreiben.

Wir machen zunächst folgende Annahmen: $a$, $b$, $c$ sollen keinen gemeinschaftlichen Factor haben, es ist dann in Abschnitt 6) $\omega$, welches der grösste gemeinschaftliche Faktor von $a$, $2b$ und $c$ war, entweder gleich 1 oder gleich 2, und die Gleichung $t^2 - Du^2 = \omega^2$ nimmt die Gestalt an

$$t^2 - Du^2 = 1$$

oder

$$t^2 - Du^2 = 4.$$

Ferner soll die Determinante $D$ für's Erste positiv sein.

Ist $\omega = 1$, so sind $a$ und $c$ grade, $b$ aber kann als ungrade angenommen werden, weil man sonst die Form $ax^2 + 2bxy + cy^2$ mit 2 dividiren könnte, ohne dass das mittlere Glied aufhörte einen graden Coefficienten zu haben.

Jedes Quadrat einer ungraden Zahl ist immer von der Form $4u+1$, denn:

$$(2v+1)^2 = 4v^2 + 4v + 1$$

und $ac$ ist in unserm Fall von der Form $4u$; also wegen der Gleichung

$$D = b^2 - ac$$

muss $D$ von der Form $4u+1$ oder

$$D \equiv 1 \bmod 4$$

sein.

Sei nun $\omega$ ganz beliebig, so kann $t$ niemals Null werden, da $Du^2$ stets negativ ist, also die Gleichung

$$t^2 - Du^2 = \omega^2$$

in diesem Fall nicht erfüllbar ist. Ist $u = 0$, so wird $t = \omega$. Wir werden diesen Fall indess ausschliessen. Sind $T$ und $U$ zwei zusammengehörige Auflösungen der Gleichung $t^2 - Du^2 = \omega^2$, so wird, wenn ein andrer Werth von $t$ grösser als $T$ ist, auch der zugehörige von $u$ grösser als $U$ sein müssen, da $t^2$ und $Du^2$ ungleiche Vorzeichen haben, man kann also annehmen, dass $T$ und $U$ die kleinsten Auflösungen unsrer Gleichung sind.

10) Es lässt sich nun zeigen, dass der Ausdruck

$$\frac{t + u\sqrt{D}}{\omega} = \left(\frac{T + U\sqrt{D}}{\omega}\right)^n,$$

wo $n$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl und $\omega = 1$ oder $= 2$ ist, in jedem Falle die allgemeinen Werthe von $t$ und $u$ aus den kleinsten Werthen $T$ und $U$ ergibt, wenn man durch Trennung des rationalen und irrationalen Theils diese Gleichung in 2 andre zerlegt.

Sei zunächst nämlich $\omega = 1$, und seien zwei Wurzelpaare unserer Gleichung $tu$ und $t_1 u_1$ gegeben, so dass man hat

$$t^2 - Du^2 = 1$$

und

$$t_1^2 - Du_1^2 = 1$$

oder

$$(t + u\sqrt{D})(t - u\sqrt{D}) = 1$$

und

$$(t_1 + u_1\sqrt{D})(t_1 - u_1\sqrt{D}) = 1,$$

so ist auch

$$(t^2 - Du^2)(t_1^2 - Du_1^2) = 1;$$

und wenn man in Faktoren zerlegt:

$$(t + u\sqrt{D})(t - u\sqrt{D})(t_1 + u_1\sqrt{D})(t_1 - u_1\sqrt{D}) = 1.$$

Es ist aber:

$$(t \pm u\sqrt{D})(t_1 \pm u_1\sqrt{D}) = tt_1 + Duu_1 \pm \sqrt{D}\,(ut_1 + tu_1),$$

also

$$[tt_1 + \sqrt{D}(ut_1 + tu_1)]\;[tt_1 - \sqrt{D}(ut_1 + tu_1)] = 1,$$

und man hat ein neues Wurzelpaar unserer Gleichung:

$$\tau = tt_1 + Duu_1 \text{ und } v = ut_1 + tu_1,$$

welches sich ergibt, wenn man $t \pm u\sqrt{D}$ und $t_1 \pm u_1\sqrt{D}$ multiplicirt, und den rationalen Theil vom irrationalen trennt. Es ergibt sich aber auch durch Division:

$$\frac{t_1 \pm u_1\sqrt{D}}{t \pm u\sqrt{D}} = (t_1 \pm u_1\sqrt{D})(t \mp u\sqrt{D})$$
$$= (tt_1 - Duu_1) \pm \sqrt{D}(tu_1 - ut_1)$$

wenn man mit $t \pm u\sqrt{D}$ erweitert, da der Nenner des Ausdruckes rechts $t^2 - Du^2$, also $=1$ wird.

Da nun

$$\frac{t_1+u_1\sqrt{D}}{t+u\sqrt{D}} \cdot \frac{t_1-u_1\sqrt{D}}{t-u\sqrt{D}} = \frac{t_1^2 - u_1^2 D}{t^2 - u^2 D} = 1$$

ist, so ergibt sich, wenn man für die beiden Quotienten des ersten Gliedes die obigen Werthe schreibt:

$$\tau_1^2 - Dv_1^2 = 1,$$

wo

$$\tau_1 = tt_1 - Duu_1, \quad v_1 = tu_1 - ut_1,$$

es ist also $\tau_1 v_1$ ein neues Wurzelpaar. Ist $t$ positiv, so ist auch die Summe der beiden Faktoren $t+u\sqrt{D}$ und $t-u\sqrt{D}$ gleich $2t$ positiv. Ihr Product war gleich 1; also haben beide Faktoren gleiches Vorzeichen und sind mithin positiv, da jedenfalls ein Faktor positiv sein muss. Dasselbe gilt von $t_1+u_1\sqrt{D}$ und $t_1-u_1\sqrt{D}$, wenn $t_1$ positiv ist; dann ist aber auch $(t \pm u\sqrt{D})(t_1 \pm u_1\sqrt{D})$ positiv, also auch $\tau + \mathrm{r}\sqrt{D}$ und $\tau - v\sqrt{D}$, d. h. auch $\tau$ ist positiv, und, wie man in gleicher Weise ersieht, auch $\tau_1$.

Wird nun

$$t = t_1 = T, \quad u = u_1 = U$$

gesetzt, also statt der beiden Wurzelpaare nur eins genommen, so gibt

$$(T+U\sqrt{D})^2 = t_2 + u_2\sqrt{D}$$

ein neues Wurzelpaar, und wenn man $t=T$, $u=U$, $t_1=t_2$, $u_1=u_2$ nimmt,

$$(T+U\sqrt{D})^3 = t_3 + u_3\sqrt{D}$$

ein anderes. Fährt man so fort, so kommt allgemein:

$$(T+u\sqrt{D})^n = t_n + u_n\sqrt{D},$$

wo $n$ eine beliebige **positive ganze** Zahl und $t_n, u_n$ ein Wurzelpaar ist. Da

$$(T-U\sqrt{D})^n = (T+U\sqrt{D})^{-n}$$

so findet dasselbe auch statt, wenn $n$ eine beliebige **negative** ganze Zahl ist. Es sind nämlich $T$ und $-U$ ebenfalls Auflösungen.

Noch ist zu beweisen, dass der Ausdruck $(T+U\sqrt{D})^n$ auch alle Wurzeln der Gleichung $t^2 - Du_2 = 1$ gibt. Denn sei ein Paar nicht gegeben, etwa $\tau$ und $v$, und sei

$$t_{n+1} + u_{n+1}\sqrt{D} > \tau + \mathrm{r}\sqrt{D} > t_n + n\sqrt{D},$$

so ist also auch

$$\frac{t_{n+1} + u_{n+1}\sqrt{D}}{t_n + u_n\sqrt{D}} > \frac{\tau + \mathrm{r}\sqrt{D}}{t_n + u_n\sqrt{D}} > 1.$$

Aber da

$$t_n + u_n\sqrt{D} = (T+U\sqrt{D})^n \text{ und}$$

$$t_{n+1} + u_{n+1}\sqrt{D} = (T+U\sqrt{D})^{n+1}$$

war, so ist

$$(T+U\sqrt{D}) > \frac{\tau + v\sqrt{D}}{(T+U\sqrt{D})^n} > 1.$$

Der Ausdruck

$$\frac{\tau + v\sqrt{D}}{(T+U\sqrt{D})^n}$$

gibt als Quotient zweier Wurzelpaare entsprechender Ausdrücke wieder ein Wurzelpaar, welches mit $t', u'$ bezeichnet werde. Es ist dann

$$T + U\sqrt{D} > t' + u'\sqrt{D} > 1;$$

aber da $t$ und $u$ gleichzeitig zunehmen, auch

$$T > t', \quad U > u',$$

was unmöglich ist, da $T$ und $U$ das kleinste Wurzelpaar war.

Auch kann keine Auflösung zweimal vorkommen, sonst gäben verschiedene Exponenten $n$ gleiche Werthe von $t$ und $u$, was unmöglich ist.

Um auch die negativen Werthe von $t$ und $u$ zu haben, nimmt man lieber den Ausdruck:

$$\pm (T+U\sqrt{D})^n$$

als allgemeines Symbol der Auflösungen.

Das wirkliche Auffinden der Wurzeln, wenn das kleinste Paar bekannt ist, geschieht folgendermassen am bequemsten.

Man setzt:

$$T + U\sqrt{D} = a, \quad T - U\sqrt{D} = b,$$

dann ist

$$t_n = \frac{1}{2}(a^n + b^n),$$
$$u_n = \frac{1}{2}(a^n - b^n),$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{2}a^{n+1} + \frac{1}{2}b^{n+1},$$

$$t_{n-1} = \frac{1}{2}a^n b + \frac{1}{2}b^n a,$$

da $ab = 1$ ist,

$$t_{n+1} + t_{n-1} = 2Tt_n,$$

also

$$t_{n+1} = 2Tt_n - t_{n-1};$$

und in derselben Weise folgt:

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}a^{n+1} - \frac{1}{2}b^{n+1},$$

$$u_{n-1} = \frac{1}{2}a^n b - \frac{1}{2}b^n a,$$

also

$$u_{n+1} = 2Tu_n - u_{n-1}.$$

11) Sei jetzt $\omega = 2$. Sind dann $t$, $u$ und $t_1$, $u_1$ Lösungen der Gleichung

$$t^2 - u^2 D = 4,$$

so ist auch:

$$\frac{t + u\sqrt{D}}{2} \cdot \frac{t_1 + u_1\sqrt{D}}{2} = \frac{t_2 + u_2\sqrt{D}}{2}$$

und $t_2$ $u_2$ ist ein neues Paar von Lösungen. Es sind nämlich offenbar:

$$t_2 = \frac{tt_1 + uu_1 D}{2} \text{ und } u_2 = \frac{tu_1 + ut_1}{2}$$

ganze Zahlen. Da nämlich nach Abschnitt (9) in diesem Falle $D \equiv 1 \bmod 4$ also eine ungrade Zahl ist, und wegen $t^2 - Du^2 = 4$ auch $t$ und $u$ gleichzeitig grade oder ungrade sein müssen, ebenso wie $t_1$, $u_1$, so ist sowohl $tt_1 + uu_1 D$, als auch $tu_1 + ut_1$ durch 2 theilbar. Die Multiplication führt also immer zu einer neuen Auflösung.

Aus einem Wurzelpaar $TU$ erhält man also unendlich viele durch die Gleichung:

$$\frac{t_n + u_n\sqrt{D}}{2} = \left(\frac{T + U\sqrt{D}}{2}\right)^n.$$

12) Es ist noch zu beweisen, dass die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ immer eine Auflösung hat.

Es ergiht sich dies aus der Theorie der Kettenbrüche. Sei nämlich $a$ ein solcher, $\frac{v}{v_1}$, $\frac{w}{w_1}$, $\frac{z}{z_1}$ drei auf einander folgende Näherungswerthe desselben, $\xi$ der letzte Nenner des Kettenbruches, der in $\frac{z}{z_1}$ noch vorkommt, so dass also

$$\frac{z}{z_1} = \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cdots + \cfrac{1}{\xi}}}$$

ist, dann ist nach der bekannten recurrenten Formel, aus welcher die Näherungswerthe des Kettenbruchs gefunden werden:

$$\frac{z}{z_1} = \frac{w\xi + v}{w_1\xi + v_1},$$

also:

$$vz_1 - v_1 z = -\xi(wz_1 - w_1 z),$$

aber immer ist

$$wz_1 - w_1 z = \pm 1$$

(siehe den Artikel unbestimmte Aufgaben über diesen Gegenstand) also auch

$$\mp \xi = vz_1 - v_1 z.$$

Sei nun $\eta$ derjenige Theil des Kettenbruches, der zum Nenner $\xi$ hinzugefügt werden muss, um den Kettenbruch zu vervollständigen, der Art, dass

$$a = \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cdots + \cfrac{1}{\xi + \eta}}}$$

so wird, ganz wie oben gezeigt wurde, auch:

$$a = \frac{w(\xi + \eta) + v}{w_1(\xi + \eta) + v_1}$$

sein, also:

$$a - \frac{z}{z_1} = \frac{(wz_1 - w_1 z)(\xi + \eta) + vz_1 - v_1 z}{z_1[w_1(\xi + \eta) + v_1]} = \frac{\pm \eta}{z_1[w_1(\xi + \eta) + v_1]}$$

Ferner war

$$z_1 = w_1\xi + v_1,$$

denn im oben gegebenen Ausdrucke von $\frac{z}{z_1}$ stimmen die Zähler und die Nenner einzeln überein, also

$$w_1(\xi + \eta) + v_1 > z_1$$

und deshalb auch

$$a - \frac{z}{z_1} < \frac{\eta}{z_1{}^2}$$

abgesehen vom Vorzeichen, also jedenfalls:

$$a - \frac{z}{z_1} < \frac{1}{z_1{}^2}.$$

Ist also $\frac{x}{y}$ jetzt ein beliebiger Näherungsbruch, so wird immer die Gleichung erfüllt

$$\frac{x}{y} - a = \frac{\delta}{y^2},$$

wo $\delta$ ein positiver oder negativer ächter Bruch ist

Verwandeln wir nun den Ausdruck $\sqrt{D}$ in einen Kettenbruch (siehe den Artikel quadratische Gleichung), so wird also, wenn $\frac{x}{y}$ ein Näherungsbruch ist:

$$x = y\sqrt{D} + \frac{\delta}{y}$$

oder, wenn man ins Quadrat erhebt:

$$x^2 = y^2 D + 2\delta\sqrt{D} + \frac{\delta^2}{y^2}$$

oder:

$$x^2 - Dy^2 = 2\delta\sqrt{D} + \frac{\delta^2}{y^2},$$

d. h. also der Ausdruck: $x^2 - Dy^2$ befindet sich jedenfalls innerhalb der Grenzen:

$$+(2\sqrt{D}+1) \text{ und } -(2\sqrt{D}+1).$$

Da der irrationale Ausdruck $\sqrt{D}$ unendlich viel Näherungswerthe hat, die sich durch den Kettenbruch ergeben, $x^2 - Dy^2$ aber eine ganze Zahl ist, die also nur eine endliche Anzahl von Werthen annehmen kann, falls sie, wie hier, in gewissen Grenzen liegt, so muss sich ein Werth derselben $m$ unendlich oft wiederholen, wenn man für $\frac{x}{y}$ alle Näherungswerthe nimmt.

Es hat also die Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = m$$

unendlich viel Paare von Wurzeln. Es müssen darunter jedenfalls unendlich viel $x, y$ und $x', y'$ sein, die so beschaffen sind, dass

$$x \equiv x' \bmod m \text{ und } y \equiv y' \bmod m$$

wird, denn es gibt ja nur $m$ Zahlen, die nach Modul $m$ incongruent sind. Die Congruenz $x \equiv x' \bmod m$ hat also unendlich viel Auflösungen, von den zugehörigen $y$ können aber auch immer höchstens nur $m-1$ incongruent sein, also hat auch die Congruenz $y \equiv y' \bmod m$ unendlich viel Auflösungen.

Dann ist auch

$$xy' \equiv yx' \bmod m.$$

Nun ist aber

$$(xx' - yy'D)^2 - D(xy' - yx')^2 = (x'^2 - y'^2 D)(x^2 - Dy^2) = m^2,$$

da

$$x^2 - Dy^2 = x'^2 - Dy'^2 = m$$

war.

Wegen $xy' \equiv yx' \bmod m$ ist aber $\frac{xy' - yx'}{m}$ eine ganze Zahl, folglich muss auch $\frac{xx' - yy'D}{m}$ eine solche sein. Da nun:

$$\left(\frac{xx' - yy'D}{m}\right)^2 - D\left(\frac{xy' - yx'}{m}\right)^2 = 1$$

ist, so geben die Ausdrücke

$$t = \frac{xx' - yy'D}{m}, \quad u = \frac{xy' - yx'}{m}$$

jedenfalls eine Auflösung der Gleichung:

$$t^2 - Du^2 = 1.$$

Auch kann hier $xy' - yx'$ nicht gleich Null sein, sonst wäre ja

$$\frac{x}{y} = \frac{x'}{y'},$$

also die beiden Näherungswerthe von $\sqrt{D}$ identisch, was unmöglich ist, da dieselben an $\sqrt{D}$ immer näher heranrücken.

Um also eine Auflösung unsrer Gleichung zu finden, hat man nur $\sqrt{D}$ in einen Kettenbruch zu entwickeln und die Näherungswerthe desselben so lange zu verfolgen, bis man auf 2, $\frac{x}{y}$ und $\frac{x'}{y'}$ kommt, deren Zähler und Nenner die Ausdrücke $x^2 - Dy^2$, $x'^2 - Dy'^2$ gleich machen, wo aber $x$ und $x'$, sowie $y$ und $y'$ für den gemeinschaftlichen Werth dieser Ausdrücke, als Modul betrachtet, congruent sind.

13) Die Auflösung der unbestimmten Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = m$$

durch unendlich viel Werthe von $x$ und $y$, falls die Determinante positiv ist und $a$, $b$, $c$ keinen gemeinschaftlichen Faktor haben, lässt sich also durch folgende Rechnungen ausführen.

Zunächst ist die Gleichung $t^2-Du^2=1$ aufzulösen, wenn $a$ und $c$ nicht beide grade sind, und die Gleichung $t^2-Du^2=4$, wenn $a$ und $c$ grade sind. Eine solche Lösung der ersten Gleichung gibt die Theorie der Kettenbrüche mittelst der Formeln,

$$1)\quad T=\frac{xx'-yy'D}{m},\quad U=\frac{xy'-yx'}{m},$$

wo

$m$ irgend ein Werth von $x^2-Dy^2=x'-Dy'^2$,

$\frac{x}{y}$ und $\frac{x'}{y'}$ Näherungsbrüche von $\sqrt{D}=\sqrt{b^2-ac}$

und

$$x\equiv x' \bmod m,\quad y\equiv y' \bmod m$$

ist.

Ist

$$t^2-Du^2=4,$$

so kann man die obigen Werthe von $T$ und $U$ in 1 doppelt nehmen, und muss dann die letzte Gleichung offenbar durch die Zahlen $2T$ und $2U$ gelöst werden. Aus einer Lösung aber lassen sich unendlich viel gewinnen mittelst der Formel:

$$2)\quad \left(\frac{T+U\sqrt{D}}{\omega}\right)^n=\frac{t+u\sqrt{D}}{\omega},$$

wo $n$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, $\omega$ gleich 2 oder 1 ist, je nachdem $a$ und $c$ gleichzeitig grade sind oder nicht. Im letztern Falle bedient man sich statt der Gleichung 2 noch bequemer der recurrenten Formeln:

$$2a)\quad t_{n+1}=2Tt_n-t_{n-1},\quad u_{n+1}=2Tu_n-u_{n+1},$$

denen, wie leicht zu sehen, wenn $\omega=2$ ist, die folgenden entsprechen

$$2b)\quad \frac{t_{n+1}}{2}=\frac{T}{2}\frac{t_n}{2}-\frac{t_{n-1}}{2},\quad \frac{u_{n+1}}{2}=\frac{T}{2}\frac{u_n}{2}-\frac{u_{n+1}}{2},$$

was sich leicht ganz wie in Abschnitt 10 ergibt.

Alle Wurzelpaare $t$, $u$ der Gleichung $t^2-Du^2=1$ führen zu einer Gruppe von Auflösungen unseres Problems. Wenn man nämlich im Stande ist eine Auflösung der Gleichung $ax^2+2bxy+cy^2=m$ zu finden, eine Aufgabe, deren Möglichkeit voraussetzt, dass $D$ quadratischer Rest nach Modul $m$ ist, und $x=r$, $y=s$ die Werthe dieser Auflösung sind, so werden $\varrho$ und $\sigma$ dazu durch die Gleichung:

$$3)\quad r\sigma-s\varrho=1$$

bestimmt. Sind $\varrho_0$, $\sigma_0$ ein Paar Wurzeln dieser Gleichungen, so sind die allgemeinen Werthe:

$$4)\quad \varrho=\varrho_0+rh,\quad \sigma=\sigma_0+sh,$$

wo $h$ eine beliebige ganze Zahl ist, je zwei zusammengehörige Werthe von $\varrho$ und $\sigma$ bestimmen dann eine Gruppe von Auflösungen.

Setzt man endlich wie in Abschnitt 6)

$$5)\quad \alpha_1=\frac{r(t-bu)-csu}{\omega},\ \beta_1=\frac{\varrho(t-bu)-c\sigma u}{\omega},\ \gamma_1=\frac{aru+s(t+bu)}{\omega},$$

$$\delta_1=\frac{a\varrho u+\sigma(t+bu)}{\omega},$$

so führen die Gleichungen:

$$6)\quad r=\alpha_1 r_1+\beta_1 s_1,\quad s=\gamma_1 r_1+\delta_1 s_1$$

zu der ganzen Gruppe, wenn man für $t$ und $u$ alle möglichen Werthe setzt.

Die Art übrigens, wie eine Auflösung der Gleichung $ax^2+2bxy+cy^2=m$ gewonnen wird, ist in dem Artikel quadratische Gleichungen nachzusehen. Derselbe enthält auch die Auflösung des Falles, wo die Determinante negativ ist, so wie darin gezeigt wird, dass die kleinsten Werthe von $T$ und $U$ sich immer auf eine einfache Art aus dem Kettenbruche für $\sqrt{D}$ bestimmen lassen.

In gegenwärtigem Artikel kommt es eben hauptsächlich auf die Eigenschaften der quadratischen Formen an.

14) Es sei wieder $f(a, b, c)$ eine gegebene Form; wir wollen für sie eine möglichst einfache, eigentlich äquivalente Form bestimmen. Sei zu dem Ende wieder:

$$x = \alpha x_1 + \beta y_1, \quad y = \gamma x_1 + \delta y_1,$$
$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Setzt man:

$$\alpha = 0, \ \beta = 1, \ \gamma = -1,$$

so bleibt noch immer $\delta$ willkührlich, und es ist $\quad x = y_1, \ y = -x_1 + \delta y_1.$

Die äquivalente Form ist dann:

$$cx_1^2 + 2(-b - c\delta)x_1 y_1 + (a + 2b\delta + c\delta^2)y_1^2.$$

Schreiben wir lieber $a_1$ für $c$, so ist die erste Form:

$$1) \quad f(a, b, a_1),$$

die zweite:

$$2) \quad f(a_1, b_1, a_2)$$

und die Substitution:

$$3) \quad \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ -1, & \delta \end{vmatrix},$$

ausserdem noch:

$$b_1 = -b - a_1\delta,$$

d. h.

$$b_1 \equiv -b \bmod a_1.$$

Da nun, wenn $a_1$ ungrade ist, jede Zahl mit einer aus der Zahlenreihe $-\frac{a_1 - 1}{2}$ bis $\frac{a_1 - 1}{2}$ für Modul $a_1$ congruent sein muss, und, wenn $a_1$ grade ist, mit einer aus der Reihe: $-\frac{a_1}{2}$ bis $+\frac{a_1}{1} - 1$, so kann $a_1$, abgesehen vom Vorzeichen immer grösser als $2b$, oder wenigsten gleich dieser Grösse angenommen werden. Macht man in 2) dieselbe Substitution 3) und fährt so fort, so komm man schliesslich auf eine Form

$$f(a_{n-1}, b_{n-1}, a_n),$$

wo $a_{n-1}$ grösser als, oder wenigstens gleich $2b_{n-1}$ ist.

Ist nun der erste Coefficient immer grösser als der dritte, so nimmt die Reihe

$$a, a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$$

beständig ab, und man kommt auf einen Werth $a_{n-1}$, welcher kleiner als, oder höchstens gleich $a_n$ ist. Eine Form, wo dies stattfindet, heisst redueirte. In einer solchen ist also immer:

$$c \geqq a \geqq 2b,$$

abgesehen vom Vorzeichen.

15) Sei jetzt die Determinante negativ, also:

$$D^2 = b^2 - ac = -\triangle,$$

so müssen $a$ und $c$ auch gleiche Vorzeichen haben, da $b^2$ stets positiv ist. Ist $f(a', b', c')$ irgend eine transformirte Form, also:

$$a' = a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2,$$

so wird:

$$aa' = (a\alpha + b\gamma)^2 - D\gamma^2,$$

ein Ausdruck, welcher stets positiv sein muss. Es haben also $a$ und $a'$ auch stets dasselbe Zeichen.

Es sei noch $\geqq ca \geqq 2b$, also die Form eine reducirte, und nehmen wir zunächst an, $a$ und $b$ hätten gleiche Zeichen, so haben auch $c$ und $b$ gleiche Zeichen. Allgemein ist

$$ac > 4b^2,$$

d. h., da $b_2 - ac = -\triangle$ war,

$$3b^2 < \triangle,$$
$$b < \sqrt{\frac{\triangle}{3}}.$$

Diese Betrachtung macht es möglich, im Falle die Determinante negativ ist, alle reducirten Formen zu ermitteln. Es ist nämlich

$$b^2 + \triangle = ac;$$

nimmt man also $b < \sqrt{\frac{\triangle}{3}}$, und zerlegt $b^2 + \triangle$ auf alle möglichen Weisen, jedoch so, dass $a > 2b$ ist, so erhält man alle Werthe von $a$ und $c$.

Für negative Determinanten ist also die Anzahl der reducirten Formen, welche einer gegebenen entsprechen, immer endlich.

Beispiele. Sei

$\triangle = 1$, so ist $b = 0$, also $a = 1$ und $c = 1$.

Sei ferner

$\triangle = 2$, so ist $b = 0$, also $a = 1$, $c = 2$;

ferner:

$\triangle=3$, also entweder $b=0$, $a=1$, $c=3$,

oder $b=1$, $a=2$, $c=2$;

$\triangle=4$, also $b=0$, $a=2$, $c=2$

oder

$b=0$, $a=1$, $c=4$. Wäre $b=1$,

so ergäben sich keine Werthe für $a$ und $c$, weil $a=1$ nicht grösser als $2b$ ist.

16) Es ist zn hestimmen, unter welchen Bedingungen 2 redneirte Formen mit negativer Determinante äquivalent sind. $f(a, b, c)$ und $f(a_1, b_1, c_1)$ seien diese. Wir setzen

$$a_1 \leqq a.$$

$\begin{vmatrix}\alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta\end{vmatrix}$ sei eine Substitution, welche von der ersten zur zweiten Form führt, also $\alpha\delta-\beta\gamma=1$, nnd

$$aa'=(a\alpha+b\gamma)^2+\triangle\gamma^2.$$

Da nnn

$$b^2 \leqq \frac{\triangle}{3}$$

nnd

$$ac-b^2=\triangle,$$

so muss anch:

$$ac \leqq \frac{4\triangle}{3}$$

sein, nnd deshalb auch

$$aa_1 \leqq \frac{4\triangle}{3},$$

da $a_1 \leqq a$, und $a \leqq c$ ist.

Wegen des Werthes von $aa_1$ kann hiernach $\gamma$ nnr einen der Werthe:

$$0, \ +1 \text{ oder } -1$$

haben, denn in jedem andern Falle wäre $\triangle\gamma^2$ grösser als $aa_1$, was unmöglich ist.

Sei zunächst $\gamma=0$. Wegen der Gleichung $\alpha\delta-\beta\gamma=1$ ist dann

$$\alpha\delta=1, \ \alpha=\delta=\pm 1,$$

folglich

$$a_1=a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2=a,$$

$$b_1=a\alpha\beta+b(\alpha\delta+\beta\gamma)+c\gamma d=b\pm a\beta$$

also

$$b_1-b=\pm a\beta.$$

Es war aber

$$b \leqq \frac{a}{2}, \ b_1 \leqq \frac{a_1}{2} \leqq \frac{a}{2};$$

also muss $b_1-b$ zwischen $-a$ nnd $+a$ liegen.

Es ist aber $\frac{b_1-b}{a}=\pm\beta$ eine ganze Zahl, nnd aus diesem Grunde kann $b_1-b$ nur die 3 Werthe

$0, +a, -a$ haben.

Man findet entweder $b_1=b$, was nichts Neues gibt, da dann anch $c_1=c$ ist, oder

$$b_1=-b=\pm\frac{a}{2},$$

da $b_1$ und $b$ beide kleiner als, oder höchsteus gleich $\frac{a}{2}$ waren.

Die beiden reducirten äquivalenten Formen sind demnach

$$f(a, \tfrac{a}{2}, c) \text{ und } f(a, -\tfrac{a}{2}, c).$$

Wegen der Gleichnng $b^2-ac=b_1^2-a_1c_1$ muss nämlich dann auch $c_1=c$ sein.

Sei ferner $\gamma=\pm 1$, dann gibt die Gleichnng für $a_1$:

$$a\alpha^2\pm 2b\alpha=a'-c.$$

$a'-c$ kann indess nicht positiv sein, da $a' \leqq a$ nnd $a \leqq c$ war; es muss also

$$a\alpha^2 \leqq 2b\alpha$$

sein, was nnmöglich ist, wenn $\alpha$ grösser als 1 wäre, da $a \geqq 2b$ war. Es mnss mithin sein:

$$\alpha=0, \text{ oder } \alpha=1, \text{ oder } \alpha=-1.$$

Sei znnächst $\alpha=0$, so ist

$$a_1=c,$$

nnd da $a_1 \leqq a \leqq c$ war, auch

$$a=c, \ \beta\gamma=-1$$

und

$$b'=-b\pm c\delta,$$

d. h.

$$\frac{b'+b}{c}=\pm\delta$$

nnd da $b'$ und $b$ kleiner als oder höchstens gleich $\frac{a}{2}$ sind, d. h. kleiner als oder höchstens gleich $\frac{c}{2}$, so ist wieder

$$b'=-b, \text{ oder } b'=b=\pm c.$$

Die Formen, die sich hieraus ergehen, sind also $f(a, \frac{a}{2}, a)$ nnd $f(a, \frac{-a}{2}, a)$, die schon in der obigen enthalten sind, ausserdem noch die neuen Formen:

$$f(a, b, a) \text{ und } f(a, -b, a).$$

Sei nnn $\alpha=\pm 1$, so wird:

$$a_1=a\pm 2b+c$$

oder

$$\mp 2b=a+c-a_1.$$

Da aber $a \geqq a_1$ nnd $c \geqq a_1$ war, und diese Grösseu gleiches Vorzeichen haben, man übrigens eine von ihren $a$ stets als positiv annehmen kann, indem man im entgegengesetzten Falle die Vor-

zeichen von $a, b, c$ umkehrt, so ist auch $a-a_1$ und $c-a_1$ nie negativ, also $\mp 2b$ wenigstens gleich $c$ und wenigstens gleich $a$. Es muss also

$$a=c=\mp 2b=a_1$$

sein, da $c \geqq a \geqq 2b$ ist, und die Gleichung $a+a-a_1 < a$ auch $a_1=a$ giht.

Noch ist

$$a\delta=1+\beta\gamma;$$

also da

$$b'=a\alpha\beta+b(\alpha\delta+\beta\gamma)+c\gamma\delta$$

war, auch:

$$b'=a\alpha\beta\mp a\beta\gamma+b+a\gamma\delta.$$

Hieraus ergibt sich:

$$b'-b=ka,$$

wo $k$ eine ganze Zahl ist, und ganz wie oben lässt sich schliessen, dass $b'-b$ einen der Werthe

$$0, \; a \text{ und } -a$$

haben muss. Dies führt aber zu den schon dagewesenen Formen: $f(a, -\frac{a}{2}, a)$ und $f(a, +\frac{a}{2}, a)$.

Es sind also nur 2 Paare äquivalenter Formen möglich:

$$f(a, \frac{a}{2}, c) \text{ und } f(a, -\frac{a}{2}, c),$$

$$f(a, b, a) \text{ und } (a, -b, a).$$

Noch ist zu beweisen, dass diese möglicher Weise äquivalenten Formen auch wirklich vorkommen. Macht man in Form $f(a, b, c)$ die Substitution $\begin{vmatrix}1, & \beta \\ 0, & 1\end{vmatrix}$, so erhält man $f(a, a\beta+b, c_1)$; für $b=\pm\frac{a}{2}$, $\beta=1$ nehmen diese Ausdrücke aber die zuerst gegebenen Werthe $f(a, \frac{a}{2}, c)$, $f(a, -\frac{a}{2}, c)$ an.

Setzt man ferner in $f(a, b, a)$, $x=y_1$, $y=x_1$, so führt dies zu $f(a, -b, a)$, somit kommen beide Paare auch wirklich vor.

17) Man kann sonach die eigentlich äquivalenten Formen mit negativer Determinante in Klassen theilen, und mit Ausnahme dieser beiden Fälle gibt es zu jeder Klasse nur eine reducirte Form, von der man sagt sie repräsentire diese Klasse.

Es gibt also nach dem in 16) Gesagten für die Determinante $-1$ und $-2$ je eine, für $-3$ und $-4$ je 2 Klassen.

Wir nehmen jetzt an, $a$, $2b$ und $c$ hätten keinen Factor gemein. Es soll jetzt untersucht werden, welche Zahlen durch eine gegebene Form mit negativer Determinante, und wie oft dieselben durch dieselbe dargestellt werden können.

Wir haben bereits in 8) angenommen, dass in der Gleichung

$$ax^2+2bxy+cy^2=m$$

$x$ und $y$ relative Primzahlen sein. Diese Zahl $m$ sei positiv ungrade, und eine relative Primzahl in Bezug zur Determinante, so muss die Darstellung, wie oben gezeigt wurde, zu irgend einem Werthe von $\sqrt{D}$ mod $m$ gehören. Seien $n, n_1, n_2 \ldots$ diese Werthe von $\sqrt{D}$. Es gibt dann zu jedem $n$ eine Darstellung durch eine reducirte Form und zwar nur eine. Denn damit $m$ durch die gegebene Form darstellbar sei, muss sie mit $f(m, n, \frac{n^2-D}{m})$ äquivalent sein. Es ist aber nur eine reducirte Form mit der letztern äquivalent, wie wir oben gesehen haben, und diese reducirte Form vertritt die Klasse, zu der $f(m, n, \frac{n^2-D}{m})$ und $f(a, b, c)$ gehören. Die Zahlen $m$, $n$ und $p=\frac{n^2-D}{m}$ haben keinen gemeinschaftlichen Factor, denn jeder Factor von $m$ und $n$ muss ein solcher von $D=n^2-mp$ sein, und es ist vorausgesetzt, dass $m$ und $D$ keinen Factor gemein haben. Da $m$ ausserdem ungrade ist, so haben auch $m$, $2n$ und $\frac{n^2-D}{m}$ keinen Factor gemein.

18) Es soll jetzt die Anzahl der Darstellungen, die für $m$ möglich sind, gefunden werden.

Es war

$$\alpha_1=\alpha t-(\alpha b+\gamma c)u,$$

$$\gamma_1=\gamma t+(\alpha a+\gamma b)u,$$

$$t^2+\triangle u^2=1.$$

Ist $\triangle$ grösser als 1, so gibt es nur 2 Auflösungen dieser Gleichung, nämlich

$$u=0, \; t=\pm 1;$$

ist $\triangle=1$, so ist entweder:

$$t=\pm 1, \; u=0$$

oder

$$t=0, \; u=\pm 1.$$

Es giht also im Allgemeinen 2 Darstellungen, welche den Werthen:

$$\alpha_1=\pm\alpha \text{ und } \gamma_1=\pm\gamma$$

entsprechen. Nur wenn $\triangle=1$ ist, gibt es 4 Auflösungen. Im Allgemeinen also

hat man doppelt so viel Darstellungen, als die Congruenz:

$$z^2 \equiv D \bmod m$$

Wurzeln hat; wenn aber $\triangle = 1$ ist, so hat man 4 Mal so viel.

Möge $\mu$ die Anzahl der einfachen Factoren von $m$ sein. Sind $l_1$, $l_2$ . . . diese Factoren selbst, $h_1$, $h_2$ . . . die Exponenten der Potenzen, in welchen sie bezüglich vorkommen, so ist:

$$m = l_1^{h_1}\, l_2^{h_2} \; . \; . \; . \; l_\mu^{l_\mu}.$$

Wenn $z^2 \equiv D \bmod m$, so ist nach dem Reciprocitätsgesetze für die quadratischen Reste (siehe den Artikel quadratischer Rest):

$$\left(\frac{D}{l_1}\right) = \left(\frac{D}{l_2}\right) = \; . \; . \; . \; = \left(\frac{D}{l_\mu}\right) = 1.$$

Es stellt nämlich bekanntlich der Ausdruck $\left(\frac{D}{l_1}\right)$ die Zahl $+1$ oder $-1$ vor, je nachdem $D$ quadratischer Rest oder Nichtrest von $l$ ist.

Die Anzahl der Wurzeln dieser Congruenz $z^2 \equiv D \bmod m$ ist $2^\mu$, also die der Darstellungen, von denen wir hier sprechen, $2^{\mu+1}$, für $\triangle = 1$ jedoch $2^{\mu+2}$.

Es sei $\triangle = 1$. Dann ist:

$$f(m,\, n,\, \frac{n^2 - D}{m})$$

äquivalent mit

$$f(1,\, 0,\, 1);$$

denn diese Werthe ergaben sich für die $\triangle = 1$ entsprechende reducirte Form. (Abschnitt 13). Es ist dann also:

$$x^2 + y^2 = m.$$

Da aber

$$\left(\frac{-1}{l_1}\right) = \left(\frac{-1}{l_2}\right) = \; . \; . \; . \; = \left(\frac{-1}{l_\mu}\right) = 1$$

sein muss, so müssen die einfachen Factoren von $m$ alle von der Form $4k+1$ sein (siehe den Artikel: quadratischer Rest), d. h. wenn man die Stellung und das Vorzeichen der Variablen nicht berücksichtigt (wo also die Anzahl der Darstellungen auf den 8ten Theil reducirt wird), hat man den Satz:

„Jedes Product von Primzahlen von der Form $4k+1$, wo $\mu$ die Anzahl dieser Factoren ist, lässt sich $2^{\mu-1}$ mal durch die Summe zweier Quadrate ausdrücken."

Z. B.

$$65 = 5 \cdot 13 = 8^2 + 1^2 = 4^2 + 7^2,$$

da hier $\mu = 2$ ist. Ist $m$ eine Primzahl, so ist $\mu = 1$, und 1 die Anzahl der Darstellungen.

Wenn $\triangle = 2$, so war nach Abschnitt 13)

$$b = 0,\; a = 1,\; c = 2,$$

also die Gestalt der Form ist

$$x^2 + 2y^2.$$

Die Gleichungen:

$$\left(\frac{-2}{l_1}\right) = \left(\frac{-2}{l_2}\right) \; . \; . \; . \; . \; = 1$$

setzen voraus, dass alle Factoren $l_1$, $l_2$ . . . eine der Formen $8k+1$ oder $8k+3$ haben. Ist dies der Fall, so hat also die Zahl $m$ wieder $2^{\mu-1}$ Darstellungen, abgesehen vom Vorzeichen der Variablen, wodurch die $2^{\mu+1}$ auf den 4ten Theil reducirt wird.

Z. B. die Zahl $33 = 11 \times 3$ hat 2 Factoren von der Form $8k+3$, es ist also wieder $u = 2$, und die Zahl 2 mal durch die Form $x^2 + 2y^2$ darstellbar. In der That ist $33 = 1^2 + 2 \cdot 4^2 = 5^2 + 2 \cdot 2^2$.

19) Seien jetzt $m$ eine beliebige positive ungrade Zahl, die zu $\triangle$ relativ einfach ist, $l_1$, $l_2$ . . . ihre einfachen Factoren, und es werde vorausgesetzt, dass

$$\left(\frac{-\triangle}{l_1}\right) = \left(\frac{-\triangle}{l_2}\right) = \; . \; . \; . \; = 1,$$

so gehört zu $\triangle$, wie in 13) gezeigt wurde, immer eine endliche Anzahl reducirter Formen:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,\;\; a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2 \ldots$$

Schreibt man nun jede der Zahlen $m$, welche diese Eigenschaft haben, so oft, als die Zahl $2^{\mu+1}$ Einheiten hat, so geschieht dasselbe, als wenn man in allen diesen reducirten Formen für $x$ und $y$ alle Werthe setzt, die zu einander relativ einfach sind und eine der Zahlen $m$ darstellen (dass $x$ und $y$ relativ einfach sind, ist nämlich bei allen bisherigen Betrachtungen über Darstellungen vorausgesetzt); denn immer eine dieser Formen ist ja dann mit $m$ gleichbedeutend. Nach Abschnitt 17) und 18) aber ist $m$ durch die Gesammtheit dieser Formen so oft darstellbar als $2^{\mu+1}$ Einheiten hat.

Man kann danach sowohl den Ausdruck $\Sigma 2^{\mu+1} m$, als auch $\Sigma 2^{\mu+1} F(m)$, wo $F$

eine beliebige Function von $m$ ist, auf diese Weise darstellen, wenn das Zeichen $\Sigma$ links auf alle Werthe von $m$ geht.

Also:

$$2\Sigma 2^u F(m) = \Sigma F(ax^2+2bxy+cy^2) + \Sigma F(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2) + \ldots$$

Verstehen wir nun unter $l, l_1, l_2 \ldots$ irgend welche Primzahlen, die der Bedingungen genügt, dass $D$ oder $-\triangle$ quadratischer Rest zu $l, l_1, l_2 \ldots$ ist, und sei $F(m) = \frac{1}{m^s}$, so ist offenbar:

$$\Sigma \frac{2^u}{m^s} = \left(1+\frac{2}{l^s}+\frac{2}{l^{2s}}+\frac{2}{l^{3s}}+\ldots\right)\left(1+\frac{2}{l_1^s}+\frac{2}{l_1^{2s}}+\ldots\right) \cdot$$

$$\left(1+\frac{2}{l_2^s}+\frac{2}{l_2^{2s}}+\ldots\right)\ldots\ldots$$

da jedes $m = l^p, l_1^q, l_2^r \ldots$ ist, und durch Multiplication sich alle Ausdrücke von dieser Form rechts ergeben, wobei sich dann gleichzeitig der zugehörige Zähler $2^\mu$ einstellt.

Nun ist:

$$1+\frac{2}{l^s}+\frac{2}{l^{2s}}+\frac{2}{l^{3s}}+\ldots\ldots\frac{1+\frac{1}{l^s}}{1-\frac{1}{l^s}}$$

also muss auch:

$$\Sigma \frac{2^u}{m^s} = \frac{1+\frac{1}{l^s}}{1-\frac{1}{l^s}} \cdot \frac{1+\frac{1}{l_1^s}}{1-\frac{1}{l_1^s}} \cdot \frac{1+\frac{1}{l_2^s}}{1-\frac{1}{l_2^s}} \ldots\ldots$$

sein. Sei nun $q$ irgend eine, nicht in $2\triangle$ enthaltene Primzahl, und $n$ eine beliebige ungrade Zahl, die mit $\triangle$ keinen Factor gemein hat, so ist auch:

$$\left(1+\frac{1}{q^s}+\frac{1}{q^s}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{q_1^s}+\frac{1}{q_1^{2s}}+\ldots\right)\left(1+\frac{1}{q_2^s}+\frac{1}{q_2^{2s}}+\ldots\right) = \Sigma\frac{1}{n^s},$$

wo die Summe auf alle Zahlen $n$ von den bezeichneten Eigenschaften geht, und ebenso ist, wenn man die unendlichen Summen links addirt:

$$\Sigma\frac{1}{n^s} = \frac{1}{1-\frac{1}{q^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{q_1^s}} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{q_2^s}} \ldots\ldots$$

Entwickelt man aber den Ausdruck: $\frac{1}{1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}}$ in eine Reihe, wo $\left(\frac{D}{q}\right)$ die oben gegebene Bedeutung hat, und berücksichtigt die Gleichung (siehe den Artikel: quadratische Reste):

$$\left(\frac{D}{q}\right)^n = \left(\frac{D}{q^n}\right),$$

so kommt:

$$1+\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}+\left(\frac{D}{q^2}\right)\frac{1}{q^{2s}}+\left(\frac{D}{q^3}\right)\frac{1}{q^{3s}}+\dots\frac{1}{1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}};$$

also wenn man alle Werthe von $q$ nimmt: $q$, $q_1$, $q_2$, und multiplicirt, so wird

$$\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}=\frac{1}{1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{D}{q_1}\right)\frac{1}{q_1^s}}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{D}{q_2}\right)\frac{1}{q_2^s}}\dots$$

Setzen wir noch in den oben gefundenen Ausdruck für $\Sigma\frac{1}{n^s}$ überall $2s$ statt $s$, so ist:

$$\Sigma\frac{1}{n^{2s}}=\frac{1}{1-\frac{1}{q^{2s}}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q_1^{2s}}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{q_2^{2s}}}\dots\dots,$$

also:

$$\frac{\Sigma\frac{1}{n^s}\,\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}}{\Sigma\frac{1}{n^{2s}}}=\frac{1-\frac{1}{q^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{q^s}\right)\left(1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}\right)}\,\frac{1-\frac{1}{q_1^{2s}}}{\left(1-\frac{1}{q_1^s}\right)\left(1-\left(\frac{D}{q_1}\right)\frac{1}{q_1^s}\right)}\dots\dots$$

$$=\frac{1+\frac{1}{q^s}}{1-\left(\frac{D}{q}\right)\frac{1}{q^s}}\cdot\frac{1+\frac{1}{q_1^s}}{1-\left(\frac{D}{q_1}\right)\frac{1}{q_1^s}}\dots\dots$$

Alle diejenigen Factoren, wo $\left(\frac{D}{q}\right)=-1$ ist, heben sich auf, es sind also nur diejenigen $q$ zu berücksichtigen, für welche die Determinante quadratischer Rest, also $\left(\frac{D}{q}\right)=+1$ ist. Dies sind aber diejenigen Zahlen, die wir mit $l_1$, $l_2$ .... bezeichnet haben, und dann stimmt unser Product mit demjenigen, welches den Werth von $\Sigma\frac{2^\mu}{m^s}$ gab, überein; folglich ist:

$$\Sigma\frac{2^\mu}{m^s}=\frac{\Sigma\frac{1}{n^s}\;\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}}{\Sigma\frac{1}{n^{2s}}}.$$

Also wenn man für $2\Sigma\frac{2^\mu}{m^s}$ den Ausdruck durch die quadratischen Formen nimmt, und mit $\Sigma\frac{1}{n^{2s}}$ multiplicirt, so wird

$$2\Sigma\frac{1}{n^s}\,\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}=\Sigma\frac{1}{n^{2s}}\,\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma\frac{1}{n^{2s}}\,\Sigma\frac{1}{(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)^s}\dots,$$

wo man auch setzen kann:

$$\Sigma \frac{1}{n^{2s}} \Sigma \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} = \Sigma \frac{1}{[a(nx)^2+2b(nx)(ny)+c(ny)^2]^s} \dots$$

$$= \Sigma \frac{1}{(ax_1{}^2+2bx_1y_1+cy_1{}^2)^s} + \dots .$$

wo $x_1$, $y_1$ dann andere Werthe von $x$ und $y$ sind.

Es stellen sich hierbei alle Werthe $x_1$, $y_1$ ein, die so beschaffen sind, dass $ax_1{}^2+2bx_1y_1+cy_1{}^2$ zu $2D$ relativ einfach ist. Die Bedingung, dass $x$ und $y$ relativ einfach zu einander sein sollen, ist also jetzt aufgehoben. Denn es war sowohl $n$, als auch $ax_1{}^2+2bx_1y_1+cy_1{}^2$ zu $2D$ relativ einfach, also ist dies auch mit der neuen Form der Fall. Es kommen aber auch in den Formen alle $x$ und $y$, die zu einander relativ einfach sind, und alle $n$, die es zu $D$ sind, vor. Sei nämlich $n$ der grösste gemeinschaftliche Factor von $x_1$ und $y_1$, oder $x_1 = nx$, $y_1 = ny$, so kann $n$ keinen Factor mit $2D$ gemein haben, weil ihn sonst die ganze Form haben müsste. $x$ und $y$ haben also keinen gemeinschaftlichen Factor mehr.

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich:

$$2\Sigma \frac{1}{n^s} \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} = \Sigma \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \dots .$$

Die Summe rechts geht auf alle $x$ und $y$. Diese Formel wird die Formen geben, welche zu $2D$ relativ einfach sind.

Ferner ist:

$$2\Sigma \frac{1}{n^s} \Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{n^s} = 2\Sigma \left(\frac{D}{n}\right) \frac{1}{(nn_1)^s}$$

wo:

$$r = nn_1$$

zu $2D$ relativ einfach ist. Es kommt also jedes $r$ so oft vor, als es sich in 2 Factoren zerlegen lässt. Dabei wird $\left(\frac{D}{n}\right)$ bald positiv, bald negativ.

Ist also $x$ der Ueberschuss der Anzahl der Factoren $n$ von $r$, für welche $D$ quadratischer Rest ist, über die, wo $D$ Nichtrest ist, so erhält man $2\Sigma\left(k\frac{1}{r^s}\right)$ und es ist:

$$2\Sigma k \frac{1}{r^s} = \Sigma \frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s} + \Sigma \frac{1}{(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)^s} + \dots$$

Auf der Seite rechts kommt nun jedes $r^s$ so oft vor, als $r$ durch die Formen:

$$ax^2+2bxy+cy^2,\quad a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2$$

darstellbar ist.

Es lässt sich nun aber auch beweisen, dass die beiden Reihen links und rechts in den einzelnen Gliedern übereinstimmen, welche einem bestimmten Werthe von $r^s$ entsprechen. Seien die Reihen:

$$\left(\frac{A}{\alpha^s} + \frac{B}{\beta^s} + \frac{C}{\gamma^s} + \dots = \frac{A'}{\alpha'^s} + \frac{B'}{\beta'^s} + \frac{C'}{\gamma'^s} + \dots\right)$$

oder

$$\frac{1}{\alpha^s}\left(A + B\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^s + C\left(\frac{\alpha}{\gamma}\right)^s + \dots\right) = \frac{1}{\alpha'^s}\left(A' + B'\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)^s + C'\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right)^s + \dots\right)$$

Unter $\alpha$, $\alpha'$ sind die kleinsten Werthe der Grössen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ ... und bezüglich $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ verstanden.

Nehme man nun an, es wären $\alpha$ und $\alpha'$ ungleich, so kann man immer $\alpha'$ kleiner als $\alpha$ annehmen, weil wir im entgegengesetzten Falle die Bezeichnung von $\alpha$ und $\alpha'$ vertauschen können. Es ist dann:

$$A\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^s + B\left(\frac{\alpha'}{\beta}\right)^s + C\left(\frac{\alpha'}{\gamma}\right)^s + \dots = A' + B'\left(\frac{\alpha'}{\beta'}\right)^s + C'\left(\frac{\alpha'}{\gamma'}\right)^s + \dots ,$$

wenn man auf beiden Seiten mit $\alpha'^s$ multiplicirt.

Setzt man nun

$$s = \infty,$$

so wird $A' = 0$, was nicht möglich ist. Jedenfalls also hat man $\alpha' = \alpha$, und daher für $s = \infty$ auch:

$$A' = A;$$

ebenso ergibt sich

$$B' = B,\ C' = C\ \ldots$$

Der Coefficient von $\frac{1}{r^s}$ links ist nun $2k$, und rechts stellt er die Anzahl der Darstellungen von $r$ durch die Formen $ax^2 + 2bxy + cy^2$, $a_1x^2 + 2b^1xy + c_1y^2 \ldots$ vor, ohne Rücksicht darauf, ob $x$ und $y$ relativ vielfach sind oder nicht und man hat folgenden Satz:

„Ist $r$ irgend eine positive Zahl, die keinen gemeinschaftlichen Factor mit $2D$ hat, so bestimmt man, wieviel Primfactoren von $r$ das $D$ zum quadratischen Reste und wieviel $D$ zum Nichtreste machen (den Factor 1 eingeschlossen); der doppelte Ueberschuss $k$ der ersten Zahl über die zweite gibt dann an, wie oft $r$ durch eine quadratische Form mit Determinante $D = -\triangle$ darstellbar ist. Nur für $D = -1$ ist der vierfache Ueberschuss zu nehmen."

Beispiel. $187 = 17 \cdot 11 \cdot 1$; 1 und 17 machen 13 zum quadratischen Reste, 11 nicht, also $k = 2 - 1 = 1$, und 187 lässt sich 2 mal durch eine Form mit der Determinante 13 darstellen.

20) Ist in der That $D = -1$, so sind die Factoren von $r$, welche $D$ zum quadratischen Reste machen, von der Form $4h+1$, die andern von der Form $4k+3$. Die entsprechende reducirte Form war die Summe zweier Quadrate. Für eine Primzahl von der Form $4h+1$ ist $k = 2$, da 1 auch von der Form $4h+1$ ist; für eine Primzahl von der Form $4h+3$ ist $k = 0$, also:

Jede Primzahl von der Form $4h+1$ ist eine Summe von 2 Quadraten $p^2+q^2$, sie lässt sich also auch auf die Form $(p+qi)(p-qi)$ bringen. Sie ist mithin, wenn man $p+qi$ als complexe ganze Zahl betrachtet, keine complexe Primzahl. Dagegen lässt sich eine Primzahl von der Form $4h+3$ nie als Summe $Q$ von Quadraten ausdrücken, und ist daher auch eine complexe Primzahl.

Wir haben bewiesen, dass in unsern Summen auch die einzelnen Glieder in ihren Coefficienten übereinstimmen. Man kann also auch statt $\frac{1}{r^s}$ oder $\frac{1}{(nn_1)^s}$ eine beliebige Function von $r$ multiplicirt mit dem entprechenden Coefficienten in die Summen setzen. D. h. es ist:

$$2\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\varphi(nn_1) = \Sigma\varphi(ax^2+2bxy+cy^2) + \Sigma\varphi(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2) + \ldots,$$

wo $\varphi$ eine beliebige Function ist. Sei z. B.:

$$\varphi(u) = q^u,$$

so kommt:

$$2\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)q^{nn_1} = \Sigma q^{ax^2+2bxy+cy^2} + \Sigma q^{a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2} + \ldots,$$

wo statt der 2 links 4 zu setzen ist, wenn $D = -1$ ist. Es ist aber:

$$\left(\frac{-1}{n}\right) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

(siehe den Artikel: quadratischer Rest) und die Formen rechts reduciren sich auf die eine $x^2+y^2$, also:

$$4\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}} q^{nn_1} = \Sigma q^{x^2+y^2}$$

Die durch $x^2+y^2$ darzustellende Zahl sollte ungrade sein. Setzt man, um dem zu genügen, also für $x$ alle graden, für $y$ alle ungraden Zahlen, und dann umgekehrt für $y$ alle graden und $x$ alle ungraden Zahlen, welches letztere dasselbe ist, als ob die durch das erste Verfahren entstehende Summe verdoppelt würde, führt man dies auch für die negativen Zahlen aus, so wird hierdurch eben nur der aus den positiven Zahlen entstehende Theil vervierfacht, weil $x$ oder $y$ einzeln und auch beide gleichzeitig negativ genommen werden müssen, mit Ausnahme der Glieder, die $y = 0$ entsprechen, und welche nur verdoppelt werden. Es ist dann, wie leicht zu sehen:

$$\Sigma q^{x^2+y^2} = 4(q + q^{3^2} + q^{5^2} + \ldots)(1 + 2q^2 + 2q^{4^2} + 2q^{6^2} + \ldots).$$

In $\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}} q^{nn_1}$ ist für $n$ jede ungrade Zahl zu setzen, d. h. die Summe wird:

$$\Sigma(q^{n'}-q^{3n'}+q^{5n'}+\ldots)=\Sigma\frac{q^{n'}}{1+q^{2n'}}.$$

Summirt man diese Reihe aber nach $n'$, so kommt:

$$\Sigma(-1)^{\frac{n+1}{2}} q^{nn'}=\Sigma(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{q^n}{1-q^{2n}},$$

und der Vergleich aller 3 Summen gibt folgende Formel:

$$\frac{q}{1+q^2}+\frac{q^3}{1+q^6}+\frac{q^5}{1+q^{10}}+\ \ldots\ \frac{q}{1-q^2}-\frac{q^3}{1-q^6}+\frac{q^5}{1-q^{10}}+\ \ldots$$
$$=(q+q^{3^2}+q^{5^2}+\ldots)(1+2q^{2^2}+2q^{4^2}+\ldots).$$

Es ist aber auch

$$q^{x^2+y^2}=q^{\frac{1}{2}(x+y)^2+\frac{1}{2}(x-y)^2},$$

d. h. wenn man

$$x+y=t,\quad x-y=u$$

setzt, wo:

$$x=\frac{t+u}{2},\quad y=\frac{t-u}{2}$$

wird, und für $t$ und $u$ alle ungraden Zahlen nimmt, so erhält man alle möglichen Werthe von $k$ und $y$. Wie leicht zu sehen, ist nämlich

$$x=\frac{2h+1+2h+1}{2}=h+k+1,\quad y=\frac{2h+1-(2k+1}{2}=h-k,$$

wo $h$ und $h$ beliebige Zahlen sind. Da aber $h+k$ und $h-k$ gleichzeitig grade oder ungrade sind, so wird $x$ immer grade, wenn $y$ ungrade ist, und umgekehrt; man erhält also auf diese Weise für $x^2+y^2$ in der That immer das Quadrat einer ungraden Zahl zu dem einer graden addirt, wie dies bei diesen Betrachtungen stattfinden muss, also:

$$\Sigma\left(q^{\frac{1}{2}}\right)^{t^2+u^2}=\Sigma\left\{\left(q^{\frac{1}{2}}\right)^{t^2}\left(q^{\frac{1}{2}}\right)^{u^2}\right\}$$

ist der Ausdruck für unsere Summe, dieser aber offenbar gleichbedeutend mit

$$\left(q^{\frac{1}{2}}+(q^{\frac{1}{2}})^{3^2}+(q^{\frac{1}{2}})^{5^2}+\ldots\right)^2,$$

also wenn man noch $q^{\frac{1}{2}}$ mit $q$ vertauscht, und diesen eben gefundenen Ausdruck einem früher gefundenen gleichsetzt:

$$\frac{q^2}{1+q^4}+\frac{q^6}{1+q^{12}}+\frac{q^{10}}{1+q^{20}}+\ldots=(q+q^{3^2}+q^{5^2}+q^{7^2}+\ldots)^2.$$

Es sind nämlich rechts eigentlich alle positiven und negativen Zahlen zu nehmen, wodurch ein Factor 4 erscheint, der sich gegen denselben Factor im ersten Gliede der Gleichung weghebt.

Setzt man noch $D=-2$, so wird die Form $x^2+2y^2$, und es ergibt sich aus ähnlichen Betrachtungen wie oben:

$$\frac{q}{1-q^2}+\frac{q^3}{1-q^6}-\frac{q^5}{1-q^{10}}-\frac{q^7}{1-q^{14}}+\ldots=(q+q^{3^2}+q^{5^2}+\ldots)$$
$$\ldots(1+2q^2+2q^{2\cdot 2^2}+2q^{3\cdot 2^2}+\ldots).$$

Auf einen Theil der hier entwickelten Reihen ist Jakobi durch rein analytische Betrachtungen, welche die Theorie der elliptischen Functionen betreffen, gekommen. Ihre zahlentheoretische Ableitung, die hier gegeben ist, rührt von Lejeune-Dirichlet her. Die allgemeinen, demselben berühmten Mathematiker angehörigen, Sätze, worauf dieselbe sich stützt, geben zugleich diejenigen Betrachtungen über quadratische Formen, welche Gauss auf einem ganz andern Wege gefunden hat, in einfacherer Weise verbunden mit neuen Sätzen in diesem Gebiete. Es hat dadurch Dirichlet die Verbindung der Analysis und der Zahlentheorie begründet, welche von so grosser Wichtigkeit geworden ist.

21) Es sollen jetzt nach Dirichlet noch einige Anwendungen der Analysis auf die Theorie der quadratischen Formen gegeben werden. Die bekannte Reihe:

$$\psi(\varrho)=\frac{1}{b^{1+\varrho}}+\frac{1}{(b+a)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(b+2a)^{1+\varrho}}+\ldots$$

convergirt bekanntlich nur dann und dann immer für reelles $\varrho$, wenn $\varrho$ positiv ist, vorausgesetzt, dass $b$ und $a$ positive Zahlen sind. Es kommt jetzt darauf an, die Summe dieser Reihe für den Fall zu ermitteln, dass $\varrho$ in's Unendliche abnimmt. Bekanntlich ist

$$f(x+h)=fx+hf'(x+\vartheta h),$$

wenn $f(x)$ eine beliebige, in den Grenzen $x$ und $x+h$ stetige Function, $\vartheta$ irgend ein positiver ächter Bruch ist (siehe die Artikel Taylorscher Satz und Reihen). Ist also

$$f(x)=x^{-\varrho},$$

so erhält man hieraus:

$$(b+a)^{-\varrho}=b^{-\varrho}-a\varrho(b+\vartheta a)^{-1-\varrho},$$

$$(b+2a)^{-\varrho}=(b+a)^{-\varrho}-a\varrho(b+a+\vartheta' a)^{-1-\varrho},$$

$$(b+3a)^{-\varrho}=(b+2a)^{-\varrho}-a\varrho(b+2a+\vartheta' a)^{-1-\varrho}\ \ldots$$

Addirt man alle diese Gleichungen, die sich bis in's Unendliche erstrecken, so werden sich alle Glieder links bis auf das letzte $(b+na)^{-\varrho}$ wegheben, dieses aber, da $n=\infty$ ist und $\varrho$ negativ, der Null sich nähern, so dass man hat:

$$0=b^{-\varrho}-a\varrho\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(b+na+\vartheta a)^{1+\varrho}}$$

oder

$$\frac{1}{a\varrho b^{\varrho}}=\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(b+na+\vartheta a)^{1+\varrho}}.$$

$\vartheta$ liegt immer zwischen 0 und 1. Setzt man also $\vartheta=0$, so wird die rechte Seite der Gleichung vergrössert, und man erhält:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(b+na)^{1+\varrho}}>\frac{1}{a\varrho b^{\varrho}};$$

setzt man aber $\vartheta=1$, so wird die Summe verkleinert, also:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\frac{1}{(b+(n+1)a)^{1+\varrho}}<\frac{1}{a\varrho b^{\varrho}}$$

d. h. da $\sum\frac{1}{(b+na)^{1+\varrho}}$ die oben mit $\psi(\varrho)$ bezeichnete Reihe ist:

$$\psi(\varrho)>\frac{1}{a\varrho b^{\varrho}} \text{ und } \psi(\varrho)<\frac{1}{a\varrho b^{\varrho}}+\frac{1}{b^{1+\varrho}}.$$

Da für unendlich kleines $\varrho$ beide Grenzen sonach zusammenfallen, so hat man als Grenzwerth von $\psi(\varrho)$:

$$\lim\ \psi(\varrho)=\frac{1}{a\varrho b^{\varrho}}$$

oder da $\varrho$ der Null sich nähert:

$$a\varrho\psi(\varrho)=1.$$

22) In der Gleichung:

$$2\Sigma\frac{1}{n^s}\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}=\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma\frac{1}{(a_1x^2+2b_1xy+c'y^2)^s}+\ldots,$$

die wir in Abschnitt 19) betrachtet haben, wollen wir nun diejenigen Werthe von $n$ zusammennehmen, wo der Divisionsrest von $\frac{n}{2\triangle}$ denselben Werth hat; alle diese Divisionsreste sind zu $2\triangle$ relativ einfach, weil $n$ selbst so beschaffen war. Man erhält also auf diese Weise alle Zahlen, die kleiner als $2\triangle$ und zu $2\triangle$ relativ einfach sind.

Diese Zahlen seien: $l_1$, $l_2$ . . . . ., und sei ferner $s=1+\varrho$, also:

$$\Sigma\frac{1}{n^s}=\Sigma\frac{1}{(2\triangle t+l_1)^{1+\varrho}}+\frac{1}{(2\triangle t+l_2)^{1+\varrho}}+\ldots,$$

wo die Summen auf die Werthe von $t$ gehen. Also wenn man $\varrho$ ins Unendliche abnehmen lässt, so ergibt sich $\frac{1}{2\triangle\varrho}$ als Werth jeder Reihe, die Anzahl dieser Reihen aber ist $\varphi(2\triangle)$, unter $\varphi(x)$ die bekannte zahlentheoretische Function verstanden, welche angibt, wie viel Zahlen zu einer gegebenen $x$ relativ einfach und kleiner als diese Zahl sind. Man hat also:

$$\Sigma\frac{1}{n^{1+\varrho}}=\frac{\varphi(2\triangle)}{2\triangle\varrho}.$$

Wir betrachten nun den Ausdruck rechts:

$$\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}}+\Sigma\frac{1}{(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)^{1+\varrho}}+\ldots$$

Es ist hierbei nicht grade nöthig, im Nenner nur die reducirten Formen jeder Klasse zu betrachten, sondern man kann überhaupt aus jeder Klasse eine beliebig als Vertreterin dieser Klasse nehmen. Auf diese Weise kann man es stets so einrichten, dass die Coefficienten $a, a_1\ldots$ zu $2\triangle$ relativ einfach sind. Es sind dann zu setzen:

$$x=2\triangle t+\alpha,\ y=2\triangle u+\gamma,$$

wo $t$ und $u$ alle ganzen Zahlen, $\alpha$ und $\gamma$ alle Zahlen von 0 bis $2\triangle-1$ vorstellen und immer ist:

$$x\equiv\alpha_{\mathrm{mod}\,2\triangle},\ y\equiv\gamma_{\mathrm{mod}\,2\triangle}.$$

Es muss also jetzt

$$a\alpha^2+2b\alpha\gamma+c\gamma^2$$

relativ einfach zu $2\triangle$ sein, aber da dies in Bezug auf $a$ stattfindet, so kann man auch diesen Ausdruck mit $a$ multipliciren; also ist

$$(a\alpha+b\gamma)^2+\triangle\gamma^2$$

relativ einfach zu $2\triangle$.

Sei $\gamma$ zunächst grade, so muss

$$a\alpha+b\gamma$$

zu $2\triangle$ relativ einfach sein. Setzt man für $\alpha$ alle Zahlen von Null bis $2\triangle-1$, so kann man für den Ausdruck $a\alpha+b\gamma$ alle Reste in Bezug auf $2\triangle$ setzen. Es sind dies bekanntlich dieselben Zahlen, aber in andrer Ordnung; $\varphi(2\triangle)$ ist die Anzahl derjenigen darunter, welche auch zu $2\triangle$ relativ einfach sind.

Sei jetzt $\gamma$ ungrade und möge zunächst $\triangle$ grade sein, so ist $a\alpha+b\gamma$ ungrade und relativ einfach zu $\triangle$ zu nehmen, d. h. auch zu $2\triangle$, also der Fall ist ganz wie der obige zu behandeln.

Seien nun gleichzeitig $\gamma$ und $\triangle$ ungrade, so ist $a\alpha+b\gamma$ grade und relativ einfach in Bezug auf $\triangle$ zu nehmen; es sind also die Zahlen der Reihe

$$0,\ 2,\ 4\ \ldots\ 2\triangle-2$$

zu betrachten, welche zu $2\triangle$ relativ einfach sind, oder was dasselbe ist, man betrachtet die Zahlen der Reihe

$$0,\ 1,\ 2\ \ldots\ \triangle-1,$$

welche zu $\triangle$ relativ einfach sind. Ihre Anzahl ist also $\varphi(\triangle)$, da aber $\varphi(2)=1$ ist, so hat man

$$\varphi(\triangle)=\varphi(2)\varphi(\triangle)=\varphi(2\triangle)$$

und immer also ist die fragliche Anzahl $=\varphi(2\triangle)$, d. h. es entsprechen jedem $\gamma$ immer $\varphi(2\triangle)$ Zahlen $\alpha$. Da die Anzahl der $\gamma$ aber gleich $2\triangle$ ist, so hat man $2\triangle\cdot\varphi(2\triangle)$ Werthe, die den $\alpha$ und $\gamma$ entsprechen.

23) Diese Entwickelungen machen es jetzt möglich, die Frage zu beantworten: „Wie oft wird $ax^2+2bxy+cy^2$ nicht grösser, als eine gegebene Zahl $\sigma$ werden, wo

$$x=2\triangle t+\alpha,\ y=2\triangle u+\gamma$$

gesetzt wird, $\sigma$ aber eine sehr grosse Zahl wird?"

Diese Frage ist offenbar gleichbedeutend mit der folgenden:

„Wann ist

$$a\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma}}\right)^2+2b\left(\frac{x}{\sqrt{\sigma}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{\sigma}}\right)+c\left(\frac{y}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\leqq 1?\text{“}$$

Wir setzen:

$$\frac{x}{\sqrt{\sigma}} = \xi, \quad \frac{y}{\sqrt{\sigma}} = \eta,$$

$$\xi = \frac{2\triangle}{\sqrt{\sigma}}t + \frac{\alpha}{\sqrt{\sigma}}, \quad \eta = \frac{2\triangle}{\sqrt{\sigma}}u + \frac{\gamma}{\sqrt{\sigma}};$$

also es soll

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1$$

werden.

Denkt man sich unter $\xi$ und $\eta$ die rechtwinkligen Coordinaten eines Punktes, so stellt immer, wenn

$$b^2 - ac = -\triangle,$$

also negativ ist, die Gleichung

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 = 1$$

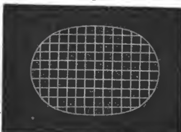
eine Ellipse vor, also die Ungleichheit

$$a\xi^2 + 2b\xi\eta + c\eta^2 \leqq 1$$

umfasst die Coordinaten aller Punkte, die innerhalb dieser Ellipse oder auf ihrem Umfange liegen.

Berücksichtigen wir nun, dass diejenigen Werthe von $\xi$, welche uns angehen, eine arithmetische Reihe bilden, ebenso wie die Werthe von $\eta$, und dass die Differenzen beider Reihen $= \frac{2\triangle}{\sqrt{\sigma}}$, also unter einander gleich sind, so ergibt sich, dass die Coordinaten jedes Punktes $\xi$, $\eta$ gegen den vorhergehenden um dasselbe Stück wachsen, dass also die Punkte $\xi$, $\eta$ Quadrate innerhalb der Ellipse bilden. Wird $\sigma$ sehr gross, so wird auch die Anzahl der Quadrate sehr gross werden, und der Inhalt aller nähert sich immer mehr dem der Ellipse; da nun der Inhalt der letztern gleich $\frac{\pi}{\sqrt{\triangle}}$ (siehe Artikel: Ellipse oder Quadratur (geometrische)), der Inhalt eines Quadrates aber gleich

Fig. 8.



$$\left(\frac{2\triangle}{\sqrt{\sigma}}\right)^2,$$

so kann man, wenn $S$ die Anzahl dieser Quadrate, und $S$ sehr gross ist, annäherungsweise setzen:

$$\frac{4S\triangle^2}{\sigma} = \frac{\pi}{\sqrt{\triangle}}$$

oder:

$$S = \frac{\pi\sigma}{4\triangle^{\frac{3}{2}}}.$$

Es wird also $S$ unabhängig von $a$ und $b$ und mit $\sigma$ proportional.

24) In der Summe:

$$\Sigma \frac{1}{(ax^2 + 2bxy + cy^2)^{1+\varrho}} + \Sigma \frac{1}{(a_1x^2 + 2b_1xy + c_1y^2)^{1+\varrho}} + \ldots$$

denken wir uns jetzt $\alpha$ und $\gamma$ bestimmt und die Ausdrücke $ax^2 + 2bxy + cy^2$ ihrer Grösse nach geordnet, so dass wir mit dem kleinsten beginnen; seien dieselben gleich

$$l_1, l_2 \ldots l_n$$

Wir setzen ferner

$$l_n = np_n$$

und beweisen, dass mit wachsendem $n$ sich $p_n$ einer Constante nähert.

Es gibt nämlich, wie wir angenommen haben, $n$ Werthe $l_1$, $l_2$ ..., welche nicht grösser als $l_n$ sind; ist aber $l_n$ gross, so war die Anzahl dieser Werthe, nach der obigen Entwickelung auch gleich $\frac{\pi l_n}{4\triangle^{\frac{3}{2}}}$. Es muss also

$$n = \frac{\pi}{4\triangle^{\frac{3}{2}}} l_n$$

und

$$p_n = \frac{4\triangle^{\frac{3}{2}}}{\pi} = P$$

werden, wenn wir unter $P$ eine Constante verstehen.

Man kann nun in der Reihe:

$$\varrho\left(\frac{1}{l^{1+\varrho}}+\frac{1}{l_1^{1+\varrho}}+\frac{1}{l_2^{1+\varrho}}+\dots\frac{1}{l_n^{1+\varrho}}\right)+\dots$$

$n$ so gross annehmen, dass von dem entsprechenden Gliede an, alle $p_n$ zwischen

$$P+\delta \text{ und } P-\delta$$

fallen, $n\delta$ aber so klein wird, als man will; dann liegt auch jedes $l$ zwischen $n(P-\delta)$ und $n(P+\delta)$, und $p_n$ nähert sich also in der That einer constanten Grenze.

Wir bezeichnen nun den mit $\frac{1}{l_n^{1+\varrho}}$ beginnenden Theil der Reihe durch $T$, so ist:

$$\frac{1}{(P+\delta)^{1+\varrho}}\varrho\left(\frac{1}{n^{1+\varrho}}+\frac{1}{(n+1)^{1+\varrho}}+\dots\right)$$
$$<T<\frac{1}{(P-\delta)^{1+\varrho}}\varrho\left(\frac{1}{n^{1+\varrho}}+\frac{1}{(n+1)^{1+\varrho}}+\dots\right).$$

Es ist nämlich für $l_n$ einmal $n(P+\delta)$ und einmal $n(P-\delta)$ gesetzt, wodurch der Werth der Reihe im ersten Falle verkleinert, im letzteren vergrössert wird.

Der Ausdruck aber in der Klammer nähert sich mit abnehmenden $\varrho$, wie wir im Abschnitt 21 gesehen haben, dem Werthe: $\frac{1}{\varrho}$ (da $a=1$ ist); also es wird $F$ zwischen

$$\frac{1}{P+\delta} \text{ und } \frac{1}{P-\delta}$$

zu liegen kommen, und schliesslich, da auch $\delta$ ins Unendliche abnimmt, sein:

$$T=\frac{1}{P}.$$

Der übrige Theil unserer Reihe aber ist endlich, und nähert sich wegen des Factors $\varrho$ der Null, wenn $\varrho$ ins Unendliche abnimmt.

Der Werth der ganzen Reihe ist also wegen des Ausdruckes, der für $P$ gefunden wurde:

$$\frac{\pi}{4\triangle^{\frac{1}{2}}}$$

Nun war unsere Reihe

$$\varrho\left(\frac{1}{l^{1+\varrho}}+\frac{1}{l_1^{1+\varrho}}+\frac{1}{l_2^{1+\varrho}}+\dots\right)$$

nur der Ausdruck für

$$\varrho\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{s}},$$

wo $a$ und $\gamma$ einen bestimmten Werth haben. Es ist nun

$$\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^s}+\Sigma\frac{1}{(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)^s}+\dots$$

zu bestimmen. Die Anzahl aller Reihen, die den verschiedenen Werthen von $\alpha$ und $\gamma$ entsprechen, war

$$2\triangle-\varphi(2\triangle);$$

mit diesem Ausdrucke ist also der gefundene Werth

$$\frac{\pi}{4\triangle^{\frac{1}{2}}}$$

zu multipliciren, wegen des ausfallenden Factors $\varrho$ durch $\varrho$ zu dividiren und schliesslich das Ganze so oft zu nehmen, als Klassen für eine gegebene Determinante vorhanden sind. Sei $h$ diese Klassenanzahl, so wird also:

$$\Sigma\frac{1}{(ax^2+2bxy+cy^2)^{1+\varrho}}+\Sigma\frac{1}{(a_1x^2+2b_1xy+c_1y^2)^{1+\varrho}}+\dots$$
$$=\frac{h\varphi(2\triangle)\pi\cdot 2\triangle}{4\varrho\triangle^{\frac{1}{2}}}=\frac{h\pi\varphi(2\triangle)}{2\varrho\triangle^{\frac{1}{2}}}.$$

Es war dieser Ausdruck aber auch gleich:

$$2\Sigma\frac{1}{n^s}\,\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n^s}$$

und da

$$\Sigma\frac{1}{n^s}=\Sigma\frac{1}{n^{1+\varrho}}=\frac{\varphi(2\triangle)}{2\triangle\varrho}$$

war (Abschnitt 22), so ergibt sich aus dem Vergleiche beider Summenwerthe:

$$\frac{h\pi\varphi(2\triangle)}{2\triangle^{\frac{3}{2}}\varrho}=\frac{2\varphi(2\triangle)}{2\triangle\varrho}\,\Sigma\left\{\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}\right\},$$

d. h.

$$h=\frac{2\sqrt{\triangle}}{\pi}\,\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}.$$

Wie schon öfters bei ähnlichen Untersuchungen bemerkt wurde, ist, wenn

$$D \text{ oder } -\triangle=-1$$

wird, noch mit 2 zu multipliciren. In diesem Falle ist:

$$h=\frac{4}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots\right),$$

da die Zahlen abwechselnd von der Form $2n+1$ und $2n+3$ sind, also $\left(\frac{-1}{n}\right)$ auch abwechselnd $+1$ und $-1$ wird.

25) Für den allgemeinen Fall aber ist es jetzt noch nöthig, den Ausdruck:

$$\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}$$

zu summiren.

Möge die Determinante mit keinem quadratischen Factor behaftet sein. Es sind dann noch die beiden Fälle zu unterscheiden, wo sie grade und wo sie ungrade ist. Im ersteren Falle wollen wir

$$D=-2\partial,$$

im letzteren

$$D=-\partial$$

setzen. Es findet also immer das Reciprocitätsgesetz der quadratischen Reste für $\partial$ statt, d. h.

$$\left(\frac{-\partial}{n}\right)=\left(\frac{n}{\partial}\right)(-1)^{\frac{\partial-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2}}.$$

Für den Fall aber, wo $D=-2\partial$ ist, muss wegen des Factors 2 in den Summenausdruck noch

$$\left(\frac{2}{n}\right)=(-1)^{\frac{n^2-1}{8}}$$

hinzukommen. In jedem Falle also wird:

$$\Sigma\left(\frac{D}{n}\right)\frac{1}{n}=\Sigma\delta^{\frac{n-1}{2}}\varepsilon^{\frac{n^2-1}{8}}\left(\frac{n}{\partial}\right)\frac{1}{n},$$

wo

$$\delta=(-1)^{\frac{\partial+1}{2}}$$

und

$\varepsilon$ gleich $+1$ für ungrade Determinanten, gleich $-1$ für grade Determinanten ist.

Was noch den Werth von $\delta$ anbetrifft, so ist er

gleich $-1$, wenn $\partial$ von der Form $4h+1$,
gleich $+1$, wenn $\partial$ von der Form $4h+3$

ist. Die einfachen Factoren von $\partial$ seien jetzt

$$p, p_1, p_2, \ldots$$

also:

$$\left(\frac{n}{\partial}\right)=\left(\frac{n}{p}\right)\left(\frac{n}{p_1}\right)\left(\frac{n}{p_2}\right)\ldots$$

26) Nach einem von Dirichlet herrührenden Satz, den man in dem Artikel quadratischer Rest, bei demjenigen Beweis des Reciprocitätgesetzes, welcher von Dirichlet herrührt, entwickelt finden wird, ist nun:

$$\sum_{s=1}^{s=p-1}\left(\frac{s}{p}\right)e^{\frac{2ns\pi i}{p}}=\left(\frac{n}{p}\right)\sqrt{p}\,i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2},$$

wo $n$ eine beliebige Zahl, immer dann, wenn $n$ nicht durch $p$ theilbar ist. Findet diese Bedingung aber nicht statt, so ist die Summe links stets gleich Null. $i$ ist hier der Ausdruck für $\sqrt{-1}$.

Es ergibt sich hieraus, also für unsern Fall immer, da $n$ zu $\partial$ eine relative Primzahl war:

$$\left(\frac{n}{p}\right)=\frac{i^{-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{p}}\,\Sigma\left(\frac{s}{p}\right)e^{\frac{s2n\pi i}{p}},$$

also:

$$\left(\frac{n}{\partial}\right)=\frac{i^{-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-\left(\frac{p_1-1}{2}\right)^2-\left(\frac{p_2-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{p}}\sum_{s=1}^{s=p-1}\left\{\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s_1}{p_1}\right)\left(\frac{s_2}{p^2}\right)\ldots e^{\left(\frac{s}{p}+\frac{s_1}{p_1}+\frac{s_2}{p_2}+\ldots\right)2n\pi i}\right\}$$

Nun ist:

$$\left(\frac{s}{p}+\frac{s_1}{p_1}+\frac{s_2}{p_2}+\ldots\right)2n\pi i=\left(\frac{s\partial}{p}+\frac{s_1\partial}{p_1}+\frac{s_2\partial}{p_2}+\ldots\right)\frac{2n\pi i}{\partial}.$$

Man kann aber auch statt der Grössen $\frac{s\partial}{p}$ ihre Reste nach $\partial$ setzen. Es wird dann derselbe Rest nicht 2 Mal vorkommen, denn sei

$$\frac{s\partial}{p}+\frac{s_1\partial}{p_1}+\ldots\equiv\frac{\sigma\partial}{p}+\frac{\sigma_1\partial}{p_1}+\ldots \text{ mod. } \partial,$$

so müssten beide Ausdrücke links und rechts auch nach $p$ und $p_1$ congruent sein. Alle Grössen ausser einer links $\frac{s\partial}{p}$ und einer rechts $\frac{\sigma\partial}{p}$ sind aber durch $p$ theilbar, es müsste also auch sein:

$$\frac{s\partial}{p}\equiv\frac{\sigma\partial}{p} \text{ mod. } p$$

und da $\frac{\partial}{p}$ nicht durch $p$ theilbar ist, so muss dies mit $s-\sigma$ der Fall sein.

Diese beiden Zahlen sind aber aus der Reihe $0, 1, 2 \ldots p-1$ zu entnehmen, es ist dies also nur möglich, wenn $s=\sigma$ ist. Ebenso müsste, im Falle die beiden verglichenen Ausdrücke gleiche Reste haben sollten, auch

$$s_1=\sigma_1,\ s_2=\sigma_2 \ldots$$

sein.

Die erhaltenen Reste sind aber auch relativ einfach zu $\partial$, denn hätte einer mit $\partial$ den Factor $p$ gemein, so müsste auch

$$\frac{s\partial}{p}+\frac{s_1\partial}{p_1}+\frac{s_2\partial}{p_2}+\ldots$$

diesen Factor haben, also auch das erste Glied $\frac{s\partial}{p}$, da er in allen andern Gliedern wirklich vorhanden ist. Dies ist unmöglich, da $\frac{\partial}{p}$ diesen Factor nicht besitzt und $s$ kleiner als $p$ ist.

Man bekömmt nun soviel Reste als Verbindungen

$$\frac{s\partial}{p}+\frac{s_1\partial}{p_1}+\frac{s_2\partial}{p_2}+\ldots$$

vorkommen, d. h.

$$(p-1)\ (p_1-1)\ (p_2-1)\ldots$$

ist die Anzahl derselben. Es ist dies dieselbe Zahl, welche bekanntlich angiebt, wieviel Zahlen kleiner als $\partial$ und zu $\partial$ relativ einfach sind.

Es kann also jede der entsprechenden Zahlen auch nur einmal vorkommen. Ist nun

$$\frac{s\partial}{p}+\frac{s_1\partial}{p_1}+\frac{s_2\partial}{p_2}+\ldots\equiv t \text{ mod. } p,$$

so ist auch:

$$\frac{s\partial}{p}\equiv t \text{ mod } p,$$

also:

$$\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{p_1p_2p_3\ldots}{p}\right)=\left(\frac{t}{p}\right).$$

Indem man in dieser Weise fortfährt, erhält man nach und nach für $p_1$, $p_2$, $p_3$ ... alle Combinationen der $p$ und alle Zahlen $p$ im Nenner. Multiplicirt man alle so entstehenden Gleichungen, so hat man dann:

$$\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s_1}{p_1}\right)\left(\frac{s_2}{p_2}\right)\ldots\left(\frac{p}{p_1}\right)\left(\frac{p_1}{p}\right)\left(\frac{p}{p_2}\right)\left(\frac{p_2}{p}\right)\ldots=\left(\frac{t}{p}\right)\left(\frac{t}{p_1}\right)\ldots=\left(\frac{t}{\partial}\right)$$

oder

$$\left(\frac{t}{\partial}\right)=\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s_1}{p_1}\right)\left(\frac{s_2}{p_2}\right)\ldots\ldots(-1)^{t\left(\frac{p-1}{2}+\frac{p_1-1}{2}+\ldots\right)}$$

Es war aber:

$$\left(\frac{n}{\partial}\right)=i^{-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2-\left(\frac{p_1-1}{2}\right)^2-\left(\frac{p_2-1}{2}\right)^2}\Sigma\left(\frac{s}{p}\right)\left(\frac{s_1}{p_1}\right)\left(\frac{s_2}{p_2}\right)\ldots$$

$$e^{\left(\frac{s}{p}+\frac{s_1}{p_1}+\frac{s_2}{p_2}+\ldots\right)2n\pi i},$$

und auch:

$$(-1)^{-\frac{p-1}{2}\frac{p_1-1}{2}-\ \dots} = i^{-2\left(\frac{p-1}{2}\frac{p_1-1}{2}+\ \dots\right)},$$

also multiplicirt man hiermit den Ausdruck für $\left(\frac{n}{\delta}\right)$, so kommt die Exponentialgrösse:

$$i^{-\left(\frac{p-1}{2}+\frac{p_1-1}{2}+\frac{p_2-1}{2}+\ \dots\right)^2}.$$

Es lässt sich aber auch beweisen, dass

$$\frac{p-1}{2}+\frac{p_1-1}{2}+\frac{p_2-1}{2}+\ \dots \equiv \frac{\delta-1}{2} \mod. 2$$

ist. Denn setzen wir $\frac{p-1}{2}=r$, also

$$p=2r+1,\ p_1=2r_1+1,\ p_2=2r_2+1\ \dots,$$

so wird

$$\delta=1+2(r+r_1+r_2+\ \dots)+\lambda,$$

wo $\lambda$ durch 4 theilbar ist, wie man ersieht, wenn man durch Multiplication

$$\delta=pp_1p_2\ \dots$$

bestimmt. Es ist also auch:

$$\delta-1\equiv 2(r+r_1+r_2+\ \dots) \mod. 4$$

und

$$\frac{\delta-1}{2}\equiv r+r_1+r_2+\ \dots \mod. 2,$$

aus diesem Grunde kann man setzen.

$$i^{-\left(\frac{p-1}{2}+\frac{p_1-1}{2}+\frac{p_2-1}{2}+\ \dots\right)}=i^{-\left(\frac{\delta-1}{2}\right)^2}.$$

Durch diese Entwickelungen vereinfacht sich der für $\left(\frac{p}{\delta}\right)$ gefundene Werth der Art, dass man hat:

$$\frac{i^{-\left(\frac{\delta-1}{2}\right)^2}}{\sqrt{\delta}}\Sigma\left(\frac{t}{\delta}\right)e^{\frac{2nt\pi i}{\delta}}=\left(\frac{n}{\delta}\right) \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $n$ zu $\delta$ relativ einfach ist oder nicht. Der imaginäre Theil des Ausdruckes links muss verschwinden. Es ist sonach, wenn

$$\delta\equiv 1 \mod. 4,$$

d. h. wenn $\delta$ eine Zahl von der Form $4s+1$ ist

$$\frac{1}{\delta}\Sigma\left(\frac{t}{\delta}\right)\cos\frac{2nt\pi}{\delta}=\left(\frac{n}{\delta}\right)\text{oder } = 0.$$

Ist aber

$$\delta\equiv 3 \mod. 4,$$

d. h. von der Form $4s+3$, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}}\Sigma\left(\frac{t}{\delta}\right)\sin\frac{2nt\pi}{\delta}=\left(\frac{n}{\delta}\right) \text{ oder } = 0.$$

27) Der Ausdruck für die Klassenanzahl der Formen mit gleicher Determinante war:

$$h=\frac{2\sqrt{\delta}}{\pi}\Sigma\left(\frac{n}{\delta}\right)\frac{1}{n},$$

wenn $\delta$ von der Form $4k+3$, und die Determinante ungrade ist. Es möge $\Sigma'$ als Summenzeichen auf alle Zahlen sich erstrecken, die zu $\delta$ relativ einfach sind; setzt man dann für $\left(\frac{n}{\delta}\right)$ seinen eben gefundenen Werth, so ist die Bedingung, dass $n$ und $\delta$ relativ einfach waren, nicht weiter zu beachten, denn diejenigen Glieder, bei welchem dies nicht stattfindet, geben ja für den entsprechenden Summentheil den Werth Null, verschwinden also und man hat:

$$h = \frac{2}{\pi} \Sigma \frac{1}{n} \Sigma' \left(\frac{t}{\partial}\right) \sin \frac{2nt\pi}{\partial} = \frac{2}{\pi} \Sigma \left(\frac{t}{\partial}\right) \Sigma' \frac{1}{n} \sin \frac{2nt\pi}{\partial}.$$

Man hat hekanntlich für dio Summo $\Sigma$ folgeuden Summenausdruck:

$$\frac{\sin\ x}{1} + \frac{\sin\ 3x}{3} + \frac{\sin\ 5x}{5} + \ldots = +\frac{\pi}{4},$$

wenn $x$ zwischen den Grenzen 0 nnd $\pi$ liegt, nnd

$$\frac{\sin\ x}{1} + \frac{\sin\ 3x}{3} + \frac{\sin\ 5x}{5} + \ldots = -\frac{\pi}{4},$$

wenn $x$ zwischeu don Grenzen 0 und $-\pi$ liegt. Man hat also hier den ersten Werth zn nehmen, wenn

$$t < \frac{\partial}{2},$$

und den zweiten, wenn

$$t > \frac{\partial}{2},$$

ist. Wir wollen diese beiden Werth-arten von $t$ durch die Bnchstahen

$$t_1 \text{ und } t_2$$

nnterscheiden; dann ist:

$$h = \frac{1}{2} \Sigma' \left(\frac{t_1}{\partial}\right) - \frac{1}{2} \Sigma' \left(\frac{t_2}{\partial}\right).$$

Zieht man eine zu $\partial$ relativ oinfache Zahl von $\partial$ ah, so erhält man wieder eine zn $\partial$, relativ einfache Zahl; es ist also immer

$t_2$ gleich einem der Werthe $\partial - t_1$

und

$$h = \frac{1}{2} \Sigma' \left(\frac{t_1}{\partial}\right) - \frac{1}{2} \Sigma' \left(\frac{\partial - t_1}{\partial}\right).$$

Es ist aher

$$\left(\frac{\partial - t_1}{\partial}\right) = \left(\frac{-t_1}{\partial}\right) = \left(\frac{-1}{\partial}\right)\left(\frac{t_1}{\partial}\right) = -\left(\frac{t_1}{\partial}\right),$$

da

$$\left(\frac{-1}{\partial}\right) = -1$$

ist, wenn $\partial$ die Form $4k+3$ hat, also

$$h = \Sigma \left(\frac{t_1}{\partial}\right).$$

d. h.

„Die Klassenanzahl der qnadratisehen Formen zn der Determinante $\partial$, die gleich $4k+3$ ist, ist gleich dem Ueherschuss der Anzahl derjenigen Zahlen $t$, die kloiner als $\frac{\partial}{2}$ nnd zn $\partial$ relativ einfach sind und wo zugleich $\left(\frac{t}{\partial}\right)$ positiv ist, üher die Anzahl derjenigen, die kleiner als $\frac{\partial}{2}$ und mit $\frac{\partial}{2}$ relativ einfach sind, aher wo $\left(\frac{t}{\partial}\right)$ negativ ist.“

Aus diesem höchst wichtigen Satze folgt auch zugleich, „dass hei Modnlen von der Form $4k+3$ mehr Zahlen vorkommen, welcho nnter dem halben Modul liegen und wo $\left(\frac{t}{\partial}\right)$ positiv ist, als solche, wo $\left(\frac{t}{\partial}\right)$ negativ ist.“ Es muss nämlich die Klassenanzahl $h$ jedenfalls positiv sein.

28) Möge jetzt $\partial$ von der Form $4k+1$ sein. Es ist dann:

$$h = \frac{\sqrt{\partial}}{\pi} \Sigma \left\{ \left(\frac{n}{\partial}\right) (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n} \right\} = \frac{2}{\pi} \Sigma' \left(\frac{t}{\partial}\right) \Sigma \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n},$$

aher

$$\Sigma \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} = \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} - \ldots,$$

ein Ausdruck, der gleich $\frac{\pi}{4}$ wird, wenn $x$ in den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, dagegen

gleich $-\frac{\pi}{4}$, wenn $x$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ liegt, wieder $+\frac{\pi}{4}$, wenn $x$ zwischen $\frac{3}{2}\pi$ und $2\pi$ liegt.

Möge nun liegen

$$t_1 \text{ zwischen } 0 \text{ und } \frac{\partial}{4},$$
$$t_2 \text{ zwischen } \frac{\partial}{4} \text{ und } \frac{3\partial}{4},$$
$$t_3 \text{ zwischen } \frac{3\partial}{4} \text{ und } \partial,$$

so ist:

$$h = \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{t_1}{\partial}\right) - \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{t_2}{\partial}\right) + \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{t_3}{\partial}\right),$$

ausserdem aber $t_3 = \partial - t_1$, woraus folgt, dass die dritte Summe gleich der ersten ist. Also hat man

$$h = \Sigma\left(\frac{t_1}{\partial}\right) - \frac{1}{2}\Sigma\left(\frac{t_2}{\partial}\right).$$

Theilt man noch die letzte Summe in 2 Theile, je nachdem

$$t_2 \text{ zwischen } \frac{\partial}{4} \text{ und } \frac{\partial}{2}$$

oder

$$t_2 \text{ zwischen } \frac{\partial}{2} \text{ und } \frac{3\partial}{4}$$

liegt, so kann man statt der ganzen Summe den ersten Theil derselben doppelt nehmen, und es wird:

$$h = \Sigma\left(\frac{t_1}{\partial}\right) - \Sigma\left(\frac{t_2}{\partial}\right).$$

Denn bedeutet $s$ irgend eine Zahl, die kleiner als $\frac{\partial}{2}$ und zu $\partial$ relativ einfach ist, und $s'$ die Zahl $\partial - s$, so ist offenbar:

$$\Sigma\left(\frac{s}{\partial}\right) = \Sigma\left(\frac{s'}{\partial}\right),$$

da $s$ und $s'$ complementäre Zahlen sind.

Versteht man aber jetzt unter $u$ alle zu $\partial$ relativ einfachen Zahlen von Null bis $\partial$, so ist

$$\Sigma\left(\frac{u}{\partial}\right) = 0;$$

denn man erhält alle $u$, wenn man $\partial$ in seine einfachen Factoren zerfällt, diese beliebig combinirt und alle Zahlen nimmt, die in keiner dieser Combinationen aufgehen. Dann zeigt sich, dass $\left(\frac{u}{\partial}\right)$ eben so oft positiv als negativ wird. Es ist aber:

$$\Sigma\left(\frac{u}{\partial}\right) = \Sigma\left(\frac{s}{\partial}\right) + \Sigma\left(\frac{s'}{\partial}\right) = 0,$$

und da ebenfalls

$$\Sigma\left(\frac{s}{\partial}\right) - \Sigma\left(\frac{s'}{\partial}\right) = 0$$

war, so ist auch

$$\Sigma\left(\frac{s}{\partial}\right) = 0.$$

Die $s$ aber bestehen aus allen mit $t_1$ und $t_2$ bezeichneten Zahlen, es ist also

$$\Sigma\left(\frac{t_1}{\partial}\right) + \Sigma\left(\frac{t_2}{\partial}\right) = 0$$

und desshalb:

$$h = 2\Sigma\left(\frac{t_1}{\partial}\right),$$

wo $0 < t_1 < \frac{\partial}{4}$ zu setzen ist; d. h.:

„Ist die Determinante von der Form $4h+1$, so ist die Klassenanzahl gleich dem doppelten Ueberschuss der Anzahl aller zur Determinante relativ einfachen Zahlen, die kleiner als $\frac{\partial}{4}$ sind, und wo $\left(\frac{t}{\partial}\right)$ positiv ist, über die Anzahl derjenigen, wo $\left(\frac{t}{\partial}\right)$ negativ ist." Auch folgt hieraus, „dass es unter den Zahlen, welche kleiner als der vierte Theil des Moduls sind, mehr giebt, wo $\left(\frac{t}{\partial}\right)$ positiv ist, als solche, wo $\left(\frac{t}{\partial}\right)$ negativ ist."

Die Ausdehnung eines Theiles dieser Betrachtungen auf die Theorie der quadratischen Reste mit positiver Determinante würde grössere Schwierigkeiten machen, und ist in Bezug auf dies und die Ausführung dieser Theorie überhaupt auf die gleich anzuführenden zahlentheoretischen Werke und Abhandlungen hinzuweisen.

Jedoch wollen wir hier noch einen Satz über Formen mit positiver Determinante geben.

29) Wir haben oben Abschnitt 15 gesehen, dass für eine gegebene negative Determinante nur eine endliche Anzahl reducirter Formen möglich war. Wir wollen schliesslich diesen Satz noch für positive Determinanten beweisen. Es ist bei einer reducirten Form

$$c \leqq a \leqq 2b,$$

also

$$4b^2 \leqq ac.$$

Es kann also

$$b^2 - ac = D$$

nur dann positiv sein, wenn $ac$ negativ ist, d. h. wenn $a$ und $c$ ungleiche Vorzeichen haben. Die reducirte Form hat also immer die Gestalt:

$$ax^2 + 2bxy - cy^2,$$

wo unter $a$ und $c$ Zahlen mit gleichem Vorzeichen, beide positiv oder beide negativ, verstanden sind, und die Determinante ist:

$$D = b^2 + ac;$$

da $4b^2 \leqq ac$ war, so ist dieser Ausdruck immer kleiner als oder höchstens gleich $5b^2$, d. h.

$$b \leqq \sqrt{\frac{D}{5}}.$$

Setzt man also in

$$D - b^2 = ac$$

für $b$ alle Werthe, die kleiner als $\sqrt{\frac{D}{5}}$ sind, so müssen die entstehenden Werthe von $D - b^2$ sich in 2 Factoren zerlegen lassen, und die Anzahl der reducirten Formen für die Determinante $D$ kann nicht grösser sein, als die Anzahl der Arten, auf welche alle Ausdrücke von $D - b^2$ sich in 2 Factoren zerlegen lassen, ist also jedenfalls endlich.

30) Die Theorie der quadratischen Formen hat ihren Ausgangspunct in der Auflösung der unbestimmten quadratischen Gleichungen mit 2 Unbekannten durch ganze Zahlen genommen. Da es sich hierbei darum handelt, die Anzahl der Darstellungen einer ganzen Zahl durch eine quadratische Form, d. h. die Anzahl der Wurzeln der Gleichung

$$f(x, y) = 0,$$

wo $f(x, y)$ eine ganze algebraische Function zweiter Ordnung von $x$ und $y$ mit ganzen Coefficienten ist, zu übersehen, so ist diese Aufgabe Grund einer neuen Theorie geworden, so wie die Vereinfachung dieser Gleichung auf die Transformationsmethoden geführt hat. Als Schöpfer dieser Theorie ist La Grange zu betrachten, dessen Abhandlungen aus diesem Gebiete sich namentlich in den Denkschriften der Berliner Akademie finden. Das bis dahin Vorhandene hat Legendre in seiner „*Théorie des nombres*“ (erste Ausgabe 1799, 3te von ihm noch selbst besorgte Ausgabe von 1833) gesammelt und erweitert. In dem berühmten Werke von Gauss „*disquisitiones arithmeticae*“ (Erste Ausgabe von 1801, jetzt neu erschienen, 1863, als Anfang der von der Göttinger Akademie besorgten Ausgabe von Gauss's sämmtlichen Werken) sind der Theorie der quadratischen Formen ganz neue Standpuncte abgewonnen und durch die Sätze über Klasseneintheilung, Gruppen der Darstellungen u. s. w. diese Theorie im Gegensatz zur Behandlung der unbestimmten quadratischen Gleichungen als eine selbständige Lehre hingestellt worden. Einem Theil der Gaussischen Sätze ist durch Lejeune-Dirichlet ein neuer Standpunct abgewonnen worden, indem er auf sie Betrachtungen, die der Analysis entnommen waren, anwandte. Es gelang ihm dadurch die Gauss'schen Sätze auf eine minder abstracte Art zu beweisen, und dadurch im höhern Grade zum wissenschaftlichen Gemeingut zu machen, zugleich aber diese Theorie wesentlich zu erweitern. Seine Arbeiten in diesem Gebiete sind sowohl in den Abhandlungen der Berliner Akademie, namentlich aber auch in Crelle's Journal für die reine und angewandte Mathematik enthalten.

Wir führen hier an:

„*Sur l'usage des séries infinies dans la théorie des nombres*“ (Crelle Band 18, Seite 259),

„*Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale, à la théorie des nombres: première partie* (Crelle Band 19, Seite 324), *seconde partie* (Band 21, Seite 1).

Die von Dirichlet begründete Anwendung der Analysis auf die Zahlentheorie hat in neuerer Zeit bedeutende Erweiterung gefunden, namentlich sind Kummer, Liouville, Hermite auf diesem Felde thätig gewesen.

Die Ausdehnung der Theorie der quadratischen Formen auf Formen höheren Grades ist in neuester Zeit, namentlich durch Kummer's berühmte Arbeiten erfolgt.

Ein andres Verdienst hat sich Dirichlet auch durch die im Verfolge seiner Universitätslaufbahn öfter wiederholten Vorlesungen über die Zahlentheorie, namentlich mit Bezug auf die quadratischen Formen erworben, und ist er wohl als derjenige zu betrachten, der die Kenntnisse hiervon zuerst in weitere Kreise hineingetragen hat.

Bei der hier gegebenen Uebersicht ist neben andern Arbeiten von Gauss und Dirichlet auch ein Theil einer dieser Dirichletschen Vorlesungen benutzt worden, was wohl keinen Anstand finden dürfte, da diese Vorlesungen unter dem Titel: „Vorlesungen über die Zahlentheorie (herausgegeben von Dedekind)“ bereits im Drucke erschienen sind.

**Quadratische Gleichungen.**

1) Jede algebraische Gleichung mit einer oder mehreren Unbekannten, heisst quadratisch, wenn sie auf die Form einer ganzen algebraischen Function, die gleich Null ist, gebracht werden kann, in welcher kein Glied die Unbekannten in einer höhern Dimension, als der 2ten enthält. Die Gleichung

$$x^2+5y^2x+3=0$$

ist also keine quadratische, weil zwar $x$ und $y$ einzeln in keiner höhern, als der 2ten Potenz vorkommen, das Glied $5y^2x$ aber in Bezug auf beide Unbekannten von der 3ten Dimension ist.

Die Frage, ob eine Gleichung quadratisch ist oder nicht, kann also erst entschieden werden, wenn sie auf die Form einer ganzen algebraischen Function, die gleich einer Constanten ist, gebracht worden ist.

So z. B. ist die Gleichung

$$\frac{x-4}{x+3}-\frac{1}{x-2}=6$$

eine quadratische, obgleich sie in dieser Gestalt nur erste Potenzen von $x$ enthält, denn schafft man die Neuner weg, vereint die zusammengehörigen Glieder, so kommt:

$$5x^2+13x-41=0.$$

Die schliessliche Form, auf die sich eine quadratische Gleichung bringen lässt, ist somit allgemein

$$Ax^2+Bx+C=0,$$

also wenn man mit $A$ dividirt und

$$\frac{B}{A}=p,\ \frac{C}{A}=q$$

setzt:

$$x^2+px+q=0.$$

$p$ und $q$ können positive und negative, im Allgemeinen auch imaginäre Zahlen sein; auch können sie ganz gebrochene oder irrationale Werthe haben.

Um diese Gleichung aufzulösen, kann man sie noch auf die Form bringen

$$x^2+px=-q$$

und durch Hinzufügung des Ausdruckes $+\left(\frac{p}{2}\right)^2$ auf beiden Seiten der Gleichung das erste Glied derselben in ein vollständiges Quadrat umwandeln. Es ist dann:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q.$$

Unter dieser Form ist die Gleichung durch Ausziehen einer Quadratwurzel aufzulösen. Also:

$$x+\frac{p}{2}=\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

Der Wurzel aber ist das doppelte Vorzeichen zu geben, da sie sowohl positiv als negativ sein kann. Die Gleichung hat also immer 2 Auflösungen:

$$x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

und

$$x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}.$$

2) Dieser Umstand, dass es 2 Auflösungen oder Wurzeln einer quadratischen Gleichung gibt, ist wichtig. Zu solchen Gleichungen führen in der That oft Aufgaben, die einer zweifachen Lösung fähig sind. Bei anderen Aufgaben allerdings hat oft die eine Wurzel für diese gar keine Bedeutung, insofern ihr Werth für dieselbe keinen Sinn gibt.

Wir wollen dies an Beispielen zeigen. Bekanntlich ist die Formel für die Summe $S$ einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied $a$, deren Differenz $b$ und deren Gliederanzahl $n$ ist:

$$S=na+\frac{n(n-1)}{2}b.$$

Stellt man sich nun die Aufgabe, aus $S$, $a$ und $b$ die Grösse $n$ zu finden, so ist eine quadratische Gleichung zu lösen.

Sei z. B.

das erste Glied $a=3$,

die Differenz $b=2$,

und

die Summe $S=168$,

so ist:

$$168=3\cdot n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2$$

oder

$$n^2+2n=168.$$

Vergleichen wir diese Gleichung mit dem in 1) aufgestellten allgemeinen Schema, so ist

$$p=2,\quad q=-168,$$

also

$$n=-1\pm\sqrt{169}$$

und die beiden Werthe von $n$ sind, da

$$\sqrt{169}=13,$$

ist

$$n=12 \text{ und } n=-14.$$

Man sieht aber, dass eine Reihe keine negative Anzahl von Gliedern haben kann, weshalb der Werth $-14$ hier zu verwerfen ist.

Solche Wurzeln wurden früher auch „falsche Wurzeln der Gleichung" genannt. Ihr Falsches bezieht sich indess keineswegs auf die Gleichung selbst, sondern nur auf die Aufgabe, welche zur Gleichung führte.

Um aber auch ein Beispiel dafür zu geben, dass zuweilen beide Wurzeln zur vollständigen Lösung der Aufgabe nöthig sind, wollen wir die bekannte geometrische des goldenen Schnittes betrachten: „Es ist von einer Linie ein Segment abzuschneiden, welches die mittlere Proportionale zwischen dem andern Segmente der Linie und dieser selbst ist."

Fig. 9.




Bezeichnen wir die Linie $AB$ mit $m$, das abzuschneidende Segment $AC$ mit $x$, so ist das andre Segment $BC=m-x$; es muss also sein:

$$x^2=m(m-x)$$

oder:

$$x^2+mx=m^2.$$

Also wenn man in die Auflösungsformeln:

$$p=m,\quad q=-m^2$$

setzt:

$$x=-\frac{m}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2+m^2},$$

also wenn man den Ausdruck unter dem Wurzelzeichen umgestaltet, ergeben sich die beiden Werthe von $x$:

$$x=\frac{m}{2}(\sqrt{5}-1)$$

und

$$x=-\frac{m}{2}(\sqrt{5}+1).$$

Da aber $\sqrt{5}>1$ ist, so übersieht man, dass der erste Werth von $x$ positiv, der zweite negativ ist. Nun scheint allerdings auf den ersten Blick der Begriff eines negativen Segments einer Linie keinen Sinn zu geben. Indess weiss man, dass wenn die Richtung einer Linie

Fig. 10.




von $A$ nach $B$ hin als positiv betrachtet wird, die entgegengesetzte von $B$ nach $A$ als negativ zu nehmen ist. Die negative Wurzel deutet also an, dass auch ein Stück $AC$ in der entgegengesetzten Richtung, also in der Verlängerung von $AB$ über $A$ hinaus abgeschnitten werden kann, derart, dass

$$AC^2=AB\cdot BC$$

ist. Das andre Segment $BC$ ist in diesem Falle grösser als die Linie $AB$.

3) Betrachten wir jetzt die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

etwas näher. $p$ und $q$ sollen reell sein. So lange $q$ negativ ist, wird der Ausdruck $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$ immer positiv sein, und dies ist noch der Fall, wenn

$q$ positiv, aber kleiner als $\left(\frac{p}{2}\right)^2$

ist, oder was dasselbe sagt, so lange

$$p^2 > 4q$$

ist. Wird

$$p^2 < 4q,$$

so ist der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen negativ und die Wurzel selbst imaginär.

Es hat also jede quadratische Gleichung entweder 2 reelle oder 2 imaginäre Wurzeln, je nachdem $q$ analytisch genommen kleiner oder grösser als $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ ist; in den ersten Fall sind nämlich die negativen Werthe von $q$ mit inbegriffen.

Uebertragen wir das Gesagte noch auf die Gleichung in ihrer ersten Gestalt:

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

so ist $\frac{B}{A}$ für $p$, $\frac{C}{A}$ für $q$ zu setzen, und es hat die Gleichung reelle oder imaginäre Wurzeln, je nachdem

$\frac{C}{A}$ kleiner oder grösser als $\frac{B^2}{4A^2}$

oder

$$\frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A}$$

positiv oder negativ ist. Der letzte Ausdruck ändert sein Zeichen nicht, wenn man ihn mit der immer positiven Grösse $4A^2$ multiplicirt, und es kommt daher auf das Zeichen von

$$B^2 - 4AC$$

an.

Die Auflösung der quadratischen Gleichung hat Anlass zur Einführung des Imaginären in die Algebra und Analysis gegeben. Da nämlich viele Aufgaben, z. B. geometrische auf quadratische Gleichungen mit ganz unbestimmten Coefficienten führen, so sieht man sich genöthigt, diese Gleichungen aufzulösen, ohne zu wissen, ob sie zu reellen oder imaginären Werthen führen. Wenn man nun mit den Werthen von $x$, die sich durch diese Auflösung ergeben, weiter operirt, so kann es vorkommen, dass man in der That mit imaginären Grössen rechnet, auf welche man die Gesetze des Rechnens mit reellen Grössen eben überträgt. Das Resultat einer solchen Rechnung kann dann wieder reell sein. Wenn man z. B. die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung addirt, so kommt die reelle Grösse $-p$ als Summe heraus. Es kann aber auch der Schluss der Rechnung zu einer imaginären Grösse führen, und im Falle z. B. einer geometrischen Aufgabe, ist dies das Zeichen dafür, dass die gestellte Aufgabe zwar an sich nichts Widersinniges habe, dass aber die Zahlenwerthe, welche man den Raumgrössen gegeben, nicht derart sind, um ein Resultat möglich zu machen.

In keinem Falle aber, sieht man, kann man sich des Rechnens mit imaginären Grössen entschlagen.

4) Es ist noch zu erörtern, in welchen Fällen die Wurzeln positiv und negativ sind. Wie in der Geometrie die imaginären Grössen, so gehen in andern Disciplinen die negativen keinen Sinn, wie z. B. in dem Falle, welchen wir in Abschnitt 2) behandelten, wo es sich um eine Anzahl handelte. In solchen Fällen ist also, je nachdem eine oder beide Lösungen negativ sind, die Aufgabe nur einer oder gar keiner Lösung fähig.

Sei zunächst $q$ positiv, aber kleiner als $\left(\frac{p}{2}\right)^2$, so ist immer

$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ kleiner als $\frac{p}{2}$;

ist also $p$ negativ, so wird sowohl der Ausdruck

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q},$$

als auch

$$-\frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

positiv sein, da der erste Ausdruck aus 2 positiven Theilen besteht, im zweiten aber der positive Theil überwiegt, ist dagegen $p$ positiv, so sind beide Ausdrücke negativ, da im ersten der negative Theil überwiegt, im zweiten beide Theile negativ sind.

Sei jetzt $q$ negativ, so ist

$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q}$ immer grösser als $\frac{p}{2}$,

es ist also, wenn $p$ positiv ist, in der ersten Wurzel der positive Theil überwiegend, in der letzten beide Theile negativ; ist $p$ negativ, so sind in der ersten Wurzel beide Theile positiv, in der zweiten der negative Theil überwiegend. Bei negativem $q$ ist also immer die eine Wurzel negativ, die andre positiv, wie

auch das Zeichen von $p$ beschaffen sei. Hieraus ergibt sich folgende Tafel für die Beschaffenheit der Wurzeln:

Fall I. $q$ positiv und kleiner als $\left(\frac{p}{2}\right)^2$

a) $p$ ist positiv: 2 negative Wurzeln.

b) $p$ ist negativ: 2 positive Wurzeln.

Fall II. $q$ positiv und grösser als $\left(\frac{p}{2}\right)^2$

2 imaginäre Wurzeln.

Fall III. $q$ negativ:
eine positive und eine negative Wurzel.

Führt man statt $p$ und $q$ aber die Grössen $A$, $B$, $C$ ein, so ist die Bedingung, dass $\frac{B}{A}$ oder $\frac{C}{A}$ positiv sind, gleichbedeutend mit der, dass Zähler und Nenner gleiche Zeichen haben, und die Bedingung, dass der Bruch negativ sei, mit der, dass diese Zeichen ungleich seien. Die Tafel nimmt dann folgende Gestalt an:

Fall I. $C$ und $A$ haben gleiche Zeichen, und $B^2$ ist $> 4AC$.

a) $B$ hat gleiches Zeichen mit $A$ und $C$: 2 negative Wurzeln.

b) $B$ hat entgegengetztes Zeichen mit $A$ und $C$: 2 positive Wurzeln.

Fall II. $C$ und $A$ haben gleiche Zeichen und $B^2$ ist $< 4AC$: 2 imaginäre Wurzeln.

Fall III. $C$ und $A$ haben ungleiche Zeichen:
eine positive und eine negative Wurzel.

5) Bei Einführung der Grössen $A, B, C$ nehmen die Wurzelwerthe die Gestalt an:

$$x = -\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}$$

und

$$x = -\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 - 4AC}.$$

So einfach diese Ausdrücke auch sind, so sind sie in dieser Gestalt doch für das logarithmische Rechnen sehr unbequem, falls $A$, $B$, $C$ Irrationalzahlen oder Decimalbrüche mit mehreren Stellen sind.

Man hat daher verschiedene Methoden die Rechnung abzukürzen.

Eine solche bietet die Trigonometrie dar. Sie soll jetzt gegeben werden.

Da sich hierbei die Rechnung in jedem unserer mit I., II. und III. bezeichneten Fällen anders gestaltet, so wollen wir für Fall III., wo $A$ und $C$ ungleiche Zeichen haben, statt des Ausdruckes $\sqrt{B^2 - 4AC}$ lieber $\sqrt{B^2 + 4AC}$ schreiben, indem wir auf das negative Zeichen von $AC$ Rücksicht nehmen.

Fangen wir jedoch mit Fall I. an. In die Formeln:

$$x_1 = -\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)}$$

und

$$x_2 = -\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2 - 4AC)}$$

wird gesetzt

$$\frac{2\sqrt{AC}}{B} = \sin\varphi.$$

Es wird hier, da

$$B^2 > 4AC, \text{ also } B > 2\sqrt{AC}$$

ist, der Werth von $\sin\varphi$ immer ein ächter Bruch sein, also sich stets bestimmen lassen. Diese Werthe dienen dazu, um die Grösse $4AC = B^2\sin\varphi^2$ zu bestimmen und man hat:

$$x_1 = -\frac{B}{2A}(1 - \sqrt{1 - \sin\varphi^2}) = -\frac{B}{2A}(1 - \cos\varphi)$$

und ebenso

$$x_2 = -\frac{B}{2A}(1 + \cos\varphi).$$

Es ist aber

$$1 - \cos\varphi = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2, \; 1 + \cos\varphi = 2\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2,$$

also

$$x_1 = -\frac{B}{A}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2, \; x_2 = -\frac{B}{A}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

In Fall II., wo $B^2<4AC$ war, sind die Wurzeln $x_1$ und $x_2$ auf die Form

$$re^{\vartheta i} \text{ und } re^{-\vartheta i}$$

zurückzuführen, wenn man die reellen und imaginären Theile dieser Ausdrücke denen von $x_1$ und $x_2$ einzeln gleich setzt. Es ist dann:

$$r\cos\vartheta = -\frac{B}{2A},\ r\sin\vartheta = \frac{\sqrt{4AC-B^2}}{2A};$$

quadrirt man diese Ausdrücke und addirt sie, so kommt:

$$r^2 = \frac{C}{A},\ r = \sqrt{\frac{C}{A}},$$

eine immer reelle Grösse, da $C$ und $A$ gleiche Zeichen haben. Wir betrachten sie als positiv. Dieser Werth in den Ausdruck für $r\cos\vartheta$ gesetzt, gibt dann:

$$\cos\vartheta = -\frac{B}{2\sqrt{AC}},$$

jedenfalls ein echter Bruch, und der Winkel $\vartheta$ ist kleiner oder grösser als $\frac{\pi}{2}$, je nachdem $B$ positiv oder negativ ist.

In Fall III. war zu setzen:

$$x_1 = -\frac{B}{2A} + \frac{1}{2A}\sqrt{B^2+4AC},$$

$$x_2 = -\frac{B}{2A} - \frac{1}{2A}\sqrt{B^2+4AC}.$$

Ganz unabhängig von der Grösse der Ausdrücke $A$, $B$, $C$ kann man setzen:

$$\frac{2\sqrt{AC}}{B} = \operatorname{tg}\varphi$$

und $x_1$, sowie $x_2$ werden dann:

$$x_1 = -\frac{B}{2A}(1-\sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2}),$$

$$x_2 = -\frac{B}{2A}(1+\sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2}).$$

Da aber

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}\varphi^2} = \frac{1}{\cos\varphi},$$

so wird:

$$x_1 = -\frac{B}{2A}\,\frac{\cos\varphi-1}{\cos\varphi},\quad x_2 = -\frac{B}{2A}\,\frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi}$$

oder

$$x_1 = \frac{B}{A}\,\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\cos\varphi},\quad x_2 = -\frac{B}{A}\,\frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\cos\varphi}.$$

Wird dies in in Gestalt einer Tafel geordnet, so hat man folgende Wurzelwerthe, wo, $A$ und $C$ immer positiv vorausgesetzt, $B$ ein beliebiges Zeichen haben kann:

Gleichung $Ax^2+Bx+C=0$:

Fall I. $B^2>4AC$

$$\sin\varphi = \frac{2\sqrt{AC}}{B},\ x_1 = -\frac{B}{A}\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2,\ x_2 = -\frac{B}{A}\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2.$$

Fall II. $B^2<4AC$

$$\cos\vartheta = -\frac{B}{2\sqrt{AC}},\ x_1 = \sqrt{\frac{C}{A}}\,e^{\vartheta i},\ x_2 = \sqrt{\frac{C}{A}}\,e^{-\vartheta i}.$$

Gleichung $Ax^2+Bx-C=0$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sqrt{AC}}{B},\ x_1 = \frac{B}{A}\,\frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\cos\varphi},\ x_2 = -\frac{B}{A}\,\frac{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2}{\cos\varphi}.$$

6) Beispiele.

Für den ersten Fall der Gleichung

$$Ax^2+Bx+C=0$$

nehmen wir als Beispiel:

$$7{,}29136x^2 - 67{,}213x + 2{,}901348 = 0,$$

wo offenbar $B^2>4AC$ ist.

Also

$$A = 7{,}29136,$$
$$B = -67{,}213.$$
$$C = 2{,}901348.$$

$$\lg A = 0{,}8628058$$
$$\lg B = 1{,}8274533(n)$$
$$\lg C = 0{,}4625998$$
$$\lg AC = 1{,}3254056$$
$$\lg \sqrt{AC} = 0{,}6627028$$
$$\lg 2 = 0{,}3010300$$
$$\text{addirt:}\quad 0{,}9737328$$
$$\lg B \text{ abgezogen:}\quad 0{,}1362795-1(n)$$
$$\lg \sin \varphi = 0{,}1362795-1(n)$$
$$\varphi - \pi = 7^\circ\ 51'\ 58'',\ 47$$
$$\varphi = 187^\circ\ 51''\ 58'',\ 47$$

(Das Zeichen $n$ hinter einem Logarithmus deutet an, dass die aufzuschlagende Zahl negativ ist. Dem negativen Werthe eines Sinus entspricht aber ein Winkel, der grösser als 180 Grad ist.)

$$\frac{\varphi}{2} = 93^\circ\ 55'\ 59'',\ 23$$
$$\lg \sin \frac{\varphi}{2} = 0{,}9989759-1$$
$$\lg \cos \frac{\varphi}{2} = 0{,}8362733-1(n)$$
$$\lg \left(-\frac{B}{A}\right) = 0{,}9646475$$
$$\lg \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 0{,}9979518=1$$
$$\lg \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 0{,}6725466-1$$
$$\lg x_1 = 0{,}9625993 \quad x_1 = 9{,}174858$$
$$\lg x_2 = 0{,}6372941 \quad x_2 = 4{,}338046$$

Für den zweiten Fall sei gegeben:

$$81{,}235x^2 + 12{,}227x + 3{,}2156 = 0,$$

also:

$$A = 81{,}235,$$
$$B = 12{,}227,$$
$$C = 3{,}2156.$$

$$\lg B = 1{,}0873199$$
$$\lg A = 1{,}9097432$$
$$\lg C = 0{,}5072620$$
$$\lg AC = 2{,}4170052$$
$$\lg \sqrt{AC} = 1{,}2085026$$
$$\lg 2 = 0{,}3010300$$
$$\text{addirt:}\quad 1{,}5095326$$
$$\lg \cos \vartheta = 0{,}5777878-1(n)$$
$$\pi - \vartheta = 67^\circ\ 46'\ 27'',\ 20$$
$$\vartheta = 112^\circ\ 13'\ 32'',\ 80$$

Der Winkel $\vartheta$ ist aber in Theilen von $\pi$ auszudrücken, um ihn in den Exponenten von $e$ setzen zu können.

Man hat:

$$112^\circ = 1{,}9547688$$
$$13' = 0{,}0037815$$
$$32'' = 0{,}0001551$$
$$0{,}80'' = 0{,}0000039$$
$$\vartheta = 1{,}9587093$$

$$\lg C = 0{,}5072620$$
$$\lg A = 1{,}9097432$$
$$\lg \frac{C}{A} = 0{,}5975188-1$$
$$\lg \sqrt{\frac{C}{A}} = 0{,}7987594-1$$
$$\sqrt{\frac{C}{A}} = 6{,}291575$$
$$x_1 = 6{,}291575\, e^{-1{,}9587093\sqrt{-1}}$$
$$x_2 = 6{,}291575\, e^{1{,}9587093\sqrt{-1}}$$

Für den Fall einer Gleichung von der Form

$$Ax^2 + 2Bx - C = 0$$

wollen wir das Beispiel nehmen:

$$63{,}27x^2 + 44{,}15x - 28{,}217 = 0,$$

also $A = 63{,}27,\ B = 44{,}15,\ C = 28{,}217.$

$$\lg A = 1{,}8011978$$
$$\lg B = 1{,}6449307$$
$$\lg C = 1{,}4505108$$
$$\lg AC = 3{,}2517086$$
$$\lg \sqrt{AC} = 1{,}6258543$$
$$\lg 2 = 0{,}3010300$$
$$\text{addirt:}\quad 1{,}9268843$$
$$\lg B \text{ abgezogen:}\quad 0{,}2819536$$
$$\lg \varphi = 0{,}2819536$$
$$\varphi = 62^\circ\ 24'\ 54'',\ 33$$
$$\lg \cos \varphi = 0{,}6656397-1$$
$$\frac{\varphi}{2} = 31^\circ\ 12'\ 27',\ 16$$
$$\lg \sin \frac{\varphi}{2} = 0{,}7144468-1$$
$$\lg \cos \frac{\varphi}{2} = 0{,}9321149-1$$
$$\lg \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 0{,}4288936-1$$
$$\lg \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 0{,}8642298-1$$
$$\lg \frac{B}{A} = 0{,}8437329-1$$
$$\lg\left(\frac{B}{A}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 0{,}2726265-1$$
$$\lg\left(\frac{A}{B}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2 = 0{,}7079627-1$$
$$\lg \cos \varphi = 0{,}6656397-1$$
$$\lg x_1 = 0{,}6069868-1 \quad x_1 = 0{,}4045637$$
$$\lg x_2 = 0{,}0423230(n) \quad x_2 = -1{,}102358.$$

Es versteht sich, dass in fast allen Fällen bei der Rechnung weniger als 7 Stellen hinreichende Genauigkeit gewähren.

7) Eine andre Methode der Berechnung würden die Gaussischen Logarithmen für Summen und Differenzen gewähren. Die Art, wie dieselben zu verwenden sind, bedarf wohl keiner Ausführung. Indess muss man, ganz wie bei der hier gezeigten trigonometrischen Methode, auch bei dieser 2 Mal in die Tafeln eingehn, ehe man die Logarithmen der Wurzeln findet.

Gauss hat aber selbst angegeben, wie durch eine Erweiterung seiner Tafel dieselben zur Auflösung quadratischer Gleichungen derart geeignet gemacht werden können, dass ein einmaliges Aufschlagen genügt, um die Logarithmen der Wurzeln zu bestimmen. Die derart erweiterten Gaussischen Tafeln enthält die erste Ausgabe der Sammlung mathematischer Tafeln von Hülsse (Leipzig 1840). Bei der spätern Ausgabe sind dieselben indess weggelassen worden, um einer 7ziffrigen Tafel für die Logarithmen der Summen und Differenzen Platz zu machen. An dieser Tafel wäre eben nur auszusetzen, dass bei der Erweiterung für die Auflösung der quadratischen Gleichungen keine Interpolationstäfelchen berechnet sind.

Die Einrichtung, wie sie Gauss angegeben hat, ist folgende.

Bekanntlich enthalten die Tafeln unter $A$ die Logarithmen aller Zahlen $a$, die grösser als 1 sind, und dazu unter $B$ die Werthe der Logarithmen von

$$b = 1 + \frac{1}{a},$$

ebenso unter $C$ die Logarithmen von

$$c = 1 + a.$$

Die Beziehung zwischen $b$ und $c$ ergibt sich durch Elimination von $a$, aus den Gleichungen für $b$ und $c$, es ist:

$$c = \frac{b}{b-1} \text{ und } b = \frac{c}{c-1}.$$

Bei der Erweiterung der Tafel sind nun 3 Spalten $D$, $E$, $F$ hinzugefügt, deren erste die Logarithmen der Zahlen

$$\delta = bc,$$

die zweite die Logarithmen von

$$e = ac,$$

die letzte endlich die Logarithmen von

$$f = \frac{b}{a}$$

enthält. Es ist also die erste durch Addition der unter $A$ und $C$ neben einander stehenden Zahlen, die folgenden durch Addition der Zahlen unter $A$ und $C$, die letzte durch Subtraction der Zahlen unter $A$ von denen unter $B$ entstanden.

Um die Anwendung auf die Auflösung der quadratischen Gleichung zu zeigen, gehen wir von der Gleichung

$$Px^2 + Qx + R = 0$$

aus, um keine Verwechselung der früher gebrauchten Bezeichnung $A$, $B$, $C$ für die Coefficienten mit den Ueberschriften der ersten drei Spalten in der Gaussischen Tafel herbeizuführen.

Bemerken wir ferner, dass wenn man eine Wurzel der quadratischen Gleichung $x_1$ hat, die andre $x_2$ sich leicht aus den Gleichungen ergibt:

$$x_1 + x_2 = -\frac{Q}{P}, \quad x_1 x_2 = \frac{R}{P},$$

deren erste angewandt wird, wenn man mit den Werthen von $x_1$ und $x_2$ selbst, die zweite, wenn man mit ihren Logarithmen operirt.

Diese Formeln ergeben sich leicht aus der allgemeinen Theorie der Gleichungen, lassen sich aber auch unmittelbar aus den Werthen:

$$x_1 = -\frac{Q}{2P} + \frac{1}{2P}\sqrt{Q^2 - 4PR},$$

$$x_2 = -\frac{Q}{2P} + \frac{1}{2P}\sqrt{Q^2 - 4PR}$$

verificiren.

Setzen wir ferner:

$$\frac{Q}{P} = h, \quad \frac{R}{Q} = g,$$

so dass die Gleichung die Gestalt annimmt:

$$x^2 + hx + hg = 0.$$

Von dem Falle welcher imaginäre Werthe ergab, sehen wir hier ganz ab, und unterscheiden noch 3 Fälle:

Fall I. $P$ und $R$ haben gleiche Zeichen (also auch $h$ und $g$ haben gleiche Zeichen) und $\frac{Q^2}{PR}$ oder $\frac{h}{g}$ ist nicht grösser als 4.

Fall II. $P$ und $R$ haben ungleiche Zeichen (also auch $h$ und $g$) und $-\frac{PR}{Q^2}$ oder $-\frac{g}{h}$ ist grösser als 2.

Fall III. $P$ und $R$ haben ungleiche Zeichen, und $-\frac{PR}{Q^2}$ oder $-\frac{g}{h}$ ist kleiner als 2.

Der Fall, wo $P$ und $R$ gleiche Zeichen haben und $\frac{Q^2}{PR}$ grösser als 4 ist, gibt nämlich offenbar imaginäre Wurzeln.

Das folgende Täfelchen zeigt nach Gauss, wie in jedem der 3 Fälle zu verfahren ist.

Die Buchstaben $a, b, c, d, e, f$ zeigen Zahlen an, deren Logarithmen in den Spalten $A, B, C, D, E, F$ sich befinden.

| | | Erste Wurzel. | Zweite Wurzel. |
|---|---|---|---|
| Fall I. | $\frac{h}{g}=d$ | $x_1=-\frac{h}{b}$ oder $=-gc$ | $x_2=-gb$ oder $=-\frac{h}{c}$ |
| Fall II. | $-\frac{g}{h}=e$ | $x_1=ha$ oder $=-\frac{g}{c}$ | $x_2=\frac{g}{a}$ oder $=-\frac{h}{c}$ |
| Fall III. | $-\frac{g}{h}=f$ | $x_1=\frac{h}{a}$ oder $=-\frac{g}{b}$ | $x_2=ga$ oder $=-hb$. |

Im ersten Falle z. B. ist also der Logarithmus von $\frac{h}{g}$ in Spalte $D$ aufzusuchen, und der Logarithmus der ersten Wurzel (mit umgekehrtem Vorzeichen) ergibt sich dann, wenn man den daneben in Spalte $B$ stehenden Werth von $\lg h$ abzieht, oder den in $C$ stehenden Werth zu $\lg g$ addirt. Wie die zweite Wurzel aufgefunden wird, und in den andern Fällen zu verfahren ist, sieht sich wohl von selbst ein.

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht darauf, dass man die Gleichung

$$x^2+hx+gh=0$$

unter der Form schreiben kann:

$$\frac{x}{h}\left(\frac{x}{h}+1\right)=-\frac{g}{h}.$$

Im Falle I., wo $\frac{g}{h}$ positiv ist, denke man $-\frac{h}{x}$ als in der Spalte $B$ enthalten, also gleich $b$ gesetzt; es wird dann:

$$\frac{g}{h}=\frac{b-1}{b^2},$$

wofür man auch wegen der Gleichung

$$\frac{b}{b-1}=c$$

schreiben kann:

$$\frac{h}{g}=bc=d,$$

welche Gleichung in Verbindung mit

$$\frac{x_1}{h}=-\frac{1}{b}$$

oder

$$x_1=-\frac{h}{b}$$

die erste Wurzel gibt; der zweite Werth derselben

$$x_1=-gc$$

ergibt sich daraus, dass

$$h=gbc$$

war. Die zweite Wurzel kann aus der Formel

$$x_1\ x_2=hg$$

gefunden werden, wenn man für $x_1$ einsetzt. In derselben Weise wird man das in den Fällen II. und III. angegebene Verfahren verificiren können.

Dies Verfahren ist namentlich dann von Vortheil, wenn man, wie dies oft vorkommt, nicht die Wurzeln selbst, sondern nur ihre Logarithmen zu weiteren Rechnungen nöthig hat.

8) Wir kommen jetzt auf einige Anwendungen der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten, und wollen zunächst solche nehmen, welche die Algebra selbst betreffen.

a) Eine der einfachsten ist die: Eine gegebene ganze Function vom zweiten Grade in 2 lineäre Factoren zu zerlegen.

Sei

$$Ax^2+Bx+C=A(x-\alpha)(x-\beta)$$

die zu zerlegende Function.

Soll der Ausdruck links gleich Null sein, so muss entweder

$$x=\alpha \text{ oder } x=\beta$$

werden. Die Grössen $\alpha$ und $\beta$ werden also gefunden, indem man die Gleichung

$$Ax^2+Bx+C=0$$

auflöst und

$$\alpha=x_1,\ \beta=x_2$$

setzt.

Es ist also, wenn wir die in 6) gegebenen Beispiele anwenden:

$$7{,}29136x^2-67{,}213x+2{,}901348=7{,}29136(x-9{,}174858)(x-4{,}338046),$$

$$81{,}235x^2+12{,}227x+3{,}2156=$$

$$81{,}235(x-6{,}291575e^{1{,}958709\sqrt{-1}})(x-6{,}291575e^{-1{,}958709\sqrt{-1}}),$$

endlich:

$$63{,}27x^2+44{,}15x-28{,}217=63{,}27\,(x-0{,}4045637)(x+1{,}102358).$$

h) Bekanntlich hat jede Zahl 3 dritte Wurzeln, von denen jedoch immer nur eine reell, und 2 imaginär sind, wenn auch die Zahl reell ist. Es sollen diese imaginären Wurzeln mit Hülfe der Auflösung einer quadratischen Gleichung bestimmt werden.

Sei $a$ die Zahl, deren dritte Wurzeln zu finden sind und $b$ diejenige Wurzel, welche reell ist, so giebt die Gleichung

$$x^3=a$$

alle 3 Wurzeln, oder da

$$a=b^3,$$

ist

$$x^3-b^3=0.$$

Eine Wurzel dieser Gleichung ist jedenfalls

$$x=b.$$

Es muss also $x^3-b^3$ den Factor $x-b$ haben. Indem man mit demselben die Gleichung dividirt, erhält man:

$$x^2+bx+b^2=0$$

und diese quadratische Gleichung enthält nur noch die beiden imaginären dritten Wurzeln, in der That sind die Auflösungen beide imaginär, und

$$x_1=-\frac{b}{2}(1+\sqrt{-3})$$

und

$$x_2=-\frac{b}{2}(1-\sqrt{-3}).$$

$x_1$ und $x_2$ sind also die beiden imaginären Werthe von $\sqrt[3]{a}$, wenn $b$ der reelle Werth dieser Wurzel ist.

c) Durch Auflösung quadratischer Gleichungen lassen sich auch die 4 imaginären 5ten Wurzeln einer gegebenen Zahl finden.

Denn sei

$a$ diese Zahl,

und

$b=\sqrt[5]{a}$ der reelle Werth der Wurzel,

so wird wieder

$$x^5-b^5=0$$

sein, oder wenn man durch $x-b$ dividirt:

$$x^4+bx^3+b^2x^2+b^3x+b^4=0.$$

Diese Gleichung 4ten Grades lässt sich auf quadratische zurückführen, wenn man eine neue Unbekannte einführt:

$$\frac{x}{b}+\frac{b}{x}=z.$$

Die Gleichung, mit $\frac{1}{x^2b^2}$ multiplicirt, nimmt nämlich die Form an:

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{x}{b}+1+\frac{b}{x}+\frac{b^2}{x^2}=0;$$

und wenn man

$$z=\frac{x}{b}+\frac{b}{x} \text{ also } z^2=\frac{x^2}{b^2}+\frac{b^2}{x^2}+2$$

einsetzt, wird:

$$z^2+z-1=0,$$

d. h.

$$z_1=-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}),\quad z_2=-(1-\sqrt{5}).$$

Der Werth von $z$ aber erfüllt die Gleichung:

$$x^2-bzx+b^2=0,$$

also

$$x_1=\frac{b}{2}(z+\sqrt{z^2-4})$$

$$x_2=\frac{b}{2}(z-\sqrt{z^2-4}).$$

Setzt man also sowohl in $x_1$ als auch in $x_2$ für $z$ die berechneten Werthe von $z_1$ und $z_2$ ein, so hat man die 4 imaginären Werthe von $\sqrt[5]{a}$. Dieselben sind:

$$x_1=\frac{b}{4}\left(-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}\right)$$

$$x_2=\frac{b}{4}\left(-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}\right)$$

$$x_3=\frac{b}{4}\left(-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}\right)$$

$$x_4=\frac{b}{4}\left(-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}\right).$$

Die Aufgabe, die imaginären $n$ten Wurzeln der Einheit zu bestimmen, ist identisch mit derjenigen, den Kreis in $n$ Theile zu theilen. (Siehe den Artikel: Theilung des Kreises). Die Auflösung einer geometrischen Aufgabe durch quadratische Gleichungen aber zeigt an, dass dieselbe durch Construction mittels der geraden Linie und des Kreises gelöst werden kann.

In allen Fällen also, wo die Auflösung der Gleichung

$$x^n-b^n=0$$

auf quadratische Gleichungen führt, ist eine geometrische Theilung des Kreises in $n$ Theile möglich. Die Aufgabe, diejenigen Werthe von $n$ zu bestimmen, wo dies möglich ist, wird mithin von der gröss-

ten Wichtigkeit sein. Sie ist vollständig von Gauss gelöst worden.

9) Eine der wichtigsten algebraischen Anwendung der quadratischen Gleichungen ist die auf die reciproken Gleichungen beliebiger Grade.

Unter reciproker Gleichung versteht man eine solche algebraische Gleichung, worin jeder Wurzel $x=\alpha$ eine zweite $x=\frac{1}{\alpha}$, also ihr reciproker Werth entspricht.

Sei die reciproke Gleichung jetzt:

$$x^n+A_1x^{n-1}+A_2x^{n-2}+\ldots.+A_{n-2}x^2+A_{n-1}x+A_n=0.$$

Da jedem Werthe von $x$ ein Werth $\frac{1}{x}$ entspricht, so muss diese Gleichung mit der folgenden:

$$\frac{1}{x^n}+\frac{A_1}{x^{n-1}}+\frac{A_2}{x^{n-2}}+\ldots.+\frac{A_{n-1}}{x}+A_n=0,$$

d. h. mit

$$A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+A_{n-2}x^{n-2}+\ldots.+A_2x^2+A_1x+1=0$$

ganz dieselben Wurzeln haben, was nur möglich ist, wenn die Coefficienten dergleichen Potenzen bis auf einen allen gemeinschaftlichen Factor in beiden Gleichungen übereinstimmen. Es ist also:

$$A_1=\frac{A_{n-1}}{A_n},\ A_2=\frac{A_{n-2}}{A_n},\ A_3=\frac{A_{n-3}}{A_n}\ \ldots.\ A_{n-3}=\frac{A_3}{A_n},\ A_{n-2}=\frac{A_2}{A_n},$$

$$A_{n-1}=\frac{A_1}{A_n},\ A_n=\frac{1}{A_n}.$$

Die letzte dieser Gleichungen zeigt, dass

$A_n$ nur die Werthe $+1$ und $-1$

haben kann. Findet das erstere statt, so ist also

$$A_1=A_{n-1},\ A_2=A_{n-2},\ A_3=A_{n-3}\ldots$$

und die Gleichung nimmt die Gestalt an:

wenn $n$ grade, also gleich $2m$ ist:

$$\text{I.}\quad x^{2m}+A_1x^{2m-1}+A_2x^{2m-2}+\ldots+A_{m-1}x^{m+1}+A_mx^m+A_{m-1}x^{m+1}+$$
$$A_{m-2}x^{m-2}+\ldots+A_2x^2+A_1x+1=0,$$

und wenn $n$ ungrade, also gleich $2m+1$ ist:

$$\text{II.}\quad x^{2m+1}+A_1x^{2m}+A_2x^{2m-1}+\ldots+A_{m-1}x^{m+2}+A_mx^{m+1}+A_mx^m+$$
$$A_{m-1}x^{m-1}+\ldots+A_2x^2+A_1x+1=0,$$

in jedem dieser beiden Fälle stimmen die Coefficienten der gleich weit von beiden Enden entfernten Glieder überein.

Sei jetzt:

$$A_n=-1,$$

so ist:

$$A_1=-A_{n-1},\ A_2=-A_{n-2},\ \ldots\ A_{n-1}=-A_1.$$

Ist $n$ von der Form $2m$, so hat die mittlere dieser Gleichungen die Form:

$$A_m=-A_{(2m-m)}=-A_m,$$

also $A_m=0$. Die Form der reciproken Gleichung wird dann:

$$\text{III.}\quad x^{2m} + A_1 x^{2m-1} + A_2 x^{2m-2} + \dots + A_{m-1} x^{m+1} - A_{m-1} x^{m-1} - A_{m-2} x^{m-2} - \dots - A_2 x^2 - A_1 x - 1 = 0.$$

Es fällt das mittlere Glied weg, und die von den Enden gleich weit entfernten Coefficienten haben gleichen Zahlenwerth, aber entgegengesetzte Vorzeichen.

Ist $n$ endlich von der Form $2m+1$, so findet die Beziehung für den Coefficienten des mittleren Gliedes nicht statt, und es ist

$$\text{IV.}\quad x^{2m+1} + A_1 x^{2m} + A_2 x^{2m-1} + \dots + A_{m-1} x^{m+2} + A_m x^{m+1} + A_m x^m - A_{m-1} x^{m-1} - \dots - A_2 x^2 - A_1 x - 1 = 0.$$

Es ist also eine reciproke Gleichung leicht zu erkennen. Es müssen nämlich in derselben immer die von den Enden gleich weit entfernten Glieder numerisch gleich sein und entweder alle bezüglich dasselbe, oder alle das entgegengesetzte Vorzeichen haben. Ist die Ordnung der Gleichung eine grade Zahl, und findet der zweite Fall statt, so muss ausserdem das mittlere Glied fehlen. Diese Bedingungen sind dafür, dass die Gleichung reciprok sei, offenbar ausreichend und nothwendig.

10) Es lässt sich nun zeigen, dass durch Auflösung quadratischer Gleichung jede reciproke Gleichung auf eine Form gebracht werden kann, worin ihr Grad höchstens die Hälfte des ursprünglichen ist.

Setzen wir, um dies zu beweisen, zunächst Fall I. voraus, wo die entsprechenden Coefficienten der Gleichung gleiches Zeichen haben, und die Ordnungszahl grade ist. Dann lässt sich die Gleichung auf die Form bringen:

$$x^m + A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} + \dots + A_{m-1} x + A_m + A_{m+1} x^{-1} + A_{m+2} x^{-2} + \dots \dots + A_1 x^{-(m-1)} + x^{-m} = 0$$

oder:

$$x^m + x^{-m} + A_1(x^{m-1} + x^{-(m-1)}) + A_2(x^{m-2} + x^{-(m-2)}) + \dots \dots + A_{m-1}(x + x^{-1}) + A_m = 0.$$

Es wird eine neue Unbekannte

$$z = x + x^{-1}$$

eingeführt, und man hat, wie sich leicht aus dem binomischen Satze ergibt:

$$z^2 = x^2 + x^{-2} + 2,$$
$$z^3 = x^3 + x^{-3} + 3(x + x^{-1}),$$
$$z^4 = x^4 + x^{-4} + 4(x^2 + x^{-2}) + 6 \dots$$

$$z^{2m} = x^{2m} + x^{-2m} + 2m(x^{2m-2} + x^{-(2m-2)}) + \frac{2m(2m-1)}{1\cdot 2}(x^{2m-4} + x^{-(2m-4)}) + \dots \dots + \frac{2m(2m-1)\dots(m+2)}{1\cdot 2\dots\dots m-1}(x^2 + x^{-2}) + \frac{2m(2m-1)\dots(m+1)}{1\cdot 2\dots\dots m},$$

$$z^{2m+1} = x^{2m+1} + x^{-(2m+1)} + (2m+1)(x^{2m-1} + x^{-(2m-1)}) + \frac{(2m+1)2m}{1\cdot 2}(x^{2m-3} - x^{-(2m-3)}) + \dots + \frac{(2m+1)2m\dots(m+3)}{1\cdot 2\dots\dots m-1}(x^3 + x^{-3}) + \frac{(2m+1)2m\dots(m+2)}{1\cdot 2\dots\dots m}(x + x^{-1}).$$

Aus diesen Formeln lässt sich auf recurrentem Wege $x + x^{-1}$, $x^2 + x^{-2}$, $x^3 + x^{-3}$ ... durch $z$ bestimmen. Es ist nämlich:

$$x+x^{-1}=z,$$
$$x^2+x^{-2}=z^2-2,$$
$$x^3+x^{-3}=z^3-3z,$$
$$x^4+x^{-4}=z^4-4z^2+2,$$
$$x^5+x^{-5}=z^5-5z^3+5z,$$
$$x^6+x^{-6}=z^6-6z^4+9z^2+3\,.\,.\,.\,.\,.$$

Diese Entwickelungen sind für die Auflösungen der reciproken Gleichungen allerdings hinreichend. Es sind aber diese Formeln an sich interessant genug, um hier die Herleitung eines Ausdruckes für $x^n+x^{-n}$ in Potenzen von $z$ zu rechtfertigen, den wir noch geben wollen. Mit der Gleichung

$$x+\frac{1}{x}=z$$

verbinden wir eine andre

$$x-\frac{1}{x}=u,$$

so ist offenbar:

$$u^2=z^2-4,$$

ferner

$$x=\frac{z+u}{2} \text{ und } \frac{1}{x}=\frac{z-u}{2}.$$

Diese beiden letzten Gleichungen lassen sich auch auf die gemeinschaftliche Form bringen:

$$x^{\sqrt{1}}=\frac{z+u\sqrt{1}}{2}.$$

Je nachdem man nämlich $+1$ oder $-1$ für $\sqrt{1}$ setzt, nimmt diese Gleichung die Form und den Werth von $x$ oder von $\frac{1}{x}$ an. Nach dem binomischen Satze aber ist:

$$x^{n\sqrt{1}}=\frac{1}{2^n}(z+u\sqrt{1})^n=\frac{1}{2^n}\left(z^n+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}z^{n-2}u^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}z^{n-4}u^4+\,.\,.\,.\right)$$
$$+\frac{\sqrt{1}}{2^n}\left(nz^{n-1}u+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot2\cdot3}z^{n-3}u^3+\,.\,.\,.\right),$$

wo die mit $\sqrt{1}$ multiplicirten Glieder von den übrigen getrennt sind.

Die Reihe bis an's Ende zu verfolgen ist nicht nöthig, da sie von selbst abbricht. Setzt man $\sqrt{1}=+1$ in $x^{n\sqrt{1}}$, so wird auch der zweite Theil der Reihe rechts mit $+1$ multiplicirt sein, und dieser Factor wird $-1$, wenn man $\sqrt{1}=-1$ im Exponenten von $x^{n\sqrt{1}}$ setzt. Durch Addition der beiden sich so ergebenden Resultate erhält man:

$$x^n+x^{-n}=\frac{1}{2^{n-1}}\left(z^n+\frac{n(n-1)}{1\cdot2}z^{n-2}u^2+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}z^{n-4}u^4+\,.\,.\,.\right)$$

oder

$$x^n+x^{-n}=\frac{1}{2^{n-1}}\left(z^n+n_2z^{n-2}(z^2-4)+n_4z^{n-4}(z^2-4)^2+n_6z^{n-6}(z^2-4)^3+\,.\,.\,.\right).$$

Es ist hier nämlich für $u^2$ sein oben gefundener Werth gesetzt, und mit $n_2$, $n_4$ sind der 2te, 4te . . . Binomialcoefficient bezeichnet.

Es ist schliesslich klar, dass wenn man mittels dieser Ausdrücke die Grössen $x^n+x^{-n}$ in unserer Gleichung durch Potenzen von $z$ ersetzt, man eine Gleichung vom $m$ten Grade erhält, also eine solche, die nur den halben Grad der gegebenen hat. Ist sie aufgelöst, so ist jede Wurzel $z$ in die Gleichung

$$x+\frac{1}{x}=z \text{ oder } x^2-zx=-1$$

einzusetzen, wo sich dann für jedes $z$ zwei Werthe von $x$, also in der That $2m$ Wurzeln der reciproken Gleichung ergeben.

Ein Beispiel für diesen Fall ist die in 8) c. gegebene Auflösung der Gleichung

$$x^4+bx^3+b^2x^2+b^3x+b^4=0,$$

welche die Form einer reciproken Gleichung annimmt, wenn man $b=1$ setzt, oder $\frac{x}{b}=y$ annimmt.

11) Es möge jetzt Fall II. stattfinden, also die entsprechenden Coefficienten gleiches Vorzeichen haben, aber die Gleichung von einer ungeraden Ordnung sein.

Man sieht sogleich, dass wenn in

$$x^{2m+1}+A_1x^{2m}+A_2x^{2m-1}+\ .\ .\ .\ +A_2x^2+A_1x+1=0$$

$x=-1$ gesetzt wird, die gleich weit von den Enden entfernten Glieder sich heben, also der Ausdruck links in der That Null wird. Es ist also $x=-1$ immer eine Wurzel der Gleichung, und es lässt sich der Factor $x+1$ absondern.

In der That verwandelt sich, wenn man die ganze Gleichung durch $x+1$ dividirt, dieselbe in:

$$x^{2m}+(A_1-1)x^{2m-1}+(A_2-A_1+1)x^{2m-2}+(A_3-A_2+A_1-1)x^{2m-3}+\ .\ .\ .\ .$$
$$.\ .\ .+(A_2-A_1+1)x^2+(A_1-1)x+1=0.$$

Dies ist abermals eine recurrente Gleichung, aber von grader Ordnung und in den ersten Fall gehörig, also nach Abschnitt 10) zu behandeln.

Ist der vierte Fall vorhanden, also die Gleichung von ungerader Ordnung, die entsprechenden Coefficienten aber haben das entgegengesetzte Zeichen, so sieht man sogleich, dass

$$x=1$$

eine Wurzel ist, dass man also durch $x-1$ dividiren kann. Die Gleichung wird dann:

$$x^{2m}+(A_1+1)x^{2m-1}(+A_2+A_1+1)x^{2m-2}+\ldots+(A_2+A_1+1)x^2+(A_1+1)x+1=0,$$

also ist dieselbe wie im vorigen Falle zu behandeln. Immer, wenn der Grad der Gleichung ungerade ist, wird dieselbe also von der Ordnung $2m+1$ auf die Ordnung $m$ reducirt.

Ist endlich, wie in Fall III. gezeigt, die Ordnung gerade, die entsprechenden Coefficienten von ungleichen Vorzeichen und es fehlt das mittlere Glied, so ist ebenfalls $x=1$ eine Wurzel. Dividirt man aber

$$x^{2m}+A_1x^{2m-1}+A_2x^{2m-2}+\ .\ .\ .\ +A_{m-1}x^{m+1}-A_{m-1}x^{m-1}-A_{m-2}x^{m-2}-\ldots$$
$$\ldots-A_2x^2-A_1x-1=0$$

durch $x-1$, so kommt:

$$x^{2m-1}+(A_1+1)x^{2m-2}+(A_2+A_1+1)x^{2m-3}+\ldots+(A_{m-1}+A_{m-2}+\cdots+A_1+1)x^m$$
$$+(A_{m-1}+A_{m-2}+\ .\ .\ .\ +A_1+1)x^{m-1}+(A_{m-2}+A_{m-3}+\ .\ .\ .\ +A_1+1)x^{m-2}+$$
$$.\ .\ .\ +(A_2+A_1+1)x^2+(A_1+1)x+1=0,$$

also eine recurrente Gleichung von ungrader Ordnung, welche die Wurzel $-1$ hat, und wie oben gezeigt zu behandeln ist.

12) Sehr wichtig aber ist die Auflösung quadratischer Gleichungen für die Geometrie. Es lässt sich nämlich zeigen, dass immer, wenn die Coefficienten Raumgrössen bedeuten, die Auflösung der Gleichung zu einer Construction mittels der graden Linie und des Kreises führt. Das dabei einzuschlagende Verfahren nennt man die Construction der quadratischen Gleichung. Dieselbe soll hier dargestellt werden.

Die Gleichung möge eine der Formen haben:

$$Ax^2+Bx+C=0,\quad Ax^2+Bx-C=0.$$

In jedem Falle wird, wenn man sich unter $x$ eine Linie denkt, $B$ eine Dimension höher sein als $A$, und $C$ zwei Dimensionen, da die 3 Glieder der Gleichung doch homogene Grössen (Linien, Flächen u. s. w.) vorstellen müssen. Es wird daher $\frac{B}{A}$ von erster Dimension sein, also eine Linie, $\frac{C}{A}$ von der zweiten also irgend ein Flächenstück bedeuten, das wir uns als in der Ebene befindlich, und von graden Linien begränzt denken. Nach dem im Artikel Quadrat Gesagten, lässt sich dies immer in ein Quadrat auf geometrischem Wege verwandeln, was wir hier als geschehen voraussetzen wollen. Hieraus ergeben sich folgende 4 Formen der Gleichung, wenn wir noch zwischen positiven und negativen $\frac{B}{A}$ unterscheiden:

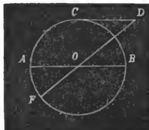
a) $x^2+px=q^2$ oder $x(x+p)=q^2$,
b) $x^2-px=q^2$ oder $x(x-p)=q^2$,
c) $x^2+px=-q^2$ oder $-x(x+p)=q^2$,
d) $x^2-px=-q^2$ oder $x(p-x)=q^2$.

Die Grössen $p$ und $q$ stellen jetzt Linien vor, welche man immer positiv sich denkt, $x$ ist ebenfalls eine Linie; hat $x$ ein negatives Vorzeichen, so zeigt dies an, dass die Richtung von $x$ der zuerst angenommenen entgegengesetzt ist.

Die Construction beider Werthe von $x$ in jedem der 4 Fälle ergibt sich leicht aus bekannten Sätzen.

**Fall a.** Man schlägt über Linie $AB=p$ als Durchmesser einen Kreis, und trägt an denselben $CD=q$ als Tangente an. Verbindet $D$ mit dem Mittelpunkte $O$ durch Linie $DF$, die den

Fig. 11.




Kreis in $E$ und $F$ schneidet. Die Werthe von $x$ sind dann:

$$x_1=DE$$

und

$$x_2=-DF.$$

Die zweite Wurzel zeigt also, dass die zu construirende Linie in einer derjenigen entgegengesetzten Richtung zu nehmen ist, welche man anfangs annahm.

Der Beweis folgt sehr einfach aus der Betrachtung, dass:

$$DE\cdot DF=DC^2,$$

oder

$$DE(DE+p)=q^2$$

ist, was mit der in $a$ gegebenen Form übereinstimmt, wenn $DE=x$ gesetzt wird.

Auch kann man setzen:

$$DF(DF-p)=q^2$$

oder

$$-DF(-DF+p)=q^2,$$

was ebenfalls die Form $a$ gibt, wenn man

$$x=-DF$$

setzt. Es sind also $DE$ und $-DF$ die Wurzeln der Gleichung.

**Fall b.** Die vorige Construction führt auch hier zum Ziele, nur ist

$$x_1=DF \text{ und } x_2=-DE$$

zu setzen. Die Gleichungen:

$$DF(DF-p)=q^2,$$
$$DE(DE+p)=q^2$$

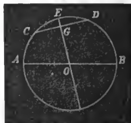
oder

$$-DE(-DE-p)=q^2$$

stimmen nämlich unter dieser Voraussetzung mit der Form in b) überein.

**Fall c.** Man schlägt wieder über Durchmesser $AB=p$ einen Kreis, und trägt die Linie $D=2q$ als Sehne hinein,

Fig. 12.




fällt vom Mittelpunkt $O$ auf $CD$ das Loth $OG$, welches man bis zur Peripherie nach $E$ und $F$ hin verlängert. Die Wurzeln der Gleichung werden dann dargestellt durch die Linien:

$$x_1=-EG \text{ und } x_2=-FG.$$

Da nämlich

$$EG\cdot GF=GD^2,$$

d. h.

$$EG(p-EG)=q^2$$

oder

$$GF(p-GF)=q^2$$

ist, so sieht man leicht, dass die Werthe $-EG$ und $-FG$ für $x$ gesetzt, der Gleichung die Form c) geben.

**Fall d.** Die Construction ist, wie in c), nur ist

$$x_1=+EG,\ x_2=+FG$$

zu setzen, was die oben gegebene Formel ohne Weiteres zeigt.

Die beiden letztern Fälle lassen sich offenbar nur dann auf diese Weise lösen, wenn $CD\leqq AB$, d. h. $2q\leqq p$ ist. Ist dies nicht der Fall, so hat aber die Gleichung nach dem in Abschnitt 4) Gesagten 2 imaginäre Wurzeln.

Selbstverständlich können diese Constructionen vielfacher Abänderung unterzogen werden. Auch kann man in den Formeln für die Wurzeln der quadratischen Gleichung die einzelnen Theile construiren.

Wir wollen von den hier gegebenen Constructionen indess ein Paar Beispiele geben.

13) A. Es ist ein Quadrat, dessen Seite $a$ ist, in ein Rechteck zu verwandeln, in welchem die Summe zweier anstossenden Seiten gegeben und gleich $b$ ist.

Auflösung. Bezeichne man die eine Seite des Rechtecks mit $x$, so ist die andre $b-x$, und man hat die Gleichung

$$x(b-x)=a^2,$$

welche genau mit dem Falle $d$ des vorigen Abschnittes übereinstimmt, also in der daselbst angegebenen Weise 2 Lösungen ergibt.

B. Sei aber von dem Rechteck, in welchs das Quadrat zu verwandeln ist, die Differenz $c$ zweier Seiten gegeben.

Auflösung. Es ist dann

$$x(x+c)=a^2.$$

Der Fall $a$) findet hier statt, und man erhält daher für $x$ einen positiven und einen negativen Werth. Bei dieser Einkleidung der Aufgabe ist allerdings der letztere zu verwerfen, wenn man nicht Betrachtungen über die Richtung der Seite des Rechtecks machen will.

C. Augenblicklich ergibt sich aus unsern Constructionen die Lösung der Aufgabe des goldnen Schnitts. Es lautet hier die Aufgabe bekanntlich so: Eine Linie so zu theilen, dass der eine Theil die mittlere Proportionale zwischen dem andern Theile und der ganzen Linie ist.

Auflösung. Ist $a$ die Linie, $x$ der gesuchte eine Theil, so ist offenbar:

$$x^2=a(a-x),$$

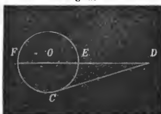
eine Gleichung, die sich leicht umgestalten lässt in:

$$x(x+a)=a^2.$$

Der Fall a) findet also statt.

Man schlägt über dem Durchmesser $a$ einen Kreis, macht Tangente $CD$ an demselben gleich dem Durchmesser, Punkt $D$ wird mit Mittelpunkt $O$ verbunden durch Linie $DF$, welche die Peripherie in $E$ und $F$ schneidet, es ist dann $x=DE$ die gesuchte Linie.

Fig. 13.

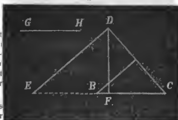



Dass auch der Werth $x=-DF$ eine Bedeutung habe, ist schon in Abschnitt II. dargethan worden.

D) Es sei ein Winkel $ABC$ und ein Punkt $D$ gegeben. Es soll eine Linie durch letzteren gezogen werden, welche mit den beiden Schenkeln des Winkels $ABC$ ein Dreieck von gegebenem Flächeninhalte begrenzt.

Auflösung I. Der Punkt $D$ liege ausserhalb des Winkels $ABC$.

Fig. 14.




Man ziehe $DE$ parallel $AB$ bis zum verlängerten Schenkel $AC$, ausserdem $DF$ senkrecht auf $AC$.

Sei nun $q$ der gegebene Flächeninhalt, so kann man jedenfalls ein Rechteck bestimmen, dessen eine Seite $DF$, und dessen Flächeninhalt gleich $q$ ist. Sei die andre Seite dieses Rechteckes gleich $GH$.

Ist ferner $DC$ die gesuchte Linie. Da nun Dreieck $EDC \backsim BAC$, so hat man, wenn man die Flächeninhalte vergleicht,

$$EC\cdot DF:2q=EC^2:BC^2,$$

d. h.

$$DF:2q=EC:BC^2,$$

oder wegen des Werthes von $q=GH\cdot DF$:

$$1:2GH=EC:BC^2,$$

d. h.

$$BC^2=2EC\cdot GH$$

oder

$$BC^2=2(EB+BC)GH;$$

in diesem Ausdrucke sind alle Linien mit Ausnahme von $BC$ bekannt. Setzt man also $BC=x$, so hat man

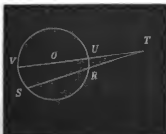
$$x^2=2(EB+x)GH$$

oder:

$$x(x-2GH)=2EB\cdot GH.$$

Das Rechteck, welches zu Seiten hat $2EB$ und $GH$, kann also in ein Quadrat verwandelt, und es kann dann wie in Fall b) verfahren werden. Indess ist diese Verwandlung in ein Quadrat nicht erst notwendig, wenn man folgendermassen verfährt: Man schlage mit Radius $GH$ einen Kreis, trage $BE-2GH$

Fig. 15.




als Sehne in denselben ein. Sei $RS$ dieselbe. Man verlängert sie um das Stück $ST=2GH$, und verbindet $T$ mit dem Mittelpunkte $O$, so dass die Verbindungslinie den Kreis in $U$ und $V$ schneidet. Da nun

$$TU\cdot TV=TS\cdot TR$$

oder:

$$TV(TV-2GH)=2BE\cdot GH$$

ist, so sieht man, dass $TV=x$ ist, also $BC=TV$ gemacht werden muss.

$TU$ würde eine zweite Lösung sein, und das negative Zeichen deutet hier an, dass von der Verlängerung der Linie $BC$, also nach Richtung $BE$ hin, ein Stück abgeschnitten werden muss.

Auflösung II. Der Punkt $D$ liegt innerhalb des Winkels.

Man ziehe, wie vorhin, $DC$ parallel mit $AB$, und $DF$ senkrecht auf $BC$ wie oben; auch habe $GH$ die obige Bedeutung. Es folgt dann wie oben

$$BC^2=2EC\cdot GH,$$

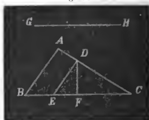
aber diese Gleichung verwandelt sich in unserm Falle in die folgende:

$$BC^2=2(BC-BE)GH$$

oder

$$BC(2GH-BC)=2GH\cdot BE.$$

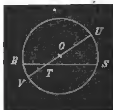
Fig. 16.




Der Fall d) findet statt. Wenn man die Verwandlung von $2GH\cdot BE$ in ein Quadrat vermeiden will, so verfährt man folgendermassen.

Es wird ein Kreis mit Radius $GH$ geschlagen, und $RS=GH+2BE$ als Sehne hineingetragen, von dieser Stück

Fig. 17.




$RT=GH$ abgeschnitten, und Linie $UV$ durch $T$ und den Mittelpunkt gezogen, welche die Peripherie in $U$ und $V$ schneidet, man hat dann $UT$ und $VT$ als Werthe von $BC$. Es ist nämlich

$$UT\cdot VT=RT\cdot TS,$$

oder

$$UT(2GH-UT)=2BE\cdot GH,$$

auch

$$VT(2GH-VT)=2BE\cdot GH.$$

Es können also hier 2 Stücke $BE$ nach derselben Richtung hin abgeschnitten werden.

Die Auflösung der letzten Aufgabe machte, ehe man zum Ansatz der quadratischen Gleichung kam, welche die Construction bestimmte, verschiedene Hülfslinien und geometrische Betrachtungen nöthig. Solches wird in der Regel eintreten, wenn man in der angegebenen Weise verfährt.

Man kann aber jede Willkürlichkeit der Betrachtungen ausschliessen, wenn man sich der analytischen Geometrie bedient, und mittelst Einführung recht-

winkeliger Coordinaten die Aufgabe behandelt. Jedoch werden auf dem letztern Wege die Constructionen in der Regel nicht einfach werden. Wie man denn überhaupt nicht glauben muss, dass die direct gefundenen und einfachsten Formeln auch eine einfache Construction ergeben.

Indess nimmt dies dem Werthe der Anwendung der Gleichungen, namentlich der quadratischen als Hülfsmittel zur Auffindung geometrischer Constructionen nichts. Man behandelt nämlich eine geometrische Aufgabe zunächst durch algebraische Methoden, um zu sehen, durch welche Hülfsmittel eine Construction möglich sei. Kreis und grade Linie reichen hin, wenn die algebraische Lösung durch quadratische Gleichung bewerkstelligt werden kann.

Ist diese Möglichkeit dann einmal dargethan, so wird man sich auf synthetischem Wege nach den einfachsten Constructionen umzusehen haben. Das algebraische Hülfsmittel aber wird selbst von den bedeutendsten und gewandtesten synthetischen Geometern nicht verschmäht.

14) Höhere Gleichungen lassen sich oft auf zwei oder mehrere quadratische reduciren.

Betrachten wir beispielsweise die Gleichung 4ten Grades:

$$x(x+a)(x+2a)(x+3a)=b.$$

Dieselbe würde keiner bemerkenswerthen Vereinfachung unterzogen sein, wenn wir alle 4 Factoren links mit einander multiplicirten.

Multipliciren wir dagegen den ersten und 4ten, so wie den 2ten und 3ten Factor entsprechend mit einander, so kommt:

$$(x^2+3ax)(x^2+3ax+2a^2)=b.$$

Offenbar kann man diese Gleichung durch die Substitution:

$$x^2+3ax=y$$

in eine quadratische

$$y(y+2a^2)=b$$

verwandeln. Bestimmt man nun aus dieser beide Werthe von $y$, so wird die Hülfsgleichung, die nach $x$ quadratisch ist, zu jedem 2 Werthe von $x$ ergeben, so dass dann alle 4 Wurzeln der Gleichung 4ten Grades bekannt sind.

Dergleichen Gleichungen höherer Ordnung, welche zu quadratischen führen, lassen sich sehr leicht bilden. Nimmt man z. B.

$$x^2+ux=v$$

und denkt sich die Grössen $u$ und $v$ durch die quadratischen Gleichungen:

$$u^2+au=b,$$

$$v^2+cv=e$$

bestimmt, und eliminirt aus diesen 3 Gleichungen $u$ und $v$, so hat man eine höhere Gleichung für $x$, die nichts desto weniger durch 3 quadratische Gleichungen gelöst werden kann.

Wir wollen diese Elimination hier ausführen. Zunächst gibt der Werth von $v$ aus der ersten Gleichung in die 3te gesetzt:

$$(x^2+ux)^2+c(x^2+ux)=e$$

oder

$$u^2x^2+ux(2x^2+c)=e-x^2(x^2+c);$$

es ist hier nämlich nach Potenzen von $u$ geordnet. Die 2te Gleichung wird mit $x^2$ multiplicirt, und hiervon abgezogen. Es kommt:

$$ux(2x^2+c-ax)=e-x^2(x^2+c+b).$$

Der hieraus zu bestimmende Werth von $u$ kann nun in die 2te Gleichung eingesetzt werden. Das Resultat ist, wenn man die Nenner entfernt:

$$(e-x^4-(c+b)x^2)^2+ax(e-x^4-(c+b)x^2)(2x^2-ax+c)=bx^2(2x^2+c-ax)^2$$

offenbar eine Gleichung 8ten Grades, wie dies auch sein muss, denn combinirt man die beiden Werthe von $u$ mit den beiden von $v$, so können die Coefficienten der Gleichung

$$x^2+ux=v$$

4 verschiedene Werthe annehmen, und es werden somit 8 Wurzeln vorhanden sein. Unsere Gleichung nach Potenzen von $x$ geordnet hat übrigens die Gestalt:

$$x^8-2ax^7+(2c+6b+a^2)x^6-(3ac+6ab)x^5+(c^2+6bc+b^2-2e+a^2c+2a^2b)x^4$$
$$+(2ae-3abc-ac^2)x^3+(bc^2-a^2e-2be-2ce)x^2+acex+e^2=0.$$

Setzt man in diese Gleichung für $a, b, c, e$ beliebige Zahlen oder Buchstabenwerthe, so wird man also Gleichungen 8ten Grades erhalten, die sich auf quadratische reduciren lassen.

Selbstverständlich ist dies aber nicht der einzige Weg, um auf solche Gleichungen zu kommen.

Ein andres Mittel wäre es, wenn man in eine Gleichung von der Form

$$x^{2n}+ax^n=b,$$

die in Bezug auf $x^n$ quadratisch ist, für $x$ einen Ausdruck von der Form

$$\alpha y^2+\beta y+\gamma$$

schriebe u. s. w.

Beispiele von Gleichungen höheren Grades, die auf quadratische führen, finden sich übrigens in den meisten Lehrbüchern und Aufgabensammlungen.

15) Mit Hülfe einer quadratischen Gleichung lässt sich der Werth eines periodischen Kettenbruchs bestimmen.

Ein periodischer Kettenbruch ist von der Gestalt:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a^3+\ddots+\cfrac{1}{a^n+\ddots}}}}}}}$$

oder

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_{n+1}+a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_{n+1}+a_1+\ddots}}}}}}$$

Die letztere Form geht in die erstere über, wenn man $a_{n+1}$ gleich Null setzt. Es kann also diese Form als die allgemeinste angenommen werden.

Ist $y$ der Werth des periodischen Kettenbruchs, so erfüllt derselbe offenbar die Gleichung:

$$y=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_{n+1}+y}}}$$

und diese Gleichung ist es, welche wir aufzulösen haben.

Wir setzen zu dem Ende folgende Sätze aus der Theorie der Kettenbrüche voraus, die in dem Artikel „Unbestimmte Aufgaben“ bewiesen werden.

I. Ist

$$y = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{x}}}}$$

ein Kettenbruch, und die Näherungsbrüche, wie sie sich aus Berechnung der Werthe von

$$a_1,\quad a_1 + \frac{1}{a_2},\quad a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a^3}},\quad a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a^4}}} \ldots$$

ergeben, seien:

$$\frac{A_1}{B_1},\ \frac{A_2}{B_2} \ldots \frac{A_s}{B_s} \ldots,$$

so sind diese Brüche immer abwechselnd kleiner und grösser, als der Werth $y$ des ganzen Kettenbruches.

II. Es gibt keinen Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$, der dem Werthe von $y$ näher kommt, als ein beliebiger Näherungswerth $\frac{A_s}{B_s}$, wenn nicht

$\alpha$ grösser als $A_s$

und

$\beta$ grösser als $B_s$

ist, selbstverständlich vorausgesetzt, dass $\alpha$ und $\beta$ relative Primzahlen sind.

III. Die Näherungsbrüche werden gefunden durch folgende Formeln:

$$A_1 = a_1,\ B_1 = 1,$$
$$A_2 = A_1 a_2 + 1,\ B_2 = a_2,$$
$$A_3 = A_2 a_3 + A_1,\ B_3 = B_2 a_3 + B_1,$$
$$A_4 = A_3 a_4 + A_2,\ B_4 = B_3 a_4 + B_2,$$
$$\ldots\ldots$$

IV. Es ist immer

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = \pm 1.$$

Das Pluszeichen gilt, wenn $n$ grade ist, das Minuszeichen, wenn $n$ ungrade ist.

Aus III. folgt sogleich

V. Wenn $n$ die Anzahl der Theilbrüche ist, die $\frac{1}{x}$ vorangeht, so ist:

$$y = \frac{A_n x + A_{n-1}}{B_n x + B_{n-1}}$$

und es braucht hierbei $x$ keine ganze Zahl zu sein, sondern derjenige Quotient, welcher hinzugefügt werden muss, um den Kettenbruch zu seinem vollständigen Werthe $y$ zu ergänzen, also der sogenannte vollständige Quotient.

16) Sei jetzt der periodische Kettenbruch:

$$y = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots + \cfrac{1}{a_n + y}}}$$

gegeben, so ergibt sich aus dem Satz III. des vorigen Abschnittes offenbar der Werth von $y$, wenn man in der Formel daselbst $a_n + y$ für $x$, für $A_n$ und $B_n$ aber $A_{n-1}$ und $B_{n-1}$, und $A_{n-2}$ und $B_{n-2}$ für $A_{n-1}$ und $B_{n-1}$ setzt. Es ist also:

$$y = \frac{A_{n-1}(a_n + y) + A_{n-2}}{B_{n-1}(a_n + y) + B_{n-2}} = \frac{A_{n-1} y + A_n}{B_{n-1} y + B_n};$$

der letzte geschriebene Werth beruht darauf, dass

$$A_{n-1} a_n + A_{n-2} = A_n,\ B_{n-1} b_n + B_{n-2} = B_n$$

war. Ist übrigens $a_n = 0$, so wird der erste Werth von $y$, d. h.

$$y = \frac{A_{n-1} y + A_{n-2}}{B_{n-1} y + B_{n-2}}$$

genommen. Man hat also die quadratische Gleichung

$$B_{n-1} y^2 + (B_n - A_{n-1}) y - A_n = 0,$$

durch welche dieser Kettenbruch bestimmt werden kann, wenn $a_n$ nicht gleich 0 ist. Die Grössen $a_1, a_2 \ldots$ sind sämmtlich positiv, also auch $y$, es muss also immer die positive Wurzel unserer Gleichung genommen werden.

Ist aber $a_n = 0$, so ist die quadratische Gleichung

$$B_{n-1} y^2 + (B_{n-2} - A_{n-1}) y - A_{n-2} = 0.$$

Beispiele. Sei

$$y = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cdots}}}}$$

Es ist hier

$n=3$, also

$$A_1=1,\quad B_1=1,$$
$$A_2=3,\quad B_2=2,$$
$$A_3=10,\quad B_3=7.$$

Die Gleichung wird sein:

$$2y^2+4y-10=0,$$
$$y=-1\pm\sqrt{6},$$

und da nur die positive Wurzel zu nehmen ist, so ist $\sqrt{6}-1$ der Werth des Kettenbruchs.

Sei ferner

$$y=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\,.}}}}}}}}}$$

also

$$y=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{y}}}}},$$

so ist hier $a_n=0$, $n=6$ zu setzen und

$$A_1=1,\quad B_1=1,$$
$$A_2=2,\quad B_2=1,$$
$$A_3=5,\quad B_3=3,$$
$$A_4=7,\quad B_4=4,$$
$$A_5=26,\quad B_5=15,$$

also

$$15y^2-22y-7=0,$$

d. h.

$$y=\frac{11}{15}+\frac{1}{15}\sqrt{226}.$$

17) An diese Entwickelungen knüpft sich zunächst die Frage, in welchen Fällen die Bestimmung des Werthes der periodischen Kettenbrüche zu reinen Quadratwurzeln führe.

Die Bedingung dafür ist offenbar die, dass

$$B_n=A_{n-1},$$

oder wenn der zweite Fall stattfindet

$$B_{n-2}=A_{n-1}$$

ist. Diese Bedingung ist übrigens in der ersten mit inbegriffen, und entspricht, wie oben gezeigt, dem Fall, wo $a_n$ gleich Null ist.

Um die Bedeutung dieser Gleichung zu verstehen, wollen wir 2 Kettenbrüche von der Form:

$$y=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}$$

und

$$z=a_n+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_{n-2}+\cdots+\cfrac{1}{a_1}}}$$

miteinander vergleichen, wo also die Theilnenner des ersten im 2ten Kettenbruche in umgekehrter Reihenfolge vorkommen. Man nennt solche Kettenbrüche entgegengesetzte.

Es ist nun:

$$y=\frac{A_{n-1}a_n+A_{n-1}}{B_{n-1}a_n+B_{n-2}},$$

da $a_n$ der letzte Theilnenner ist; wir setzen

$$y=\frac{A_n}{B_n}.$$

Um $z$ zu berechnen, wollen wir aber nicht die in 15 gegebene Methode anwenden, sondern vom letzten Bruche beginnend, die Nenner nach einander wegschaffen.

Es ist nämlich

$$a_2+\frac{1}{a_1}=\frac{a_1a_2+1}{a_1}=\frac{A_2}{A_1},$$

$$a_3+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_1}}=a_3+\frac{A_1}{A_2}=\frac{A_2a_3+A_1}{A_2}=\frac{A_3}{A_2}\ \ldots,$$

so dass man schliesslich hat:

$$z=\frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

Die Ausdrücke $A_1, A_2 \ldots A_n$ aber sind dieselben, welche als Zähler in den Näherungswerthen des Kettenbruchs $y$ vorkommen.

Sind also 2 entgegengesetzte Kettenbrüche zu bestimmen, so ist der Werth eines jeden gleich dem Zähler des Werthes des entgegengesetzten Bruches, dividirt durch den Zähler seines letzten Näherungswerthes.

Ein Kettenbruch heisst symmetrisch, wenn in ihm

$$a_1=a_n,\; a_2=a_{n-1},\; a_3=a_{n-2}\;\ldots$$

ist, wenn er also die Form hat:

$$y=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_1}}}}},$$

offenbar ist dann der entgegengesetzte Bruch gleich $y$, man hat also

$$\frac{A_n}{B_n}=\frac{A_n}{A_{n-1}}$$

oder

$$A_{n-1}=B_n.$$

Dies war aber die oben gefundene Gleichung. Es lässt sich also jeder Kettenbruch auf eine Quadratwurzel zurückführen, dessen Periode einen symmetrischen Bruch:

$$y=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_1+a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots}}}}$$

bildet. Es ist dann:

$$B_{n-1}y^2=A_n,$$

$$y=\sqrt{\frac{A_n}{B_{n-1}}}.$$

Beispiel:

$$y=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+1+y}}}}};$$

hier ist $n=6$,

$A_1=1,\; B_1=1,$

$A_2=4,\; B_2=3,$

$A_3=5,\; B_3=4,$

$A_4=9,\; B_4=7,$

$A_5=32,\; B_5=25,$

$A_6=41,\; B_6=32,$

also $A_5=B_6$, wie dies auch sein muss und

$$25y^2=41,\; y=\frac{\sqrt{41}}{5}.$$

18) Noch wichtiger ist indess die umgekehrte Aufgabe: „Die Auflösung einer quadratischen Gleichung auf Kettenbrüche zurückzuführen“; nicht desshalb, weil diese Auflösungsart wesentliche Erleichterung der numerischen Rechnung darböte, sondern weil sich aus dieser Aufgabe Sätze ergeben, die für verschiedene Zwecke, namentlich auch für die Auflösung unbestimmter quadratischer Gleichungen in ganzen Zahlen sehr nöthig sind. Wir werden uns also mit dieser Aufgabe beschäftigen.

Da aber die Auflösung der quadratischen Gleichungen eben zu Quadratwurzeln führt, so kommt es zunächst nur darauf an, eine Quadratwurzel in einen Kettenbruch zu verwandeln; und es ergibt sich schon aus den eben beendeten Betrachtungen, dass dieser Kettenbruch nothwendig ein periodischer sein muss. Es lässt sich nämlich zeigen, dass $A_n$ und $A_{n-1}$ einen beliebigen Werth haben können.

Es sei $D$ zunächst eine positive ganze Zahl, jedoch keine Quadratzahl, $a$ die grösste in $\sqrt{D}$ enthaltene ganze Zahl, also

$$\sqrt{D}-a=\frac{1}{x}$$

wird ein positiver ächter Bruch sein. Es ist also:

$$\sqrt{D}=a+\frac{1}{x},\quad x=\frac{1}{\sqrt{D}-a}.$$

Im Werthe von $x$ wird nun Zähler und Nenner mit $\sqrt{D}+a$ multiplicirt, dann ergibt sich:

$$x=\frac{\sqrt{D}+a}{D-a^2}.$$

$a_1$ sei die grösste in $x$ enthaltene ganze Zahl, also

$$x=a_1+\frac{1}{x_1},$$

wo $x_1$ grösser als 1 ist. Die Zahlen $x, x_1 \dots$ nennt Legendre vollständige Quotienten.

Setzen wir ferner

$$J=a,\quad N=D-a^2,$$

so ist:

$$x=\frac{\sqrt{D}+J}{N}=a_1+\frac{1}{x_1},$$

$$x_1=\frac{N}{\sqrt{D}+J-a_1N}=\frac{N(\sqrt{D}-J+a_1N)}{D-(J-a_1N)^2},$$

$$\frac{D-(J-a_1N)^2}{N}=N_1,$$

und $N_1$ ist eine ganze Zahl, denn

$$D-(J-a_1N)^2=D-J^2+N(2a_1-N)=N+N(2a_1-N)$$

ist ja durch $N$ theilbar. Sei ferner

$$a_1N-J=J_1,$$

so kommt:

$$x_1=\frac{\sqrt{D}+J_1}{N_1}.$$

In dem man so fortfährt, also:

$$\frac{D-(J_1-a_2N_1)^2}{N_1}=N_2,\quad a_2N_1-J_1=J_2$$

setzt, so dass allgemein

$$\frac{D-(J_{s-1}-a_sN_{s-1})^2}{N_{s-1}}=N_s,$$

$$a_sN_{s-1}-J_{s-1}=J_s,$$

so lässt sich ganz wie oben zeigen, dass $N_s$ eine ganze Zahl ist. Es ist dann:

$$x_s=\frac{\sqrt{D}+J_s}{N_s}$$

und

$$x_{s-1}=a_s+\frac{1}{x_s}.$$

Es wird aber

$$\sqrt{D}=a+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cdots+\cfrac{1}{a_s+\cfrac{1}{x_s}}}},$$

wo $x_s$ der vollständige Quotient ist, der den Kettenbruch zum Werthe von $\sqrt{D}$ ergänzt.

**Beispiel.** Wir wollen $\sqrt{21}$ in einen Kettenbruch verwandeln.

Es ist dann

$$a=4,$$

$$\sqrt{21}-4=\frac{1}{x},$$

$$x=\frac{\sqrt{21}+4}{21-4^2}=\frac{\sqrt{21}+4}{5}=1+\frac{1}{x_1},$$

Eins ist nämlich die grösste in $\frac{\sqrt{21}+4}{5}$ enthaltene ganze Zahl.

$$x_1=\frac{5}{\sqrt{21}-1}=\frac{\sqrt{21}+1}{4}=1+\frac{1}{x_2},$$

$$x_2=\frac{4}{\sqrt{21}-3}=\frac{\sqrt{21}+3}{3}=2+\frac{1}{x_3},$$

$$x_3=\frac{3}{\sqrt{21}-3}=\frac{\sqrt{21}+3}{4}=1+\frac{1}{x_4},$$

$$x_4=\frac{4}{\sqrt{21}-1}=\frac{\sqrt{21}+1}{5}=1+\frac{1}{x_5},$$

$$x_5=\frac{5}{\sqrt{21}-4}=\frac{\sqrt{21}+4}{1}=8+\frac{1}{x_6},$$

$$x_6=\frac{1}{\sqrt{21}-4}=\frac{\sqrt{21}+4}{5};$$

es ist also $x_6=x$, die Theilnenner wiederholen sich und man ist zur Periode gelangt. Man hat also:

$$\sqrt{21}=4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}}}$$

Die Periode ist übrigens, wie vorauszusehen war, eine symmetrische, wie man ersieht, wenn man $4+4$ statt $8$ setzt.

Noch aber ist die Convergenz dieser Entwickelung zu beweisen, d. h. es muss direct erwiesen werden, dass sich die Näherungswerthe dem Werthe der gegebenen Wurzel wirklich bis auf jede beliebige Grenze nähern.

Es folgt dies aus der Formel für die Kettenbrüche (siehe den Artikel: unbestimmte Aufgabe), die schon in Abschnitt 15 und 16 dieses Artikels angewandt wurde.

Seien $y$ der Werth der Wurzel, $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}$, $\frac{A_n}{B_n}$ zwei auf einander folgende Näherungswerthe, $x$ der auf $\frac{A_n}{B_n}$ folgende vollständige Quotient, so war

$$y=\frac{A_n x+A_{n-1}}{B_n x+B_{n-1}};$$

hieraus ergibt sich sogleich:

$$y-\frac{A_n}{B_n}=\frac{(A_{n-1}B_n-B_nA_{n-1})}{B_n(B_n x+B_{n-1})}.$$

Da aber immer $A_{n-1}B_n-A_nB_{n-1}=\pm 1$ ist (siehe Abschnitt 15, IV), so wird

$$y-\frac{A_n}{B_n}=\frac{\pm 1}{B_n(B_n x+B_{n-1})}.$$

Es nehmen nun sowohl die Zähler, als die Nenner der Ausdrücke $\frac{A_n}{B_n}$ fortwährend zu, und wächst somit der Nenner des Ausdruckes rechts bis zur Unendlichkeit, woraus folgt, dass $y-\frac{A_n}{B_n}$ sich mit wachsendem $n$ der Null nähert, und

$$y=\frac{A_n}{B_n}$$

wird.

19) Sei jetzt die quadratische Gleichung

$$ax^2+bx+c=0$$

gegeben. $a$, $b$, $c$ sollen ganze Zahlen, und $a$ positiv sein. Sind es nämlich Brüche oder $a$ negativ, so lässt sich ja die Gleichung leicht auf diese Form bringen.

Sei

$$\frac{b^2-4ac}{4}=D,$$

so haben die Wurzeln dieser Gleichung die Gestalt:

$$x_1=\frac{+\sqrt{D}-\frac{b}{2}}{a},\quad x_2=\frac{-\sqrt{D}-\frac{b}{2}}{a}.$$

Die Verwandlung in einen Kettenbruch geschieht ganz eben so, wie es bei den Wurzeln aus ganzen Zahlen geschah.

Sei z. B. die Gleichung

$$3x^2+5x-1=0,$$

also:

$$x_1=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{37}-\frac{5}{2}}{3},\quad x_2=\frac{-\frac{1}{2}\sqrt{37}-\frac{5}{2}}{3}.$$

Es ist zunächst

$$x_1=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{37}-\frac{5}{2}}{3}=\frac{\sqrt{37}-5}{6}=\frac{2}{\sqrt{37}+5},$$

$$\frac{1}{x_1}=\frac{\sqrt{37}+5}{2}=5+\frac{1}{a_1},$$

$$a_1=\frac{2}{\sqrt{37}-5}=\frac{\sqrt{37}+5}{6}=1+\frac{1}{a_2},$$

$$a_2=\frac{6}{\sqrt{37}-1}=\frac{\sqrt{37}+1}{6}=1+\frac{1}{a_3},$$

$$a_3=\frac{6}{\sqrt{37}-5}=\frac{\sqrt{37}+5}{2},$$

also da $a_3=\frac{1}{x_1}$ ist, so ist die Periode gefunden. Man erhält also:

$$x_1=\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

Es musste hier $\frac{1}{x_1}$ berechnet werden, weil $x_1$ kleiner als 1 ist.

Was die 2te Wurzel anbetrifft, so ist

$$-x_2=\frac{\sqrt{37}+5}{6}=1+\frac{1}{a_1},$$

$$a_1=\frac{6}{\sqrt{37}-1}=\frac{\sqrt{37}+1}{6}=1+\frac{1}{a_2},$$

$$a_2=\frac{6}{\sqrt{37}-5}=\frac{\sqrt{37}+5}{2}=5+\frac{1}{a_3},$$

$$a_3 = \frac{2}{\sqrt{37}-5} = \frac{\sqrt{37}+5}{6} = -x_2.$$

also:

$$-x_2 = 1 + 1 \over \overline{1} + 1 \over \overline{5} + 1 \over \overline{1} + 1 \over \overline{1} + 1 \over \overline{5} + .$$

Wie man aus den Kettenbrüchen Näherungswerthe für die Wurzeln ableiten kann, ist selbstverständlich.

Die vollständigen Coefficienten des Kettenbruchs haben immer wieder die Form $\frac{\sqrt{D}+J_s}{N_s}$. Wie oben ist auch hier $N_s$ immer eine ganze Zahl. $J_s$ ist auch eine ganze Zahl, wenn $b$ grade, hat aber den Nenner 2, wenn $b$ ungrade ist. Beides soll sogleich gezeigt werden.

20) Seien

$$\frac{A}{B} \text{ und } \frac{A'}{B'}$$

zwei auf einander folgende Näherungswerthe des Kettenbruchs, welcher eine der Wurzeln einer quadratischen Gleichung, z. B. $\sqrt{D}-\frac{b}{2}$ gibt, der auf $\frac{A'}{B'}$ folgende ganze Quotient über:

$$Q = \frac{\sqrt{D}+J}{N},$$

so ist, wie in Abschnitt 15) V. angeführt worden ist:

$$\frac{\sqrt{D}-\frac{b}{2}}{a} = \frac{A'Q+A}{B'Q+B}$$

und

$$A'B - B'A = \pm 1;$$

wegen des Werthes von $Q$ verwandelt sich die vorletzte Gleichung in:

$$\frac{\sqrt{D}-\frac{b}{2}}{a} = \frac{A'\sqrt{D}+A'J+AN}{B'\sqrt{D}+B'J+BN},$$

d. h. wenn man die Nenner wegschafft:

$$B'D - \frac{b}{2}(B'J+BN) + \sqrt{D}(B'J+BN-\frac{1}{2}bB') = a(A'J+AN) + aA'\sqrt{D},$$

d. h.

$$B'D - \frac{b}{2}(B'J+BN) - a(A'J+AN) = \sqrt{D}(-B'J-BN+\frac{1}{2}bB'+aA'),$$

$\sqrt{D}$ ist aber eine Irrationalzahl. Dies muss nämlich bei diesen Schlüssen vorausgesetzt werden. Es kann dann diese Gleichung sich nur erfüllen, wenn ihre rechte und linke Seite einzeln genommen Null geben, d. h.

$$1) \quad B'J + BN = \frac{1}{2}bB' + aA'$$

und

$$B'D = \frac{b}{2}(B'J+BN) + a(A'J+AN).$$

Die zweite Gleichung aber nimmt auch eine ähnliche Gestalt an, wenn man die erste benutzt:

$$a(A'J+AN) = B'D - \frac{b}{2}(aA' + \frac{b}{2}B')$$

oder, da

$$D = \frac{b^2}{4} - ac$$

war:

$$2) \quad A'J + AN = -(cB' + \frac{1}{2}bA').$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) soll jetzt $J$ eliminirt werden. Man erhält:

$$3) \quad (BA' - AB')N = aA'^2 + bA'B' + cB'^2.$$

Eliminirt man aber $N$ aus 1) und 2), so wird:

$$4) \quad (AB' - BA')J = aAA' + \frac{1}{2}b(AB' + BA') + cBB'.$$

Da aber

$$A'B - B'A = \pm 1,$$

so muss nach Gleichung 3) $N$ nothwendig eine ganze Zahl sein.

Es ist aber

$$AB' + BA' = 2AB' \pm 1,$$

folglich immer eine ungrade Zahl, und daher lehrt Gleichung 4), dass $J$ eine ganze Zahl ist, wenn $b$ eine grade Zahl, dagegen durch 2 theilbar, wenn $J$ ungrade ist.

Mit Bezug auf die Gleichungen 3) und 4) machen wir übrigens auf ihre Uebereinstimmung mit denjenigen aufmerksam, welche in der Lehre von den quadratischen Formen zu der aequivalenten Transformation einer Form führen. (Siehe den Artikel: Quadratische Formen).

Die Convergenz dieser Entwickelung wird übrigens ganz wie in Abschnitt 18) bewiesen.

21) Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Im Allgemeinen lassen sich Gleichungen mit mehreren Unbekannten nur dann auf quadratische zurückführen, wenn nur eine davon quadratisch, die andern aber linear sind.

Denn schon 2 quadratische Gleichungen mit 2 Unbekannten geben im Allgemeinen nach Elimination der einen eine Gleichung 4ter Ordnung.

Die allgemeine Form der Gleichungen, welche zu einer quadratischen mit einer Unbekannten führen, wäre demnach:

$$1)\quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + \cdots + A_1xy + B_1xz + C_1yz + \cdots A_2x + B_2y + C_2z + \cdots + G = 0,$$

$$2)\quad \alpha x + \beta y + \gamma z + \cdots = J,$$

$$3)\quad \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + \cdots = J_1 \cdots\cdots$$

Die einfachste Gleichung dieser Art mit 2 Unbekannten ist:

$$xy = a, \quad x + y = b.$$

Der Werth von $y$ aus der zweiten in die erste gesetzt gibt:

$$x^2 - bx = -a;$$

setzt man aber $x$ aus der zweiten in die erste, so kommt:

$$y^2 - by = -a.$$

Also dieselbe Gleichung gilt für $x$ und $y$, wie dies auch sein muss, da die gegebenen Gleichungen sich nicht ändern, wenn man $x$ und $y$ vertauscht.

Da aber $x$ und $y$ im Allgemeinen nicht gleich sein können, so stellt $x$ die eine, $y$ die andre Wurzel der Gleichung

$$x^2 - bx = -a$$

vor.

Auf die Gleichungen

$$xy = a, \quad x + y = b$$

lassen sich aber viele andere Gleichungen, deren Grad höher als der 2te ist, zurückführen.

Es ist dies namentlich bei solchen Gleichungen mit 2 Unbekannten der Fall, worin $x$ und $y$ symmetrisch vorkommen. Eine solche Gleichung hat nämlich, wie leicht zu sehen, immer die Gestalt:

$$\Sigma A(x^p y^q + x^q y^p) = B.$$

Nehmen wir an, es sei in irgend einem Gliede der Summe $q$ grösser als $p$ und gleich $p + r$, so erhält man für dieses Glied:

$$(xy)^p (x^r + y^r).$$

Es ist aber

$$x^r + y^r = (x+y)^r - rxy(x^{r-2} + y^{r-2}) - \frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}(xy)^2(x^{r-4} + y^{r-4}) + \cdots;$$

und da $x^{r-2} + y^{r-2}$, $x^{r-4} + y^{r-4}$, ... ganz wie $x^r + y^r$ behandelt werden können, so kommt man endlich auf eine Form, die nur Potenzen von $x + y$ und $xy$ enthält. Setzt man

$$x + y = u, \quad xy = v,$$

so sieht man leicht, dass das entsprechende Glied, welches von der $p + q$ten Dimension in Bezug auf $x$ und $y$ war, jetzt in Bezug auf $u$ und $v$ nur die $p + r$te Dimension hat, da das höchste Glied

$$(xy)^p (x+y)^r = u^r v^p$$

wird; also es findet eine Reduction der Gleichung um $q$ Grade statt.

Beispiel. Seien die beiden Gleichungen gegeben:

$$1)\quad x^2 + y^2 - x - y = 78,$$

$$2)\quad xy + x + y = 39,$$

so nimmt die letztere durch Einführung von

$$x + y = u, \quad xy = v$$

ohne weiteres die lineare Gestalt an:

$$u + v = 39.$$

Die erstere aber wird:

$$(x+y)^2-2xy-x-y=78,$$

d. h.

$$u^2-2v+u=78,$$

Gleichungen, die jetzt zu einer quadratischen führen müssen, da die eine lineär, die andre quadratisch ist. Man erhält:

$$u^2+u=156,$$

also

$$u_1=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{625}=12,$$

$$u_2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{625}=-13.$$

Dazu ergeben sich die entsprechenden Werthe von $v$:

$$v_1=27,\ v_2=52.$$

Die Aufgabe ist nun zurückgeführt auf die Auflösung der beiden Paare von Gleichungen

$$x+y=12,\ xy=27$$

und

$$x+y=-13,\ xy=52,$$

wovon man die Auflösung erhält durch die quadratischen Gleichungen:

$$x^2-12x=-27$$

und

$$x^2+13x=-52.$$

Von denen je eine Wurzel gleich $x$, die andre gleich $y$ gesetzt werden muss. Es ergibt sich:

$$x_1=9,\ y_1=3,$$

$$x_2=3,\ y_2=9,$$

$$x_3=-\frac{13}{2}+\frac{\sqrt{-39}}{2},\ y_3=-\frac{13}{2}-\frac{\sqrt{-39}}{2},$$

$$x_4=-\frac{13}{2}-\frac{\sqrt{-39}}{2},\ y_4=-\frac{13}{2}+\frac{\sqrt{-39}}{2}.$$

Selbstverständlich erhält man aus einem Paar von Wurzelwerthen ein andres, wenn man die Werthe von $x$ und $y$ miteinander vertauscht, da die Gleichung in Bezug auf $x$ und $y$ symmetrisch war.

Ist aber eine der beiden symmetrischen Gleichungen schon von der Form $x+y=a$, also $x+y$ bekannt, so tritt eine fernere Reduction ein. In

$$x^r+y^r=(x+y)^r-rxy(x^{r-2}+y^{r-2})-\frac{r(r-1)}{1\cdot 2}(x^{r-4}+y^{r-4})(xy)^2+\cdots$$

kommt es nun bloss auf den Grad von $xy$ an, und offenbar wird dies der Grad des letzten Gliedes rechts sein, da diese Glieder nach aufsteigenden Potenzen von $xy$ fortschreiten.

Offenbar aber ist dies letzte Glied von der Ordnung $\frac{r}{2}$, wenn $r$ grade ist, dagegen von der Ordnung $\frac{r-1}{2}$, wenn $r$ ungrade ist. Die Ordnung des entsprechenden Gliedes der Schlussgleichung wird also bezüglich $p+\frac{r}{2}$ oder $p+\frac{r-1}{2}$, und da die anfängliche Dimension $p+q=2p+r$ war, so wird im ersten Falle die Ordnung auf die Hälfte, im 2ten auf $\frac{1}{2}$ weniger als die Hälfte reducirt.

**Beispiele.** Sind die Gleichungen

$$x+y=a,\ x^{2n}+y^{2n}=b$$

gegeben, so ist:

$$p=0,\ q=r=2n,$$

also die Schlussgleichung wird vom $n$ten Grade. Sind die Gleichungen:

$$x+y=a,\ x^{2n+1}+y^{2n+1}=b$$

gegeben, so ist die Schlussgleichung ebenfalls vom $n$ten Grade.

Es führen also die Gleichungen

$$x^4+y^4=b \text{ oder } x^5+y^5=b$$

in Gemeinschaft mit

$$x+y=a$$

noch auf quadratische zurück.

In der That ist, wenn wir

$$xy=u$$

setzen:

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)=a^3-3ua,$$

also eine lineäre Gleichung. Dagegen:

$$x^4+y^4=(x+y)^4-4xy(x^2+y^2)-6x^2y^2$$

oder, da

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$$

war,

$$x^4+y^4=a^4-4ua^2+2u^2.$$

Endlich

$$x^5+y^5=(x+y)^5-5xy(x^3+y^3)-10x^2y^2(x+y)$$

und wegen des Werthes von

$$x^3+y^3=a^3-3ua,$$

$$x^5+y^5=a^5-5ua^3+5u^2a,$$

so dass in beiden letzten Fällen sich in der That quadratische Gleichungen für $u$ ergeben.

Oft kann man nicht-symmetrische Gleichungen durch Substitution auf die Form von symmetrischen bringen.

Est ist dies z. B. bei der Gleichung

$$x^{2n+1}-y^{2n+1}=b,$$

welche sich in

$$x^{2n+1}+2^{2n+1}=b$$

verwandelt, der Fall, wenn man $z=-y$ setzt.

22) Kommen mehr als 2 Gleichungen und die entsprechende Anzahl Unbekannter vor, so ist der Fall natürlich seltener, dass sich diese Gleichungen auf quadratische reduciren lassen.

Am leichtesten wird man bei solchen Gleichungen zum Ziele kommen, die in Bezug auf je 2 Unbekannte symmetrisch sind, und wollen wir dies nur an einem Paar Beispielen klar machen, da viele Uebungsbücher von diesem Verfahren hinreichende Anwendungen gegeben.

Beispiele. Seien gegeben die 4 Gleichungen:

$$1)\quad xy=su,$$
$$2)\quad x+y+s+u=a,$$
$$3)\quad x^2+y^2+z^2+u^2=b,$$
$$4)\quad x^3+y^3+z^3+u^3=c.$$

Es findet hier einerseits zwischen $x$ und $y$ und anderseits zwischen $s$ und $u$ vollständig Symmetrie statt. Setzen wir also aus denselben Gründen, wie im vorigen Abschnitte,

$$x+y=p,\quad xy=q,\quad s+u=r,$$

so ist $zu$ wegen Gleichung 1) auch gleich $q$.

Es nehmen dann die Gleichungen 2), 3) und 4) die Gestalt an:

$$5)\quad p+r=a,$$
$$(x+y)^2+(s+u)^2-2xy-2zu=b$$

oder

$$6)\quad p^2+r^2-4q=b,$$
$$(x+y)^3+(s+u)^3-3xy(x+y+s+u)=c$$

oder

$$7)\quad p^3+r^3-3aq=c.$$

Die Gleichungen 5), 6) und 7) aber sind nach $p$ und $r$ symmetrisch; setzt man demnach, da $p+r=a$ ist, noch

$$pr=s,$$

so werden 6) und 7) die Gestalt annehmen:

$$(p+r)^2-2pr-4q=b$$

oder

$$8)\quad a^2-2s-4q=b,$$
$$(p+r)^3-3pr(p+r)-3aq=c$$

oder

$$9)\quad a^3-3as-3aq=0.$$

Die Aufgabe ist also zurückgeführt auf die Lösung der beiden linearen Gleichungen 8) und 9), welche $s$ und $q$ geben. Die Gleichungen

$$p+r=a,\quad pr=s$$

geben dann $p$ und $r$, und mittels der Gleichungen

$$x+y=p,\quad xy=q$$

kann man $x$ und $y$, so wie mittels der Gleichungen

$$s+u=r,\quad zu=q$$

$s$ und $u$ finden, so dass nur 3 quadratische Gleichungen zu lösen sind.

Ein ähnliches Verfahren führt noch zum Ziele, wenn man hat:

$$1)\quad xy=su,$$
$$2)\quad x+y+z+u=a,$$
$$3)\quad x^2+y^2+z^2+u^2=b,$$
$$4)\quad x^4+y^4+s^4+u^4=c.$$

Man setzt wieder

$$x+y=p,\quad s+u=r,$$
$$xy=su=q;$$

es werden dann die Gleichungen 2) und 3) die früheren Formen

$$5)\quad p+r=a,$$
$$6)\quad p^2+r^2-4q=b$$

annehmen, die Gleichung 4 aber wird

$$(x+y)^4+(z+u)^4-4xy(x^2+y^2)$$
$$-4zu(z^2+u^2)-6x^2y^2-6z^2u^2=c$$

oder

$$7)\quad p^4+r^4-4qb-12q^2=c.$$

Setzt man noch $pr=s$, so wird die Gleichung 6) ganz wie oben:

$$8)\quad a^2-2s-4q=b,$$

dagegen wird aus 7)

$$(p+r)^4-4pr(p^2+r^2)-6p^2r^2-4qb$$
$$-12q^2=c$$

oder, da

$$p^2+r^2=(p+r)^2-2pr$$

ist,

$$a^4-4s(a^2-2s)-6s^2-4qb-12q^2=c,$$

d. h.

$$9)\quad a^4+2s^2-4a^2s-4qb-12q^2=c.$$

Von den Gleichungen 8) und 9) ist 8) linear, 9) quadratisch, sie führen also zur Bestimmung von $q$ und $s$ mittels einer quadratischen Gleichung; im Uebrigen ist das Verfahren wie im vorigen Beispiele.

Statt der Gleichung 4) kann man selbst noch die folgende nehmen:

$$x^5+y^5+z^5+u^5=c.$$

Es werden von dieser Aenderung in dem vorigen Beispiele nur die Gleichungen 7) und 9) berührt. Statt Gleichung 7) nämlich kommt, wenn man wieder $p$, $q$ und $r$ einführt:

$$(x+y)^5-5xy(x^3+y^3)-10x^2y^2(x+y)+(z+u)^5-5zu(z^3+u^3)-10z^2u^2(z+u)=c$$

oder:

$$p^5+r^5-5q(x^3+y^3+z^3+u^3)-10q^2a=c.$$

Da aber

$$x^3+y^3+z^3+u^3=p^3+r^3-3aq$$

ist, so wird die Schlussform:

$$p^5+r^5-5q(p^3+r^3)+5aq^2=c,$$

und wenn endlich wieder $pr=s$ eingeführt wird, so ist statt dieser Gleichung zu setzen:

$$(p+r)^5-5pr(p^3+r^3)-10p^2r^2(p+r)-5q(p^3+r^3)+5aq^2=c,$$

d. h.

$$a^5-5(s+q)(p^3+r^3)-10as^2=c$$

oder da

$$p^3+r^3=(p+r)^3-3pr(p+r),$$

ist:

$$a^5-5a^3(s+q)+15as(s+q)-10as^2=c,$$

d. h.

$$a^5-5a^3r-5a^3q+5as^2+15asq=c,$$

offenbar eine Gleichung, die in Verbindung mit

$$a^2-2s-4q=b$$

die Werthe von $s$ und $q$ durch Auflösung einer einzigen quadratischen gibt.

Sind alle gegebenen Gleichungen für $x$ und $y$ symmetrisch, und eine der Gleichungen ist

$$xy=1,$$

so ist

$$y=\frac{1}{x}$$

und da wegen der Symmetrie jedem Werth von $x$ ein Werth von

$$y=\frac{1}{x}$$

entsprechen muss, so wird, wenn man alle Unbekannten bis auf $x$ eliminirt hat, die Schlussgleichung eine reciproke sein, also sich auf die für dieselben angegebene Weise reduciren lassen.

Die Gleichung

$$xy=a$$

nimmt die obige Form an, wenn man $y=az$ substituirt, wo dann

$$xz=1$$

ist.

23) Die quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten finden mancherlei Anwendungen in den verschiedenen Theilen der Mathematik. Ihr wichtigster Gebrauch ist aber der in der analytischen Geometrie zur Bestimmung der Eigenschaften der Linien und Flächen 2ter Ordnung, worüber in den entsprechenden Artikeln das Nähere zu finden ist.

Um noch eine einfache Anwendung derselben für die Elemente der Algebra zu zeigen, beschäftigen wir uns mit der Aufgabe, den Ausdruck $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$, welcher also eine Wurzel unter der Wurzel enthält, wenn es geschehen kann, in eine Summe oder Differenz zweier einfachen Wurzeln zu verwandeln.

Zu dem Ende setzen wir:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{x}\pm\sqrt{y}$$

und erheben diese Gleichung ins Quadrat. Es kommt:

$$a\pm\sqrt{b}=x+y\pm2\sqrt{xy},$$

eine Gleichung, die man in 2 andere zerlegen kann, wenn man den rationalen und irrationalen Theil sondert. Es kommt:

$$x+y=a,$$

$$2\sqrt{xy}=\sqrt{b}$$

oder

$$4xy=b.$$

Es ist also Summe und Product der beiden Unbekannten bezüglich $a$ und $\frac{b}{4}$, und es wird die quadratische Gleichung, deren Wurzeln $x$ und $y$ sind, sein (siehe Abschnitt 21):

$$x^2-ax=-\frac{b}{4},$$

also:

$x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - b}, \; y = \frac{1}{2}(a - \sqrt{a^2 - b},$

folglich:

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

und

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} - \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Die Ausdrücke rechts nebmen immer die Gestalt einfacher Wurzeln an, wenn $a^2 - b$ die Form eines vollständigen Quadrates hat.

Beispiele:

$$\sqrt{87 - 12\sqrt{42}} = \sqrt{87 - \sqrt{6048}} = 3\sqrt{7} - 2\sqrt{6},$$

$$\sqrt{\tfrac{3}{2} + \sqrt{2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\sqrt{2},$$

$$\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} = \sqrt{4} + \sqrt{3} = 2 + \sqrt{3}.$$

Man kann aber allgemein die Frage stellen, unter welchen Umständen $a^2 - b$ ein vollständiges Quadrat ist.

Es muss dann offenbar sein:

$$a^2 - b = (a - c)^2 = a^2 - 2ac + c^2,$$

also

$$b = 2ac - c^2,$$

wo $c$ eine ganz beliebige Zahl ist.

In unserm ersten Beispiele war:

$$a = 87, \; b = 6048 = 2 \cdot 87 \cdot 48 - 48^2,$$

also

$$a - c = 39.$$

## Quadratische Gleichungen (unbestimmte).

1) Quadratische Gleichungen bleiben, wie alle Gleichungen, unbestimmt, wenn weniger Gleichungen gegeben sind, als die Anzahl der Unbekannten beträgt. Man kann dann, wenn z. B. $n$ Gleichungen mit $p$ Unbekannten gegeben sind, im Allgemeinen $p - n$ der letztern beliebig bestimmen.

Diese Beliebigkeit aber hört auf, wenn man über die Art der Werthe der Unbekannten Bestimmungen trifft. (Siehe Artikel: unbestimmte Aufgaben.)

Wir wollen hier nur eine Gleichung mit 2 Unbekannten betrachten:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Die Coefficienten derselben seien ganze Zahlen.

Es wird zunächst verlangt, diese Gleichung durch rationale Werthe von $x$ und $y$ zu lösen. Weder $a$ noch $c$ sollen den Werth Null haben, denn fände dies z. B. für $a$ statt, so würde die Gleichung in Bezug auf $x$ vom ersten Grade sein, also sich ohne Weiteres für ein beliebiges rationales $y$ auch ein rationales $x$ ergeben.

Indem man die Gleichung mit $4a$ multiplicirt, nimmt sie die Gestalt an:

$$(2ax + by + d)^2 = (d + by)^2 - 4a(f + ey + cy^2).$$

Also wenn man setzt:

$$2ax + by + d = u,$$
$$d^2 - 4af = g,$$
$$db - 2ae = h,$$
$$b^2 - 4ac = A,$$

so kommt:

$$u^2 = Ay^2 + ehy + g$$

oder wenn man noch

$$Ay + h = v,$$
$$h^2 - Aq = B$$

setzt, und mit $A$ multiplicirt:

$$v^2 = Au^2 + B,$$

wo weder $A$ und $B$ gleich Null sein sollen, da sonst sich die rationalen Werthe augenblicklich ergäben.

Ist diese letzte Gleichung in rationalen Werthen von $u$ und $v$ gelöst, so hat man rationale Werthe für $x$ und $y$ mittels der Formeln:

$$x = \frac{Au - br + hb - Ad}{2aA}, \quad y = \frac{v - h}{A},$$

die man sogleich aus den obigen erhält; und nur in dem Falle, wenn die Gleichung

$$v^2 = Au^2 + B$$

wirklich auf rationalem Wege lösbar ist, findet Gleiches auch für die gegebene Gleichung statt. Mit der letztgeschriebenen Gleichung haben wir uns also allein zu beschäftigen.

Noch sollen $A$ und $B$ keinen quadratischen Factor haben. Denn wäre

$$A = A'\alpha^2, \quad B = B'\beta^2,$$

so würde man setzen können:

$$v = \beta v' \text{ und } \alpha u = \beta u',$$

die Gleichung nehme dann die Gestalt an:

$$\beta^2 v' = A'\beta^2 u'^2 + B'\beta^2,$$

d. h.

$$v'^2 = A'u'^2 + B',$$

was wieder die Gestalt unserer Gleichung ist.

Wir betrachten jetzt $v$ und $u$ als Brüche, die auf ihren kleinsten Generalnenner gebracht sind.

Seien demnach:

$$v = \frac{r}{s}, \quad u = \frac{z}{s},$$

wo $r$, $s$, $z$ alle drei keinen gemeinschaftlichen Factor haben dürfen.

Unsere Gleichung wird dann:

$$r^8 = As^2 + Bz^2,$$

wo $r$, $s$, $z$ ganze Zahlen sind. Da $A$ und $B$ keinen quadratischen Factor haben, müssen je 2 der Zahlen $r$, $s$, $z$ relativ einfache Zahlen sein. Denn hätten z. B. $r$ und $s$ einen Factor gemein, so kann derselbe nicht in $z$ vorkommen, er müsste also 2 Mal in $B$ als Factor, d. h. als quadratischer, enthalten sein.

2) Es sollen jetzt die Bedingungen untersucht werden, welche stattfinden müssen, damit die Gleichung

$$r^2 = As^8 + Bz^2$$

überhaupt in ganzen Zahlen lösbar sei.

Möge $f$ der grösste gemeinschaftliche Factor von $A$ und $B$, also $A = af$, $B = bf$ sein, so ist:

$$r^2 = afs^2 + bfz^2.$$

Es sind auch $af$ und $b$, so wie $bf$ und $a$ relative Primzahlen, denn wäre dies nicht der Fall, so müssten, da $a$ und $b$ relative Primzahlen sind, z. B. $f$ und $b$ einen Factor gemein haben, also in $B = bf$ müsste ein quadratischer Factor vorkommen.

Sei jetzt $p$ eine in $b$ als Factor enthaltene Primzahl, so ist $r^2 - afs^2$ jedenfalls durch $p$ theilbar. Es sind dann aber weder $r$ noch $s$ durch $p$ theilbar, denn wäre es $r$, so müsste es auch $s$ sein, da $af$ nicht durch $p$ theilbar ist, $r$ und $s$ aber haben keinen Factor gemein. Es lassen sich also jedenfalls 2 Zahlen $t$ und $u$ so bestimmen, dass

$$st - pu = 1$$

ist, oder dass

$$st \equiv 1 \bmod p$$

wird. (Siehe den Artikel: unbestimmte Aufgaben.) Verbindet man diese Congruenz mit

$$r^8 \equiv afs^2 \bmod p,$$

welche stattfindet, weil $r^2 - afs^2$ durch $p$ theilbar wird, und multiplicirt letztere mit $t^2$, so kommt:

$$(rt)^2 \equiv af \bmod p.$$

Es muss also $af$ oder $A$ quadratischer Rest für jeden Factor $p$ von $bf$ oder $B$, d. h. von $B$ selbst sein. Für $B$ lässt sich ein gleicher Schluss machen, und man erhält den Satz:

„Die Gleichung

$$r^2 = As^2 + Bz^2$$

ist nur dann in ganzen Zahlen lösbar, wenn $A$ quadratischer Rest von $B$, und $B$ quadratischer Rest von $A$ ist.“

3) Wegen der Gleichung

$$r^2 = afs^2 + bfz^2$$

ist $r$ durch $f$ theilbar, wir wollen daher

$$r = fw$$

schreiben, dann ist:

$$fw^2 = as^2 + bz^2$$

oder, wenn man mit $a$ multiplicirt:

$$afw^2 = a^2s^2 + abz^2,$$

d. h.

$$(as)^2 \equiv -abz^2 \bmod f.$$

$ab$ und $f$ sind aber relativ einfache Zahlen, denn $f$ hat weder einen Factor mit $a$ noch mit $b$ gemein. „Es muss also auch $-ab$ quadratischer Rest von $f$ sein,“ weil $-abz^2$ ein solcher ist.

Nun sind die Fälle zu unterscheiden, 1) wo $A$ und $B$ positiv sind, 2) eine von beiden Grössen negativ ist. Denn in

$$r^2 = As^2 + Bt^2$$

können nicht gleichzeitig $A$ und $B$ negativ sein.

Aber der zweite Fall lässt sich immer auf den ersten zurückführen. Denn sei z. B.

$$r^2 = As^2 - Bt^2,$$

wo $A$ und $B$ positiv sind, so können wir, da $r$ durch $f$ theilbar ist, wieder setzen $r = fw$, und unsre Gleichung wird:

$$fw^2 = as^2 - bt^2$$

oder

$$as^2 = bt^2 + fw^2.$$

d. h. wenn man mit $a$ multiplicirt:

$$(as)^2 = abt^2 + afw^2.$$

Setzt man für $as$ einen eignen Buchstaben, so hat man ganz die obige Form wieder. Es kann diese also als allgemein gültig angesehen werden, und wir denken uns daher sowohl $A$ als $B$ positiv.

Es ist aber selbst darauf nicht zu sehen, dass in der Gleichung

$$r^2 = As^2 + Bt^2$$

die Wurzeln ganze Zahlen seien. Denn jede Auflösung in rationalen Zahlen giebt, wenn man die Nenner gleich macht und solche wegschafft, auch eine Auflösung in ganzen Zahlen.

Seien zunächst $A$ und $B$ ungleich, und zwar $B$ kleiner als $A$; es muss dann, da

$B$ quadratischer Rest von $A$ ist, nothwendig eine oder mehrere positive Zahlen $n$ geben, die kleiner als $\frac{A}{2}$ und so beschaffen sind, dass $n^2 - B$ durch $A$ theilbar ist. Es ist nun

$$\frac{n^2-B}{A} < \frac{n^2}{A} < \frac{1}{4}A.$$

Sei

$$\frac{n^2-B}{A} \text{ jetzt gleich } \alpha k^2,$$

wo der quadratische Factor $k^2$ natürlich auch gleich Eins sein kann, dann ist auch

$$\alpha k^2 < \frac{1}{4}A.$$

Nun wird gesetzt:

$$r = nt - At',$$

also:

$$(n^2-B)t^2 - 2nAtt' + A^2t'^2 = As^2$$

oder:

$$\alpha k^2t^2 - 2ntt' + At'^2 = s^2.$$

Es ist nämlich, $-B$ für $n^2$ gesetzt: $A\alpha k^2$, und $t$ weggehoben.

Multipliciren wir die letzte Gleichung endlich mit $\alpha k^2$, so kommt:

$$(\alpha k^2t - nt')^2 - (n^2 - A\alpha k^2)t'^2 = \alpha k^2s^2.$$

Indem wir nun setzen:

$$\alpha k^2t - nt' = r', \quad ks = s'$$

und damit die Gleichung

$$n^2 - A\alpha k^2 = B$$

verbinden, so kommt:

$$r'^2 = \alpha s'^2 + Bt'^2,$$

eine Gleichung, die der gegebenen ganz ähnlich, nur dass der erste Coefficient $\alpha < \frac{1}{4}A$ ist.

4) Wenn die 3 Bedingungen der Möglichkeit für $A$ und $B$ erfüllt sind, so erfüllen sie sich schon von selbst für $\alpha$ und $B$. Wir wollen dies jetzt beweisen.

Sei der grösste gemeinschaftliche Factor von $\alpha$ und $B$ durch $\varphi$ bezeichnet, also

$$\alpha = e\varphi, \quad B = g\varphi.$$

In der Gleichung

$$n^2 - B = A\alpha k^2$$

sind offenbar $B$ und $k$ relativ einfache Zahlen, denn hätten sie einen Factor gemein, so hätte auch $n^2$ denselben in quadratischer Form, und $B$ müsste also ebenfalls durch ein Quadrat theilbar sein, ein Fall, den wir hier ja ausgeschlossen haben. Unmitelbar aber zeigt unsere Gleichung, „dass $B$ quadratischer Rest von $\alpha$ ist." Es war dies die erste unserer 3 Bedingungen.

Möge nun $p$ ein einfacher Factor von $B$ sein, der aber zunächst nicht in $A\alpha k^2$ enthalten sein soll. Dann ist

$$n^2 \equiv A\alpha k^2 \mod p$$

und da $A$ quadratischer Rest von $p$ war, so ist es auch $\alpha k^2$, folglich auch $\alpha$. Es ist $\alpha$ also auch quadratischer Rest von $B$.

Sei jetzt $p$ zugleich in $\alpha$ enthalten, so ist offenbar $l^2 - \alpha$ durch $p$ theilhar, wenn $l$ irgend eine durch $p$ theilbare Zahl ist, also

$$l^2 \equiv \alpha \mod p,$$

und $\alpha$ ebenfalls quadratischer Rest von $p$.

Ist endlich $A$ durch $p$ theilbar ($k^2$ hat, wie wir gesehen haben, keinen Factor mit $B$ gemein), sö ist $p$ ein Divisor des grössten gemeinschaftlichen Factors $f$ von $A$ und $B$. Da nun wegen der Gleichung

$$n^2 - B = A\alpha k^2$$

auch $n^2$, d. h. $n$ durch $f$ theilbar sein muss, so kann man

$$n = fr$$

setzen, und es ist:

$$fr^2 = b + a\alpha k^2.$$

Es kann aber $b$ nicht durch $p$ theilhar sein, da sonst $B = bf$ einen quadratischen Factor enthielte. Folglich ist auch nicht $a\alpha k^2$ durch $p$ theilbar. Es wird aber:

$$-b \equiv a\alpha k^2 \mod p,$$

oder mit $a$ multiplicirt:

$$-ab \equiv a^2\alpha k^2 \mod p$$

und da $-ab$ quadratischer Rest von $f$ war, so ist es auch $\alpha$; es ist $\alpha$ also auch quadratischer Rest von $B$.

Dies war die zweite Bedingung. Sie findet mithin ganz allgemein statt.

Es soll endlich noch $-eg$ quadratischer Rest von $\varphi$ sein.

Dies aber folgt aus der Gleichung:

$$n^2 - B = A\alpha k^2.$$

Da $\alpha$ und $B$ nämlich durch $\varphi$ theilbar sind, so ist dies auch $n$. Wird also

$$n = \mu\varphi$$

gesetzt, so ist:

$$\mu\varphi - g = Aek^2,$$

und da $g$ und $\varphi$ relativ einfache Zahlen sind (weil sonst $B$ einen quadratischen Factor enthielte), so muss auch $Aek^2$ zu $\varphi$ relativ einfach sein. — $A$ aber war

quadratischer Rest zu $B$, also auch zu $q$, mithin auch $Ae^2k^2$, und da

$$Ae^2k^2 \equiv -eg \bmod q$$

ist, so ist $-eg$ quadratischer Rest von $q$, wie vorausgesagt wurde.

5) Setzt man dies Verfahren fort, so kommt für $\alpha$ eine Zahl, die kleiner als $\frac{\alpha}{4}$ ist u. s. w., es wird also die Gleichung sich in eine andre

$$r^2 = \alpha' s^2 + Bt^2$$

zuletzt verwandeln, wo $\alpha$ kleiner als $B$ ist. Eine solche Gleichung nennen wir reducirte.

Diese reducirte Gleichung sei jetzt wieder:

$$r^2 = As^2 + Bt^2.$$

Sie lässt sich nunmehr nach $B$ hin reduciren, so dass $\beta < \frac{1}{4}B$ und schliesslich der zweite Coefficient kleiner als $A$ wird. Das Verfahren ist das nämliche wie oben.

Eine Ausnahme kann nur dann stattfinden, wenn in der gegebenen oder in einer der reducirten Gleichungen $A = B$ wird. In diesem Falle ist unser Verfahren folgendermassen zu modificiren.

In der Gleichung $r^2 = B(s^2 + t^2)$ ist

$$a = b = 1, \quad B = f$$

zu setzen. die dritte unsrer Bedingungen wird also die, dass $-1$ quadratischer Rest von $B$ ist, die ersten beiden sind selbstverständlich.

Ergiebt sich aber eine Gleichung von dieser Form durch Reduction, so ist

$$\alpha = B, \text{ also } n^2 - B = ABk^2.$$

Es folgt daraus, dass

$$n = Br \text{ und } Br^2 - 1 = Ak^2$$

ist, d. h.

$$Ak^2 \equiv -1 \bmod B$$

und da $A$ quadratischer Rest von $B$ war, so ist es auch $-1$. Diese Bedingung der Lösbarkeit wird also auch in diesem Falle immer von selbst sich erfüllen..

Zur weitern Reduction setzt man nun:

$$r = B(s - s'),$$

so dass man erhält:

$$B(s - s')^2 = s^2 + t^2$$

oder:

$$(B-1)s^2 - 2Bss' + Bs'^2 = t^2.$$

Der grösste quadratische Factor von $B-1$ soll wieder $k^2$ sein, so dass

$$B - 1 = \beta k^2$$

ist, also:

$$\beta k^2 s^2 - 2Bss' + Bs'^2 = t^2.$$

Wir multipliciren mit $\beta k^2$, und setzen

$$\beta k^2 s - Bs' = r'$$

und

$$kt = t',$$

es kommt dann:

$$r'^2 = Bs'^2 + \beta t'^2.$$

Da in dieser Gleichung $B$ und $\beta$ relativ einfache Zahlen sind, so fällt die dritte Bedingung ganz weg. Wegen der Gleichung

$$B = \beta k^2 + 1$$

oder:

$$1 \equiv B \bmod \beta$$

ist aber $B$ quadratischer Rest von $\beta$, und da $-1$ quadratischer Rest von $B$ war, und

$$\beta k^2 \equiv -1 \bmod B,$$

so ist auch $\beta k^2$, d. h. $\beta$ quadratischer Rest zu $B$. Die Bedingungen der Auflösbarkeit finden also auch bei der hier einzuschlagenden Reductionsweise statt.

6) Fährt man mit diesen Reductionen fort, so kommt man zuletzt auf eine Gleichung, wo einer der Coefficienten 1 ist:

$$r^2 = s^2 + Bt^2.$$

Wir zeigen, dass diese Gleichung immer lösbar ist, und damit wird auch bewiesen sein, dass die 3 Reductionsbedingungen nicht allein nöthig, sondern auch ausreichend für die Auflösbarkeit der zuerst gegebenen Gleichung sind.

Was nämlich die letzte Gleichung anbetrifft, so ist um sie aufzulösen nur nöthig, dem Ausdrucke $s^2 + Bt^2$ die Form eines vollständigen Quadrates zu geben, also zu setzen:

$$s^2 + Bt^2 = (s + \alpha)^2,$$

woraus folgt:

$$Bt^2 = 2\alpha s + \alpha^2,$$

also:

$$s = \frac{Bt^2 - \alpha^2}{2\alpha},$$

woraus sich dann mittels der Gleichung

$$r^2 = (s + \alpha)^2 \text{ oder } r = s + \alpha$$

ergiebt:

$$r = \frac{Bt^2 + \alpha^2}{2\alpha}.$$

$t$ ist also ganz beliebig zu nehmen eben so wie $\alpha$.

Sollen noch, was freilich nicht nöthig war, $r$, $s$, $t$ ganze Zahlen sein, so setze

man die eben gefundenen Werthe in die Gleichung

$$r^2 = s^2 + Bt^2$$

ein. Es kommt:

$$\frac{(Bt^2+\alpha^2)^2}{4\alpha^2} = \frac{(Bt^2-\alpha^2)^2}{4\alpha^2} + Bt^2,$$

also wenn man die Nenner wegschafft:

$$(Bt^2+\alpha^2)^2 = (Bt^2-\alpha^2)^2 + B4\alpha^2 t^2,$$

woraus sich ergieht, dass unsere Gleichung ehenfalls erfüllt ist, nnd zwar in ganzen Zahlen durch die Werthe:

$$r = B\beta^2 + \alpha^2,\ s = B\beta^2 - \alpha^2,\ t = 2\alpha\beta.$$

Es ist in diesen Formeln $\beta$ für $t$ geschrieben, um es von der unhekannten Grösse $t$ zu unterscheiden. $\alpha$ und $\beta$ sind heliebige Zahlen.

Es ist aber auch klar, dass wenn die Ausdrücke $r$, $s$, $t$ einen Factor gemein haben, dieser unterdrückt werden kann. Kann also $B$ auf irgend eine Art in 2 Factoren

$$B = bc$$

zerlegt werden, so setze man $\alpha = ac$, wo dann der Factor $c$ in der That heraustritt, und man erhält, mit Weglassung desselben,

$$r = b\beta^2 + ca^2,$$
$$s = b\beta^2 - ca^2,$$
$$t = 2a\beta.$$

7) **Beispiel.** Die aufzulösende Gleichung sei:

$$r^2 = 32t^2 + 17u^2.$$

Die Reductionsgleichungen waren

$$\frac{n^2 - B}{A} = \alpha k^2, \text{ wo } n < \frac{A}{2} \text{ ist},$$

$$r = nt - At',$$
$$ks = s',$$
$$\alpha k^2 t - nt' = r'$$

(siehe Abschnitt 3), in unserm Falle aber ist

$$A = 32,\ B = 17,$$

also:

$$n = 7, \text{ da } \frac{49-17}{32} = 1 \text{ ist}$$

$$\alpha = 1,\ k = 1,$$

$$r = 7t - 32t',\ r' = t - 7t',\ s = s'.$$

Die Gleichung

$$r'^2 = \alpha s'^2 + Bt'^2$$

aber wird

$$r'^2 = s'^2 + 17t'^2$$

und mittels der Formeln für $r$, $s$, $t$ im vorigen Abschnitte ergieht sich:

$$r' = 17\beta^2 + a^2,$$
$$s' = 17\beta^2 - a^2,$$
$$t' = 2a\beta,$$

ferner

$$r = 7t - 64a\beta,$$
$$r' = t - 14a\beta$$

oder

$$t = 17\beta^2 + a^2 + 14a\beta,$$

also auch

$$r = 119\beta^2 + 7a^2 + 34a\beta,$$
$$s = s' = 17\beta^2 - a^2.$$

Soll die vorgelegte Gleichung:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

durch ganze Zahlen aufgelöst werden, so lassen sich allerdings auf diese Weise Auflösungen gewinnen, wenn man aus den sich ergehenden rationalen Werthen die ganzen aussucht. Indessen würde die Ausführung grosse Schwierigkeiten machen, namentlich wenn alle Auflösungen gefunden werden sollen. Es ist daher die Aufgabe direct anzugreifen. Für einen einfacheren Fall gibt die Theorie der quadratischen Formen die nöthigen Hülfsmittel hierzu.

8) Wir wollen die Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = n$$

in ganzen Zahlen auflösen.

Das Verfahren gestaltet sich ganz verschieden, je nachdem die Determinante

$$D = b^2 - ac$$

(siehe den Artikel: quadratische Form) positiv oder negativ ist. Der letztere Fall aher ist der bei Weitem einfachere. Wir hehandeln ihn zuerst.

Es sei

$$b^2 - ac = -\triangle,$$

so hat man, wenn man die gegebene Gleichung mit $a$ multiplicirt:

$$(ax+by)^2 + \triangle y^2 = an$$

und wenn

$$ax + by = u$$

gesetzt wird

$$u^2 + \triangle y^2 = an.$$

Die positive Zahl

$$u^2 = an - \triangle y$$

hat immer eine endliche Anzahl Werthe. Man herechnet dieselhen, indem man für $y$ nach der Reihe die Zahl 0, 1, 2 . . . einsetzt, so lange bis

$$y > \sqrt{\frac{an}{\triangle}}$$

wird. Diejenigen Werthe, die $an - y^2$ zum Quadrate machen, sind dann Auflösungen für $u$.

Um $x$ zu finden, sei $\alpha$ einer der hier gefundenen Werthe von $u$, $\beta$ der angehörige von $y$, so muss sein entweder

$$ax + b\beta = \alpha$$

oder

$$ax - b\beta = \alpha$$

oder

$$ax + b\beta = -\alpha$$

oder

$$ax - b\beta = -\alpha,$$

also

$$x = \pm\left(\frac{\alpha - b\beta}{a}\right)$$

oder

$$x = \pm\left(\frac{\alpha + b\beta}{a}\right).$$

Nur die ganzen Zahlen, welche sich etwa aus diesen Gleichungen ergeben, sind zu nehmen.

Selbstverständlich kann aber dies Verfahren ein sehr langwieriges sein, und ist es daher wohl gethan, so viel als möglich Werthe von $u$ und $y$, welche kein Resultat geben, gleich von vorn herein auszuschliessen.

Man suche die Reste von $\triangle$ und $n$ für einen beliebigen Modul $p$, dieselben mögen sein $\delta$ und $\nu$. Es können dann nur solche Werthe von $u$ und $y$ die Gleichung

$$u^2 + \triangle y^2 \equiv n$$

erfüllen, für welche

$$u^2 + \delta y^2 \equiv \text{mod } p$$

ist.

Sei nun $\beta$ eine positive ganze Zahl, die kleiner als $p$ und quadratischer Nichtrest von $p$ ist, so darf $y$ nicht so gewählt werden, dass

$$\beta + \delta y^2 \equiv \nu \text{ mod } p,$$

d. h.

$$\delta y^2 \equiv \nu - \beta \text{ mod } p,$$

ist.

Sei $\alpha$ eine Zahl, welche für $y$ gesetzt, diese Congruenz erfüllt, so sind also alle Werthe von der Form $sp \pm \alpha$ für $y$ ganz auszuschliessen.

Durch zweckmässige Auswahl und Veränderung der Zahlen $p$ und $\beta$ gelangt man zur Ausschliessung vieler Werthe für $y$.

Man nimmt übrigens für $p$ nur Primzahlen oder Potenzen von denselben, da andere Zahlen in Bezug auf die Ausschliessung dasselbe geben, als ihre Factoren. Das folgende Beispiel entnehmen wir „Mindings Anfangsgründe der höhern Arithmetik (Berlin 1832).

**Beispiel.** Sei die gegebene Gleichung:

$$u^2 + 13y^2 = 33934.$$

Sei $p = 4$, also

$$33934 \equiv 2 \text{ mod } 4,$$

$$13 \equiv 1 \text{ mod } 4,$$

also

$$u^2 + y^2 \equiv 2 \text{ mod } 4.$$

2 und 3 sind Nichtreste von 4, es kann also $y^2$ nicht congruent $-1$ oder 3 nach Modul 4 sein. Die erste Bedingung schliesst für unsern Fall keine Werthe aus, die letztere aber zeigt, dass keine graden Werthe für $y$ zu nehmen sind.

Von den 51 Werthen, welche kleiner als $\sqrt{\frac{33934}{13}}$ sind, bleiben also noch übrig für $y$:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51.

Wird jetzt $p = 5$ gesetzt, so muss

$$u^2 + 3y^2 \equiv 4 \text{ mod } 5$$

sein. Nichtreste von 5 sind 2 und 3. Also alle Werthe von $y$, welche eine der Congruenzen

$$2 + 3y^2 \equiv 4 \text{ mod } 5, \quad 3 + 3y^2 \equiv 4 \text{ mod } 5$$

erfüllen, sind auszuschliessen. Dies giebt:

$$3y^2 \equiv 2 \text{ mod } 5, \quad 3y^2 \equiv 1 \text{ mod } 5,$$

$$y^2 \equiv 4 \text{ mod } 5, \quad y^2 \equiv 2 \text{ mod } 5.$$

Die Quadrate der ungraden Zahlen aber können nach Modul 5 nur mit 1 und 4 congruent sein. Die letzte Bedingung schliesst also keine Werthe aus, die erste dagegen die, wo

$$y \equiv 2 \text{ oder } y \equiv -2 \text{ mod } 5$$

ist. Damit sind ausgeschlossen die Zahlen:

3, 7, 13, 17, 23, 27, 33, 37, 43, 47.

Sei jetzt $p = 7$, so wird:

$$u^2 + 6y^2 \equiv 5 \text{ mod } 7.$$

Die Nichtreste von 7 sind 3, 5, 6, und dies führt dazu, dass nicht

$$6y^2 \equiv 2, \quad 6y^2 \equiv 0, \quad 6y^2 \equiv 6 \text{ mod } 7$$

sein kann. Diese Congruenzen nehmen die Gestalt an:

$$y^2 \equiv 5, \quad y^2 \equiv 1, \quad y^2 \equiv 0 \text{ mod } 7.$$

Die beiden letzten Beziehungen lehrten, dass $y$ nicht von den Formen $7n$, $7n+1$, $7n-1$ sein kann, es werden ausgeschlossen die Zahlen:

1, 7, 13, 15, 21, 27, 29, 35, 41, 43, 49,

von denen jedoch nur 7 noch vorhanden waren.

Die Nichtreste nach 11 schliessen von den noch vorhandenen Zahlen noch

$$9,\ 11,\ 31,\ 45$$

aus, so dass für einen Versuch nur noch

$$5,\ 19,\ 25,\ 39,\ 51$$

übrig sind, und es zeigt sich, dass nur $y = 51$ eine Lösung gibt. Es ist nämlich

$$11^2 + 13 \cdot 51^2 = 33934.$$

9) In völlig anderer Weise muss jedoch die Auflösung der unbestimmten Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = N$$

bewerkstelligt werden, wenn die Determinante:

$$D = b^2 - ac$$

positiv ist.

Wir haben uns hierbei auf Einiges zu beziehen, welches in dem Artikel „quadratische Formen" nachzuschlagen ist.

Es waren dort namentlich folgende Sätze bewiesen:

I) Damit man zwei Werthe für $x$ und $y$ bestimmen kann, wo $x$ und $y$ relative Primzahlen sind, muss nothwendig $D$ quadratischer Rest von $N$ sein. Alle Auflösungen unsrer Gleichung, welche zu einer Wurzel der Congruenz

$$n^2 \equiv D \bmod N$$

gehörten, bildeten eine Gruppe.

II) Aus einem Werthe von $x$, $y$ liessen sich alle derselben Gruppe angehörigen $x_1$, $y_1$ finden, wenn man setzte:

$$x_1 = \frac{xt - (bx + yc)u}{\omega},\quad y_1 = \frac{yt + (ax + by)u}{\omega},$$

wo $t$ und $u$ zwei Werthe waren, welche die Gleichung:

$$t^2 - Du^2 = \omega^2$$

erfüllten, und $\omega$ der grösste gemeinschaftliche Factor von $a$, $2b$ und $c$ war. Haben namentlich $a$, $2b$ und $c$ keinen gemeinschaftlichen Factor, so muss

$$t^2 - Du^2 = 1$$

sein. Diese Gleichung, welche die Pellsche genannt wird, führt auch unmittelbar zu Auflösungen der vorletzten allgemeinen Gleichung. Denn sind $t_1$, $u_1$ zwei zusammengehörige Werthe von $t$ und $u$ in der Pellschen Gleichung, so erfüllen offenbar die Werthe

$$t = \omega t_1,\quad u = \omega u_1$$

die Gleichung

$$t^2 - Du^2 = \omega^2.$$

Es wurde aber auch bewiesen, dass die Pellsche Gleichung immer aufzulösen sei.

III) Aus einem Werthpaare $T$, $U$, welches die Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ löst, lassen sich unendlich viel herstellen, vermittelst der Formel:

$$t + u\sqrt{D} = (T + U\sqrt{D})^n,$$

wo $n$ eine beliebige positive oder negative Zahl ist. Wenn man hierin den rationalen Theil vom irrationalen trennt, erhält man 2 neue Werthe $t$, $u$, welche ebenfalls die gegebene Gleichung auflösen. Sind $T$ und $U$ die kleinsten ganzzahligen Werthe, welche die letztern erfüllen, so erhält man auf diese Weise alle möglichen Werthe von $t$ und $u$, und mithin alle von $x$, $y$, welche unsre Gleichung erfüllen, und zu einer Gruppe gehören.

Verbindet man nun sämmtliche Wurzeln der Congruenz

$$n^2 \equiv D \bmod N$$

mit der Gleichung

$$t^2 - Du^2 = 1,$$

so hat man alle Auflösungen unserer Gleichung, wenn $a$, $2b$ und $c$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben.

Es kommt also lediglich darauf an, für die Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = N$$

aus jeder Gruppe eine Auflösung, und für

$$t^2 - Du^2 = 1$$

die kleinste zu erhalten, um unsre Aufgabe völlig zu lösen, so weit es in relativen Primzahlen geschehen kann.

10) Seien jetzt $x$ und $y$ keine relativen Primzahlen, so wird die linke Seite der Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = N$$

und folglich auch $N$ den grössten gemeinschaftlichen Factor von $x$ und $y$ in quadratischer Form enthalten.

Sei $h$ dieser Factor und $N = h^2\nu$, so ist also

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = h^2\nu.$$

$x$ und $y$ aber sollen nach der Voraussetzung den Factor $h$ haben, es ist also, wenn man durch $h^2$ dividirt:

$$a\left(\frac{x}{h}\right)^2 + 2b\left(\frac{x}{h}\right)\left(\frac{y}{h}\right) + c\left(\frac{y}{h}\right)^2 = \nu.$$

$\frac{x}{h}$, $\frac{y}{h}$ sind ganze relativ einfache Zahlen.

Löst man also die Gleichung:

$$av^2+2bvw+cw^2=\nu$$

in relativ einfachen Zahlen auf, und setzt $x=hv$, $y=hw$, so ist die obige Gleichung ebenfalls gelöst, und dieser Fall auf den vorigen zurückgeführt.

Ferner ergiebt sich leicht, dass man annehmen kann, $a$, $b$ und $c$ hätten keinen Factor gemein, denn wäre dies der Fall, so könnte man $N$, welche Zahl denselben Factor haben muss, durch ihn dividiren.

Es kommt also eigentlich nur auf eine der beiden Gleichungen

$$t^2-Du^2=1$$

und

$$t^2-Du^2=4$$

an, je nachdem $a$ und $c$ nicht beide grade oder beide grade sind.

Auf den letzten Fall lässt sich augenblicklich auch die Auflösung der Gleichung:

$$ax^2+bxy+cy^2=N$$

zurückführen, indem man mit 2 multiplicirt.

In diesem Falle ist

$$D=b^2-4ac$$

also $D$ ungrade, da $b$ ungrade angenommen wurde.

Setzt man nun in der Gleichung

$$t^2-Du^2=4$$

$t=2r$ und $u=2v$, so erhält man wieder:

$$r^2-Dv^2=1.$$

Dies ist die Pellsche Gleichung, und man hat, wenn man die kleinsten Werthe von $r$ und $v$ kennt, nur $t=2r$ und $u=2v$ noch zu nehmen.

11) Die Auflösung der Gleichung

$$ax^2+2bxy+cy^2=N$$

und folglich auch die der Gleichung

$$t^2-Du^2=1$$

lässt sich mit Hülfe der Kettenbrüche bewerkstelligen.

Es ist zu dem Ende nöthig, hier noch einen Satz über diese Brüche anzuführen, welcher sich auf die Bestimmung der Näherungswerthe bezieht. Sei $y$ positiv, und gleich dem Werthe eines gegebenen Kettenbruches. Es soll untersucht werden, ob der gegebene Bruch $\frac{p}{q}$ ein Näherungswerth von $y$ ist.

Sei $\frac{p}{q}$ in der That ein Näherungswerth, $\frac{p_0}{q_0}$ der ihm Vorhergehende.

Sei also:

$$\frac{p}{q}=\alpha+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2+\cdots+\cfrac{1}{\alpha_n}}},$$

so muss sein entweder

$$y=\alpha+\cfrac{1}{\alpha_1+\cdots+\cfrac{1}{\alpha_n+\cfrac{1}{x}}}$$

oder

$$y=\alpha+\cfrac{1}{\alpha_1+\cfrac{1}{\alpha_2\cdots+\cfrac{1}{\alpha_n-1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{x}}}}},$$

falls $\frac{p}{q}$ ein Näherungswerth von $y$ ist.

Denn mit Hinweglassung von $\frac{1}{x}$ geben diese beiden Brüche und nur diese den Werth $\frac{p}{q}$.

Der $\frac{p}{q}$ vorhergehende Näherungswerth von $y$ war $\frac{p_0}{q_0}$.

In der ersten Voraussetzung umfasst dann $\frac{p_0}{q_0}$ alle Partialnenner bis $\alpha_{n-1}$, in der letztern aber bis $\alpha_n-1$, die Anzahl der Nenner ist also im letztern Falle um 1 grösser als im erstern.

Da nun

$$pq_0 - qp_0 = \pm 1$$

ist, und das Zeichen rechts, wenn man in der Zahl der Näherungswerthe fortschreitet, abwechselnd positiv und negativ ist, so hat man im zweiten Falle

$$pq_0 - qp_0 = -i,$$

wenn im ersten $pq_0 - qp_0 = i$ ist, wo $i$ eine der Zahlen $+1$ oder $-1$ bedeutet.

Ausserdem aber war:

$$y = \frac{px + p_0}{qx + q_0},$$

also

$$x = \frac{p_0 - q_0 y}{qy - p};$$

dieser letzte Ausdruck enthält das verlangte Criterium.

Es ist nämlich klar, dass $x$ positiv und grösser als 1, wenigstens gleich 1 sein muss, weil im entgegengesetzten Falle $\frac{1}{x}$ grösser als 1 wäre, und dann der letzte Partialnenner nicht richtig sein könnte.

Ist also $\frac{p_0}{q_0}$ nicht in dieser Weise zu bestimmen, so kann der gegebene Ausdruck $\frac{p}{q}$ kein Näherungswerth sein.

Da nun

$$y - \frac{p}{q} = \frac{-(pq_0 - qp_0)}{q(qx + q_0)}$$

ist, so muss immer derjenige Werth von

$$pq_0 - qp_0 = \pm 1$$

genommen werden, welcher dem Zähler gleiches Zeichen mit $y - \frac{p}{q}$ giebt, also selbst das entgegengesetzte Zeichen hat.

Setzt man noch

$$y - \frac{p}{q} = \frac{\mp \delta}{q^2},$$

wo

$$\delta \text{ also gleich } \frac{q}{qx + q_0}$$

genommen wurde, so muss, damit $x > 1$ sei, auch $\delta < \frac{q}{q + q_0}$ werden.

Wenn aber

$$\delta = \frac{q}{qx + q_0} \text{ oder } = \pm(q^2 y - pq),$$

abgesehen vom Vorzeichen, kleiner als $\frac{q}{q + q_0}$ ist, so ist

$$q > q + q_0 \delta,$$

also

$$x = \frac{q - q_0 \delta}{q\delta} > 1.$$

Folglich ist dann $\frac{p}{q}$ ein Näherungswerth von $y$, oder er ist dies nicht, je nachdem $\delta$ nicht grösser oder grösser als $\frac{q}{q + q_0}$ ist.

Endlich ist noch $q_0 < q$, da die Näherungswerthe der Kettenbrüche in Bezug auf die Grösse der Zähler und Nenner immer zunehmen. Ferner ist $\frac{q}{q + q_0}$ immer grösser als $\frac{1}{2}$.

„Wenn also $\delta$ kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, so ist $\frac{p}{q}$ immer ein Näherungswerth von $y$."

Beispiel. Es wird gefragt, ob $\frac{69}{28}$ ein Näherungswerth von $\frac{781}{317}$ ist.

Man hat

$$\frac{69}{28} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{2}}}.$$

Es ist nun entweder

$$\frac{p_0}{q_0} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6}}$$

oder

$$\frac{p_0}{q_0} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{6 + \frac{1}{1}}}.$$

Im ersten Falle würde $p_0 = 32$, $q_0 = 13$, im zweiten $p_0 = 37$, $q_0 = 15$ werden. Im ersten Falle ist

$$pq_0 - qp_0 = 1,$$

im zweiten

$$pq_0 - qp_0 = -1.$$

Aber

$$y - \frac{p}{q} = \frac{781}{317} - \frac{69}{28} = \frac{-5}{317 \cdot 28}.$$

Es ist also der erste Werth zu nehmen, da dieser $pq_0 - qp_0$ positiv macht. Abgesehen vom Zeichen ist

$$\frac{\delta}{q^2} = \frac{5}{317 \cdot 28},$$

$$q^2 = 28^2,$$

also

$$\delta = \frac{5 \cdot 28}{317} < \frac{1}{2}.$$

Es muss also in der That $\frac{69}{28}$ ein Näherungswerth von $\frac{781}{317}$ sein.

Wirklich erhält man:

$$\frac{781}{317} = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4.}}}}}}$$

12) Es soll jetzt gezeigt werden, dass sich mit Hülfe der Kettenbrüche immer die Auflösungen der Gleichung

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = N$$

ergeben.

Sei zunächst $N$ positiv oder negativ, aber kleiner als $\sqrt{D}$, so sind die Werthe von $x$ und $y$ in relativen Primzahlen zugleich in der Anzahl der Näherungsbrüche enthalten, welche sich ergeben, wenn man die Wurzeln der Gleichung:

$$az^2 + 2bz + c = 0$$

in einen Kettenbruch verwandelt.

Es ergeben sich auf diese Weise alle Werthe von $x$ und $y$, wenn $a$ und $N$ gleiche Vorzeichen haben.

Beweis. Seien $p$ und $q$ ein Paar entsprechende Werthe von $x$ und $y$, also

$$ap^2 + 2bpq + cq^2 = N$$

oder:

$$(ap + bq)^2 - Dq^2 = an,$$

woraus sich ergiebt:

$$\left(a\frac{p}{q} + b\right)^2 = D + \frac{aN}{q^2},$$

d. h. entweder:

$$\frac{p}{q} = \frac{+\sqrt{\left(D + \frac{aN}{q^2}\right)} - b}{a}$$

oder

$$\frac{p}{q} = \frac{-\sqrt{\left(D + \frac{aN}{q^2}\right)} - b}{a}.$$

Selbstverständlich aber kann, wenn $p$ und $q$ gegeben sind, nur eine dieser beiden letzten Formeln richtig sein.

Die beiden Wurzeln der Gleichung

$$az^2 + 2bz + c = 0$$

sind aber:

$$z = \frac{+\sqrt{D} - b}{a} \text{ und } z = \frac{-\sqrt{D} - b}{a}.$$

Eine von diesen stimmt also immer mit dem Werthe von $\frac{p}{q}$ in Bezug auf das Vorzeichen der Quadratwurzel überein, und wird aus $\frac{p}{q}$ gefunden, wenn man

$$q = D$$

setzt. Sei $z$ diese jetzt vollständig bestimmte Wurzel, so ist immer:

$$\pm\left(z - \frac{p}{q}\right) = \frac{\sqrt{D} - \sqrt{\left(D + \frac{aN}{q^2}\right)}}{a},$$

d. h.

$$\pm\left(z - \frac{p}{q}\right) = \frac{-N}{q^2\left\{\sqrt{D} + \sqrt{\left(D + \frac{aN}{q^2}\right)}\right\}}.$$

Nach dem vorigen Abschnitte aber ist $\frac{p}{q}$ ein Näherungswerth von $z$, wenn abgesehen vom Vorzeichen:

$$z - \frac{p}{q} = \frac{\delta}{q^2} \text{ und } \delta < \frac{1}{2}$$

war.

Es ist hier

$$\delta = \frac{N}{\sqrt{D} + \sqrt{\left(D + \frac{aN}{q^2}\right)}}.$$

Nun war nach unsrer Annahme

$$N < \sqrt{D}$$

und demnach, wenn $\frac{aN}{q^2}$ positiv, d. h. wenn $a$ und $N$ dasselbe Zeichen haben, ist diese Bedingung immer erfüllt. Es ist also jeder Werth von $\frac{p}{q}$ unter der Zahl der Näherungswerthe von $z$ enthalten.

Haben $a$ und $N$ das entgegengesetzte Vorzeichen, so braucht nicht jeder Werth von $\frac{p}{q}$ ein Näherungswerth von $z$ zu sein. Jedoch da die Zähler und Nenner der Näherungswerthe immer wachsen, so kann man $q$ so gross nehmen, dass $N$ kleiner als $\sqrt{\left(D + \frac{Na}{q^2}\right)}$ wird, vorausgesetzt, dass

$N<\sqrt{D}$ ist. Dann ist $\delta<\frac{1}{2}$, und man erhält also in jedem Falle durch unser Verfahren Auflösungen der unbestimmten Gleichung, falls dergleichen in relativen Primzahlen möglich sind.

13) Was die Gleichung

$$t^2-Du^2=1$$

und selbst

$$t^2-Du^2=-1$$

anbetrifft, so ist die Gleichung, welche den Kettenbruch giebt:

$$s^2=D \text{ oder } s=\pm\sqrt{D}.$$

In dem Kettenbruch für $\sqrt{D}$ sind aber alle Auflösungen unserer Gleichungen enthalten. Denn zunächst ist

$$1<\sqrt{D},$$

und $\delta$ wird gleich

$$\frac{1}{\sqrt{D}+\sqrt{\left(D\pm\frac{1}{q^2}\right)}},$$

je nachdem die erste oder zweite Gleichung gilt, ein Ausdruck, der immer kleiner als $\frac{1}{2}$ ist, wenn $D$ grösser als 1 ist.

Was namentlich die Pellsche Gleichung anbetrifft, so ist in dem Artikel: Quadratische Formen der Beweis geführt worden, dass sie immer auflösbar sei, und ihre Wurzeln sind also immer auf diese Weise zu finden.

Hatte man aber nur ein Paar Wurzeln der Gleichung

$$t^2-Du^2=1,$$

$T$ und $U$, und zwar die kleinsten herechnet, so gab die Formel:

$$t+u\sqrt{D}=(T+U\sqrt{D})^n$$

alle Uebrigen, und man konnte dann mit Hülfe einer Auflösung der Gleichung

$$ax^2+2bxy+cy^2=N$$

alle zu derselben Gruppe gehörigen finden, wenn man setzte:

$$p_1=pt-(bp+cq)u,\quad q_1=qt+(ap+bq)u.$$

Man hat also, selbst wenn $a$ und $N$ gleiches Zeichen haben, nicht nöthig mehr als eine Wurzel aus jeder Gruppe mittels der Gleichung

$$az^2+2bz+c=0$$

zu bestimmen.

Dies Verfahren führt aber auch dann zu allen Wurzeln, wenn $a$ und $N$ ungleiches Zeichen haben. Denn da die eben hingestellten Werthe für $p_1$ und $q_1$ alle Wurzelwerthe derselben Gruppe enthalten, so lässt sich leicht zeigen, dass in jeder solchen Gruppe sich Werthe finden müssen, wo

$$N<\sqrt{D+\frac{Na}{q_1^2}}$$

wird, zu deren Kenntniss also unser Verfahren führt.

Sei nämlich

$$ap+bq=\alpha,\quad q=\beta,$$

so wird:

$$q_1=\beta t+\alpha u;$$

haben $\alpha$ und $\beta$ gleiches Zeichen, so muss, da $t$ und $u$ über alle Gränzen wachsen, dies auch mit $q_1$ der Fall sein.

Dasselbe aber tritt auch ein, wenn $\beta$ und $\alpha$ ungleiches Zeichen haben. Dies sieht man sogleich, wenn man zur Bestimmung von $t$ und $u$ die recurrenten Formeln anwendet:

$$t_{n+1}=2Tt_n+t_{n-1},\quad u_{n+1}=2Tu_n+u_{n-1}.$$

Da $t_n>t_{n-1}$, $u_n>u_{n-1}$, so wachsen diese Ausdrücke $t_{n+1}$, $u_{n+1}$ offenbar mit zunehmendem $n$ schneller als die Reihen:

$$3t_{n-1},\ 7t_{n-1},\ 17t_{n-1},\ 41t_{n-1}\ldots$$

$$3u_{n-1},\ 7u_{n-1},\ 17u_{n-1},\ 41u_{n-1}\ldots,$$

die man erhält, wenn man $t_n=t_{n-1}$, $u_n=u_{n-1}$, $T=1$ setzt, und $t_{n+1}$, $t_{n+2}\ldots$ bestimmt. Es wird dann:

$$\beta t+\alpha u=s(\beta t_{n-1}+\alpha u_{n-1}),$$

wo $s$ ins Unendliche wächst, und da $\beta t_{n-1}+\alpha u_{n-1}$ nicht für jedes $t$ und $u$ Null werden kann, so wird $\beta t+\alpha u$ in der That ins Unendliche wachsen.

Es ist also durch die Verwandlung der Wurzel von Gleichung:

$$az^2+2bz+c=0$$

in einen Kettenbruch, jedenfalls aus jeder Gruppe eine Auflösung zu finden. Alle übrigen Auflösungen aber giebt die Pellsche Gleichung. Es ist hier angenommen, dass $a$, $2b$ und $c$ nicht alle drei grade sind. Das Gesagte erleidet eine leichte Modification, falls dies stattfindet.

Nach dem in Abschnitt 10) Gesagten ist dann zu setzen:

$$t^2-\frac{D}{4}u^2=1$$

und wenn $T$ und $U$ die kleinsten Auflösungen

dieser Gleichung sind, erhält man, wie oben alle übrigen, durch die Formel:

$$t+u\frac{\sqrt{D}}{2}=\left(T+\frac{U\sqrt{D}}{2}\right)^n.$$

Dann aber wird:

$$p_1=\frac{2pt-(bp+cq)u}{2},$$

$$q_1=\frac{2qt+(ap+bq)u}{2},$$

da $2t$ für $t$ zu setzen ist, und die Formeln in Abschnitt 9) II. den Nenner $w=2$ enthalten.

14) Man braucht aber auch nur eine beliebige Wurzel der Gleichung

$$az^2+2bz+c=0$$

in einen Kettenbruch zu entwickeln. Denn es lässt sich zeigen, dass die Näherungswerthe beider Wurzeln dieselben Gleichungen auflösen.

Ist nämlich

$$\frac{p_1}{q_1}=\frac{pt-(cq+bp)u}{qt+(ab+bq)u}$$

eine der Wurzeln der Gleichung, so ist auch

$$\frac{p_2}{q_2}=\frac{pt+(cq+bp)u}{qt-(ap+bq)u}$$

eine solche. Es ist nämlich nur das Zeichen von $t$ verändert. Offenbar aber kann man in der Pellschen Gleichung für $t$ auch $-t$ setzen. Mit wachsendem $t$ und $u$ nähert sich $\frac{t}{u}$ der Gränze $\sqrt{D}$, und es werden dann die Gränzwerthe von $\frac{p_1}{q_1}$, $\frac{p_2}{q_2}$ bezüglich

$$\frac{p\sqrt{D}-(cq+bp)}{q\sqrt{D}+ap+bq},\quad \frac{p\sqrt{D}+cq+bp}{q\sqrt{D}-(ap+bq)}.$$

Das Product dieser Ausdrücke ist aber:

$$\frac{p^2(b^2-ac)-(cq+bp)^2}{q^2(b^2-ac)-(ap+bq)^2}=\frac{c}{a}.$$

Ihre Summe:

$$\frac{2pqD+2(ap+bq)(bp+cq)}{q^2(b^2-ac)-(ap+bq)^2}=\frac{-2b}{a}.$$

Beide Ausdrücke sind also die Wurzeln der Gleichung

$$az^2+2bz=c.$$

(Siehe den vorigen Artikel). Ist also $\frac{p_1}{q_1}$ ein Näherungswerth der einen Wurzel dieser Gleichung, so ist $\frac{p_2}{q_2}$ ein solcher der andern Wurzel, so dass beide mit Hülfe der Pellschen Gleichung dieselben Resultate geben.

15) **Beispiel.** Die gegebene Gleichung sei:

$$11x^2-6xy-7y^2=-7.$$

Sie ist gelöst, wenn man $x=0$, $y=1$ setzt. Wenn in die Formeln für $p_1$ und $q_1$ in Abschnitt 13)

$$p=0,\ y=1,\ a=11,\ b=-3,\ c=-7$$

gesetzt wird, so kommt:

$$p_1=7t,\ q_1=t-3u.$$

$t$ und $u$ giebt die Entwickelung von

$$\sqrt{b^2-ac}=\sqrt{86}$$

in einen Kettenbruch. Die ersten Näherungswerthe $T$ und $U$, welche die Gleichung

$$t^2-86u^2=1$$

erfüllen, sind

$$T=10405,\ U=1122$$

(siehe unten). Es sind mithin also auch die kleinsten.

Die eine Wurzel der Gleichung:

$$11z^2-6z-7=0$$

ist

$$z=\frac{\sqrt{86}+3}{11}.$$

Dieselbe in einen Kettenbruch entwickelt, führt zu folgender Rechnung:

$$\frac{\sqrt{86}+3}{11}=1+\frac{1}{u}$$

$$u=\frac{\sqrt{86}+8}{2}=8+\frac{1}{u_1}$$

$$u_1=\frac{\sqrt{86}+8}{11}=1+\frac{1}{u_2}$$

$$u_2=\frac{\sqrt{86}+3}{7}=1+\frac{1}{u_3}$$

$$u_3=\frac{\sqrt{86}+4}{10}=1+\frac{1}{u_4}$$

$$u_4=\frac{\sqrt{86}+6}{5}=3+\frac{1}{u_5}$$

$$u_5=\frac{\sqrt{86}+9}{1}=18+\frac{1}{u_6}$$

$$u_6=\frac{\sqrt{86}+9}{5}=3+\frac{1}{u_7}$$

$$u_7=\frac{\sqrt{86}+6}{10}=1+\frac{1}{u_8}$$

$$u_8 = \frac{\sqrt{86}+4}{7} = 1 + \frac{1}{u_9}$$

$$u_9 = \frac{\sqrt{86}+3}{11} = 1 + \frac{1}{u}.$$

Die entsprechenden Näherungswerthe sind:

$$1,\ \frac{9}{8},\ \frac{10}{9},\ \frac{19}{17},\ \frac{29}{26},\ \frac{106}{95},\ \frac{1937}{1736},\ \frac{5917}{5303},\ \frac{7854}{7039},\ \ldots$$

Durch Einsetzen in die Gleichung:

$$11x^2 - 6xy - 7y^2 = -7$$

sieht man, dass nur die Werthe

$$p = 10,\ q = 9 \text{ und } p = 7854,\ q = 7039$$

innerhalb der Periode sie erfüllen. Die zweiten Werthe aber enthalten schon die oben gegebenen Ausdrücke $p_1$ und $q_1$, so dass nur

$$p = 0,\ 10,\ \ q = 1,\ 9$$

übrig bleiben. Die letzten Werthe geben noch, wenn man wieder $t$ und $u$ einführt, die allgemeinen:

$$p = 10t + 39u,\quad q = 9t + 83u,$$

$t$ und $u$ selbst die recurrenten Formeln:

$$t_{n+1} = 2Tt_n + t_{n-1},\ u_{n+1} = 2Tu_n + u_{n-1}.$$

Was schliesslich noch die Entwicklung von $\sqrt{86}$, also das Auffinden von $T$ und $U$ anbetrifft, so ist:

$$\sqrt{86} = 9 + \frac{1}{u}$$

$$u = \frac{\sqrt{86}+9}{5} = 3 + \frac{1}{u_1}$$

$$u_1 = \frac{\sqrt{86}+6}{10} = 1 + \frac{1}{u_2}$$

$$u_2 = \frac{\sqrt{86}+4}{7} = 1 + \frac{1}{u_3}$$

$$u_3 = \frac{\sqrt{86}+3}{11} = 1 + \frac{1}{u_4}$$

$$u_4 = \frac{\sqrt{86}+8}{2} = 8 + \frac{1}{u_5}$$

$$u_5 = \frac{\sqrt{86}+8}{11} = 1 + \frac{1}{u_6}$$

$$u_6 = \frac{\sqrt{86}+3}{7} = 1 + \frac{1}{u_7}$$

$$u_7 = \frac{\sqrt{86}+4}{10} = 1 + \frac{1}{u_8}$$

$$u_8 = \frac{\sqrt{86}+6}{5} = 3 + \frac{1}{u_9}$$

$$u_9 = \frac{\sqrt{86}+9}{1} = 18 + \frac{1}{u_1}.$$

Die entsprechenden Näherungswerthe sind:

$$9,\ \frac{28}{3},\ \frac{37}{4},\ \frac{65}{7},\ \frac{102}{11},\ \frac{881}{95},\ \frac{983}{106},\ \frac{1864}{201},\ \frac{2874}{307},\ \frac{10405}{1122}.$$

Der letzte Werth erfüllt aber die Gleichung

$$t^2 - 86u^2 = 1.$$

16) Es sei nun in der Gleichung

$$ax^2 + bxy + cy^2 = N$$

$N$ grösser als $\sqrt{D}$.

Immer wird angenommen, dass $a$, $b$, $c$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben, weil man sonst durch denselben dividiren könnte, da auch $N$ ihn haben muss.

Die Zahl $b$ ist hier nicht, wie oben, als grade betrachtet. Es braucht also, wenn $b$ ungrade ist, nicht mit 2 multiplicirt zu werden.

Es wird auch angenommen, dass keine der Zahlen $x$ und $y$ einen gemeinschaftlichen Factor mit $N$ habe. Denn wenn Solches der Fall ist, also wenn z. B. $y$ und $N$ den Factor $g$ gemein haben, so wäre:

$$y = gy_1,\ N = gN_1,$$

und

$$\frac{a}{g}x^2 + bxy_1 + gcy_1^2 = N_1;$$

es müsste mithin $\frac{ax^2}{g}$ eine ganze Zahl sein. Es war aber, wie überall, angenommen, dass $x$ und $y$ keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Folglich ist $a$ theilbar durch $g$.

Es verwandelt sich, wenn man

$$a = ga_1$$

setzt, dann die Gleichung in:

$$a_1x^2 + bxy_1 + gcy_1^2 = N_1,$$

wo $x_1$ und $y_1$, sowie $y_1$ und $N_1$ relative Primzahlen sind. Es giebt solcher Gleichungen dann so viel, als gemeinschaftliche Factoren $g$ von $a$ und $N$ vorhanden sind.

Durch Wiederholung unseres Verfahrens werden $a$ und $N$ immer auf eine Form gebracht, wo sie relative Primzahlen sind.

Nehmen wir also jetzt allgemein an, in der gegebenen Gleichung:

$$ax^2+bxy+cy^2=N$$

seien $a$ und $N$ relative Primzahlen, so setzt man:

$$x=\pm Nx'+ny,$$

wo das Zeichen so zu bestimmen ist, dass $\pm N$ positiv wird. In dieser Gleichung denkt man sich $x$, $y$ als gegeben, und $x'$, $n$ als Unbekannte, welche sich somit leicht bestimmen lassen.

In der Reihe der Auflösungen dieser unbestimmten Gleichung kann dann $n$ so angenommen werden, dass es die Gränzen $-\frac{1}{2}N$ und $+\frac{1}{2}N$ nicht überschreitet.

Setzt man aber diesen Werth von $x$ in unsere Gleichung, so kommt:

$$\pm aN^2x'^2\pm 2(an+b)Nx'y+(an^2+2bn+c)y^2=N$$

oder wenn man mit $\pm N$ dividirt:

$$aNx'^2+2(an+b)x'y+\left(\frac{an^2+2bn+c}{\pm N}\right)y^2=\pm 1.$$

$N$ und $y$ waren relative Primzahlen, es ist also $an^2+2bn+c$ durch $N$ theilbar; wir setzen:

$$\frac{an^2+2bn+c}{\pm N}=c'$$

und es wird:

$$aNx'^2+2(an+b)x'y+c'y^2=\pm 1.$$

Für $n$ sind alle Werthe zu setzen, welche zwischen $+\frac{1}{2}N$ und $-\frac{1}{2}N$ liegen, und wo $an^2+2bn+c$ durch $N$ theilbar ist, und hieraus erhält man dann soviel Gleichungen, als die Anzahl dieser Werthe beträgt. Ist kein solcher vorhanden, so ist die Gleichung nicht lösbar, sind dergleichen vorhanden, so ist jedenfalls $\pm 1$ nicht grösser als die Wurzel aus der Determinante, und daher immer die Auflösung durch Kettenbrüche zu bewirken. Zu jeder solchen Auflösung ergiebt sich dann:

$$x=Nx'+ny'.$$

Sollen aber auch Auflösungen gefunden werden, wo $x$ und $y$ keine relativen Primzahlen sind, so ist schon oben gezeigt, dass jeder gemeinschaftliche Factor von $x$ und $y$ als quadratischer Factor in $N$ enthalten ist. Dividirt man also durch irgend einen der quadratischen Factoren von $N$, $k^2$, so wird die Gleichung:

$$ax^2+bxy+cy^2=N$$

sich verwandeln in:

$$a\left(\frac{x}{k}\right)^2+b\frac{x}{k}\cdot\frac{y}{k}+c\left(\frac{y}{k}\right)^2=\frac{N}{k^2}.$$

Findet man hieraus die ganzzahligen Werthe von $\frac{x}{k}$, $\frac{y}{k}$, so ist auch $x$, $y$ bekannt.

17) Die Auflösung der Gleichung

$$ax^2+2bxy+cy^2=N$$

durch Kettenbrüche ist dann nicht möglich, wenn die Determinante eine Quadratzahl ist. Sei

$$b^2-ac=g^2,$$

so ist

$$ac=(b+g)(b-g),$$

also

$$\frac{(b+g)(b-g)}{a}$$

eine ganze Zahl.

Hieraus folgt, dass $a$ sich in 2 Factoren $\alpha$, $\alpha'$ theilen lässt, deren einer in $b+g$ aufgeht, der andre in $b-g$. Selbstverständlich kann aber einer dieser Factoren gleich Eins sein.

Sei

$$\frac{b+g}{\alpha}=m,\quad \frac{b-g}{\alpha'}=n,$$

so wird:

$$\alpha m+\alpha' n=2b,$$

$$mn=\frac{b^2-g^2}{a}=c.$$

Die Gleichung

$$ax^2+2bxy+cy^2=N$$

verwandelt sich in:

$$\alpha\alpha'x^2+\alpha mxy+\alpha' nxy+mny^2=N$$

oder:

$$(\alpha x+ny)(\alpha' x+my)=N.$$

Zerlegt man also $N$ auf alle möglichen Weisen in 2 Factoren: $\nu$, $\nu'$, und setzt

$$\alpha x+ny=\nu,\quad \alpha' x+my=\nu',$$

so erhält man alle Auflösungen der vorgelegten Gleichung, wenn man die sich ergebendenden gebrochenen Werthe von $x$ und $y$ verwirft.

Beispiel. Sei gegeben die Gleichung

$$5x^2+16xy+3y^2=55.$$

$$D=64-15=49$$

ist hier eine Quadratzahl.

Es ist

$$D=49,\quad g=7.$$

Ferner muss man setzen:

$$b+g=15, \quad b-g=1,$$
$$\alpha=5, \quad \alpha'=1,$$
$$\frac{b+g}{\alpha}=m=3, \quad \frac{b-g}{\alpha'}=n=1,$$
$$\nu\nu'=55,$$

also

$$\nu=11, \quad \nu'=5$$

oder

$$\nu=5, \quad \nu'=11.$$

Die Gleichungen:

$$\alpha x+ny=\nu, \quad \alpha'x+my=\nu'$$

geben:

$$5x+y=5, \quad x+3y=11$$
$$5x+y=11, \quad x+3y=5.$$

Die ersten Gleichungen geben keine ganzzahligen Werthe, die letzteren:

$$x=2, \quad y=1,$$

und dies sind also die einzigen Auflösungen unserer Gleichung.

**Quadratische Reste (Zahlenlehre).**

1) Der Ausdruck Rest einer Zahl $a$ nach Modul $b$ ist gleichbedeutend mit dem Divisionsreste von $a$, der entsteht, wenn man durch Divisor $b$ dividirt.

Z. B. der Rest von 9 nach Modul 5 ist gleich 4.

Ist $c$ der Rest von $a$ nach Modul $b$, so ist $a-c$ durch $b$ theilbar. Die gewöhnliche Schreibweise hierfür ist:

$$a \equiv c \bmod b,$$

gelesen: $a$ congruent $c$ nach Modul $b$. Diese Bezeichnung rührt von Gauss her.

Der Rest einer Zahl nach einem gegebenen Modul ist also die kleinste Zahl, der sie nach diesem Modul congruent ist.

Congruenzen können wie Gleichungen behandelt werden, und aus ihnen eine unbekannte Grösse ermittelt werden. So wird z. B. die Congruenz:

$$5x+3 \equiv 2 \bmod 7$$

gelöst durch den Ausdruck

$$x=4,$$

da

$$23 \equiv 2 \bmod 7$$

oder

$$23-2$$

durch 7 theilbar ist.

Dies wäre eine Congruenz ersten Grades.

Eine Congruenz zweiten Grades ist z. B.:

$$2x^2+3x-5 \equiv 0 \bmod 11$$

Eine Auflösung derselben ist:

$$x=3,$$

denn

$$2\cdot 3^2+3\cdot 3-5=22$$

ist durch 11 theilbar.

Ist die Congruenz

$$x^n \equiv a \bmod b$$

gegeben, so nennt man $a$ einen Potenzrest für Modul $b$ oder kürzer von $b$, namentlich wenn

$$x^2 \equiv a \bmod b$$

ist, führt $a$ den Namen quadratischer Rest von $b$.

Die Fragen, welche Zahlen quadratische Reste gegebener Moduln sind oder nicht, oder nach welchem Moduln gegebene Zahlen quadratische Reste sind oder nicht, bilden mit verwandten Gegenständen einen sehr wichtigen Theil der Zahlenlehre, die Theorie der quadratischen Reste. Es wird jedoch, um dieselbe hier kurz zu gehen, nöthig sein, die einleitenden Sätze über Congruenzen und Potenzreste mit anzuführen, was ohne Anstand wird geschehen können, da wir uns bei den betreffenden Artikeln auf das jetzt zu gebende beziehen werden. Bemerken wir noch vorläufig, dass jede Congruenz zugleich eine Gleichung ist, welche eine Unbekannte mehr enthält, als in ihrer Gestalt als Congruenz vorhanden ist, und welche in ganzen Zahlen aufgelöst werden soll.

So z. B. sind die oben gegebenen Congruenzen:

$$5x+3 \equiv 2 \bmod 7,$$
$$2x^2+3x-5 \equiv 0 \bmod 11$$

gleichbedeutend mit:

$$5x+3=2+7y,$$
$$2x^2+3x-5=11y,$$

wo $x$ und $y$ ganze Zahlen sind.

Denn die beiden letzten Gleichungen drücken ja nur aus, dass $5x+3-2$ durch 7 und $2x^2+3x-5$ durch 11 theilbar sind. Stimmen also in der Bedeutung mit den Congruenzen überein.

Jedoch führt die Form der Congruenz leichter zu den Eigenschaften dieser Ausdrücke, als die der unbestimmten Gleichung.

2) Ueber Congruenzen. Finden die beiden Congruenzen statt:

$$a \equiv b \bmod k \text{ und } c \equiv d \bmod k,$$

so ist offenbar auch

$$ac \equiv bd \bmod k \text{ und } a \pm c \equiv b \pm d \bmod k,$$

denn es sind $a-b$ und $c-d$ durch $k$ theilbar, d. h.

$$a-b=\alpha k,\quad c-d=\beta k,$$

also

$$a-b\pm(c-d)=(\alpha\pm\beta)k,$$

d. h.

$$a\pm c-(b\pm d)$$

durch $k$ theilbar.

Es ist aber auch:

$$a=b+\alpha k,\quad c=d+\beta k,$$

also

$$ac=bd+\gamma k,$$

wo $\gamma$ eine ganze Zahl ist, folglich auch $ac-bd$ durch $k$ theilbar.

Dieser Satz lautet in Worten:

„Congruenzen desselben Modul können addirt, subtrahirt und multiplicirt werden."

Es folgt hieraus augenblicklich, dass man auf beiden Seiten einer Congruenz mit derselben ganzen Zahl addiren, subtrahiren und multipliciren, d. h. sie in dieser Beziehung wie eine Gleichung behandeln darf. Denn sei

$$a\equiv b \bmod k,$$

so ist jedenfalls

$$c\equiv c \bmod k,$$

also auch

$$a\pm c\equiv b\pm c \bmod k$$

und

$$ac\equiv bc \bmod k.$$

Seien jetzt $f$ und $k$ relative Primzahlen, und

$$af\equiv b \bmod k,$$

so muss $(a-b)f$ durch $k$ theilbar sein, und da $f$ den Factor $k$ nicht hat, so hat ihn $a-b$, es ist also auch

$$a\equiv b \bmod k.$$

Habe aber $f$ mit $k$ einen Factor gemein, und sei dieser gleich $e$ (wo also $e$ der grösste gemeinschaftliche Factor von $f$ und $k$ ist), sei ferner $f=ef'$, $k=ek'$, so ist

$af-bf=ef'(a-b)$ durch $ek'$ theilbar,

also

$f'(a-b)$ durch $k'$ theilbar,

oder, da $f'$ und $k'$ keinen Factor gemein haben, ist

$$a\equiv b \bmod k',$$

d. h.

$$a\equiv b \bmod \frac{k}{e}.$$

Ein andrer wichtiger Satz ist der folgende:

„Von $k$ auf einander folgenden Zahlen ist eine und immer nur eine einer gegebenen $a$ nach Modul $k$ congruent."

Denn es kann ja in dem Ausdruck $a+nk$, wo $n$ eine positive oder negative ganze Zahl ist, $n$ so bestimmt werden, dass dieser Ausdruck in eine beliebige gegebene Reihe von $n$ auf einander folgenden Zahlen fällt. Dies kann aber auch nur auf eine Weise geschehen, da schon $a+(n+1)k$ und $a+(n-1)k$ um $k$ von dem gesuchten Werthe abweichen, also nicht mehr in die gegebene Reihe fallen. Ist aber $a+nk=\alpha$, wo $\alpha$ die in unserer Reihe liegende entsprechende Zahl ist, so ist

$$a\equiv\alpha \bmod k.$$

Eine solche Reihe von $k$ Zahlen enthält also nicht 2 unter einander für Modul $k$ congruente Werthe. Sie heisst daher: „ein System incongruenter Zahlen in Bezug auf $k$."

Das kleinste positive System incongruenter Zahlen ist die Zahlenreihe:

$$0,\ 1,\ 2\ \ldots\ldots\ k-1,$$

das absolut kleinste System dagegen, wenn $k$ ungrade ist:

$$-\frac{k-1}{2},\ -\frac{k-3}{2},\ \ldots\ldots\ -1,\ 0,\ +1,\ +2,\ \ldots\ldots\ +\frac{k-1}{2}$$

und wenn $k$ grade ist:

$$-\left(\frac{k}{2}-1\right),\ -\frac{k}{2},\ -\frac{k}{2}+1,\ \ldots\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ \frac{k}{2}-1,\ \frac{k}{2}.$$

Diejenige Zahl aus der ersten Reihe, welche einer gegebenen congruent ist, wird offenbar dasjenige sein, was wir oben Rest genannt haben. Diejenige Zahl aus der zweiten Reihe, welche einer gegebenen congruent ist, nennen wir jetzt den absolut kleinsten Rest.

Statt dieser Reihen incongruenter Zahlen, welche aus auf einander folgenden Werthen bestehen, kann man sich aber auch Reihen von der Gestalt:

$$ax,\ a(x+1),\ a(x+2)\ \ldots\ldots\ a(x+k-1)$$

bilden, wo $a$ eine beliebige, jedoch zu $k$ relativ einfache Zahl ist. Denn auch in dieser Reihe finden sich nicht 2 congruente Werthe.

Wäre nämlich

$$a(x+s)\equiv a(x+t) \bmod k,$$

so müsste auch

$$as\equiv at \bmod k \quad\text{oder}\quad a(s-t)\equiv 0 \bmod k$$

sein; da aber $a$ relativ einfach zu $k$ ist, wäre $s-t$ durch $k$ theilbar, was unmöglich ist, da $s$ und $t$ kleiner als $k$ sind.

3) Wie schon angedeutet, theilt man die Congruenzen, wie die Gleichungen, nach den Graden ein, und es heisst demnach

$$ax^n+bx^{n-1}+\ldots+q\equiv 0 \bmod k$$

eine Congruenz $n$ten Grades.

Wenn man jedoch von Wurzeln dieser Congruenz spricht, so versteht man darunter nur die unter einander incongruenten Werthe derselben.

Es ist nämlich, wenn $x$ eine Wurzel ist, ebenfalls $x+nk$ eine solche, wenn $n$ eine ganze Zahl ist. Denn wenn man diesen Ausdruck für $x$ in die gegebene Congruenz setzt, kommt nur auf der linken Seite ein mit $k$ multiplicirtes Glied hinzu, so dass der Ausdruck links noch immer durch $k$ theilbar oder nach Modul $k$ mit Null congruent bleibt.

Die Congruenz ersten Grades hat immer die Gestalt

$$ax\equiv b \bmod k,$$

sie ist gleichbedeutend mit der unbestimmten Gleichung

$$ax-ky=b.$$

Mittels der Kettenbrüche und anderer Methoden (siehe Artikel: unbestimmte Aufgaben) gibt es immer ein Mittel, ein Wurzelpaar dieser Gleichung, oder eine Wurzel $x$ unsrer Congruenz zu finden, wenn $a$ und $k$ relativ einfach sind, aus der sich unendlich viel unter einander congruenter Werthe von der Form $x+nk$ ergeben.

Dies sind aber nach der obigen Erklärungsweise keine neuen Wurzeln. Es hat aber diese Congruenz überhaupt nur eine Wurzel, denn wäre $x_1$ eine zweite, so musste

$$a(x-x_1)\equiv 0 \bmod k,$$

und da $a$ und $x$ relative Primzahlen waren,

$$x-x_1\equiv 0 \bmod k \text{ oder } x\equiv x_1 \bmod k$$

sein, so dass $x$ und $x_1$ eben nur eine Wurzel geben.

Es möge jetzt eine unbekannte Zahl $x$ mehreren Congruenzen genügen. Es sei also:

I. $x\equiv a$ mod. $A$,

II. $x\equiv b$ mod. $B$,

III. $x\equiv c$ mod. $C$,

wo wir voraussetzen, dass $A$, $B$, $C$ relativ einfache Zahlen sind.

Aus der ersten Congruenz folgt

$$x=a+nA,$$

wo $n$ eine beliebige ganze Zahl ist

Setzen wir diesen Werth in die 2te Congruenz, so wird:

$$nA\equiv b-a \bmod B.$$

Ist $n_0$ irgend ein Werth für $n$, der diese Congruenz erfüllt, so ist der allgemeine:

$$n=n_0+sB,$$

wo $s$ eine beliebige ganze Zahl ist, also

$$x=n_0A+sBA+a,$$

d. h.

$$x\equiv a+n_0A \bmod AB;$$

wenn wir den Werth von $x$ in die 3te Gleichung setzen, wo man

$$a+n_0A=e$$

nimmt:

$$e+sAB\equiv c \bmod C$$

Ist $s_0$ ein besonderer Werth von $s$, so ist $s_0+Ct$ der allgemeine, wo $t$ wieder eine ganze Zahl ist. Es kommt dann:

$$x=e+s_0AB+tABC,$$

also, wenn

$$e+s_0AB=f$$

gesetzt wird:

$$x=f+ABCt$$

oder

$$x\equiv f \bmod ABC.$$

In derselben Weise fährt man fort, wenn $x$ einer beliebigen Anzahl Congruenzen genügt. Man kann somit immer eine Zahl $f$ bestimmen, die congruent mit $x$ für das Product sämmtlicher Moduln ist.

Dieses Verfahren wird auch „Vereinigen" der linearen Congruenzen I, II, III genannt.

Beispiel:

$$x\equiv 5 \bmod 7,\quad x\equiv 4 \bmod 9,\quad x\equiv 3 \bmod 5.$$

Aus der ersten Congruenz ergibt sich

$$x=5+7n.$$

Dies in die 2te eingesetzt, gibt:

$$7n\equiv -1 \bmod 9.$$

Durch Probiren, oder auf irgend eine andere Art kommt leicht eine Auflösung

$$n_0=5,$$

also

$$n=5+9s,$$

$$x=40+63s.$$

Dies in die 3te Congruenz eingesetzt, gibt:

$$63s\equiv -37 \bmod 5$$

und leicht erhält man

$$s_0 = 1, \text{ also } s = 1 + 5t,$$

d. h.

$$x = 103 + 315t$$

oder

$$x \equiv 103 \bmod 315.$$

4) Sei jetzt wieder

$$ax \equiv b \bmod k;$$

machen wir es aber nicht mehr zur Bedingung, dass auch $a$ und $k$ relativ einfach sind. Sei dann $\delta$ der grösste gemeinschaftliche Factor von $a$ und $k$, so muss, da die Gleichung

$$ax - yk = b$$

stattfindet, auch $b$ den Factor $\delta$ haben. In entgegengesetztem Falle würde die Congruenz unlösbar sein.

Sei

$$a = a_1\delta, \; b = b_1\delta, \; k = k_1\delta,$$

so ist also:

$$a_1 x \equiv b_1 \bmod k_1 \text{ und } a_1 x - yk_1 = b_1.$$

Ist $x_0$ eine Auflösung dieser Congruenz, so ist:

$$x = x_0 + k_1 t.$$

Ist $y_0$ der zu $x_0$ gehörige Werth von $y$, der sich hier durch die Gleichung

$$a_1 x + yk_1 = b_1$$

ergibt, so ist offenbar:

$$y = y_0 + a_1 t$$

und diese Werthe in

$$ax - yk = b$$

eingesetzt, erfüllen, wie augenblicklich zu sehen, auch diese Gleichung. Alle Wurzeln der reducirten Congruenz sind also auch Wurzeln der ursprünglichen. Setzt man aber für $t$ die Zahlen 0, 1, 2 . . . $n-1$, so erhält man Werthe für $x$, die zwar in Bezug auf Modul $k_1$ alle congruent also nur eine Wurzel der Congruenz

$$a_1 x \equiv b_1 \bmod k_1$$

sind; aber diese Werthe sind zum Theil in Bezug auf Modul $k$ incongruent, und somit hat die ursprüngliche Congruenz mehrere Wurzeln. Die Anzahl derselben ist leicht zu bestimmen. Es war

$$k_1 = \frac{k}{\delta}.$$

Von den Zahlen nun:

$$0, \frac{k}{\delta}, \frac{2k}{\delta}, \; . \; . \; . \; \frac{\delta - 1}{\delta}k$$

sind nicht 2 in Bezug auf Modul $k$ congruent, dagegen ist $\frac{\delta k}{\delta}$ wieder mit 0 congruent in Bezug auf denselben Modul. Die Anzahl dieser incongruenten Wurzeln ist also $\delta$. D. h.

„Jede Congruenz von der Gestalt

$$ax \equiv b \bmod k$$

hat entweder gar keine Wurzel, wenn der grösste gemeinschaftliche Theiler $\delta$ von $a$ und $k$ nicht in $b$ enthalten ist, oder $\delta$ Wurzeln, wenn dies der Fall ist."

Beispiel. Die Congruenz

$$28x \equiv 21 \bmod 35$$

lässt sich reduciren auf

$$4x \equiv 3 \bmod 5$$

und diese hat die Wurzel

$$x_0 = 2, \; x = 2 + 5t.$$

Die 7 incongruenten Wurzeln der gegebenen Congruenz sind also:

2, 7, 12, 17, 22, 27, 32.

5) Sei jetzt die allgemeine Congruenz $n$ter Ordnung gegeben:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \cdots + gx + h \equiv 0 \bmod p.$$

Wir setzen voraus, dass $p$ eine Primzahl, und $a$ nicht durch $p$ theilbar ist.

Sei $\alpha$ irgend eine Wurzel dieser Congruenz, so ist also auch:

$$a\alpha^n + b\alpha^{n-1} + \cdots + g\alpha + h \equiv 0 \bmod p$$

und wenn man dieselbe von der vorhergehenden abzieht, erhält man:

$$a(x^n - \alpha^n) + b(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots \; g(x - \alpha) \equiv 0 \bmod p.$$

Es haben aber sämmtliche Glieder den Factor $x - \alpha$, so dass man erhält

$$(x - \alpha)(ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \cdots + G) \equiv 0 \bmod p,$$

wo $B \cdots G$ ganze Zahlen sind, die sich leicht bestimmen lassen.

Es kann aber diese letzte Congruenz nur erfüllt werden, entweder, wenn

$$x \equiv \alpha \bmod p,$$

was die ursprüngliche Auflösung war, oder wenn

$$ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \cdots + G \equiv 0 \bmod p \text{ ist.}$$

Ist $\beta$ eine Wurzel dieser Congruenz, so ist dieselbe, ganz ebenso wie oben, auf die Form zu bringen:

$$(x - \beta)(ax^{n-2} + \cdots) \equiv 0 \bmod p,$$

welche erfüllt ist, wenn

$$x \equiv \beta \bmod p,$$

oder wenn:

$$ax^{n-2} + \cdots \equiv 0 \bmod p$$

ist. Indem man so fortfährt, kommt man zuletzt auf die Congruenz ersten Grades

$$ax + H \equiv 0 \bmod p,$$

welche nur eine Wurzel haben kann, da $a$ und $p$ relativ einfach sind.

Es ergiebt sich also der Satz:

„Jede Congruenz $n$ten Grades, wo der Modul eine Primzahl, und der Coefficient des ersten Gliedes nicht durch den Modul theilbar ist, hat höchstens $n$ Wurzeln."

Sind diese $n$ Wurzeln wirklich vorhanden, so kann man setzen

$$\varphi(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots=x^n+Bx^{n-1}+Cx^{n-2}+\cdots+Gx+H,$$

wo $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die incongruenten Wurzeln der gegebenen Congruenz:

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+gx+h\equiv 0 \mod p$$

sind. Es lässt sich dann immer eine Zahl $k$ so bestimmen, dass

$$ka\equiv 1 \mod p$$

ist, denn $a$ und $p$ sind ja relative Primzahlen. Wenn nun noch

$$kb=b_1,\ kc=c_1\ \cdots\ kg=g_1,\ kh=kh_1$$

ist, so lässt sich zeigen, dass:

$$B\equiv b_1,\ C\equiv c_1\ \cdots\ G\equiv g_1,\ H\equiv h_1 \mod p$$

ist.

Denn zieht man den Ausdruck $\varphi(x)$ von $kf(x)$ ab, so erhält man:

$$(b_1-B)x^{n-1}+(c_1-C)x^{n-2}+\cdots+(g_1-G)x+(h_1-H).$$

Es hatte die Congruenz

$$kf(x)\equiv 0 \mod p$$

die Wurzeln $\alpha$, $\beta$, $\gamma\cdots$, und dieselben Wurzeln hat auch offenbar die Congruenz

$$\varphi(x)\equiv 0 \mod p,$$

oder:

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\cdots\equiv 0 \mod p;$$

mithin wird auch die Congruenz:

$$(b_1-B)x^{n-1}(c_1-C)x^{n-2}+\cdots+(g_1-G)x+(h_1-H)\equiv 0 \mod p$$

durch die Werthe

$$x=\alpha,\ x=\beta,\ x=\gamma\ \cdots$$

erfüllt.

Ist nun einer der Ausdrücke

$$b_1-B,\ c_1-C,\cdots g_1-G,\ h_1-H$$

nicht congruent Null nach Modul $p$, so hat man offenbar eine Congruenz von einem geringern, als vom $n$ten Grade, die dennoch $n$ Wurzeln hat, was, wie wir gesehen haben, unmöglich ist, d. h. womit unser Satz erwiesen ist.

„Es ist also auch

$$kf(x)\equiv\varphi(x) \mod p$$

für jeden Werth von $x$, da die einzelnen Glieder nach $p$ congruent sind."

Noch folgt sehr leicht der folgende Satz.

„Sei

$$f(x)\equiv 0 \mod p$$

eine Congruenz $n$ten Grades, $p$ eine Primzahl und

$$f(x)=\varphi(x)\varphi_1(x),$$

wo der Grad von $\varphi(x)$ der $m$te, von $\varphi_1(x)$ der $s$te ist, so dass:

$$m+s=n$$

sein muss.

Es hat dann die Congruenz

$$\varphi(x)\equiv 0 \mod p$$

immer $m$, und $\varphi_1(x)\equiv 0 \mod p$ immer $s$ Wurzeln."

Denn hätte die erste Congruenz weniger als $m$ Wurzeln, so müsste die andre um so viel mehr als $s$ haben, was nicht möglich ist, da ihr Grad durch die Zahl $s$ angezeigt wird.

Anmerkung. Offenbar kann eine Congruenz $n$ten Grades weniger als $n$ Wurzeln haben.

Dies stimmt gewissermassen mit den Betrachtungen über die algebraischen Gleichungen überein, wenn man in demselben den Begriff des Imaginären nicht berücksichtigen wollte. Man könnte dann den Satz, dass jede Gleichung $n$ten Grades $n$ Wurzeln habe, auch nur so aussprechen, dass die Anzahl der Wurzeln die Zahl $n$ nicht überschreiten dürfe, da ja von diesen Wurzeln mehrere oder alle imaginär sein können.

Es liegt daher der Gedanke nicht allzufern, auch in die Theorie der Congruenzen eine andre Art des Imaginären einzuführen, mit dessen Anwendung man sagen könnte, dass jede Congruenz $n$ten Grades wirklich $n$ Wurzeln (reelle oder imaginäre) habe. Dies ist in der

That durch Galois geschehen. Es ist über diesen Gegenstand der Artikel Zahl nachzusehen.

6) Die Potenzreste.

Seien $k$ und $a$ relative Primzahlen, ohne dass vorausgesetzt wird, dass $k$ auch eine absolute Primzahl sei; es kann dann weder 1 noch $a$, noch $a^2$, noch $a^3$... durch $k$ theilbar sein und von der Reihe

$$a^0,\ a^1,\ a^2,\ a^3\ \cdots$$

ist also jedenfalls keine congruent Null nach Modul $k$.

Es können aber gewisse Glieder der Reihe schon vorhergegangenen congruent sein.

Nehmen wir daher an, es sei in der That

$$a^h \equiv a^l \bmod k$$

und $l$ sei grösser als $h$, dann ist auch:

$$a^l - a^h \equiv 0 \bmod k,$$

d. h.

$$(a^{l-h} - 1))a^h \equiv 0 \bmod k$$

und da $a^h$ nicht congruent Null sein kann, jedenfalls:

$$a^{l-h} \equiv 1 \bmod k.$$

Setzen wir also $l-h=t$, so sehen wir, dass „wenn $a^t$ die erste Zahl der Potenzreihe von $a$ ist, die mit $a^0$ oder 1 congruent, alle vorhergehenden Werthe der Reihe

$$a^0,\ a^1,\ a^2\ \cdots\ a^{t-1}$$

einander incongruent sind."

Denn wären die Potenzen $a^s$, $a^{s'}$, wo $s$ und $s'$ kleiner als $t$ sind, congruent, so müsste ja

$$a^{s-s'} \equiv 1 \bmod k$$

sein, was der Voraussetzung widerspricht.

„Die Potenzreihe

$$a^0,\ a^1,\ a_2\ \cdots\ a^{t-1}$$

heisst Restperiode," und man sagt, „dass die Zahl $a$ in Bezug auf Modul $k$ zum Exponenten $t$ gehöre."

Natürlich kann man für jede Potenz dieser Reihe auch ihren Rest nehmen.

Beispiel. Suchen wir die Restperiode von 7 nach Modul 13.

Sie ist:

$7^0 \equiv 1,\ 7^1 \equiv 7,\ 7^2 \equiv 10,\ 7^3 \equiv 5,\ 7^4 \equiv 9,$
$7^5 \equiv 11,\ 7^6 \equiv 12,\ 7^7 \equiv 6,\ 7^8 \equiv 3,\ 7^9 \equiv 8,$
$7^{10} \equiv 4,\ 7^{11} \equiv 2,\ 7^{12} \equiv 1.$

Es kehrt von nun an die Periode wieder, da $7^{12} \equiv 7^0$ ist.

7) Wir bezeichnen jetzt mit $\varphi(m)$ die Anzahl der Zahlen, welche zu $m$ relativ einfach, und kleiner als $m$ sind.

Ist z. B $m=9$, so sind aus der Reihe

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$$

die 6 Zahlen

$$1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8$$

mit 9 relativ einfach, also $\varphi(9)=6$.

Ueber den allgemeinen Ausdruck der Grösse $\varphi(m)$ sehe man den Artikel Zahl.

Für diese Betrachtungen ist derselbe nicht nothwendig. Jedoch bemerken wir, dass wenn $m$ eine Primzahl ist, offenbar

$$\varphi(m)=m-1$$

ist, da alle Zahlen der Reihe

$$1,\ 2\ \cdots\ m-1$$

zu $m$ dann relativ einfach sind.

Betrachten wir nun den Ausdruck $ax$, wo $a$ zu einer gegebenen Zahl $k$ relativ einfach sein soll.

Setzt man nun für $x$ alle Zahlen von 0 bis $k-1$, so ergeben sich, wie aus dem im Abschnitt 2) Gesagten augenblicklich folgt, nur incongruente Werthe für den Ausdruck $ax$. Die Reste davon nach Modul $k$ sind also wieder die Zahlen 0 bis $k-1$, jedoch natürlich in andrer Ordnung, als die der natürlichen Zahlen 0 bis $k-1$ ist.

Sei nun aber $x'$ ein Werth von $x$, der kleiner als $k$ und zu $k$ relativ einfach ist, und sei ferner $r$ der Rest von $ax'$ nach Modul $k$, so ist auch $r$ relativ einfach zu $k$; wie wir eben gesehen, entspricht aber jedem $x'$ ein andrer Werth $r$. Da es nun $\varphi(k)$ Werthe von $x'$ gibt, welche die Bedingungen, die wir eben aufgestellt haben, erfüllen, so muss es auch $\varphi(k)$ Werthe von $r$ geben. Diese Werthe werden also offenbar dieselben als die von $x'$, nur in andrer Ordnung, sein (da es nur $\varphi(k)$ solcher Werthe überhaupt gibt).

Ist also

$$\varphi(k)=\lambda$$

und

$$u_1,\ \cdots\ u_\lambda$$

sind die Werthe von $x'$, so sind die Zahlen

$$au_1,\ au_2\ \cdots\ au_\lambda$$

immer je einem Werthe der Reihe

$$u_1,\ u_2\ \cdots\ u_\lambda$$

congruent, also wenn man das Product bildet:

$$a^\lambda\ u_1\ u_2\ \cdots\ u_\lambda \equiv u_1\ u_2 \cdots u_\lambda \bmod k$$

oder

$$a^{\varphi(k)} \equiv 1 \bmod k.$$

Dieser wichtige Satz wird gewöhnlich der verallgemeinerte Fermat'sche genannt.

Beispiel. Da $\varphi(9)=6$ war, so ist also

$$a^6 \equiv 1 \bmod 9,$$

wenn $a$ eine zu 9 relativ einfache Zahl ist.

Ist $p$ eine Primzahl, so ist, wie wir gesehen haben $\varphi(p)=p-1$, also

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p.$$

Dieser Satz war früher bekannt, als der verallgemeinerte Fermat'sche. Er wird nach seinem Erfinder der Fermat'sche Satz genannt.

Anmerkung. Der verallgemeinerte Fermat'sche Satz gibt ein Verfahren, die Congruenz

$$ax \equiv b \bmod k$$

für den Fall, wo $a$ und $k$ relativ einfach sind, zu lösen, ein Fall, auf den, wie schon gezeigt, sich jeder andre zurückführen lässt.

Setzt man nämlich

$$x = ba^{\varphi(k)-1},$$

so ist offenbar:

$$ax \equiv ba^{\varphi(k)} \equiv b \bmod k,$$

also die Congruenz gelöst. Jedoch erfordert die Berechnung von $a^{\varphi k}$ oft mehr Zeitaufwand, als diejenige Methode, welche die Theorie der Kettenbrüche ergibt.

Aus dem Fermat'schen Satz in Verbindung mit dem in Abschnitt 5) Gesagten ergibt sich noch Folgendes:

Sei die Congruenz

$$x^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

gegeben, so hat dieselbe die Wurzeln

$$x=1,\ x=2,\ \cdots\ x=p-1,$$

also nach Abschnitt 5)

$$x^{p-1}-1 \equiv (x-1)(x-2)\cdots(x-[p-1]) \bmod p,$$

und wenn man die Coefficienten vergleicht:

$$-1\ -2\ -3\ \cdots\ -(p-1) \equiv 0 \bmod p,$$

$$1\cdot 2+1\cdot 3+\ \cdots\ 1\cdot p+2\cdot 3+2\cdot 4\ \cdots\ 2\cdot p+\ \cdots\ +(p-2)(p-1) \equiv 0 \bmod p,$$

$$1\cdot 2\cdot 3\ \cdots\ (p-1) \equiv -1 \bmod p.$$

Dieser letzte Satz heisst der Wilsonsche. Er lehrt „dass wenn $p$ eine Primzahl ist, das Product der Zahlen, die kleiner als $p$ sind, um Eins vermehrt, durch $p$ theilbar sein muss."

7) Wenn die Reihe

$$a^0,\ a^1,\ a^2\ \cdots\ a^{t-1}$$

nicht 2 congruente Werthe in Bezug auf Modul $p$ enthält, und

$$a^t \equiv 1 \bmod p$$

ist, so sagten wir (Abschnitt 5), dass $a$ zum Exponenten $t$ gehöre.

Es möge jetzt $p$ eine Primzahl sein, und beschäftigen wir uns damit, die Zahlen zu ermitteln, die zu einem gegebenen Exponenten $t$ gehören.

„Es muss zunächst, damit überhaupt Zahlen möglich sind, $t$ ein Factor von $p-1$ sein."

Denn die Congruenz

$$a^x \equiv 1 \bmod p$$

kann durch keine kleinere Zahl als durch $x=t$ erfüllt werden; offenbar aber wird sie auch durch die Zahlen

$$x=2t,\ x=3t,\ x=4t\ \cdots$$

erfüllt. Aber durch keine andern Zahlen, denn hätte $x$ noch einen Werth $u$, der nicht in dieser Reihe steckt, und wäre $u=st+u_1$, wo $u_1$ kleiner als $t$ ist, so müsste:

$$a^{st} \equiv a^{st+u_1} \bmod p,$$

also

$$a^{u_1} \equiv 1 \bmod p$$

sein, was nicht möglich ist.

Da nach dem Fermat'schen Satze nun immer

$$a^{p-1} \equiv 1 \bmod p,$$

so ist $p-1$ nothwendig eine Zahl der Reihe

$$t,\ 2t,\ 3t\ \cdots,$$

was zu beweisen war.

Wenn $a$ zum Exponenten $t$ gehört, so erfüllt jeder der Werthe

$$x=a^0,\ x=a^1,\ x=a^2\ \cdots\ x=a^{t-1}$$

die Congruenz

$$x^t \equiv 1 \bmod p.$$

Aus diesem Grunde aber braucht noch nicht jede der Zahlen $x=a^s$, wo $s$ zwischen 0 und $t-1$ liegt, auch zum Exponenten $t$ zu gehören, denn möglicher

Weise erfüllt ja eine Zahl $u$, die kleiner als $t$ ist, sehon die Congruenz:

$$(a^s)^u \equiv 1 \bmod p.$$

Offenhar ist dies anch der Fall, wenn $s$ und $t$ einen gemeinschaftlichen Factor hahen.

Sei in der That $s = s'\delta$, $t = t'\delta$, und $\delta$ der grösste gemeinschaftliche Factor von $s$ und $t$, so ist anch:

$$a^{s't} \equiv (a^s)^{t'} \equiv 1 \bmod p,$$

also $u = t'$ zu setzen.

Einen kleinern Werth von $u$ giebt es aber nicht. Denn sei $r$ ein solcher, so wäre

$$a^{sr} \equiv 1 \bmod p$$

und $sr$ in der Reihe der Zahlen $t$, $2t$, $3t$ u. s. w. enthalten, es wäre also:

$$sr = s'\delta r = h\delta t',$$

wo $h$ eine ganze Zahl ist, oder

$$s'r = ht'.$$

Da $s'$ und $t'$ keinen Factor gemein haben, so ist diese Gleichung nur zu erfüllen, wenn $r$ gleich $t'$ oder gleich einem Vielfachen dieser Zahl ist, was gegen die Annahme ist.

Es gehört also $a^s$ zum Modul $t'$, und wenn $t$ und $s$ keinen Factor gemein haben zum Modul $t$. Wenn es also eine Zahl giht, die zum Exponenten $t$ gehört, wo $t$ ein Factor von $p-1$ ist, so giht es dann soviel, als es relative Primzahlen zu $t$ gibt, die kleiner als $t$ sind, oder $\varphi(t)$.

Es lässt sich aber beweisen, dass es zu jedem Factor $t$ von $p-1$ auch wirklich zugehörige Zahlen giht. Denn nehmen wir alle Factoren $t$ von $p-1$, so können zu jedem nur entweder $\varphi(t)$ oder Null Zahlen gehören. Die Gesammtzahl aller dieser Zahlen stellt aber natürlich alle nach Modul $p$ incongruenten Zahlen vor und muss daher gleich $p$ sein. Es lässt sich nun heweisen, dass wenn $t_1$, $t_2 \cdots t_s$ die Factoren von $p-1$ sind, man immer hat

$$\varphi(t_1) + \varphi(t_2) + \cdots + \varphi(t_s) = p\ *)$$

und folgtich kann zu keinem Factor die Anzahl Null gehören.

Hierans ergiebt sich also der Satz:

„Zu jedem Factor $t$ von $p-1$ als Exponenten gehören immer $\varphi(t)$ Zahlen."

Jede zu $t$ gehörige Zahl $x$ nennen wir nunmehr eine primitive Wurzel der Congruenz:

$$x^t \equiv 1 \bmod p$$

und unser Satz sagt somit, dass diese Congruenz $\varphi(t)$ primitive Wurzeln habe.

Die Congruenz

$$x^{p-1} \equiv 1 \bmod p$$

hat also $\varphi(p-1)$ primitive Wurzeln, und diese werden vorzugsweise primitive Wurzeln der Zahl $p$ genannt.

8) Beispiel. Sei z. B. die Primzahl $p = 23$ gegehen, so ist $p-1 = 22 = 2 \cdot 11$. Die Factoren von $p-1$ sind also:

$$t_1 = 1,\ t_2 = 2,\ t_3 = 11,\ t_4 = 22.$$

Die Congruenz

$$x^1 \equiv 1 \bmod 23$$

hat natürlich nur die primitive Wurzel $a = 1$.

---

*) Den Beweis dieses Satzes gehen wir nach Dirichlet.

Von den Zahlen

$$1, 2, 3 \cdots p$$

haben offenhar nur die folgenden

$$t,\ 2t,\ 3t \ldots \frac{p}{t} t$$

den Factor $t$ mit $p$ gemein. Dies ist aber nur bei denjenigen der grösste gemeinschaftliche Factor, den sie mit $p$ haben, hei welchen der erste Factor

$$1, 2, 3 \cdots \frac{p}{t}$$

mit $\frac{p}{t}$ relativ einfach ist, und die Anzahl dieser Zahlen ist $\varphi\left(\frac{p}{t}\right)$. Setzt man nun für $t$ alle Theiler

$$t_1,\ t_2 \cdots t_s$$

von $p$, so drückt die Summe

$$\varphi\left(\frac{p}{t_1}\right) + \varphi\left(\frac{p}{t_2}\right) + \varphi\left(\frac{p}{t_3}\right) + \cdots + \left(\frac{p}{t_s}\right)$$

aus, wie viel Zahlen der Reihe einen der grössten gemeinschaftlichen Factoren $\frac{p}{t_1}, \frac{p}{t_2} \cdots \frac{p}{t_s}$ mit $p$ gemein haben.

Schliesslich aber hat doch jede Zahl einen dieser Factoren ($t = 1$ und $t = p$ eingeschlossen) und somit ist diese Summe gleich der Anzahl aller Zahlen der Reihe, d. h. gleich $p$. Da jedem $t$ nun ein $\frac{p}{t}$ entspricht, so kann man $\frac{p}{t_1} = t'_1$, $\frac{p}{t_2} = t'_2 \cdots$ setzen, und hat also:

$$p = \varphi(t_1) + \varphi(t_2) + \cdots + \varphi(t_s),$$

wie ohen gesagt wurde.

Die Congruenz

$$x^2 \equiv 1 \bmod 23$$

hat $\varphi(2)$ oder 1 Lösung. In der That ist

$$22^2 = 484 \equiv 1 \bmod 23,$$

da 483 durch 23 theilbar ist. Es ist also 22 die primitive Wurzel derselben.

Die Congruenz

$$x^{11} \equiv 1 \bmod 23$$

hat $\varphi(11)$ primitive Wurzeln. Da 11 eine Primzahl ist, so wird $\varphi(11) = 10$ sein.

Es ist in der That

$$2^{11} \text{ oder } 2048 \equiv 1 \bmod 23.$$

Die übrigen primitiven Wurzeln dieser Congruenz sind also die Reste der Potenzen von 2, deren Exponent zu 11 relativ einfach und kleiner als 11 ist, d.h. $2^2$, $2^3$, $2^4$, $2^5$, $2^6$, $2^7$, $2^8$, $2^9$, $2^{10}$. Die Reste dieser Zahlen sind

4, 8, 16, 9, 18, 13, 3, 6, 12.

Die Congruenz

$$x^{22} \equiv 1 \bmod 23$$

hat $\varphi(22)$ Wurzeln, die man im engern Sinn die primitiven Wurzeln von 23 nennt. Von den Zahlen 1 bis 22 sind zu 22 relativ einfach: 1, 3, 5, 7, 9, 13, 15, 17, 19, 21, also $\varphi(22) = 10$. Offenbar ist,

$$5^{22} \equiv 1 \bmod 23$$

und die primitiven Wurzeln sind die Reste von

$$5^1, 5^3, 5^5, 5^7, 5^9, 5^{13}, 5^{15}, 5^{17}, 5^{19}, 5^{21}$$

die Exponenten sind wieder die mit 22 relativ einfachen Zahlen. Es ergeben sich die Reste:

5, 10, 20, 17, 11, 21, 19, 15, 7, 14.

Die Art der Berechnung der Reste ist offenbar die, dass man bei jeder Multiplication mit der Grundzahl, statt des Productes nur den Rest nach 23 nimmt. So z. B. berechnet man den Rest von $2^9$ folgendermassen:

$$2^2 = 4,\ 2^3 = 8,\ 2^4 = 16,\ 2^5 = 32 \equiv 9,$$
$$2^6 \equiv 2 \cdot 9 \equiv 18,\ 2^7 \equiv 2 \cdot 18 \equiv 13,$$
$$2^8 \equiv 2 \cdot 13 \equiv 3,\ 2^9 \equiv 2 \cdot 3 \equiv 6.$$

Es mögen noch die primitiven Wurzeln der Primzahlen von 2 bis 37 hier folgen.

| Primzahl: | Primitive Wurzeln: |
|---|---|
| 3 | 2 |
| 5 | 2, 3 |
| 7 | 3, 5 |
| 11 | 2, 6, 7, 8 |
| 13 | 2, 6, 7, 11 |
| 17 | 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 14 |
| 19 | 2, 3, 10, 13, 14, 15 |
| 23 | 5, 7, 10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21 |
| 29 | 2, 3, 8, 10, 11, 15. 18, 19, 21, 26, 27 |
| 31 | 3, 11, 12, 13, 17, 21, 22, 24 |
| 37 | 2, 5, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 32, 35. |

9) Ist $a$ eine primitive Wurzel von $p$, so enthält die Reihe $a^0, a^1, a^2, a^3 \cdots a^{p-2}$ alle incongruenten Wurzeln der Congruenz

$$x^{p-1} \equiv 1 \bmod p,$$

ohne dass natürlich dieselben alle auch primitive Wurzeln sein müssen.

In dieser Reihe nun hat jede Zahl $l$, die nicht durch $p$ theilbar ist, eine congruente. Sei diese $a^\lambda$. Es ist dann

$$a^\lambda \equiv l \bmod p$$

und $\lambda$ liegt zwischen 0 und $p-2$. Wir nennen $\lambda$ den Index von $l$, und schreiben dies:

$$\lambda = \operatorname{ind}(l).$$

Ist nun

$$a^\lambda \equiv l \bmod p, \quad a^\mu \equiv m \bmod p,$$

so ist

$$a^{\lambda+\mu} \equiv lm \bmod p$$

und man hat den Satz

$$\operatorname{ind}(l) + \operatorname{ind}(m) = \operatorname{ind}(lm),$$

welcher genau dem Fundamentalsatze der Theorie der Logarithmen entspricht:

$$\lg(l) + \lg(m) = \lg(lm).$$

Es folgen, wie in der Logarithmentheorie, auch leicht daraus die Sätze:

$$\operatorname{ind}(l) - \operatorname{ind}(m) = \operatorname{ind}\left(\frac{l}{m}\right),$$

wenn $\frac{l}{m}$ eine ganze Zahl ist, und

$$\operatorname{ind}(l^x) = x \operatorname{ind}(l).$$

Man kann also mit den Indices, wie mit Logarithmen rechnen, und bei allen

Resultaten immer ein beliebiges Vielfaches von $p-1$ abziehen, d. h. die nach $p-1$ congruente Zahl nehmen, da $a^{p-1}\equiv a^0$, $a^p\equiv a$ ist u. s. w.

Denkt man sich eine Tafel, worin für jede Primzahl $p$ als Modul die Potenzen einer primitiven Wurzel bis zur $p-2$ten berechnet sind, so thut diese für die Zahlentheorie, namentlich für die Auflösung von Congruenzen, die Dienste, welche in der Analysis eine Logarithmen-Tafel leistet.

Ist nämlich

$$ax\equiv b \bmod p,$$

so ist

$$\text{ind}(a)+\text{ind}(x)\equiv \text{ind}(b) \bmod p-1$$

oder

$$\text{ind}\, x\equiv \text{ind}\, b-\text{ind}\, a \bmod p-1.$$

Berechnen wir z. B. denjenigen Theil dieser Tafel, der sich auf die Primzahl $p=13$ bezieht, und sei die kleinste primitive Wurzel 2 von 13 genommen. So hat man folgendes Täfelchen:

| numerus | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| index | 0 | 1 | 4 | 2 | 9 | 5 | 11 | 3 | 8 | 10 | 7 | 6 |

Die bei numerus stehenden Zahlen sind die Reste der Potenzen von 2, deren Exponenten die mit index bezeichnete Reihe enthält. Umgekehrt ist:

| index | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| numerus | 1 | 2 | 4 | 8 | 3 | 6 | 12 | 11 | 9 | 5 | 10 | 7 |

Es unterscheidet sich dieses Täfelchen von dem vorigen nur dadurch, dass die mit index bezeichneten Zahlen nach ihrer natürlichen Grösse geordnet sind, während vorhin dies mit den bei „numerus" stehenden Zahlen geschehen ist.

Lösen wir z. B. mit Hülfe dieser beiden Täfelchen die Congruenz

$$7x\equiv 9 \bmod 13.$$

Man hat:

$$\text{ind}(7)+\text{ind}(x)=\text{ind}(9),$$

d. h.

$$\text{ind}(x)=\text{ind}(9)-\text{ind}(7)$$

oder wie das erste Täfelchen zeigt:

$$\text{ind}(x)=8-11=-3\equiv 9.$$

Der Rest ist nämlich nach $13-1=12$ zu nehmen. Suchen wir 9 als index im 2ten Täfelchen, so steht der numerus 5 darunter, es ist also

$$x=5.$$

Um beliebige Congruenzen, deren Moduln Primzahlen sind, zu lösen, müssten für alle Primzahlen, wie hier für 13, solche Täfelchen berechnet werden.

Eine Sammlung von dergleichen enthält das von Jakobi herausgegebene Werk: „*Canon arithmeticus.*"

10) Mit Hülfe dieses Canon können aber auch Congruenzen von der Form:

$$ax^n\equiv b \bmod p$$

gelöst werden. Es ist nämlich:

$$\text{ind}(a)+n\,\text{ind}(x)\equiv \text{ind}(b) \bmod (p-1),$$

d. h.

$$n\,\text{ind}(x)\equiv \text{ind}(b)-\text{ind}(a) \bmod (p-1)$$

und man hat soviel incongruente Wurzeln der gegebenen Congruenz, als es incongruente Werthe von $\text{ind}(x)$ giebt.

Daraus folgt der wichtige Satz:

„Soll eine Congruenz

$$x^m\equiv b \bmod p$$

Wurzeln haben, so muss der grösste gemeinschaftliche Factor von $m$ und $p-1$ auch ein Factor von $\text{ind}(b)$ sein. Diese Bedingung ist ausreichend und nothwendig."

Denn man hat ja

$$m\,\text{ind}(x)\equiv \text{ind}(b) \bmod p-1,$$

eine Congruenz, von der in Abschnitt 4) gezeigt wurde, dass sie unter der angegebenen Bedingung, aber auch nur unter dieser immer lösbar sei.

Hat die Congruenz:

$$m\,\text{ind}(x)\equiv \text{ind}(b) \bmod (p-1)$$

eine Wurzel

$$\text{ind}(x)=\alpha,$$

so wurde in 4 gezeigt, dass wenn $\delta$ der grösste gemeinschaftliche Factor von $m$ und $p-1$ ist, sich als incongruente Wurzeln die Werthe

$$\alpha,\ \alpha+\frac{p-1}{\delta},\ \alpha+\frac{2p-1}{\delta},\ \ldots\ \alpha+\frac{(\delta-1)\,p-1}{\delta}$$

ergehen, deren Anzahl ist also gleich $\delta$, oder:

„Jede Congruenz von der Form

$$x^m\equiv b \bmod p$$

hat entweder keine oder $\delta$ Wurzeln, wenn $\delta$ der grösste gemeinschaftliche Factor von $m$ und $p-1$ ist."

Das Criterium, ob überhaupt eine Wurzel vorhanden sei, ist hier auf die Betrachtung der Indices zurückgeführt. Jedoch lässt sich noch ein andres Criterium finden, welches das Zurückgehen auf die Indices nicht erfordert.

Es fragt sich nämlich, in welchen Fällen ind$(b)$ durch einen Factor $\delta$ von $(p-1)$ theilbar sei. In der Congruenz

$$a^{\beta} \equiv b \mod p,$$

wo $a$ diejenige primitive Wurzel von $p$ ist, für welche die Indices berechnet werden, hat man

$$\beta = \text{ind}\, b, \text{ und } a^{\beta \frac{p-1}{\delta}} \equiv 1^{\frac{p-1}{\delta}} \mod p.$$

Soll nun $\beta$ durch $\delta$ theilbar sein, so muss offenbar

$$a^{\beta \frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \mod p$$

werden, und umgekehrt, wenn diese letztere Congruenz stattfindet, ist $\beta$ durch $\delta$ theilbar, weil sonst $a$ keine primitive Wurzel von $p$ sein könnte. „Es muss also

$$b^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \mod p$$

sein, damit die Congruenz

$$x^m \equiv b \mod p$$

lösbar sei, und folglich $\delta$ Auflösungen habe."

Beispiel. Die Congruenz

$$x^6 \equiv 7 \mod 13$$

giebt 6 als grössten gemeinschaftlichen Factor von $m=6$, und $p-1=12$, ind$(b)$ = ind$(7)$ = 11. Diese Congruenz ist also nicht lösbar, da 11 den Factor 6 nicht hat.

Sei dagegen gegeben:

$$x^9 \equiv 12 \mod 13,$$

so ist $\delta = 3$ der grösste gemeinschaftliche Factor von 9 und 12. Aber

$$\text{ind}\,(b) = \text{ind}\,(12) = 6$$

hat auch den Factor 3 und folglich ist die Congruenz lösbar, und es giebt 3 incongruente Werthe von $x$.

Da 9 ind$(x) \equiv$ ind$(12) \equiv 6 \mod 12$ ist, oder was dasselbe ist: $3\,\text{ind}\, x \equiv 2 \mod 4$, so ist zu setzen

$$\text{ind}\,(x) = 2,$$

aber auch:

$$\text{ind}\,(x) = 2 + \frac{12}{3} = 6,$$

$$\text{ind}\,(x) = 10.$$

Zu dem Werthe der Indices 2, 6, 10 aber ergeben sich die Zahlen: $x=4$, $x=12$, $x=10$.

Die Bedingung

$$b^{\frac{p-1}{\delta}} \equiv 1 \mod p$$

lautet in unserm Beispiele:

$$12^4 \equiv 1 \mod 13,$$

eine Bedingung, die offenbar erfüllt ist.

11) Theorie der quadratischen Reste.

Wir wenden uns jetzt zu dem eigentlichen Gegenstande dieses Artikels, den quadratischen Resten. Man hat hier in der allgemeineren Congruenz

$$x^m \equiv b \mod p$$

ausschliesslich den Fall zu untersuchen, wo $m=2$ ist. Je nachdem sich die Congruenz

$$x^2 \equiv b \mod p$$

lösen lässt, oder nicht, nennen wir $b$ einen quadratischen Rest von $p$ oder einen quadratischen Nichtrest. Es soll in den folgenden Betrachtungen aber $p$ immer eine Primzahl und nicht gleich 2 sein. Es ist dann also $p-1$ durch 2 theilbar, und nach dem im vorigen Abschnitte gefundenen Criterium ist die Congruenz lösbar oder nicht, je nachdem

$$b^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \mod p$$

ist oder nicht.

Findet aber letzteres statt, so ist jedenfalls

$$b^{p-1} - 1 = (b^{\frac{p-1}{2}} + 1)(b^{\frac{p-1}{2}} - 1)$$

und da

$$b^{p-1} \equiv 1 \mod p,$$

also

$$b^{p-1} - 1 \equiv 0 \mod p,$$

hat man jedenfalls

$$(b^{\frac{p-1}{2}} + 1)(b^{\frac{p-1}{2}} - 1) = 0 \mod p,$$

d. h. da $b^{\frac{p-1}{2}} - 1$ nicht durch $p$ theilbar sein soll, so muss dies mit $b^{\frac{p-1}{2}} + 1$ der Fall, oder

$$b^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \mod p$$

sein. D. h.

„Eine Zahl $b$ ist quadratischer Rest von $p$, wenn $b^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \bmod 2$, Nichtrest, wenn $b^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p$ ist."

Man bezeichnet nun durch den Ausdruck $\left(\frac{b}{p}\right)$ immer die Reste von $b^{\frac{p-1}{2}}$ nach Modul $p$. Der Rest aber ist, wie wir gesehen haben, gleich $+1$ oder $-1$, je nachdem $b$ quadratischer Rest oder Nichtrest ist, also immer:

$$b^{\frac{p-1}{2}} \equiv \left(\frac{b}{p}\right) \bmod p.$$

Augenblicklich ergiebt sich auch, dass immer:

$$\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{c}{p}\right)$$

ist, wenn

$$b \equiv c \bmod p$$

ist.

Ist ferner:

$$x^2 \equiv bc \bmod p,$$

so ist:

$$\left(\frac{b}{p}\right) \equiv b^{\frac{p-1}{2}}, \quad \left(\frac{c}{p}\right) \equiv c^{\frac{p-1}{2}},$$

also:

$$\left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right) \equiv (bc)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Da nun auch:

$$\left(\frac{bc}{p}\right) = (bc)^{\frac{p-1}{2}}$$

sein muss, so hat man offenbar:

$$\left(\frac{b}{p}\right)\cdot\left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{bc}{p}\right)$$

oder allgemein:

$$\left(\frac{bcdef\cdots}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right)\left(\frac{c}{p}\right)\left(\frac{d}{p}\right)\left(\frac{e}{p}\right)\left(\frac{f}{p}\right)\cdots,$$

woraus der Satz folgt:

„Ein Product ist quadratischer Rest von $p$, wenn die Anzahl der Factoren, welche Nichtreste sind, grade, dagegen quadratischer Nichtrest, wenn diese Anzahl ungrade ist."

Man kann auch mit Leichtigkeit die quadratischen Reste von $p$ finden.

Sie liegen nämlich in der Reihe der Zahlen:

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2 \cdots (p-1)^2.$$

Die Anzahl der incongruenten Werthe dieser Reste ist aber nur $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, da die Zahlen

$$s^2 \text{ und } (p-s)^2 = p^2 - 2ps + s^2$$

offenbar congruent sind. Die Zahlen

$$1,\ 2,\ 3 \cdots p-1$$

sind unter sich incongruent.

In der Reihe

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2 \cdots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$$

giebt es auch nicht 2 congruente Werthe, denn wäre z. B.

$$s^2 \equiv t^2,$$

so wäre

$$(s+t)(s-t) \equiv 0$$

und da $s-t$ kleiner als $p$ ist, $s+t \equiv 0$, $s+t$ kleiner als oder höchstens gleich $p$, was nicht möglich ist.

12) Das Reciprocitätsgesetz. Dieses wichtige Gesetz, welches von Legendre aufgestellt, aber zuerst von Gauss mit Schärfe bewiesen ist, lehrt die Moduln finden, für welche eine gegebene Zahl Rest oder Nichtrest ist.

Es sind jedoch hier einige vorläufige Betrachtungen nöthig.

Ist die Zahl $b$ keine Primzahl, so zerlegen wir sie in einfache Factoren. Es ist aber dann auch, da $b$ negativ sein kann, der Factor $-1$ zu betrachten.

Offenbar aber ist

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} = +1 \text{ oder } = -1,$$

je nachdem $\frac{p-1}{2}$ grade oder ungrade ist. Das erste nur findet statt, wenn $p$ von der Form $4n+1$, das letzte, wenn es von der Form $4n+3$ ist. Im erstern Falle ist also $-1$ quadratischer Rest von $p$, im letztern Nichtrest. Suchen wir jetzt die Wurzel der Congruenz

$$x^2 \equiv -1 \bmod p,$$

so muss jedenfalls $p$ von der Form $2n+1$ sein.

Es war aber nach dem Wilsonschen Satze (Abschnitt 15)

$$1\cdot2\cdot3\cdots(p-1) \equiv -1 \bmod p,$$

aber es ist:

$$1\cdot2\cdot3\cdots(p-1) = 1\cdot2\cdot3\cdots\frac{p-1}{2}$$
$$\left(\frac{p-1}{2}+1\right)\left(\frac{p-1}{2}+2\right)\cdots(p-1).$$

Für die letzte Hälfte der Zahlen nimmt man die absolut kleinsten Reste nach $p$.

Es ist

$$\frac{p-1}{2}+1 \equiv -\frac{p-1}{2},\ \frac{p-1}{2}+2 \equiv -\frac{p-3}{2} \cdots,\ p-1 \equiv -1 \bmod p,$$

also

$$1\cdot 2\cdot 3 \cdots (p-1) \equiv \left(1\cdot 2\cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2}\right)^2,$$

da die Anzahl der Zahlen $1, 2, \cdots p-1$ gleich $2n$, also grade ist.

Es ist also

$$x = 1\cdot 2\cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2}$$

eine Lösung unserer Congruenz

$$x^2 \equiv -1 \bmod p.$$

Sei jetzt $p$ wieder eine beliebige ungrade Primzahl, und multipliciren wir die Reste $1, 2, 3 \cdots p-1$ mit einer beliebigen Zahl $k$, so werden sich, wie schon früher gezeigt, wieder als Reste nach Modul $p$ die Zahlen $1, 2 \cdots p-1$, jedoch in andrer Ordnung ergeben.

Seien jetzt die Reste von

$$1\cdot k,\ 2\cdot k,\ 3\cdot k \cdots \frac{p-1}{2}\cdot k$$

bezeichnet durch:

$$r_1, r_2, r_3 \cdots r_{\frac{p-1}{2}}.$$

Jede dieser Werthe $r$ ist dann entweder kleiner oder grösser als $\frac{p}{2}$, da $\frac{p}{2}$ selbst ein Bruch ist.

Sei z. B. $r_t$ grösser als $\frac{p}{2}$, so heisst diejenige Zahl, welche $r_t$ ergänzt, Complement von $r_t$.

Es kann aber das Complement von $r_t$ nicht eine Zahl aus der Reihe der $r$, also etwa $r_s$ sein. Denn fände dies statt, so wäre:

$$r_t \equiv tk,\ r_s \equiv sk \bmod p,$$

also:

$$r_t + r_s \equiv (t+s)k \equiv p \bmod p,$$

was nur der Fall sein kann, wenn

$$t+s=p \text{ oder } t+s=0$$

ist. Da letzteres unmöglich ist, so muss $s$ grösser als $\frac{p}{2}$ sein, wenn $t$ kleiner als $\frac{p}{2}$ ist, da die $r$ nur bis zu $r_{\frac{p-1}{2}}$ geben.

Wir wollen jetzt mit $a_1, a_2, a_3 \cdots a_\lambda$ diejenigen Reste von $1\cdot k, 2\cdot k, 3\cdot k \cdots \frac{p-1}{2}\cdot k$ bezeichnen, die kleiner als $\frac{p}{2}$ sind, mit $b_1, b_2, b_3 \cdots b_\mu$ diejenigen, welche grösser als $\frac{p}{2}$ sind. Es bilden dann die Werthe:

$$a_1, a_2, a_3 \cdots a_\lambda,\ p-b_1,\ p-b_2,\ p-b_3 \cdots p-b_\mu$$

offenbar die Zahlenreihe

$$1, 2, 3 \cdots \frac{p-1}{2},$$

natürlich, ohne dass sich über die Ordnung etwas sagen liesse.

Nun ist

$$\left(1\cdot 2\cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2}\right) k^{\frac{p-1}{2}} \equiv r_1\ r_2 \cdots r_{\frac{p-1}{2}} \equiv a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_\lambda\ b_1\ b_2\ b_3 \cdots b_\mu \bmod p$$

und ausserdem:

$$1\cdot 2\cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2} \equiv a_1\ a_2 \cdots a_\lambda (p-b_1)(p-b_2)(p-b_3) \cdots (p-b_\mu).$$

Oder da

$$p-b \equiv -b \bmod p$$

ist, auch:

$$(-1)^\mu a_1\ a_2 \cdots a_\lambda\ b_1\ b_2 \cdots b_\mu \equiv 1\cdot 2\cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2} \bmod p.$$

Durch Multipliciren dieser Congruenz mit

$$\left(1\cdot 2\cdot 3 \cdots \frac{p-1}{2}\right) k^{\frac{p-1}{2}} \equiv a_1\ a_2\ a_3 \cdots a_\lambda\ b_1\ b_2\ b_3 \cdots b_\mu \bmod p.$$

erhält man

$$k^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\mu} \mod p$$

oder

$$\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^{\mu}.$$

Ist z. B. $k=2$, so sind die Reste $r_1$, $r_2$, $\cdots r_{\frac{p-1}{2}}$ die Zahlen $1\cdot 2$, $2\cdot 2 \cdots \frac{p-1}{2}\cdot 2$ selbst.

Ist dann $p$ von der Form $4n+1$, also $\frac{p-1}{2}=2n$ oder grade, so sind eben so viel Zahlen der Reihe $r_1, r_2 \cdots$ kleiner als der halbe Modul, als deren grössere vorhanden sind, also

$$\mu = n$$

und

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^n.$$

Die Zahl 2 ist also quadratischer Rest von $p$ oder Nichtrest davon, je nachdem $n$ grade oder ungrade, d. h. je nachdem: $p$ von der Form $8m+1$ oder von der Form: $8m+5$ ist.

Ist dagegen $\frac{p-1}{2}$ ungrade, also von der Form $2n+1$, $p$ also von der Form $4n+3$, so ist auch:

$$\frac{p}{2} = 2n+1+\tfrac{1}{2}$$

und die Reste, welche grösser als der halbe Modul sind, beginnen mit $2(n+1)$; es ist also

$$\mu = n+1$$

und in der Formel:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\mu}$$

ist $\mu$ grade, wenn $n$ ungrade ist.

Die Zahl 2 ist also quadratischer Rest, wenn $n$ von der Form $2m+1$ oder $p$ von der Form $8m+7$ ist, Nichtrest, wenn $p$ die Form $8m+3$ hat.

Da man für $8m+7$ auch $8m-1$, und für $8m+5$ auch $8m-3$ schreiben kann, so ergiebt sich für die Zahl 2 ganz allgemein:

„Die Zahl 2 ist quadratischer Rest aller Primzahlen $p$ von der Form $8m\pm 1$, Nichtrest der Primzahlen $p$ von der Form $8m\pm 3$."

Im ersteren Falle aber ist die Zahl $p^2-1$ durch 16 theilbar, denn:

$$p^2-1 = (p+1)(p-1),$$

von diesen Factoren ist jedenfalls einer durch 8, der andere durch 2 theilbar. Im zweiten Falle dagegen ist $p^2-1$ nur durch 8 theilbar, denn einer der Factoren ist durch 4, der andre durch 2 theilbar, je nachdem also 2 quadratischer Rest oder Nichtrest ist, wird die Zahl $\frac{p^2-1}{8}$ grade oder ungrade sein und man kann setzen:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

was der algebraische Ausdruck für den eben gefundenen Satz ist.

Beispiel. $\left(\frac{2}{17}\right) = (-1)^{36}$, also 2 quadratischer Rest von 17,

$\left(\frac{2}{11}\right) = (-1)^{15}$, also 2 ist Nichtrest von 11.

13) Wir wollen jetzt mit $x$ eine beliebige Zahl, mit $E(x)$ die grösste darin enthaltene ganze Zahl bezeichnen, derart, dass z. B.:

$$E\left(\frac{15}{7}\right) = 2$$

ist, weil $\frac{15}{7} = 2 + \frac{1}{7}$ ist.

Wenn man jetzt, wie im vorigen Abschnitte, unter $r_1, r_2 \cdots r_{\frac{p-1}{2}}$ die Reste der Zahlen $1\cdot k$, $2\cdot k \cdots \frac{p-1}{2}\cdot k$ nach Modul $p$ versteht, so ist offenbar:

$$k = pE\left(\frac{k}{p}\right) + r_1$$

$$2k = pE\left(\frac{2k}{p}\right) + r_2$$

$$3k = pE\left(\frac{3k}{p}\right) + r_3$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{p-1}{2}k = pE\left(\frac{\frac{p-1}{2}k}{p}\right) + r_{\frac{p-1}{2}}.$$

Die Summe der Zahlen $a_1, a_2, \cdots a_\lambda$ wollen wir mit $A$, die Summe von $b_1$, $b_2, \cdots b_\mu$ mit $B$ bezeichnen.

Es sei ferner:

$$E\left(\frac{k}{p}\right)+E\left(\frac{2k}{p}\right)+\cdots+E\left(\frac{\frac{p-1}{2}k}{p}\right)=M,$$

so ist offenbar

a) $$\frac{p^2-1}{8}k=pM+A+B,$$

wie man durch Addition der obigen Gleichungen ersieht.

Ausserdem aber ist:

$$a_1+a_2+\cdots+a_\lambda+(p-b_1)+(p-b_2)+\cdots+(p-b_\mu)=A+\mu p-B.$$

Da nach dem vorigen Abschnitte die $a$ und die $p-b$ die Zahlenreihe 1, 2, 3 ... $\frac{p-1}{2}$ bildeten, so ist:

$$A+\mu p-B=1+2+3+\cdots+\frac{p-1}{2}=\frac{p^2-1}{8}$$

Subtrahirt man diesen Ausdruck von dem Ausdrucke a), so kommt:

$$\frac{p^2-1}{8}(k-1)=p(M-\mu)+2B.$$

Dieser Ausdruck lehrt, dass $(M-\mu)p$ grade sein muss, „wenn $k$ ungrade ist," aber da $p$ immer ungrade ist, so ist in diesem Falle auch $M-\mu$ grade, d. h.

$$(-1)^{M-\mu}=+1$$

oder

$$(-1)^M=(-1)^\mu.$$

Es ist also dann:

$$\left(\frac{k}{p}\right)=(-1)^M,$$

da nach vorigem Abschnitte

$$\left(\frac{k}{p}\right)=(-1)^\mu$$

war.

Sei jetzt $k$ nicht ungrade, sondern gleich 2, so ist offenbar $M=0$, da in

$$E\left(\frac{2}{p}\right),\ E\left(\frac{4}{p}\right),\ \ldots\ E\left(\frac{\frac{p-1}{2}\cdot 2}{p}\right)$$

keine ganze Zahlen enthalten sind, also:

$$\frac{p^2-1}{8}=-p\mu+2B,$$

also $\mu p$ oder $\mu$ und $\frac{p^2-1}{8}$ sind zu gleicher Zeit grade oder ungrade. Diese Betrachtung führt wieder auf den schon im vorigen Artikel direct bewiesenen Satz:

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Sei jetzt $k$ wieder ungrade aber kleiner als $p$, so muss jedes Glied der Reihe:

$$E\left(\frac{k}{p}\right),\ E\left(\frac{2k}{p}\right),\ E\left(\frac{3k}{p}\right)\ldots\ldots$$

entweder gleich dem folgenden, oder um Eins kleiner sein. Offenbar aber ist

$$E\left(\frac{k}{p}\right)=0.$$

Es können diesem Gliede indess noch eine Anzahl andrer folgen, die ebenfalls gleich Null sind, und wir wollen annehmen, dass $E\left(\frac{sk}{p}\right)$ das letzte dieser Glieder sei. Es ist dann:

$$\frac{sk}{p}<1 \text{ und } \frac{(s+1)k}{p}>1,$$

d. h.

$$s<\frac{p}{k},\ s+1>\frac{p}{k}$$

oder

$$s=E\left(\frac{p}{k}\right),$$

da zufolge der beiden letzten Ungleichheiten $s$ die grösste in $\frac{p}{k}$ enthaltene ganze Zahl sein muss. In der Reihe:

$$E\left(\frac{k}{p}\right),\ E\left(\frac{2k}{p}\right),\ E\left(\frac{3k}{p}\right)\ \ldots\ E\left(\frac{\frac{p-1}{2}k}{p}\right)$$

ist also das erste Glied, welches Eins gibt, gleich $E\left(\frac{p}{k}\right)+1$.

Das letzte Glied, welches Eins gibt, möge jetzt $E\left(\frac{tk}{p}\right)$ sein, so ist ähnlich wie vorhin:

$$\frac{tk}{p} < 2, \quad \frac{(t+1)k}{p} > 2,$$

also

$$t < \frac{2p}{k}, \quad t+1 > \frac{2p}{k}$$

und

$$t = E\left(\frac{2p}{k}\right).$$

Es ist also die Anzahl derjenigen Glieder, welche Eins geben, $E\left(\frac{2p}{k}\right) - E\left(\frac{p}{k}\right)$, während die Anzahl derjenigen, welche Null gaben, $E\left(\frac{p}{k}\right)$ war. Ebenso wird die Zahl 2 durch $E\left(\frac{3p}{k}\right) - E\left(\frac{2p}{k}\right)$ Glieder gegegeben, und so fort.

Die Zahl $\frac{k-3}{2}$ wird durch $E\left(\frac{k-1}{2}\frac{p}{k}\right) - E\left(\frac{k-3}{2}\frac{p}{k}\right)$ Glieder und endlich $\frac{k-1}{2}$ durch $\frac{p-1}{2} - E\left(\frac{k-1}{2}\frac{p}{k}\right)$ Glieder gegeben. Das letzte Glied nämlich ist: $E\left(\frac{p-1}{2}\frac{k}{p}\right)$, also das $\left(\frac{p-1}{2}\frac{k}{p}\right)$te oder das $\left(\frac{k}{2} - \frac{2k}{p}\right)$ te, welche Zahl gleichbedeutend ist mit

$$\frac{k-1}{2} + \frac{p-k}{2p}.$$

Da nun $\frac{p-k}{2p}$ ein ächter Bruch ist, so ist: $E\left(\frac{p-1}{2}\frac{k}{p}\right) = \frac{k-1}{2}$. Diesen Werth gibt das letzte oder $\frac{p-1}{2}$te Glied, so dass die Anzahl der Glieder, welche Gleiches geben, offenbar die oben gefundene ist.

Wir wollen das Gefundene noch einmal übersichtlich hinschreiben.

0 geben: $E\left(\frac{p}{k}\right)$ Glieder,

1 geben: $E\left(\frac{2p}{k}\right) - E\left(\frac{p}{k}\right)$ Glieder,

2 geben: $E\left(\frac{3p}{k}\right) - E\left(\frac{2p}{k}\right)$ Glieder,

. . .

$\frac{k-3}{2}$ geben: $E\left(\frac{k-1}{2}\frac{p}{k}\right) - E\left(\frac{k-3}{2}\frac{p}{k}\right)$ Glieder,

$\frac{k-1}{2}$ geben: $\frac{p-1}{2} - E\left(\frac{k-1}{2}\frac{p}{k}\right)$ Glieder;

also da die Summe aller Glieder $M$ war, so ist:

$$M = 0E\left(\frac{p}{k}\right) + 1\left[E\left(\frac{2p}{k}\right) - E\left(\frac{p}{k}\right)\right] + 2\left[E\frac{3p}{k} - E\left(\frac{2p}{k}\right)\right] + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{k-3}{2}\left[E\left(\frac{k-1}{2}\frac{p}{k}\right) - E\left(\frac{k-3}{2}\frac{p}{k}\right)\right] + \frac{k-1}{2}\left[\frac{p-1}{2} - E\left(\frac{k-1}{2}\frac{p}{k}\right)\right]$$

oder:

$$M = \frac{k-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2} - \left[E\left(\frac{p}{k}\right) + E\left(\frac{2p}{k}\right) + \cdots + E\left(\frac{k-1}{2}\frac{p}{k}\right)\right].$$

Wir wollen den Ausdruck in der Klammer zunächst mit $N$ bezeichnen, so dass man hat:

$$M + N = \frac{p-1}{2}\frac{k-1}{2}.$$

Da nun $k$ eine ungrade Zahl war, so hatten wir:

$$\left(\frac{k}{p}\right) = (-1)^M.$$

Ist aber $k$ auch eine Primzahl, so zeigt das Bildungsgesetz der Reihe $N$, welche aus $M$ durch Vertauschung der Zahlen $p$ und $k$ entsteht, dass auch:

$$\left(\frac{p}{k}\right) = (-1)^N$$

ist, dass man also hat:

$$\left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{p}{k}\right) = (-1)^{M+N}$$

oder:

$$\left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{p}{k}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{k-1}{2}}.$$

In dieser letzten wichtigen Formel besteht das Reciprocitätsgesetz. Es lehrt augenblicklich bestimmen, ob $p$ quadratischer Rest von $k$ sei, wenn man weiss ob $k$ quadratischer Rest von $p$ ist, vorausgesetzt, dass $k$ und $p$ ungrade Primzahlen sind. Der Fall, wo $k$ gleich 2 war, ist übrigens im vorigen Abschnitt direct behandelt worden.

Das Reciprocitätsgesetz lässt sich auch schreiben:

$$\left(\frac{k}{p}\right) = \left(\frac{p}{k}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}};$$

da nämlich $\left(\frac{p}{k}\right)$ entweder $+1$ oder $-1$ ist, ist es gleich, ob mit diesem Ausdruck multiplicirt oder dividirt wird.

Ist eine der Zahlen $p$ oder $k$ von der Form $4n+1$, so ist offenbar

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}} = +1,$$

wenn aber beide von der Form $4n+3$ sind, so ist

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{k-1}{2}} = -1.$$

In Worten lässt sich also das Reciprocitätsgesetz folgendermassen fassen.

„Die ungraden Primzahlen $p$ und $k$ sind gleichzeitig quadratische Reste und Nichtreste von einander, wenn eine der beiden Zahlen die Form $4n+1$ hat; haben aber beide die Form $4n+3$, so ist $p$ quadratischer Rest von $k$, wenn $k$ Nichtrest von $p$ ist, und umgekehrt."

Dieser Beweis des Reciprocitätsgesetzes ist von Gauss, welcher deren mehrere gegeben hat, die zum Theil in den „*Disquisitones arithmeticae*", zum Theil in spätern Abhandlungen enthalten sind. Wir geben noch einen Beweis von Dirichlet im folgenden Abschnitte.

Das Reciprocitätsgesetz gehört zu den schönsten Sätzen der Zahlentheorie. Wir bemerken hier, dass es sich nicht auf die quadratischen Reste beschränkt, sondern für die Reste beliebiger Potenzen sich analoge Sätze ergeben. Gauss hat dies schon für die biquadratischen Reste, Jakobi für die cubischen dargethan. Indessen bezieht sich hierbei dies Gesetz nicht mehr auf die gewöhnlichen Primzahlen, sondern auf die complexen. (Siehe den Artikel Zahl.) Das allgemeine Reciprocitätsgesetz, welches Kummer aufgestellt und bewiesen hat, aber findet seine Anwendung im Allgemeinen nur für die idealen Zahlen, welche dieser grosse Arithmetiker in die Zahlentheorie eingeführt hat. (Siehe den Artikel Zahl.) Wohl zu bemerken ist noch, dass das Reciprocitätsgesetz für quadratische Reste für alle Primzahlen $k$ Anwendung findet, mit Ausnahme der 2. Für diese wird es aber ersetzt durch die im vorigen Abschnitte bewiesene Formel:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

welche man daher „Ergänzungsgesetz des Reciprocitätsgesetzes" nennt.

Auch bei den höheren Reciprocitätsgesetzen werden gewisse Primzahlen ausgeschlossen, und finden sich demgemäss immer „Ergänzungsgesetze" für dieselben.

14) Wir geben in diesem Abschnitt noch den Dirichlet'schen Beweis für das Reciprocitätsgesetz. Es ist analytischer Natur, wie so viele Betrachtungen, welche Dirichlet mit Bezug auf zahlentheoretische Fragen gegeben hat.

Bekanntlich hat man die Formel

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + a_3 \cos 3x + \cdots,$$

wo

$$a_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\alpha)\cos m\alpha\, d\alpha,$$

welche richtig ist, so lange $x$ zwischen 0 und $\pi$ liegt. Diese Formel heisst Fourrier'sche Reihe (siehe den Artikel: Quantität (imaginäre)), und aus ihr ergibt sich, wenn man $x=0$ setzt:

$$f(0) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s.$$

Wir wollen noch setzen:

$$b_s = \frac{2}{\pi}\int_0^{2h\pi} \cos s\alpha f(\alpha)d\alpha,$$

wo $h$ eine positive ganze Zahl ist, so ist offenbar:

$$b_s = \frac{2}{\pi}\left(\int_0^\pi \cos s\alpha f(\alpha)d\alpha + \int_\pi^{2\pi} \cos s\alpha f(\alpha)d\alpha + \cdots + \int_{(2h-1)\pi}^{2h\pi} \cos s\alpha f(\alpha)d\alpha\right).$$

Sei jetzt $k$ grade, so ist, wenn man

$$\alpha = k\pi + y$$

setzt:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \cos s\alpha f(\alpha) d\alpha = \int_0^{\pi} \cos(sk\pi + sy) f(k\pi + y) dy = \int_0^{\pi} \cos s\alpha f(k\pi + \alpha) d\alpha.$$

Sei $k$ nunmehr ungrade, so setze man

$$\alpha = (k+1)\pi + y;$$

es wird:

$$\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \cos s\alpha f(\alpha) d\alpha = -\int_0^{-\pi} \cos sy f[(k+1)\pi + y] dy = \int_0^{\pi} \cos s\alpha f[(k+1)\pi - \alpha] d\alpha,$$

also:

$$b_s = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} [f(\alpha) + f(2\pi - \alpha) + f(2\pi + \alpha) + f(4\pi - \alpha) + \cdots + f(2h\pi - \alpha)] \cos s\alpha d\alpha.$$

Es ist also $b_s$ ganz von derselben Form als das Integral, welches den Werth von $a_s$ angab, nur dass für $f(x)$ der Ausdruck:

$$f(x) + f(2\pi - x) + f(2\pi + x) + f(4\pi - x) + f(4\pi + x) + \cdots f(2h\pi - x)$$

zu setzen ist. Dieser Ausdruck ist also gleich

$$\frac{b_0}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} b_s \cos sx.$$

Wenn man also

$$x = 0$$

setzt, so wird:

$$f(0) + 2f(2\pi) + 2f(4\pi) + \cdots + 2f[2(h-1)\pi] + f(2h\pi) = \frac{b_0}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} b_s$$

oder

$$f(0) + f(2h\pi) + 2\sum_{s=1}^{s=h-1} f(2s\pi) = \frac{b_0}{2} + \sum_{s=1}^{s=\infty} b_s.$$

Ist in dieser Formel $h$ eine grade Zahl, also gleich $2\mu$, und

$$f(x) = \cos\frac{x^2}{8\mu\pi},$$

so kommt:

$$\cos 0 + \cos(2\mu\pi) + 2\sum_{s=1}^{s=2\mu-1} \cos\frac{s^2\pi}{2\mu} = \frac{1}{\pi}\int_0^{4\mu\pi} \cos\frac{\alpha^2}{8\mu\pi} d\alpha$$

$$+ \frac{2}{\pi}\sum_{s=1}^{s=\infty} \int_0^{4\mu\pi} \cos s\alpha \cos\frac{\alpha^2}{8\mu\pi} d\alpha =$$

$$\frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{4\mu\pi} \Big\{ \cdots \cos\Big(\frac{\alpha^2}{8\mu\pi} - 3\alpha\Big) + \cos\Big(\frac{\alpha^2}{8\mu\pi} - 2\alpha\Big) + \cos\Big(\frac{\alpha^2}{8\mu\pi} - \alpha\Big)$$

$$+ \cos\frac{\alpha^2}{8\mu\pi} + \cos\Big(\frac{\alpha^2}{8\mu\pi} + \alpha\Big) + \cos\Big(\frac{\alpha^2}{8\mu\pi} + 2\alpha\Big) + \cos\Big(\frac{\alpha^2}{8\mu\pi} + 3\alpha\Big) + \cdots \Big\} d\alpha\Big],$$

eine Reihe, die nach beiden Seiten hin sich ins Unendliche erstreckt.

Es ist auch ohne Weiteres klar, dass wenn man setzt:

$$f(x) = \sin\frac{x^2}{8\mu\pi},$$

man auf gleiche Weise erhält:

$$\sin 0 + \sin(2\mu\pi) + 2\sum_{s=1}^{s=2\mu-1} \sin\frac{s^2\pi}{2\mu} = \frac{1}{\pi}\Big[\int_0^{4\mu\pi}\Big\{\cdots\cdots \sin\left(\frac{\alpha^2}{4\mu\pi}-3\alpha\right)$$

$$+ \sin\left(\frac{\alpha^2}{4\mu\pi}-2\alpha\right) + \sin\left(\frac{\alpha^2}{4\mu\pi}-\alpha\right) + \sin\frac{\alpha^2}{4\mu\pi} + \sin\left(\frac{\alpha^2}{4\mu\pi}+\alpha\right) + \sin\left(\frac{\alpha^2}{4\mu\pi}+2\alpha\right)$$

$$+ \sin\left(\frac{\alpha^2}{4\mu\pi}+3\alpha\right) + \cdots\Big\}d\alpha\Big].$$

Setzt man in beide Formeln:

$$y - 4n\mu\pi \text{ für } \alpha,$$

wenn das Argument unter dem Cosinus oder Sinuszeichen $\frac{\alpha^2}{8\mu\pi}+n\alpha$ beträgt, dagegen

$$y + 4n\mu\pi \text{ für } \alpha,$$

wenn das Argument $\frac{\alpha^2}{8\mu\pi}-n\alpha$ ist, so kommt:

$$\cos(0) + \cos(2\mu\pi) + 2\sum_{s=1}^{s=2\mu-1} \cos\frac{s^2\pi}{2\mu} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\frac{\alpha^2}{8\mu\pi}d\alpha$$

$$\sin(0) + \sin(2\mu\pi) + 2\sum_{s=1}^{s=2\mu-1} \sin\frac{s^2\pi}{2\mu} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\frac{\alpha^2}{8\mu\pi}d\alpha.$$

Führt man für $\frac{\alpha}{\sqrt{8\mu\pi}}$ eine neue Veränderliche ein, und setzt $4\mu = n$, so kommt:

$$\cos(0) + \cos\frac{n\pi}{2} + 2\sum_{s=1}^{s=\frac{n}{2}-1} \cos\frac{2s^2\pi}{n} = c\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$$

$$\sin(0) + \sin\frac{n\pi}{2} + 2\sum_{s=1}^{s=\frac{n}{2}-1} \sin\frac{2s^2\pi}{n} = g\sqrt{\frac{2n}{\pi}},$$

wo

$$c = \int_{-\infty}^{+\infty}\cos\alpha^2 d\alpha,\quad g = \int_{-\infty}^{+\infty}\sin\alpha^2 d\alpha$$

zu setzen ist.

Die Theorie der bestimmten Integrale (siehe den Artikel Quadraturen) lehrt, dass $c = g = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ist. Indess soll dies hier nicht vorausgesetzt werden, da, wie man gleich erkennen wird, die Rechnung selbst auf dies Resultat führt.

Es ist nun

$$\cos s^2\frac{2\pi}{n} = \cos(n-s)^2\frac{2\pi}{n},$$

$$\sin s^2\frac{2\pi}{n} = \sin(n-s)^2\frac{2\pi}{n},$$

wie leicht ersichtlich, wenn man den Ausdruck $(n-s)^2$ berechnet, also auch:

$$2\sum_{s=1}^{s=\frac{n}{2}-1} \cos\frac{2s^2\pi}{n} = \sum_{s=1}^{s=n-1}\left(\cos\frac{2s^2\pi}{n} - \cos 2\left(\frac{n}{2}\right)^2\frac{\pi}{n}\right),$$

$$2\sum_{s=1}^{s=\frac{n}{2}-1} \sin\frac{2s^2\pi}{n} = \sum_{s=1}^{s=n-1}\left(\sin\frac{2s^2\pi}{n} - \sin 2\left(\frac{n}{2}\right)^2\frac{\pi}{n}\right),$$

also:

$$c\sqrt{\frac{2n}{\pi}} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \cos\frac{s^2 2\pi}{n},$$

$$g\sqrt{\frac{2n}{\pi}} = \sum_{s=0}^{s=n-1} \sin\frac{s^2 2\pi}{n}.$$

Setzt man in diesen beiden letzten Formeln $n=4$, so kommt:

$$c\sqrt{\frac{8}{\pi}} = \cos 0 + \cos\frac{\pi}{2} + \cos 2\pi + \cos\frac{9\pi}{2} = 2$$

und

$$g\sqrt{\frac{8}{\pi}} = \sin 0 + \sin\frac{\pi}{2} + \sin 2\pi + \sin\frac{9\pi}{2} = 2;$$

aus diesen Formeln ergibt sich das oben angegebene Resultat:

$$c = g = \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

also ist:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \cos\left(\frac{s^2 2\pi}{n}\right) = \sqrt{n},$$

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} \sin\left(\frac{s^2 2\pi}{n}\right) = \sqrt{n}.$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit $i=\sqrt{-1}$, und addirt sie zur vorletzten, so hat man:

$$\sum_{s=0}^{s=n-1} e^{s^2 \frac{2\pi i}{n}} = (1+i)\sqrt{n}.$$

Es soll jetzt der Ausdruck:

$$\varphi(h, n) = \sum_{s=0}^{s=n-1} e^{s^2 \frac{2h\pi i}{n}}$$

allgemein betrachtet werden, wo $h$ und $n$ ganze Zahlen, $n$ aber nicht mehr der Bedingung unterworfen ist, von der Form $4\mu$ zu sein.

Ausserdem nehmen wir noch an, dass $h$ und $n$ relativ einfache Zahlen sind, jedoch kann $h$ auch negativ sein, $n$ ist dagegen stets positiv.

Es ist dann:

$$\varphi(km, n) \cdot \varphi(kn, m) = \sum_{s=0}^{s=n-1} e^{s^2 \frac{2km\pi i}{n}} \sum_{t=0}^{t=m-1} e^{t^2 \frac{2kn\pi i}{m}}$$

$$= \sum_{s=0}^{s=n-1} \sum_{t=0}^{t=m-1} e^{(s^2 m^2 + t^2 n^2)\frac{2k\pi i}{mn}}.$$

Offenbar kann man in dieser Exponentialgrösse zum Ausdrucke $s^2m^2+t^2n^2$ im Exponenten eine Zahl hinzufügen, die durch $mn$ theilbar, oder was dasselbe ist, nach Modul $mn$ mit Null kongruent ist, da $e^{2\mu\pi i}=1$, wenn $\alpha$ eine ganze Zahl ist. Thut man dies und wählt dazu die Grösse $2stmn$, so kommt:

$$\varphi(km, n) + \varphi(kn, m) = \sum_{s=0}^{s=n-1} \sum_{t=0}^{t=m-1} e^{(sm+tn)^2 \frac{2k\pi i}{mn}},$$

wo für $sm+tn$ auch natürlich jeder damit für Modul $mn$ congruente Werth gesetzt werden kann, also auch die Reste von $sm+tn$.

Setzt man für $s$ alle Zahlen von 0 bis $n-1$, für $t$ von 0 bis $m-1$, so werden nie zwei congruente Werthe vorkommen. Denn wäre z. B.:

$$sm + tn \equiv s'm + t'n \bmod (mn),$$

so wäre auch:

$$(s-s')m + (t-t')n \equiv 0 \bmod (mn),$$

was nur möglich ist, wenn $s-s'$ durch $n$, $t-t'$ durch $m$ theilbar ist, ein Fall, der hier nicht stattfinden kann.

Es dürfen also in unserer Summe für $sm+tn$ nach der Reihe alle Reste von $mn$ gesetzt werden, so dass man hat:

$$q(km, n) + q(kn, m) = \sum_{r=0}^{r=mn-1} e^{r^2 \frac{2k\pi i}{mn}}$$

oder:

$$\text{I)} \qquad q(km, n)\, q(kn, m) = q(k, mn).$$

Sei $\alpha$ relativ einfach zu $n$, so hat man:

$$q(h\alpha^2, n) = \sum_{s=0}^{s=n-1} e^{s^2 \frac{2h\alpha^2\pi i}{n}}.$$

Für $\alpha s$ kann in dieser Formel der Rest nach $n$ gesetzt werden. Man erhält aber als Reste die Zahlen $0, 1, 2 \cdots n-1$, so dass sich ergibt:

$$q(h\alpha^2, n) = \sum_{r=0}^{r=n-1} e^{r^2 \frac{2h\pi i}{n}}$$

oder

$$\text{II)} \qquad q(h\alpha^2, n) = q(h, n),$$

In ganz einfacher Weise findet man die Formel:

$$\text{III)} \qquad q(h, n) = q(k, n),$$

wenn

$$h \equiv k \bmod n$$

ist. Die oben gegebene Reihe gab den Werth von $q(1, n)$, nämlich:

$$q(1, n) = \sqrt{n}(1+i)$$

für den Fall, wo $n$ die Form $4\mu$ hatte.

Ist $n$ aber eine ungrade Zahl, so gibt die Formel II, wenn man darin $\alpha = 2$ setzt:

$$q(1, n) = q(4, n).$$

Aus der Formel I aber folgt, wenn man $k=1$, $m=4$ annimmt:

$$q(4, n)\, q(n, 4) = q(1, 4n),$$

und da in dem Ausdruck $q(1, 4n)$ das zweite Argument die vorgeschriebene Form hat:

$$q(4, n)\, q(n, 4) = 2(1+i)\sqrt{n}.$$

Da man in $q(n, 4)$ nach Formel III für $n$ jeden Werth setzen kann, der nach Modul 4 mit $n$ congruent ist, und da $n$ ungrade war, so ist:

$$q(n, 4) = q(1, 4), \text{ wenn } n \text{ von der Form } 4\mu+1 \text{ ist,}$$
$$q(n, 4) = q(3, 4), \text{ wenn } n \text{ von der Form } 4\mu+3 \text{ ist.}$$

Nun ist aber:

$$q(1, 4) = 1 + e^{\frac{\pi}{2}i} + e^{\frac{4}{2}\pi i} + e^{9\frac{\pi}{2}i} = 2(1+i)$$

und da $q(4, n) = q(1, n)$ war, so ist, wenn $n$ die Form $4\mu+1$ hat:

$$q(1, n)\, q(1, 4) = 2(1+i)\sqrt{n}$$

oder:

$$q(1, n) = \sqrt{n}.$$

Dann ist

$$q(3, 4) = 1 + e^{\frac{3}{2}\pi i} + 1 + e^{9\cdot\frac{3}{2}\pi i} = 2(1-i);$$

also wenn $n$ die Form $4\mu+3$ hat:

$$q(1, n)\, q(3, 4) = 2(1+i)\sqrt{n}$$

und da

$$\frac{1+i}{1-i} = i$$

$$q(1, n) = i\sqrt{n}.$$

Noch ist der Fall zu untersuchen, wo $n$ von der Form $4\mu+2$ ist.

Nach der Formel I ist:

$$q(1, n) = q\left(1, 2\cdot\frac{n}{2}\right) = q\left(2, \frac{n}{2}\right)\cdot q\left(\frac{n}{2}, 2\right),$$

aber $\varphi\left(\frac{n}{2}, 2\right)$ ist nach Formel III gleich $\varphi(1, 2)$,

$$\varphi(1,2) = 1 + e^{\pi i} = 0,$$

also ist in diesem Falle

$$\varphi(1, n) = 0.$$

Die vier Werthe von $\varphi(1, n)$ sind also:

$\varphi(1, n) = (1+i)\sqrt{n}$, wenn $n$ von der Form $4\mu$ ist,

$\varphi(1, n) = \sqrt{n}$, wenn $n$ von der Form $4\mu+1$ ist,

$\varphi(1, n) = 0$, wenn $n$ von der Form $4\mu+2$ ist,

$\varphi(1, n) = i\sqrt{n}$, wenn $n$ von der Form $4\mu+3$ ist.

Die beiden Fälle, wo $n$ ungrade ist, lassen sich aber auch in einen vereinigen durch folgende Betrachtung.

Das Quadrat jeder ungraden Zahl hat die Form:

$$(2n \pm 1)^2 = 4n^2 \pm 4n + 1,$$

lässt also durch 4 getheilt den Rest 1, das Quadrat jeder graden Zahl dagegen ist durch 4 theilbar. Man kann also für ungrade $n$ setzen:

$$\varphi(1, n) = \sqrt{n}\, i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2},$$

denn der Factor von $\sqrt{n}$ ist 1 oder $i$, je nachdem $n$ die Form $4\mu+1$ oder $4\mu+3$ hat.

In Abschnitt 11 wurde gezeigt, dass es in der Zahlenreihe

$$1, 2, 3 \ldots p-1$$

$\frac{p-1}{2}$ quadratische Reste, also ebensoviel Nichtreste gebe.

Die ersteren wollen wir mit

$$a_1, a_2 \ldots a_{\frac{p-1}{2}},$$

die letzteren mit

$$b_1, b_2 \ldots b_{\frac{p-1}{2}}$$

bezeichnen.

Man denke sich unter $a_s$ ein bestimmtes Glied der ersten, unter $b_s$ der zweiten Reihe, unter $a$, $b$ beliebige Glieder der bezüglichen Reihen.

Es lässt sich dann zeigen, „dass die Ausdrücke $aa_s$ oder $bb_s$, wenn man darin für $a$ oder $b$ alle Werthe setzt, alle Glieder der ersten Reihe, dagegen $ba_s$ und $ab_s$ alle Glieder der zweiten Reihe als Reste ergehen."

Denn ist

$$k \equiv s^2 \text{ und } l \equiv t^2 \bmod p,$$

so ist auch

$$kl \equiv s^2 t^2 \bmod p,$$

also $kl$ ein quadratischer Rest von $p$. Hieraus folgt, dass $aa_s$ immer ein Glied der ersten Reihe als Rest hat, alle Werthe von $aa_s$ aber sind incongruent, so dass sich alle Glieder der Reihe ergeben müssen.

Es ist dann auch ersichtlich, dass $ba_s$ alle übrigen Reste, also sämmtliche Glieder der zweiten Reihe geben muss. Der Ausdruck $ab_s$, der ebenfalls immer verschiedene Reste für wechselndes $a$ gibt, kann keine Glieder der ersten Reihe zu Resten haben. Denn wäre:

$$ab_s \equiv \alpha^2 \bmod p,$$

so wäre

$$a \equiv \alpha'^2 \bmod p,$$

da $a$ immer einem Quadrate congruent ist, also

$$b_s \alpha'^2 \equiv \alpha^2.$$

Nun bestimme man die Zahl $z$ so, dass sie die Congruenz:

$$z\alpha' \equiv \alpha \bmod p$$

erfüllt, so ist auch:

$$z^2\alpha'^2 \equiv b_s \alpha'^2 \bmod p,$$

d. h.

$$z^2 \equiv b_s,$$

was der Annahme widerspricht.

Die Grössen $ab_s$ enthalten also alle Glieder der zweiten Reihe, und die mit ihnen und unter einander incongruenten Werthe von $bb_s$ die Glieder der ersten Reihe, was zu beweisen war.

Wir verstehen nun in dem Ausdrucke $\varphi(h, p)$ unter $p$ irgend eine ungrade Primzahl. Es ist dann:

$$\varphi(h,p) = \sum_{s=0}^{s=p-1} e^{hs^2\frac{2\pi i}{p}} = 1 + \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{hs^2\frac{2\pi i}{p}} + \sum_{s=\frac{p+1}{2}}^{s=p-1} e^{hs^2\frac{2\pi i}{p}}.$$

Es sind aber die Zahlen $s$ der zweiten Reihe, mit entgegengesetzten Vorzeichen genommen, denen der ersten entsprechend congruent nach Modul $p$, also ihre Quadrate congruent den Quadraten der ersten Reihe, so dass die beiden Summen gleiches Resultat geben, und man hat:

$$\varphi(h,p) = 1 + 2\Sigma e^{ha\frac{2\pi i}{p}};$$

es sind nämlich statt der Werthe $s^2$ ihre Reste $a$ gesetzt, so dass die Reihe der $a$ wie oben alle quadratischen Reste von $p$ umfasst.

Ist nun $h$ quadratischer Rest von $p$, so geben die $ha$ alle quadratischen Reste $a$, ist dagegen $h$ Nichtrest, alle Nichtreste $b$ von $p$.

Es ist also:

$$\varphi(h,p) = 1 + 2\Sigma e^{a\frac{2\pi i}{p}},$$

wenn $h$ quadratischer Rest von $p$ ist, und

$$\varphi(h,p) = 1 + 2\Sigma e^{b\frac{2\pi i}{p}},$$

wenn $h$ Nichtrest ist.

Uebrigens ist:

$$\Sigma e^{a\frac{2\pi i}{p}} + \Sigma e^{b\frac{2\pi i}{p}} = \sum_{s=1}^{s=p-1} e^{\frac{2s\pi i}{p}}.$$

Die Summe rechts bildet eine geometrische Reihe, und als Werth derselben ergibt sich:

$$\frac{1 - e^{2s\pi i}}{1 - e^{\frac{2s\pi i}{p}}} - 1 = -1,$$

also:

$$\Sigma e^{b\frac{2\pi i}{p}} = -1 - \Sigma e^{a\frac{2\pi i}{p}}.$$

Setzen wir jetzt wieder

$$\left(\frac{h}{p}\right) = +1 \text{ oder } = -1,$$

je nachdem $h$ quadratischer Rest oder Nichtrest von $p$ ist, so ist offenbar:

$$\varphi(h,p) = \left(\frac{h}{p}\right)\left(1 + 2\Sigma e^{a\frac{2\pi i}{p}}\right)$$

oder da:

$$\varphi(1,p) = 1 + 2\Sigma e^{a\frac{2\pi i}{p}} = \sqrt{n}\, i^{\left(\frac{n-1}{2}\right)^2}.$$

$$\varphi(h,p) = \left(\frac{h}{p}\right)\varphi(1,p)$$

oder:

$$\text{IV)} \qquad \varphi(h,p) = \left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}.$$

Ist aber auch $h$ eine ungrade Primzahl, so ist:

$$\varphi(p,h) = \left(\frac{p}{h}\right) i^{\left(\frac{h-1}{2}\right)^2}\sqrt{h};$$

also, wenn man beide Gleichungen multiplicirt:

$$\varphi(h,p)\,\varphi(p,h) = \left(\frac{h}{p}\right)\left(\frac{p}{h}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{h-1}{2}\right)^2}\sqrt{ph}.$$

Nach der mit I bezeichneten Formel ist aber offenbar:

$$\varphi(p,h)\,\varphi(h,p) = \varphi(1,hp) = i^{\left(\frac{hp-1}{2}\right)^2}\sqrt{ph},$$

also:

$$\left(\frac{h}{p}\right)\left(\frac{p}{h}\right) = i^{\left(\frac{hp-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{h-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2}.$$

Aber es ist:

$$\left(\frac{hp-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{h-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}(h^2p^2 - h^2 - p^2 - 2hp + 2h + 2p - 1)$$
$$= \tfrac{1}{4}[(h^2-1)(p^2-1) - 2(h-1)(p-1)].$$

Es ist aber $h$ ungrade, also

$$h^2-1=(2s+1)^2-1=4s^2+4s=4s(s+1),$$

also, da entweder $s$ oder $s+1$ grade ist, so ist $h^2-1$ jedenfalls durch 8 theilbar, also ist $\frac{(h^2-1)\,(p^2-1)}{4}$ immer durch 4 theilbar, der entsprechende Ausdruck $i^{\frac{(h^2-1)\,(p^2-1)}{4}}$ gibt also Eins, und man hat, da

$$i^{\frac{-2(h-1)(p-1)}{4}}=(-1)^{\frac{h-1}{2}\frac{p-1}{2}}$$

ist:

$$\left(\frac{h}{p}\right)\left(\frac{p}{h}\right)=(-1)^{\frac{h-1}{2}\frac{p-1}{2}}.$$

Dies ist offenbar das Reciprocitätsgesetz, wie es vorhin festgestellt wurde.

Setzt man $h=8$, so kommt:

$$\varphi(8,p)=\varphi(2,p)$$

nach Formel II und

$$\varphi(8,p)=\left(\frac{2}{p}\right)i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2}\sqrt{p}$$

nach Formel IV.

Multiplieiren wir jetzt mit $\varphi(p,8)$, so ist:

$$\varphi(p,8)\;\varphi(8,p)=\varphi(1,8p)=\sum_{s=0}^{s=7}e^{\frac{ps^2\pi i}{4}}$$

und auch

$$\varphi(1,8p)=(1+i)\sqrt{8p}.$$

Für $s=0$ kommt in der vorletzten Formel rechts das Glied 1, ebenso für $s=4$; $s=5$, $s=6$, $s=7$ geben bezüglich dieselben Resultate als $s=1$, $s=2$, $s=3$.

Ausserdem geben noch $s=1$, und $s=3$ gleiche Werthe, so dass man erhält:

$$\varphi(p,8)=2+4e^{p\frac{\pi}{4}i}+2e^{p\pi i}=4e^{p\frac{\pi}{4}i}=4\left(e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^{p-1}e^{\frac{\pi}{4}i}=4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{p-1}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=4i^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right).$$

Setzt man die Werthe von $\varphi(p,8)$ und $\varphi(8,p)$ in die Formeln:

$$\varphi(p,8)\varphi(8,p)=\varphi(1,8p)=(1+i)\sqrt{8p},$$

so hat man:

$$1=\left(\frac{2}{p}\right)i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2+\frac{p-1}{2}}=\left(\frac{2}{p}\right)i^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{p+1}{2}}=\left(\frac{2}{p}\right)(-1)^{\frac{p^2-1}{8}},$$

also:

$$\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}.$$

Es ist dies das Ergänzungsgesetz zum Reciprocitätsgesetze, welches man also auch durch diese Betrachtungen finden kann.

Dirichlet hat diesen Betrachtungen indessen noch viel weitere Anwendungen gegeben; das Betreffende ist in dem Artikel quadratische Formen, und in den daselbst citirten Abhandlungen nachzulesen.

Wir begnügen uns hier noch eine Formel zu geben, welche in dem angeführten Artikel angewandt worden ist.

Es war

$$\varphi(h,p)=\left(\frac{h}{p}\right)\left(1+2\Sigma e^{a\frac{2\pi i}{p}}\right)$$

aber auch:

$$\varphi(h,p)=-\left(\frac{h}{p}\right)\left(1+2\Sigma e^{b\frac{2\pi i}{p}}\right),$$

da

$$\Sigma e^{b\frac{2\pi i}{p}}=-1-\Sigma e^{a\frac{2\pi i}{p}}$$

sich ergeben hat.

Ausserdem ergiebt sich:

$$\left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{\pi} = \psi(h, p) = \sum_{s=0}^{s=p-1} e^{s^2 h \frac{2\pi i}{p}} = 1 + 2 \sum_{s=1}^{s=\frac{p-1}{2}} e^{s^2 h \frac{2\pi i}{p}}$$

$$= 1 + 2 \Sigma e^{ha \frac{2\pi i}{p}}.$$

Es ist aber:

$$\Sigma e^{ah \frac{2\pi i}{p}} + \Sigma e^{bh \frac{2\pi i}{p}} + 1 = 0$$

Subtrahirt man also, so erhält man:

$$\left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)^2} \sqrt{p} = \Sigma e^{ha \frac{2\pi i}{p}} - \Sigma e^{hb \frac{2\pi i}{p}}$$

oder, da die $a$ und $b$ zusammen alle Werthe von 1 bis $p-1$ umfassen:

$$\left(\frac{h}{p}\right) i^{\left(\frac{p-1}{2}\right)} \sqrt{p} = \sum_{m=1}^{m=p-1} \left(\frac{m}{p}\right) e^{2m \frac{h\pi i}{p}}.$$

Es ist nämlich jedes Glied, wo $m$ quadratischer Rest ist, mit $+1$, und wo $m$ Nichtrest ist, mit $-1$ multiplicirt.

Jedoch darf hier $h$ nicht durch $p$ theilbar sein; ist dies der Fall, so wird jede der beiden Summen rechts gleich Eins, also die linke Seite gleich Null.

15) **Anwendungen des Reciprocitätsgesetzes.**

Eine der einfachsten Anwendungen ist die, „zu bestimmen, ob eine gegebene Zahl quadratischer Rest einer Primzahl sei."

Sei die Primzahl z. B. 101; es fragt sich ob 77 ein quadratischer Rest von ihr ist oder nicht, d. h. ob

$$\left(\frac{77}{101}\right) = +1 \text{ oder } = -1$$

wird. Man hat:

$$\left(\frac{77}{101}\right) = \left(\frac{7}{101}\right)\left(\frac{11}{101}\right).$$

Da 101 von der Form $4n+1$ ist, so wird:

$$\left(\frac{7}{101}\right) = \left(\frac{101}{7}\right) = \left(\frac{3}{7}\right).$$

Es kann nämlich für 101 der Rest davon nach 7 geschrieben werden. Da aber 7 von der Form $4n+3$ ist, so hat man:

$$\left(\frac{3}{7}\right) = -\left(\frac{7}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) = -1.$$

Ferner ist:

$$\left(\frac{11}{101}\right) = \left(\frac{101}{11}\right) = \left(\frac{2}{11}\right) = -1,$$

also:

$$\left(\frac{77}{101}\right) = (-1)\cdot(-1) = +1,$$

d. h. 77 ist quadratischer Rest von 101.

Wir fragen ferner ob 43 quadratischer Rest von 883 ist.

Die Zahl 883 hat die Form $4n+3$, also:

$$\left(\frac{43}{883}\right) = -\left(\frac{883}{43}\right) = -\left(\frac{23}{43}\right) = +\left(\frac{43}{23}\right)$$

$$= \left(\frac{20}{23}\right) = \left(\frac{4}{23}\right)\left(\frac{5}{23}\right)$$

$$\left(\frac{4}{23}\right) = \left(\frac{2}{23}\right)^2 = +1$$

$$\left(\frac{5}{23}\right) = \left(\frac{23}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right) = \left(\frac{5}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right) = -1$$

oder 43 Nichtrest von 883.

Man sieht, dass man bei diesem Verfahren immer auf die Formen $\left(\frac{1}{p}\right) = 1$, oder $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$ gelangen muss.

Stellt man jetzt die Frage: „Welche Zahlen in der Reihe 1, 2, 3 . . . $p-1$

sind quadratische Reste von $p$, wenn $p$ eine ungrade Primzahl ist?" so ergibt sich die Antwort aus folgender Betrachtung. Wir wollen wie oben die Reste mit

$$a_1, a_2 \cdots a_{\frac{p-1}{2}},$$

die Nichtreste mit

$$b_1, b_2 \cdots b_{\frac{p-1}{2}}$$

bezeichnen.

Berechnet man dann die Reste aller Quadratzahlen:

$$1^2, 2^2, 3^2 \cdots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

so hat man alle quadratischen Reste, und die übrigen sind Nichtreste.

Seien z. B. die Reste und Nichtreste von 37 zu bestimmen:

$$1^2 \equiv 1,\ 2^2 \equiv 4,\ 3^2 \equiv 9,\ 4^2 \equiv 16,\ 5^2 \equiv 25,$$
$$6^2 \equiv 36,\ 7^2 \equiv 12,\ 8^2 \equiv 12+15 \equiv 27,$$
$$9^2 \equiv 27+17 \equiv 7,\ 10^2 \equiv 7+19 \equiv 26,$$
$$11^2 \equiv 26+21 \equiv 10,\ 12^2 \equiv 10+23 \equiv 33,$$
$$13^2 \equiv 33+25 \equiv 21,\ 14^2 \equiv 21+26 \equiv 11,$$
$$15^2 \equiv 11+29 \equiv 3,\ 16^2 \equiv 3+31 \equiv 34,$$
$$17^2 \equiv 34+33 \equiv 30,\ 18^2 \equiv 30+35 \equiv 28.$$

Die Berechnung der Reste der Quadrate ist hier in der Weise geschehen, dass man zu dem Reste von $s^2$ die Zahl $2s+1$ addirt, um den Rest von $(s+1)^2$ zu finden, es beruht dies einfach auf der Formel:

$$s^2+2s+1=(s+1)^2.$$

Die quadratischen Reste von 37 sind also:

1, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 12, 16, 21, 25, 26, 27, 28, 30, 33, 34, 36.

Die Nichtreste:

2, 5, 6, 8, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 29, 31, 32, 35.

Wir lösen aber jetzt mit Hülfe des Reciprocitätsgesetzes die umgekehrte Frage:

„Von welchen Primzahlen ist eine gegebene Zahl Rest oder Nichtrest."

Wir haben oben bereits gefunden, dass

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = +1 \text{ ist, wenn } p=4n+1,$$

dagegen:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = -1 \text{ ist, wenn } p=4n+3$$

ist.

Was den Ausdruck $\left(\frac{2}{p}\right)$ anbetrifft, so war:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = +1, \text{ wenn } p=8n+1 \text{ oder } p=8n+7,$$
$$\left(\frac{2}{p}\right) = -1, \text{ wenn } p=8n+3 \text{ oder } p=8n+5$$

war.

$$\left(\frac{-2}{p}\right) = \left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right).$$

Beide Factoren rechts haben positives Zeichen, wenn $p$ von der Form $8n+1$ ist, negatives, wenn $p$ von der Form $8n+3$ ist; in den beiden andern Fällen haben sie ungleiches Zeichen. Es ist also:

$$\left(\frac{-2}{p}\right) = +1, \text{ wenn } p=8n+1, \text{ oder } p=8n+3,$$
$$\left(\frac{-2}{p}\right) = -1, \text{ wenn } p=8n+5, \text{ oder } p=8n+7.$$

Ist $q$ nun eine beliebige ungrade Primzahl, so ist entweder $+q$ oder $-q$ von der Form $4n+1$, d. h.

$$\pm q \equiv 1 \bmod 4$$

Es ist aber:

$$\left(\frac{\pm q}{p}\right) = \left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{\pm 1}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{\pm 1}{p}\right)\left(-1\right)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

Ist $q$ von der Form $4n+1$, so ist das positive Zeichen zu nehmen, also

$$\left(\frac{1}{p}\right)=1, \text{ und } (-1)^{\frac{p-1}{2}.2n}=1.$$

Ist $q$ von der Form $4n+3$, so ist das negative Zeichen zu nehmen:

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=\pm 1, \quad \text{für } p=\begin{matrix}4n+1\\4n+3\end{matrix}$$

und auch

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}=\pm 1 \text{ für } p=\begin{matrix}4n+1\\4n+3,\end{matrix}$$

also in jedem Falle

$$\left(\frac{\pm 1}{p}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}=+1,$$

also:

$$\left(\frac{\pm q}{p}\right)=\left(\frac{p}{q}\right).$$

Das Zeichen $\pm$ bestimmte sich, je nachdem $q=4n+1$ oder $q=4n+3$ ist.

Ist nun $p$ ein quadratischer Rest von $q$, so ist $p$ eine Zahl der Reihe:

$$p=qn+a_1,\ qn+a_2,\ qn+a_3 \cdots qn+a_{\frac{p-1}{2}}.$$

Ist $p$ ein Nichtrest, so liegt $p$ in der Reihe:

$$p=qn+b_1,\ qn+b_2, \cdots qn+b_{\frac{p-1}{2}},$$

wo die $a$ und $b$ durch das vorhin beschriebene Verfahren leicht zu bestimmen sind.

Ist also $q$ von der Form $4n+1$, so werden auf die ersten Formen sich alle Primzahlen bringen lassen, von denen $q$ quadratischer Rest, auf die letztern die, von denen $q$ Nichtrest ist.

Ist $q$ von der Form $4n+3$, so ist $-q$ von der Form $4n+1$, also in derselben Weise wie oben werden die Primzahlen gefunden, von denen $-q$ quadratischer Rest ist, und wegen

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\left(\frac{-q}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right)$$

ergibt sich hieraus das Zeichen von $\left(\frac{q}{p}\right)$.

**Beispiel.** Die Primzahlen, von denen 37 quadratischer Rest ist, haben also die Form:

$37n+1$, $37n+3$, $37n+4$, $37n+7$,
$37n+9$, $37n+10$, $37n+11$, $37n+12$,
$37n+16$, $37n+21$, $37n+25$, $37n+26$,
$37n+27$, $37n+28$, $37n+30$, $37n+33$,
$37n+34$, $37n+36$.

Die quadratischen Reste von 7 sind:

1, 2, 4,

die Nichtreste

3, 5, 6.

Die Zahl 7 hat die Form $4n+3$:

$$\left(\frac{7}{p}\right)=\left(\frac{-7}{p}\right)\left(\frac{-1}{p}\right).$$

$-7$ ist quadratischer Rest der Primzahlen von der Form

$$7n+1,\ 7n+2,\ 7n+4,$$

Nichtrest der Primzahlen von der Form

$$7n+3,\ 7n+5,\ 7n+6.$$

Diejenigen Zahlen der ersten Reihe, die von der Form $4n+1$, und diejenigen der zweiten, welche von der Form $4n+3$ sind, werden also quadratische Reste von 7 sein.

Offenbar werden die Formen dieser Zahlen durch Auflösungen der unbestimmten Gleichungen

$$7n+1=4s+1,\ 7n+2=4s+1,$$
$$7n+4=4s+1$$

und

$$7n+3=4s+3,\ 7n+5=4s+3,$$
$$7n+6=4s+3$$

gefunden oder durch die Congruenzen:

$$7n\equiv 0,\ 7n\equiv -1,\ 7n\equiv -3 \mod 4,$$
$$7n\equiv 0,\ 7n\equiv -2,\ 7n\equiv -3 \mod 4.$$

Man erhält folgende Werthe von $n$:

$$n=4m,\ n=4m+1,\ n=4m+3,$$
$$n=4m,\ n=4m+2,\ n=4m+3,$$

und sonach haben die Primzahlen, von welchen 7 quadratischer Rest ist, oder die einen Factor von $x^2-7$ bilden, die Form:

$$28m+1,\ 28m+9,\ 28m+25,\ 28m+3,$$
$$28m+19,\ 28m+27.$$

16) **Betrachtung zusammengesetzter Zahlen.**

Wir haben bisher vorausgesetzt, dass in der Congruenz:

$$x^2 \equiv q \mod p$$

$p$ und $q$ Primzahlen waren. Es sei jetzt $L$ eine beliebige ganze Zahl, jedoch $p$ kein Factor von $L$. Unter $p$ wird noch immer eine Primzahl verstanden.

Wir betrachten jetzt den Ausdruck von

$$\left(\frac{\pm L}{p}\right), \text{ der } =\pm 1 \text{ ist,}$$

je nachdem $\pm L$ quadratischer Rest oder Nichtrest ist.

Wir haben bereits gesehen, dass man $L$ in seine einfachen Factoren $q_1, q_2, q_3 \cdots$ zerlegen und schreiben kann:

$$\left(\frac{\pm L}{p}\right) = \left(\frac{\pm q_1}{p}\right)\left(\frac{\pm q_2}{p}\right)\left(\frac{\pm q_3}{p}\right) \cdots$$

Es ist hierbei zunächst zu bemerken, dass jeder Factor $q$ in dieser Gleichung nur in der ersten Potenz vorkommt, in welcher Potenz er auch in $L$ enthalten sei. Denn die quadratischen Factoren $q^2$ von $L$ geben ja jedenfalls für $\left(\frac{q^2}{p}\right)$ als Werth $+1$, können also weggelassen werden.

Was das doppelte Vorzeichen betrifft, so nehmen wir für die Primzahlen $q$ von der Form $4n+1$ das Pluszeichen, für die von der Form $4n+3$ das Minuszeichen, so dass also nach dem vorigen Abschnitt immer:

$$\left(\frac{\pm q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)$$

ist.

Damit aber das Zeichen

von $\left(\frac{\pm L}{p}\right)$ mit dem von

$$\left(\frac{\pm q_1}{p}\right)\left(\frac{\pm q_2}{p}\right)\left(\frac{\pm q_3}{p}\right) \cdots$$

übereinstimme, ist nötbigen Falls zu dem Producte rechts noch $-1$ hinzuzufügen. Wenn wir ausserdem unter $q$ nur ungrade Primzahlen verstehen, so unterscheiden wir 4 Fälle, je nachdem zu dem Producte rechts noch die Factoren

$$+1, \ -1, \ \pm 2$$

hinzukommen.

I) Im ersten Falle ist nun:

$$\left(\frac{\pm L}{p}\right) = \left(\frac{\pm q_1}{p}\right)\left(\frac{\pm q_2}{p}\right)\left(\frac{\pm q_3}{p}\right) \cdots$$
$$= \left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right)\left(\frac{p}{q_3}\right) \cdots$$

Dieser Ausdruck aber ist $=+1$ oder $=-1$, je nachdem eine grade oder ungrade Anzahl von Factoren $\left(\frac{p}{q}\right)$ vorhanden ist, welche $-1$ ergeben.

Was nun die Primzahl $p$ anbetrifft, so kann sie, da sie in keinem der $q$ enthalten ist, nur die linearen Formen:

$$nq+1, \ nq+2, \ nq+3, \cdots nq+q-1$$

haben; dies gibt $q-1$ Formen für jedes $q$. Von diesen geben $\frac{q-1}{2}$ quadratische Reste und ebenso viel Nichtreste, und combinirt man diejenigen linearen Formen, welche $p$ in Bezug auf jedes der $q$ haben kann, und welche alle quadratische Reste, oder alle Nichtreste sind, so ist die Anzahl derselben:

$$\frac{1}{2^h}(q_1-1)(q_2-1)(q_3-1) \cdots,$$

wo $h$ die Anzahl der Factoren $q$ ist.

Um eine grade Anzahl Factoren negativ zu machen, können alle bis auf den letzten noch immer beliebiges Zeichen haben. Gibt man also jedem Factor bis auf den letzten irgend ein Zeichen, so entstehen $2^{h-1}$ Combinationen für jede Linearform, so dass man im Ganzen jetzt:

$$\tfrac{1}{2}(q_1-1)(q_2-1)(q_3-1) \cdots$$

Verbindungen hat.

Da, um die Linearformen zu bilden, welche $p$ in jedem Falle hat, die Linearformen $nq_1+\alpha$, $nq_2+\beta \cdots$ zu vereinen sind (Abschnitt 3), so werden die Grössen $q_1, q_2, q_3 \cdots$ mit einander multiplicirt, wodurch man das Product $L$ erhält.

Damit dann

$$\left(\frac{\pm L}{p}\right) = +1$$

sei, muss $p$ also eine der Formen haben:

$$p = Lt+A_1, \ Lt+A_2, \ Lt+A_3 \cdots,$$

wo die Zahlen $A_1, A_2, A_3, \cdots$ sich aus den Linearformen, die vereinigt wurden, nach Abschnitt 3 bestimmen lassen. Jedenfalls aber sind $A_1, A_2, A_3$ kleiner als $L$ zu nehmen.

Die Anzahl derjenigen Zahlen, welche kleiner als $L$ und zu $L$ relativ einfach sind, haben wir oben mit $\varphi(L)$ bezeichnet, und es ist:

$$\varphi(L) = (q_1-1)(q_2-1)(q_3-1) \cdots *).$$

*) Diese Formel lässt sich leicht beweisen. Sei ganz allgemein

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots,$$

wo $a, b, c$ die einfachen Factoren sind, $\alpha, \beta, \gamma$ die Potenzen anzeigen, in welchen sie vorkommen.

Von allen Zahlen, die kleiner als $m$ sind, werden nun durch $a$ theilbar sein die Zahlen:

$$a, \ 2a, \ 3a \cdots \frac{m \cdot a}{a};$$

also im Ganzen $\frac{m}{a}$. Es sind dann

Eine dieser Zahlen entspricht sicherlich aber dem Werthe von $A_1, A_2 \cdots$, da $p = Lt + A$ ja eine Primzahl ist.

Da nun die Anzahl der $p$, welche quadratische Reste von $L$ waren,

$\frac{1}{2}(q_1-1)(q_2-1)(q_3-1)\cdots$

betrug, so entspricht die Hälfte derjenigen Zahlen, welche kleiner als $L$ und zu $L$ relativ einfach sind, den quadratischen Resten, die andre Hälfte den Nichtresten.

Wir setzen ähnlich wie oben:

$$p = Lt + A_1, A_2, A_3 \cdots, \text{wenn} \left(\frac{\pm L}{p}\right) = +1,$$

durch $a$ nicht theilbar:

$$m - \frac{m}{a} = m\left(1 - \frac{1}{a}\right).$$

Durch $b$ sind theilhar:

$$b,\ 2b,\ 3b \cdots \frac{m}{b} \cdot b.$$

Von diesen sind durch $a$ diejenigen nicht theilbar, bei denen der erste Factor:

$$1,\ 2,\ 3 \cdots \frac{m}{b}$$

die Zahl $a$ nicht enthält. Die Anzahl derselben ist also

$$\frac{m}{b}\left(1 - \frac{1}{a}\right).$$

Es ist also weder durch $a$ noch durch $b$ theilbar die Anzahl:

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right) - \frac{m}{b}\left(1-\frac{1}{a}\right) = m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

Es zeigt sich ebenso, dass die Anzahl der durch $a, b, c \cdots$ nicht theilbaren Zahlen heträgt:

$$m\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right) \cdots = \frac{m(a-1)(b-1)(c-1)\cdots}{a,\ b,\ c \cdots} =$$

$$(a-1)a^{\alpha-1}(b-1)b^{\beta-1}(c-1)c^{\gamma-1}\cdots,$$

so dass man hat

$$\varphi(m) = (a-1)a^{\alpha-1}(b-1)b^{\beta-1}(c-1)c^{\gamma-1}\cdots$$

Bei unserm Ausdrucke $L$ waren alle Factoren nur in erster Potenz zu nehmen, so dass man hat:

$$\alpha = \beta = \gamma = \cdots = 1,$$

$$a = q_1,\ b = q_2,\ c = q_3 \cdots,$$

also:

$$\varphi(L) = (q_1-1)(q_2-1)(q_3-1)\cdots$$

dagegen:

$$p = Lt + B_1, B_2, B_3 \cdots, \text{wenn} \left(\frac{\pm L}{p}\right) = -1$$

ist.

Die Anzahl der $A$ und der $B$ ist also gleich. Die Grössen $A$ und $B$ ergehen sich nach Abschnitt 3) durch Vereinigung der Congruenzen:

$$x \equiv a \bmod q_1,\quad x \equiv a' \bmod q_2,$$
$$x \equiv b'' \bmod q_3 \cdots,$$

wo ein $a$ oder $b$ zu nehmen ist, je nachdem $p$ ein Rest oder Nichtrest des entsprechenden $q$ ist.

II) Betrachten wir jetzt den Fall, wo der Factor $-1$ hinzukommt, so ist:

$$\left(\frac{\pm L}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{\pm q_1}{p}\right)\left(\frac{\pm q_2}{p}\right)\left(\frac{\pm q_3}{p}\right)\cdots$$
$$= (-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{q_1}\right)\left(\frac{p}{q_2}\right)\left(\frac{p}{q_3}\right)\cdots$$

Es gibt also $2^k$ verschiedene Zeichencombinationen, für welche $\left(\frac{\pm L}{p}\right)$ gleich $+1$ ist (unter $k$ wieder die Anzahl der $q$ verstanden), und für jede dieser Combinationen $\frac{q_1-1}{2}\ \frac{q_2-1}{2}\ \frac{q_3-1}{2} \cdots$ Linearformen.

Die Anzahl dieser Linearformen ist also:

$$(q_1-1)(q_2-1)(q_3-1)\cdots;$$

da aher hier zu den Congruenzen

$$x \equiv a \bmod q_1,\quad x \equiv a' \bmod q_2,$$
$$x \equiv b'' \bmod q_3 \cdots$$

wegen des Factors $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ noch hinzutritt:

$$x \equiv 1 \bmod 4 \text{ oder } x \equiv 3 \bmod 4,$$

so beziehen sich die zu lösenden Congruenzen auf Modul $4L$, und man hat:

$$p = 4Lt + A_1,\ A_2,\ A_3 \cdots,$$

wenn $\left(\frac{\pm L}{p}\right) = +1$ ist. Dies ist aher wieder die Hälfte aller möglichen Formen. Denn

$$\varphi(4L) = 2(q_1-1)(q_2-1)(q_3-1)\cdots$$

ist doppelt so gross als die Anzahl der Linearformen, welche $\pm L$ zum quadratischen Reste von $p$ machen. Ist $\pm L$ ein Nichtrest, so kann man ebenfalls:

$$p = 4Lt + B_1,\ B_2,\ B_3 \cdots$$

setzen, wo die Anzahl der $B$ derjenigen der $A$ gleich ist.

III) Sei endlich

$$\left(\frac{\pm L}{p}\right) = \left(\frac{\pm 2}{p}\right)\left(\frac{\pm q_1}{p}\right)\left(\frac{\pm q_2}{p}\right)\left(\frac{\pm q_3}{p}\right)\ldots$$

Der Ausdruck $\left(\frac{\pm 2}{p}\right)$ gab nach Abschnitt 15) für jedes Vorzeichen je 2 Linearformen, die sich auf den Modul 8 bezogen. Man hat also für jede der $2^h$ Zeichencombinationen:

$$2\frac{q_1-1}{2}\,\frac{q_2-1}{2}\,\frac{q_3-1}{2}\ldots$$

Linearformen, d. h. im Ganzen:

$$2(q_1-1)(q_2-1)(q_3-1)\ldots$$

von der Form

$$4Lt+A_1,\ A_2\ \ldots,$$

denn da $L$ den Factor 2 hat, ist

$$8\,q_1\,q_2\,q_3 = 4L\ \ldots$$

Es ist aber

$$q\,(4L) = 2q\,(L) = 4(q_1-1)\,(q_2-1)\,(q_3-1)\ldots$$

und man hat auch in diesem Falle die Hälfte aller möglichen Formen für die Reste wie für die Nichtreste.

**Beispiel.** Wir suchen alle Primzahlen, von denen $-15$ quadratischer Rest ist, oder die Factoren von $x^2+15$ sind.

$$-15 = -3\cdot 5.$$

Da 3 von der Form $4n+3$, 5 von der Form $4n+1$ ist, so setzt man:

$$\left(\frac{-15}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right)\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)\left(\frac{p}{5}\right).$$

Es findet der Fall I statt.

3 hat zum quadratischen Reste 1,
3 hat zum quadratischen Nichtreste 2.
5 hat zu quadratischen Resten 1, 4,
5 hat zu quadratischen Nichtresten 2, 3.

Es sind also für die Fälle, wo

$$\left(\frac{-15}{p}\right) = +1$$

sein soll, zu combiniren die Congruenzen:

$$x\equiv 1 \bmod 3,\quad x\equiv 1 \bmod 3,\quad x\equiv 2 \bmod 3,\quad x\equiv 2 \bmod 3,\quad x\equiv 1 \bmod 5,$$
$$x\equiv 4 \bmod 5,\quad x\equiv 2 \bmod 5,\quad x\equiv 3 \bmod 5.$$

Man erhält die Werthe von $x$ für jeden der 4 Fälle:

$$x = 15t+1,\ 15t+2,\ 15t+4,\ 15t+8.$$

Diese Formen haben $-15$ zum quadratischen Reste.

Da ausser 1, 2, 4, 8 noch die Zahlen 7, 11, 13, 14 zu 15 relativ einfach sind, so ergeben sich für die Primzahlen, von denen $-15$ Nichtrest ist, die Formen:

$$x = 15t+7,\ 15t+11,\ 15t+13,\ 15t+14.$$

Selbstverständlich könnte man auch statt dieses Verfahrens jede der Zahlen

1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14

untersuchen. Z. B.

$$\left(\tfrac{2}{3}\right) = -1,\quad \left(\tfrac{2}{5}\right) = -1,$$

also gehört 2 in die erste Klasse u. s. w.

17) **Erweiterung des Reciprocitätsgesetzes.**

Sei jetzt $P$ ein Product ungrader Primzahlen und setzen wir:

$$\left(\frac{k}{P}\right) = \left(\frac{k}{p}\right)\left(\frac{k}{p_1}\right)\left(\frac{k}{p_2}\right)\ldots,$$

wenn

$$P = p\,p_1\,p_2$$

ist. Mit andern Worten, es soll $\left(\frac{k}{P}\right)$ den Ausdruck $+1$ oder $-1$ bedeuten, je nachdem das Product rechts den einen oder den andern Werth hat. Da sich jede Zahl in Primzahlen zerlegen lässt, so lässt sich der Werth dieses Productes nach dem Vorigen immer bestimmen, was auch $k$ sei.

Es folgt aus unserer Annahme die Formel:

$$\left(\frac{k}{P.Q}\right) = \left(\frac{k}{P}\right)\left(\frac{k}{Q}\right).$$

Nach dem Vorigen aber ist auch:

$$\left(\frac{kl}{P}\right) = \left(\frac{k}{P}\right)\left(\frac{l}{P}\right).$$

Es ist ferner immer

$$\left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}}.$$

Dieser Satz war nämlich erwiesen für den Fall, dass $P$ eine Primzahl war. Gilt er aber für ein beliebiges $P$, so gilt er auch für $P' = Pp$, wo $p$ eine ungrade Primzahl ist, denn es ist

$$\left(\frac{-1}{Pp}\right) = \left(\frac{-1}{P}\right)\left(\frac{+1}{p}\right) = (-1)^{\frac{P+p-2}{2}},$$

aber

$$\frac{Pp-1}{2} - \frac{P+p-2}{2} = \frac{Pp-P-p+1}{2}$$
$$= \frac{(P-1)\,(p-1)}{2}$$

Da der Ausdruck $\frac{(P-1)(p-1)}{2}$ immer grade ist, so ist

$$(-1)^{\frac{Pp-1}{2}} = (-1)^{\frac{P+p-2}{2}}.$$

Es ist also unser Satz durch vollkommene Induction erwiesen. Denn durch Hinzufügung von Factoren $p$ kann man ja jede ungrade Zahl bilden.

Auch der Satz

$$\left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}}$$

bleibt richtig.

Es wird dies ebenfalls durch vollkommene Induction bewiesen, indem man wieder $P' = Pp$ schreibt, wo $p$ eine ungrade Primzahl ist:

$$\left(\frac{2}{P}\right)\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}+\frac{p^2-1}{8}} = (-1)^{\frac{P^2p^2-1}{8}},$$

denn

$$\frac{(Pp)^2 - 1 - P^2 + 1 - p^2 + 1}{8} = \frac{(P^2-1)(p^2-1)}{8}$$

und der Ausdruck rechts ist offenbar grade.

„Sind $P$ und $Q$ ungrade positive, sonst beliebige Zahlen, so bleibt für sie das Reciprocitätsgesetz richtig."

Denn sei zunächst $Q = q$ eine Primzahl, $P$ beliebig, und nehmen wir an, es gelte das Reciprocitätsgesetz für ein aus $m$ einfachen Factoren bestehendes $P$, so zeigt sich wieder, dass es auch für $P' = Pp$ gilt.

Nämlich es ist dann:

$$\left(\frac{q}{P}\right) = \left(\frac{P}{q}\right)(-1)^{\frac{P-1}{2}\frac{q-1}{2}},$$

$$\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}},$$

also:

$$\left(\frac{q}{Pp}\right) = \left(\frac{q}{P}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{Pp}{q}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}\left(\frac{P-1}{2}+\frac{p-1}{2}\right)} = \left(\frac{Pp}{q}\right)(-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{Pp-1}{2}},$$

was zu beweisen war.

Sei jetzt auch $Q$ eine zusammengesetzte Zahl, und $Q' = Qq$, wo $q$ eine ungrade Primzahl ist. Setzen wir wieder voraus, dass für $\left(\frac{Q}{P}\right)$ das Gesetz gelte, so ist:

$$\left(\frac{Qq}{P}\right) = \left(\frac{Q}{P}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = \left(\frac{P}{Qq}\right)(-1)^{\frac{P-1}{2}\left(\frac{q-1}{2}+\frac{Q-1}{1}\right)}$$

und, wie oben, folgt, dass man für $\frac{q-1}{2} + \frac{Q-1}{2}$ im Exponenten auch $\frac{Qq-1}{2}$ setzen kann.

Wir setzen jetzt

$$\left(\frac{k}{1}\right) = 1,$$

und geben somit auch dem Ausdrucke $\left(\frac{k}{P}\right)$ für $P = 1$ eine Bedeutung.

Ferner sei

$$\left(\frac{k}{-P}\right) = \frac{k}{P}.$$

Unter diesen Voraussetzungen wollen wir das Reciprocitätsgesetz wo möglich auch für negative Zahlen erweitern.

Es ist dann nämlich immer noch:

$$\left(\frac{k}{PQ}\right) = \left(\frac{k}{P}\right)\left(\frac{k}{Q}\right)$$

und auch

$$\left(\frac{kl}{P}\right) = \left(\frac{k}{P}\right)\left(\frac{l}{P}\right);$$

indessen nicht mehr:

$$\left(\frac{-1}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}},$$

denn es würde sich, wenn man $P$ negativ werden lässt, nicht die linke, wohl aber die rechte Seite ändern.

Dagegen findet der Satz

$$\left(\frac{2}{P}\right)=(-1)^{\frac{P^2-1}{8}}$$

offenbar noch Anwendung.

Hieraus lässt sich erweisen:

„Dass das Reciprocitätsgesetz dann noch gilt, wenn eine der Grössen $P$ oder $Q$ negativ, nicht, wenn es beide sind."

Denn sei $Q$ negativ, so ist:

$$\left(\frac{Q}{-P}\right)=\left(\frac{Q}{P}\right).$$

Multipliciren wir diese Gleichung mit:

$$1=\left(\frac{-1}{Q}\right)(-1)^{\frac{Q-1}{2}}$$

, welche Gleichung jedoch nur richtig ist, so lange $Q$ positiv ist, es kommt dann:

$$\left(\frac{Q}{-P}\right)=\left(\frac{-P}{Q}\right)(-1)^{\frac{Q-1}{2}\cdot\frac{P-1}{2}},$$

ein Satz, der falsch wird, wenn auch $Q$ negativ ist.

Ist dagegen $P$ positiv, $Q$ negativ, so folgt die Richtigkeit des Reciprocitätsgesetzes schon aus dem Obigen.

18) Quadratische Reste von nicht einfachen Zahlen.

Damit

$$x^2\equiv k \bmod m$$

ist, wo $m$ eine beliebige Zahl, also gleich $p^\alpha p_1{}^\beta p_2{}^\gamma \ldots$ ist, muss $x$ einzeln die Congruenzen

$$x^2\equiv k \bmod p^\alpha,\quad x^2\equiv k \bmod p_1{}^\beta,$$
$$x^2\equiv k \bmod p_2{}^\gamma$$

erfüllen.

Es lässt sich also die Frage nach den quadratischen Resten der zusammengesetzten Zahlen auf die der Potenzen von Primzahlen zurückführen.

Sei jetzt also

$$x^2\equiv k \bmod p^\alpha,$$

wo $p$ eine Primzahl ist, so beweisen wir, dass dieselbe für jeden Werth von $\alpha$ auflösbar ist, wenn dies für $\alpha=1$ stattfindet, also $k$ quadratischer Rest von $p$ ist.

Dieser Beweis wird wieder durch Induction geführt. Genügt $x=g$ der Congruenz

$$x^2\equiv k \bmod p^\alpha,$$

so ist auch

$$g+tp^\alpha$$

eine Lösung.

Es lässt sich aber $t$ so bestimmen, dass:

$$(g+tp^\alpha)^2-k\equiv 0 \bmod p^{\alpha+\alpha'}$$

wird, wo $\alpha'$ eine beliebige Zahl ist, die jedoch kleiner als oder höchstens gleich $\alpha$ sein soll.

Die letzte Congruenz gibt nämlich:

$$g^2-k+2gtp^\alpha+t^2p^{2\alpha}\equiv 0 \bmod p^{\alpha+\alpha'}$$

oder:

$$\frac{g^2-k}{p^\alpha}+2gt+t^2p^\alpha\equiv 0 \bmod p^{\alpha'}.$$

$t^2p^\alpha$ ist zugleich ein Vielfaches von $p^{\alpha'}$, und $\frac{g^2-k}{p^\alpha}$, offenbar eine ganze Zahl.

Es muss also auch sein:

$$2gt+\frac{g^2-k}{p^\alpha}\equiv 0 \bmod p^{\alpha'}.$$

Es ist $k$ relativ einfach zu $p$, also auch $g^2$, denn sonst wären gleichzeitig $g^2-k$ und $g^2$, also auch $k$ durch $p$ theilbar. Es sind also auch $g$ und $2g$ relativ einfach zu $p^{\alpha'}$. Dasselbe kann man auch für $\frac{g^2-k}{p^\alpha}$ beweisen. Denn wäre letzterer Ausdruck durch $p^s$ theilbar, so wäre:

$$g^2\equiv k \bmod p^{\alpha+s}$$

und man könnte $\alpha+s$ an die Stelle von $\alpha$ setzen. Unter diesen Umständen aber ist die Congruenz

$$2gt+\frac{g^2-k}{p^\alpha}\equiv 0 \bmod p^{\alpha'}$$

immer lösbar; woraus denn folgt, dass auch die Congruenz

$$x^2\equiv k \bmod p^{\alpha-\alpha'}$$

eine Lösung hat, und mithin dies auch für

$$x^2\equiv k \bmod p^\alpha$$

gilt, wo der Exponent von $p$ beliebig ist.

„Es hat aber die Congruenz

$$x^2\equiv k \bmod p^\alpha$$

immer 2 Wurzeln, wenn deren eine vorhanden ist."

Denn ist $g$ die eine Wurzel, so ist auch

$$(-g)^2 \equiv k \bmod p^\alpha.$$

Es ist also

$$x \equiv g \text{ oder } x \equiv -g.$$

Es kann aber auch nicht mehr als 2 Wurzeln geben. Denn sei

$$x^2 \equiv k \bmod p^\alpha \text{ und } g^2 \equiv k \bmod p^\alpha,$$

also:

$$x^2 - g^2 = (x-g)(x+g) \equiv 0 \bmod p^\alpha.$$

Es ist dies aber nur möglich, wenn entweder $x-g$ oder $x+g$ durch $p^\alpha$ ganz theilbar ist, also wenn $x \equiv \pm g$ ist.

Denn wären beide Factoren $x-g$ und $x+g$ durch $p$ theilbar, so wäre dies auch ihre Differenz $2g$, was, wie oben gezeigt, unmöglich ist.

Der Fall, wo $p=2$ ist, war hier nicht mit Inbegriffen, und ist besonders zu untersuchen. $k$ bedeutet hier eine ungrade Zahl.

Soll

$$x^2 \equiv k \bmod 4$$

sein, so muss $x^2$ als ein Quadrat einer ungraden Zahl die Form $4r+1$ haben, und gleiches muss mit $k$ der Fall sein. Es genügt dann jede ungrade Zahl dieser Congruenz, da es aber nur deren 2 incongruente, nämlich $4r+1$ und $4r+3$ gibt, so sind immer nur 2 Wurzeln vorhanden.

Der Congruenz

$$x^2 \equiv k \bmod 8$$

genügen dagegen alle ungraden Zahlen, wenn $k$ von der Form $8r+1$ ist. Die Congruenz hat also 4 Wurzeln.

In ähnlicher Weise untersucht man die höheren Potenzen von 2.

Sei jetzt allgemein gegeben:

$$x^2 \equiv k \bmod m,$$

wo

$$m = p^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots$$

ist und $p, p_1, p_2$ ungrade Primzahlen sind, so zerfällt diese in die einfachen Congruenzen:

$$x^2 \equiv k \bmod p^\alpha, \quad x^2 \equiv k \bmod p_1^{\alpha_1},$$
$$x^2 \equiv k \bmod p_2^{\alpha_2} \ldots$$

Es ergeben sich für jede dieser Congruenzen als Auflösungen lineare Formen, die sich in eine von der Gestalt:

$$x = sm + A, A_1, A_2 \ldots$$

vereinen lassen.

Ist $\mu$ die Anzahl der Primzahlen $p, p_1, p_2 \ldots$, die in $m$ enthalten sind, so ist $2^\mu$ die Anzahl dieser Formen, da jede Congruenz 2 Wurzeln gibt.

Ist aber

$$x^2 \equiv k \bmod 2m,$$

so kommt eine Linearform $2w+1$ hinzu; diese ändert in der Anzahl der Linearformen nichts, da ja

$$x^2 \equiv k \bmod 2$$

auch nur 2 Wurzeln hat, jedoch beziehen sie sich auf Modul $2m$ und es ist

$$x = 2sm + A, A_1, A_2 \ldots$$

Anders ist es, wenn der Modul eine höhere Potenz von 2 enthält.

19) Criterium für die Fälle, wo eine gegebene Zahl quadratischer Rest oder Nichtrest einer zusammengesetzten Zahl ist.

„Sei

$$\varphi(A) = \vartheta N, \; k = \vartheta m,$$

und $\vartheta$ der grösste gemeinschaftliche Factor von $k$ und $\varphi(A)$, so ist die Congruenz

$$x^k \equiv a \bmod A,$$

wo $a$ und $A$ relativ einfach sind, nur möglich, wenn:

$$a^{\frac{\varphi(A)}{\vartheta}} \equiv 1 \bmod A$$

ist."

Dieser Satz ist die Erweiterung eines früher für den Fall gegebenen, wo $A$ eine Primzahl ist. Offenbar nämlich muss $x$ eine relative Primzahl zu $A$ sein, damit $x^k - a$ durch $A$ theilbar sein könne. Dann aber ist

$$(x^k)^{\frac{\varphi(A)}{\vartheta}} \equiv a^{\frac{\varphi(A)}{\vartheta}} \bmod A,$$

d. h. da

$$\frac{k}{\vartheta} = m$$

ist:

$$x^{m\varphi(A)} \equiv a^{\frac{\varphi(A)}{\vartheta}}$$

und da nach dem verallgemeinerten Fermat'schen Satze

$$x^{\varphi(A)} \equiv 1 \bmod A$$

ist:

$$a^{\frac{\varphi(A)}{\vartheta}} \equiv 1 \bmod A.$$

Für den Fall, wo $k = \vartheta = 2$ ist, ergibt sich hieraus, da $\varphi(A)$ immer eine grade

Zahl ist (vergleiche die Note zu Abschnitt 16), ausgenommen, wenn $A=2$.

„Im Falle, dass $a$ quadratischer Rest von $A$ sein soll, muss

$$a^{\frac{\varphi(A)}{2}} \equiv 1 \bmod A$$

sein."

Sei jetzt $A=p^m$ die Potenz einer ungraden Primzahl.

Es wurde dann im vorigen Abschnitte gezeigt, dass die Hälfte der Zahlen $a$, welche kleiner als $A$ und relativ einfach zu $A$ sind, quadratische Reste, die andre Hälfte $b$ Nichtreste von $A$ gibt.

Für die erstern wird immer sein

$$a^{\frac{\varphi(A)}{2}} \equiv 1 \bmod A.$$

Beweisen wir jetzt, dass diese Congruenz für die Nichtreste $b$ nicht stattfinden kann.

Wir haben zu dem Ende nur zu zeigen, dass unsere Congruenz höchstens $\frac{\varphi(A)}{2}$ Auflösungen haben kann, denn da es eben soviel Reste gibt, so können keine Nichtreste darunter sein.

Dies lässt sich aber folgendermassen zeigen. Angenommen, die Congruenz:

$$a^{\frac{\varphi(p)}{2}} \equiv 1 \bmod p^m$$

habe höchstens $\frac{\varphi(p^m)}{2}$ Auflösungen, so beweisen wir, dass unter dieser Voraussetzung die Congruenz:

$$x^{\frac{\varphi(p^{m+1})}{2}} \equiv 1 \bmod p^{m+1}$$

höchstens $\frac{\varphi(p^{m+1})}{2}$ haben kann.

Denn ist

$$a^{\frac{\varphi(p^m)}{2}} \equiv 1 \bmod p^m,$$

so ist auch

$$a^{\frac{p\varphi(p^m)}{2}} \equiv 1 \bmod p^m,$$

d. h.

$$a^{\frac{\varphi(p^{m+1})}{2}} \equiv 1 \bmod p^m.$$

Ist dagegen

$$a^{\frac{\varphi(p^m)}{2}} \equiv -1,$$

so ist auch

$$a^{\frac{p\varphi(p^m)}{2}} = a^{\frac{\varphi(p^{m+1})}{2}} \equiv -1 \bmod p,$$

da $p$ eine ungrade Zahl war.

Der Ausdruck $a^{\frac{\varphi(p^m)}{2}}$ kann aber offenbar nur congruent $+1$ oder $-1$ nach $\bmod p^m$ sein. Denn nach dem Fermatschen Satze erfüllt

$$x = a^{\frac{\varphi(p^m)}{2}}$$

immer die Congruenz

$$x^2 \equiv 1 \bmod p^m,$$

kann also nur die Werthe $+1$ oder $-1$ haben, da diese Congruenz (siehe den vorigen Abschnitt) nur 2 Auflösungen hat. Ist also

$$a^{\frac{\varphi(p^{m+1})}{2}} \equiv \varepsilon \bmod p^m,$$

wo $\varepsilon$ einen der Werthe $+1$ oder $-1$ hat, so muss immer auch

$$a^{\frac{\varphi(p^m)}{2}} \equiv \varepsilon \bmod p^m$$

sein.

Jede Auflösung der Congruenz

$$a^{\frac{\varphi(p^{m+1})}{2}} \equiv 1 \bmod p^{m+1}$$

ist natürlich auch eine der Congruenz

$$a^{\frac{\varphi(p^{m+1})}{2}} \equiv 1 \bmod p^m.$$

Die Auflösungen der letztern aber sind, wie wir gesehen haben, mit denen von

$$a^{\frac{\varphi(p^m)}{2}} \equiv 1 \bmod p^m$$

identisch.

Es muss also jede Auflösung von

$$x^{\varphi(p^{m+1})} \equiv 1 \bmod p^{m+1}$$

einer solchen von

$$a^{\varphi(p^m)} \equiv 1 \bmod p^m$$

nach Modul $p^m$ congruent sein. D. h. es ist

$$x = a + up^m.$$

Das positive $u$ kann nur die Werthe

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ p-1$$

haben, da $x$ kleiner als $p^{m+1}$ sein soll. Zu jedem Werth von $a$ ergeben sich also höchstens $p$ Werthe von $x$, und falls für $p^m$ sich nicht mehr als $\frac{\varphi(p^m)}{2}$ ergeben, kann diese Zahl nicht grösser als $\frac{p\varphi(p^m)}{2}=\frac{\varphi(p^{m+1})}{2}$ sein.

Für $m=1$ ist nun die Anzahl der Lösungen von

$x^{\frac{1}{2}\varphi p}\equiv 1 \bmod p$ oder von $x^{p-1}\equiv 1 \bmod p$

gleich $\frac{p-1}{2}$, nämlich jeder quadratische Rest ist eine Lösung. Es folgt also durch vollkommene Induction, dass auch für $p^m$ die Anzahl der Lösungen nicht grösser als $\frac{1}{2}\varphi(p^m)$ sein kann, dass also keine Nichtreste sich darunter befinden.

Es ist also für alle quadratische Reste $a$ von $A$:

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(A)}\equiv 1 \bmod A$$

und für alle Nichtreste $b$ von $A$:

$$b^{\frac{1}{2}\varphi(A)}\equiv -1 \bmod A$$

zu setzen.

20) Der verallgemeinerte Wilsonsche Satz.

Der Wilsonsche Satz lehrt, dass das Product $1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)$ immer congruent $-1$ nach Modul $p$ ist, wenn $p$ eine Primzahl bedentet. Umgekehrt, ist $1\cdot 2\cdot 3\cdots(p-1)\equiv -1 \bmod p$, so muss $p$ eine Primzahl sein. Denn wäre $1\cdot 2\cdots(p-1)+1$ durch $p$ theilbar, $p$ aber eine zusammengesetzte Zahl, so müsste sie einen in $1\cdot 2\cdots(p-1)$ enthaltenen Factor haben, also 1 durch denselben theilbar sein, was unmöglich ist.

Es ist aber dieser Satz einer Verallgemeinerung fähig, welche lautet:

„Das Product aller Zahlen, welche kleiner als eine gegebene $A$ und zu dieser relativ einfach sind, ist entweder congruent $+1$ oder congruent $-1$ nach Modul $A$.“

Der Beweis, der sich an die Theorie der quadratischen Reste anschliesst, mag noch diesen Artikel beendigen.

Es sei

$$A=2^{\mu}p^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots,$$

wo $\mu$, $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ ganze positive Zahlen, ($\mu$ kann auch Null sein) $p$, $p_1$, $p_2$ ... ungrade Primzahlen anzeigen.

Bezeichnen wir unter $k$ irgend einen quadratischen Nichtrest von einer der ungraden Primzahlen, etwa von $p$, so kann man die unbestimmten Gleichungen:

$$a=pn+k=2s(p_1p_2p_3\ldots)+1$$

immer auflösen, und die sich ergebende Zahl $a$ wird: 1) zu $p\,p_1\,p_2\cdots$, d. h. zu $A$ relativ einfach, 2) ungrade, 3) Nichtrest von $p$, also auch von $A$ sein.

Wir bezeichnen jetzt mit

$$l,\ l_1,\ l_2,\ l_3\ \ldots$$

diejenigen Zahlen, welche zu $A$ relativ einfach und kleiner als $A$ sind. Die Anzahl derselben gibt also der Ausdruck $\varphi(A)$ an.

Es ist dann die Congruenz

$$l_1x\equiv a \bmod A$$

immer lösbar durch eine Zahl $x$, die kleiner als $A$ und zu $A$ relativ einfach sein wird, also durch eine andere aus der Reihe der $l$.

Löst man nun auch die Congruenz

$$l_2y\equiv a \bmod A$$

auf, wo $l_2$ weder mit $l_1$ noch mit $x$ zusammenfällt, so wird $y$ auch in die Reihe der $l$ fallen, aber von $l_1$, $l_2$ und von $x$ verschieden sein. Denn wäre $y=l_2$, so wäre

$$l_2^2\equiv a \bmod A,$$

also $a$ ein quadratischer Rest von $A$, was gegen die Annahme ist.

Wäre $y=l_1$, so müsste

$$l_1l_2\equiv a \bmod A$$

und da

$$l_1x\equiv a \bmod A$$

ist, auch

$$l_1(x-l_2)\equiv 0 \bmod A$$

sein, d. h. da $l_1$ zu $A$ relativ einfach ist,

$$x\equiv l_2,$$

was ebenfalls der Annahme widerspricht.

Wäre endlich $y\equiv x$, so wäre

$$l_1x\equiv a,\ l_2x\equiv a, \text{ also } l_1\equiv l_2,$$

was ebenfalls der Annahme widerstreitet.

Die $\varphi(A)$ Zahlen

$$l,\ l_1,\ l_2,\ l_3\ \ldots$$

lassen sich also in Producte von je zweien vereinen, deren jedes nach Modul $A$ mit $a$ congruent ist. Die Anzahl dieser Producte ist $\frac{\varphi(A)}{2}$; also wenn man

das Product

$$l\,l_1\,l_2\,\ldots \text{ mit } P$$

bezeichnet, so ist

$$a^{\frac{\varphi(A)}{2}} \equiv P \bmod A.$$

Wir haben jetzt 3 verschiedene Fälle zu unterscheiden.

I) Es soll $A = p^m$ oder $= 2p^m$ sein, wo $p$ eine ungrade Primzahl ist.

Es ist im letztern Falle offenbar:

$$\varphi(2p^m) = \varphi(p^m),$$

wie der Ausdruck für $\varphi(A)$ (vergleiche die Note zu Abschnitt 16) zeigt. Nach dem vorigen Abschnitt ist aber, da $a$ Nichtrest von $A$ war, immer:

$$a^{\frac{\varphi(A)}{2}} \equiv -1 \bmod p^m$$

und da $a$ ungrade war, wird auch sein:

$$a^{\frac{\varphi(A)}{2}} \equiv -1 \bmod 2.$$

Es ist also $a^{\frac{\varphi(A)}{2}} + 1$ durch $2p^m$ theilbar, also

$$a^{\frac{\varphi(A)}{2}} \equiv -1 \bmod 2p^m,$$

also in diesem Falle immer

$$P \equiv -1 \bmod A.$$

II) Es soll jetzt $A = 2^\mu$ sein, wo $\mu$ grösser als Eins ist.

Offenbar ist die ungrade Zahl $-1$ quadratischer Nichtrest von $2^\mu$, da $x^2+1$ entweder ungrade, oder von der Form $4m+2$ ist.

Die Congruenzen:

$$l_1 x \equiv -1 \bmod 2^\mu,\ l_2 y \equiv -1 \bmod 2^\mu \ldots$$

lassen sich dann wie oben lösen, und somit die $l$ zu Producten von zweien vereinigen, die congruent $-1$ sind, so dass man hat:

$$P \equiv (-1)^{2^{\mu-2}} \bmod 2^\mu,$$

da

$$\frac{\varphi(A)}{2} = 2^{\mu-2}$$

wird.

Ist $\mu$ grösser als 2, so ist also

$$P \equiv +1 \bmod 2^\mu.$$

Nur wenn $\mu$ gleich zwei ist, hat man

$$P \equiv -1 \bmod 2^2.$$

III) Habe jetzt $A$ die allgemeinste Form, nämlich:

$$A = 2^\mu p^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots,$$

dann ist:

$$P = a^{\frac{\varphi(A)}{2}}$$

und

$$\frac{\varphi(A)}{2} = 2^{\mu-2} p^{\alpha-1} p_1^{\alpha_1-1} \ldots (p-1)(p_1-1) \ldots$$

Da aber $a$ Nichtrest von $p$ ist, so hat man:

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(p^\alpha)} = a^{p^{\alpha-1}\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p^\alpha$$

und da $a$ Rest oder Nichtrest der Primzahlen $p_1, p_2 \ldots$ sein kann:

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(p_s^{\alpha_s})} = a^{p_s^{\alpha_s-1}\frac{p_s-1}{2}} \equiv \pm 1 \bmod p_s^{\alpha_s}.$$

Erhebt man die erste dieser beiden Congruenzen zur Potenz

$$2^{\mu-1} p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)\,p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1) \ldots,$$

so kommt:

$$a^{\frac{\varphi(A)}{2}} \equiv (-1)^{2^{\mu-1} p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)p_2^{\alpha_2-1}(p_2-1)\ldots} \equiv +1 \bmod p^\alpha$$

und auf ähnliche Weise folgt aus der zweiten Congruenz:

$$a^{\frac{\varphi(A)}{2}} \equiv +1 \bmod p_s^{\alpha_s}.$$

Es ist also

$$a^{\frac{\varphi(A)}{2}}-1$$

theilbar durch das Product $p^{\alpha}p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots$, und auch durch $2^{u}$, also auch theilbar durch $A$. Dieser Satz gilt auch wenn $\mu=0$ ist.

Setzt man

$$\mu>1 \text{ aber } \alpha_1=\alpha_2=\alpha_3\ldots=0,$$

also

$$A=2^{u}p^{\alpha},$$

so ergibt sich:

$$a^{p^{\alpha-1}\frac{p-1}{2}}\equiv -1 \bmod p^{\alpha},$$

$$\varphi(A)=2^{u-1}p^{\alpha-1}(p-1),$$

also:

$$a^{\frac{\varphi(A)}{2}}\equiv(-1)^{2^{u-1}} \bmod p^{\alpha}$$

und

$$a^{2^{\mu-1}}\equiv 1 \bmod 2^{u},$$

also:

$$a^{\frac{1}{2}\varphi(A)}\equiv 1 \bmod 2^{u},$$

d. h.

$$a^{\frac{\varphi(A)}{2}}\equiv 1 \bmod (2^{u}p^{m}).$$

Ist $A$ eine ungrade Primzahl, so findet Fall I statt; es wird $\varphi(p)=1\cdot 2\cdots p-1$, und wir haben den Wilsonschen Satz in der früher gegebenen Form.

21) Die Theorie der quadratischen Reste findet ihre wesentlichste Anwendung in der Theorie der quadratischen Formen, und der unbestimmten Gleichungen zweiten Grades. Das Wesentliche über die Literatur darüber ist daher in dem Artikel „quadratische Formen" gegeben. Der wichtigste Satz in der Theorie der quadratischen Reste ist das von Legendre gefundene, aber nicht vollständig strenge von ihm erwiesene Reciprocitätsgesetz. Ausser den Beweisen desselben, welche von Gauss und Dirichlet herrühren, sind noch verschiedene von Jakobi und von Eisenstein, die im Crelleschen Journale enthalten sind, zu erwähnen. Der bedeutenden Erweiterung dieses Satzes durch Kummer ist bereits erwähnt.

Die Theorie der quadratischen Reste von zusammengesetzten Zahlen ist hier nur angedeutet. Ausführlicheres enthalten die *Disquisitiones arithmeticae* von Gauss, sowie die *Théorie des nombres* von Legendre (3. Ausgabe, Paris 1831), und die zahlentheoretischen Vorlesungen von Dirichlet (herausgegeben von Dedekind).

## Quadratrix (Geometrie).

1) Im Allgemeinen versteht man unter Quadratrix einer gegebenen Curve eine andere Curve, die durch ihre Ordinatenlängen die von der ersteren abgeschnittenen Flächeninhalte angibt, also gewissermassen zur Quadratur der erstern auf mechanischem Wege dient.

Da man aber die Flächeninhalte, welche durch eine Curve abgeschnitten werden, auf verschiedene Art bestimmen kann, so kann man einer Curve verschiedene Quadratricen gehen.

Eine solche z. B. wird, wenn wir ebene Curven voraussetzen, die von der Curve zwei Ordinaten und einem Stücke der Abscissenaxe gebildete Flächenstücke angeben.

Sei

$$y=f(x)$$

die Gleichung dieser Curve, so wird

$$s=\int f(x)dx$$

bekanntlich das in der eben angegebenen Weise bestimmte Flächenstück, und

$$y=\int f(x)dx$$

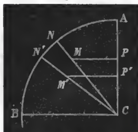
also die Gleichung der Quadratrix sein, oder nach der Lage und dem Anfangspunkte der Coordinaten ist auch die Quadratrix noch in unendlich viel verschiedenen Weisen zu bestimmen.

Bestimmt man die Curve durch Polarcoordinaten oder auf irgend eine andere Weise, so wird natürlich die Quadratrix sich völlig ändern.

Die Quadratricen haben natürlich nur eine historische Bedeutung, da man sie vor Einführung der Integralrechnung zur Veranschaulichung, wenn auch nicht zur Auffindung der Flächeninhalte benutzte.

2) Am bekanntesten ist die Quadratrix des Dinostratus, deren Ordinaten die Flächeninhalte der Sectoren eines gegebenen Kreises proportional sind. Ihre Construction ist die folgende.

Fig. 18.




Sei (Fig. 18) $ACB$ ein rechter Winkel, $AB$ der zugehörige Quadrant, $N$ ein beliebiger Punct in der Peripherie desselben. Man zieht $CN$, und schneidet vom Halbmesser $AC$ ein Stück $AP$ derart ab, dass sich $AC$ zu $AP$ verhält, wie der Quadrant $AB$ zu Bogen $AN$. Es ist dann offenbar $AP$ dem Bogen $AN$, also auch dem Sector $ACN$ proportional; zieht man noch $PM$ senkrecht auf $AP$ bis zur Linie $CN$, so ist $M$ ein Punkt der Quadratrix. Denkt man sich die Quadratrix wirklich gezeichnet, so lässt sich leicht ein beliebiger Sector des Kreises $ACN'$ mittels derselben bestimmen.

Man zieht nämlich von Punkt $M'$, wo $CN'$ die Quadratrix schneidet, Linie $M'P'$ senkrecht auf $AC$, und $AP'$ ist dann dem Flächeninhalt des Sectors $ACN'$ proportional.

3) Um die Gleichung der Quadratrix zu finden, sei

$$AP = x, \quad PM = y, \quad AC = r, \quad ACN = \varphi,$$

so ist

$$r : x = \frac{\pi}{2r} : \varphi,$$

wo unter $\pi$ die bekannte Länge des Halbkreises verstanden wird, und $\varphi$ in Theilen von $\pi$ gegeben ist. Ausserdem aber ist

$$y = (r - x)\, tg\varphi,$$

also auch wegen des Werthes von $\varphi$:

$$y = (r - x)\, tg\frac{\pi x}{2r} = (r - x)\, tg\alpha x,$$

wenn

$$\alpha = \frac{\pi}{2r}$$

gesetzt wird.

Was die Gestalt der Quadratrix anbetrifft, so gehört offenbar zu jedem $x$ nur ein $y$, zu jedem $y$ dagegen unendlich viel Werthe von $x$.

Offenbar ist $y$ positiv, wenn $x$ positiv und kleiner als $r$ ist. Für $x = r$ aber nimmt $y$ die Form $0 \cdot \infty$ an, da $tg\frac{\pi}{2} = \infty$ ist. Schreiben wir

$$y = \frac{r - x}{\cot\frac{\pi x}{2r}}$$

und differenziiren Zähler und Nenner um den Werth von $y$ zu finden, so kommt

$$y = \frac{1}{\frac{\pi}{2r}\frac{1}{\left(\sin\frac{\pi x}{2r}\right)^2}},$$

also wenn man $x = r$ setzt:

$$y = \frac{2r}{\pi}.$$

Liegt $x$ zwischen $r$ und $2r$, so ist $y$ noch immer positiv, da dann $r - x$ und $tg\frac{\pi x}{2r}$ negativ werden.

Wird aber $x$ grösser als $2r$, so hört der erste Factor nicht auf negativ zu sein, der zweite ist abwechselnd positiv und negativ. $y$ hat das entgegengesetzte Zeichen dieses Factors. D. h. $y$ wird negativ, wenn $x$ zwischen $2nr$ und $(2n+1)r$ liegt, positiv, wenn $x$ zwischen $(2n-1)r$ und $2nr$ liegt, wo $n$ eine beliebige positive ganze Zahl ist.

Ebenso leicht zeigt sich, dass $y$ negativ ist, wenn $x$ zwischen $-2nr$ und $-(2n+1)r$ liegt, positiv, wenn $x$ zwischen $-(2n-1)r$ und $-2nr$ liegt. Es ist dann nämlich der erste Factor immer positiv und der zweite bestimmt das Zeichen von $y$.

Für $x = \pm 2nr$ wird $y = 0$,

d. h. die Curve schneidet unendlich oft die Axe der $x$.

Für $x = \pm(2n+1)r$ wird $y = \pm\infty$;

es tritt also Discontinuität ein.

Nur der Werth von

$$x = r$$

ist in dieser letzten Formel auszuschliessen, da sich für ihn $y = \frac{2r}{\pi}$ ergab.

$y$ ändert sein Vorzeichen, wenn es durch 0 oder durch $\infty$ geht.

Bei den letzteren Werthen wird die Curve parallel der Ordinatenaxe. Denn die Gleichung

$$x = \pm(2n+1)r$$

gibt immer $y = \infty$. Es stellt also diese

Gleichung eine grade Linie vor, welche sich assymptotisch an die Curve in den bezeichneten Puncten anschliesst.

Die Quadratrix hat somit unendlich viel Asymptoten, die alle der Ordinatenaxe parallel sind, und sich in gleichen Zwischenräumen $2r$ von einander befinden; nur für $x=r$ findet eine solche Asymptote nicht statt.

Suchen wir noch den Werth von $\frac{dy}{dx}$.

Es kommt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi x}{r} + \frac{\pi}{2r}(r-x)}{\left(\cos\frac{\pi x}{2r}\right)^2}.$$

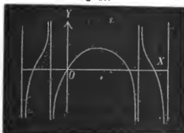
Dieser Ausdruck wird, wie es sein muss, unendlich, wenn $x = \pm(2n+1)r$ ist, nur für $x=r$ wird er $=\frac{0}{0}$, und durch fortgesetztes Differenziiren findet man für diesen Werth

$$\frac{dy}{dx}=0.$$

Es wird also in diesem Falle die Curve der Abscissenaxe parallel. Da die Ordinate positiv bleibt zwischen zwei Werthen, wo sie Null gibt, so findet ein Maximum statt.

Die Gestalt der Quadratrix lässt sich nach dem Vorhergehenden leicht bestimmen. Sie ist die folgende.

Fig. 19.




Gewöhnlich betrachtet man indess nur den Theil, welcher von den dem Maximum zunächst liegenden Assymptoten eingeschlossen wird.

4) Die Quadratrix des Dinostratus ist noch merkwürdig wegen folgender Eigenschaft.

„Wenn man über einer festen Linie Dreiecke so zeichnet, dass die Projection der einen Seite auf diese feste Grundlinie, zum Gegenwinkel dieser Seite in einem constanten Verhältniss steht, so bildet der Ort der Spitze des Dreiecks in einem gewissen Falle die Quadratrix."

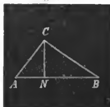
In der That lässt sich augenblicklich aus dieser Eigenschaft die Gleichung der Quadratrix gewinnen.

Sei (Fig. 20) $AB$ die feste Linie, $CB$ die Seite, deren Projection die angegebene Eigenschaft haben soll, so war $NB$ die Projection von $CB$.

Wir setzen $CAB=\varphi$; wenn Punkt $C$ in $A$ fällt, so wird dieser Winkel ganz unbestimmt. Wir setzen ihn dann gleich $\sigma$; es ist dann

$$\frac{BN}{AB}=\frac{\varphi}{\sigma}.$$

Fig. 20.




Sei noch

$$AB=r,\ BN=x,\ CN=y,$$

so ist

$$y=(r-x)\,tg\,\varphi,$$

und

$$\frac{\pi}{r}=\frac{\varphi}{\sigma},$$

also

$$y=(r-x)\ tg\frac{\sigma x}{r}.$$

Man erhält hieraus die Gleichung der Quadratrix, wenn man $\sigma=\frac{\pi}{2}$ nimmt.

**Quadratur (analytische).**

1) Einleitung.

Mit dem Ausdrucke Integral bezeichnet man bekanntlich die Auflösung einer beliebigen Differenzialgleichung oder eines Systems von Differenzialgleichungen. Die Auflösung der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x),$$

wo die rechte Seite die eine Veränderliche nicht enthält, wird Integral im engern Sinne, oder Quadratur genannt. Den letztern Namen wollen wir hier beibehalten, um diesen besondern einfachsten Fall von dem Allgemeinern zu unterscheiden. Er ist der Geometrie entnommen, und dies kommt daher, dass die bezeichnete Operation zugleich die von den Curven begränzten Flächenstücke ergibt, die Aufgabe, dergleichen Flächenstücke zu bestimmen, aber schon von den Alten mit dem Namen Quadratur bezeichnet worden ist.

Die Regeln über die Quadraturen bilden mit der Differenzialrechnung die Grundlage der höhern Analysis, und gehen zugleich das Hauptmittel zur Integration der Differenzialgleichungen ab, welche fast immer in der Zurückführung auf Quadraturen besteht.

Die Aufgabe der Quadratur oder der Integralrechnung im engeren Sinne lässt sich also nach dem Obigen dahin fassen: „aus der gegebenen Differenzialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \text{ oder } dy = f(x)\,dx$$

den Werth von $y$ als Function von $x$ zu finden."

Es ist dies die der Differenzialrechnung entgegengesetzte Aufgabe, und verhält sich zu der erstern, wie die Division zur Multiplication, oder wie die Subtraction zur Addition.

Indessen kann man, und es ist dies in der That der historische Weg gewesen, den man dem Wesen der Sache, wenn auch nicht der Bezeichnung nach, vor der Erfindung der Differenzialrechnung eingeschlagen hat, umgekehrt die Quadratur oder die Berechnung der Integrale als die directe, dagegen das Differenziiren als die indirecte Operation auffassen. Indem man unter Integral den Grenzausdruck einer Summe versteht, ganz wie durch das Differenzial der Grenzausdruck für eine Diffezenz bezeichnet wird.

Diese Auffassung ist in neuester Zeit, nachdem der Begriff des Integrals durch Hineinziehen des Imaginären eine höchst fruchtbringende Erweiterung erfahren hat, von der grössten Wichtigkeit geworden. Es wird daher nöthig sein, dieser directen Definition der Integrale einige Ausführung zu geben, und zunächst die Identität derselben mit der vorhergegebenen indirecten zu erweisen.

2) Definition der Quadraturen oder Integrale als Summen.

Es seien

$$y_0, y_1, y_2, y_3 \cdots y_{n-1}, y_n$$

gewisse Grössen, welche gegeben sein sollen, durch die recurrente Bezeichnung:

$$y_p - y_{p-1} = f(x_p).$$

Die Grösse $x_p$ ist einer anderen Reihe bekannter Grössen:

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \cdots x_{n-1}, x_n$$

entnommen. $f(x)$ stellt eine beliebige gegebene Function von $x$ vor.

Setzt man in unsere recurrente Gleichung für $p$ nach und nach die Werthe $1, 2, 3 \cdots n$ ein, so erhält man offenbar:

$$y_1 = y_0 + f(x_1)$$
$$y_2 = y_1 + f(x_2) = y_0 + f(x_1) + f(x_2)$$
$$y_3 = y_2 + f(x_3) = y_0 + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)$$

u. s. w.,

also allgemein:

$$y_p = y_0 + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \cdots f(x_p).$$

Offenbar ist hierin der Ausdruck für $y_p$ vollständig bestimmt, bis auf die Grösse $y_0$, welche willkürlich zu nehmen ist, wenn Nichts über deren Auswahl anderweitig festgesetzt ist.

Nehmen wir nun an, die Reihe der $y$ sei eine continuirliche, d. h. jedes $y_p$ unterscheide sich nur unendlich wenig von dem vorhergehenden; es wird dann $y_p - y_{p-1}$ eine unendlich kleine Grösse sein, folglich auch $f(x_p)$. Um letzteres anzudeuten, schreiben wir

$$f(x_p) = (x_p - x_{p-1})\,\varphi(x_p),$$

ein Ausdruck, der in der That unendlich klein wird, wenn wir annehmen, dass die Reihe der $x$ ebenfalls eine continuirliche ist, $\varphi(x)$ aber für jeden in unsrer Reihe enthaltenen Werth von $x$ nicht unendlich gross wird. Diese beiden Bedingungen sind übrigens schon hinreichend, damit auch $y_p - y_{p-1}$ immer unendlich klein, also die Reihe der $y$ continuirlich sei.

Wir haben nämlich:

$$y_p - y_{p-1} = (x_p - x_{p-1}) \varphi(x_p)$$

oder, wenn wir der gewöhnlichen Bezeichnnng gemäss

$$y_p - y_{p-1} = dy_p, \quad x_p - x_{p-1} = dx_p$$

schreiben, die Indices aher weglassen:

$$dy = \varphi(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = \varphi(x).$$

Der vorhin anfgestellte Ausdruck für $y$ ist dann:

$$y_p = y_0 + \lim\,[dx_1 \varphi(x_1) + dx_2 \varphi(x_2) + \cdots + dx_p \varphi(x_p)].$$

Wo die Bezeichnnng lim. (limes, Grenze) anzeigt, dass die Grössen $x_1, x_2, \ldots x_p$ in continnirlicher Reihe auf einander folgen, mithin anch, wenn $x_1$ nnd $x_p$ einen endlichen Unterschied haben, ihre Anzahl unendlich gross ist.

Da der Ansdruck rechts für jeden Werth von $x_p$ das zngehörige $y_p$, also, da die Reihe der $x$ ins Unendliche ausgedehnt werden kann, für jedes $x$ das zngehörige $y$ giht, so stellt die Reihe rechts offenhar den Werth von $y$ als Fnnction von $x$ vor nnd ist also die Anflösnng der Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x).$$

Es ist also die directe Form der Integrale als Grenzen von Summen gefnnden, nnd mithin anch die allgemeine Möglichkeit des Integrirens dargethan.

3) Bezeichnnng der Integrale nnd Grnndeigenschaften derselben.

Den ganz willkührlichen Ansdruck $y_0$ nennt man „willkührliche Constante." Eine solche enthält mithin jedes Integral, nnd sie ist dnrch irgend eine passende Annahme zn hestimmen.

Setzen wir

$C$ für $y_0$, $x$ nnd $y$ für $x_p$ nnd $y_p$,

so hat man

$$y = C + \lim\,[dx_1 \varphi(x_1) + dx_2 \varphi(x_2) + \ldots + dx \varphi(x)].$$

Man schreibt ahgekürzt

$$y = \int \varphi(x) dx.$$

Unter dem Zeichen $\int$ ist also der allgemeine Ansdruck für $y$ zn verstehen, zu dem die willkührliche Constante $C$ addirt ist.

Nimmt man an, dass $C=0$ sei, so ist

$$y = \lim\,(dx_1 \varphi(x_1) + d(x_2 \varphi(x_2) + \ldots + dx \varphi(x).$$

Die Bezeichnnng hierfür ist:

$$y = \int_{x_0}^{x} \varphi(u)\,du \quad \text{oder} \quad = \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx;$$

$x_0$ heisst nntere, $x$ obere Grenze.

Hierin zeigt die Grösse $u$ oder $x$ (es kommt anf die Wahl des Bnchstahen hier gar nicht an) nnter dem Summen- oder Integralzeichen nnr au, dass für dieselhen nach nnd nach eine continuirliche Reihe von Werthen $x_0, x_1, \cdots x$ zu setzen ist, deren erster also $x_0$, deren letzter $x$ ist. Dass nämlich $\varphi(x_0)$ eigentlich in unserer Summe nicht vorkommt ist nnerhehlich, da ein Glied $\varphi(x_0)\,dx_0$ mehr die Snmme nicht ändert, wenn $\varphi(x_0)$ endlich, da $dx_0$ verschwindend klein ist. D. h.

„Ueber das Gesetz, nach welchem $x_0$ his zu $x$ übergeht, ist gar keine Regel festgesetzt, es ist dasselbe also his anf die Continnität der Grössen ganz beliebig, nnd somit nnr der Anfangswerth $x_0$ nnd der Endwerth $x$ hestimmt."

Es erleidet also anch keinen Zweifel, dass man, selhst wenn die Grenzwerthe $x_0$ nnd $x$ reell sind, auf dem Uehergange von einem Werthe znm andern zu imaginären Werthen von $x$ gelangen kann, nnd zwar können diese Werthe nnendlich verschiedener Art sein. Wir erhalten anf diese Weise nnendlich viel Wege der Integration. Jedoch wollen wir die Ausführung dieser höchst wichtigen Untersnchnngen vor der Hand noch aufschieben, und annehmen, dass die Grösse $x$ anf dem ganzen Wege der Integration, also während des Ueherganges von $x_0$ zn $x_p$ immer reell sei, eine Annahme, die ührigens nicht ansschliesst, dass $\varphi(x)$ anf diesem Wege imaginär wird.

Es bleibt dann allerdings noch das Gesetz, nach welchem die Grössen $x$ aus einander entstehen, völlig willkürlich.

Nehmen wir z. B. an, es sei

$$x_p = x_{p-1} + \alpha,$$

wo $\alpha$ eine helichige, natürlich nnendlich kleine Constante ist, so werden wir anch haben:

$$x_1 = x_0 + \alpha, \; x_2 = x_0 + 2\alpha, \ldots \ldots x_p = x_0 + p\alpha,$$

$$dx_1 = dx_2 \ldots = dx_p = \alpha,$$

also:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = \lim\,[\alpha\varphi(x_0+\alpha)+\alpha\varphi(x_0+2\alpha)+\ .\ .\ .\ +\alpha\varphi(x)].$$

Ist dagegen

$$x_p = r x_{p-1}$$

und $r$ eine unendlich wenig von der Einheit abweichende Constante, so wird sein:

$$x_1 = r x_0,\ x_2 = r^2 x_0\ .\ .\ .\ x_p = r^p x_0,$$

$$dx_1 = r x_0 - x_0 = x_0(r-1),\ dx_2 = r_2 x_0 - r x_0 = r x_0(r-1),$$

$$.\ .\ .\ .\ dx_p = r^p x_0 - r^{p-1} x_0 = r^{p-1} x_0(r-1),$$

also:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = \lim\,(r-1)x_0\,[\varphi(r x_0) + r\varphi(r^2 x_0) + r^2\varphi(r^3 x_0) + \ \cdot\cdot\cdot\ + r^{p-1}\varphi(r^p x_0)],$$

zwei Werthe des bestimmten Integrals, die allerdings in der Form von einander abweichen. Es lässt sich jedoch beweisen, dass

„Wenn $\varphi(x)$ auf dem ganzen Integrationswege nicht aufhört endlich und continuirlich zu sein, die Wahl des Gesetzes, nach welchem die $x$ auseinander entstehen, keinen Einfluss auf den Werth des bestimmten Integrals ausübt, letzteres mithin einen ganz bestimmten Werth hat."

Denn sei:

$$U = \lim\,[(x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \ \cdot\cdot\cdot\ + (x_n - x_{n-1})f(x_n)]$$

und

$$V = \lim\,[(y_1 - y_0)f(y_1) + (y_2 - y_1)f(y_2) + \cdot\cdot\cdot + (y_s - y_{s-1})\,f(y_s)].$$

Setzen wir ferner fest, dass $f(x)$ für alle Werthe zwischen den Grenzen $x_0$ und $x_n$ continuirlich bleibt, dass

$$y_1 = x_1,\ \ y_s = x_n$$

sei, so stellen $U$ und $V$ beide ein bestimmtes Integral von der Form

$$\int_{x_0}^{x_n} f(u)\,du$$

vor. Es ist zu beweisen, dass beide denselben Werth haben.

Da sowohl die erste, als die zweite Summe, alle zwischen $x_1$ und $x_n$ liegenden Werthe von $x$ enthält, so muss nothwendig ein beliebiges Glied $x_r$ der einen Reihe, einem $y_\varrho$ der andern Reihe gleich sein. Wir setzen also

$$x_r = y_\varrho,\ \ x_{r'} = y_{\varrho'}.$$

Die Glieder $x_r$ und $x_{r'}$ sind beliebig der ersten Reihe entnommen, $y_\varrho$ und $y_{\varrho'}$ dem angemessen aus der zweiten Reihe. Betrachten wir nun die Theile beider Summen:

$$(x_{r+1} - x_r)\,f(x_{r+1}) + (x_{r+2} - x_{r+1})\,f(x_{r+2}) + \ .\ .\ .\ + (x_{r'} - x_{r'-1})\,f(x_{r'})$$

$$(y_{\varrho+1} - y_\varrho)\,f(y_{\varrho+1}) + (y_{\varrho+2} - y_{\varrho+1})\,f(y_{\varrho+2}) + \ .\ .\ .\ + (y_{\varrho'} - y_{\varrho'-1})\,f(y_{\varrho'})$$

Wenn sich die Zahl $r'$ an $r$ annähert, so wird sich auch $\varrho'$ an $\varrho$ nähern, und die Ausdrücke

$$f(x_{r+1}),\ \ f(x_{r+2}),\ \ f(x_{r+3})\ .\ .\ .\ (x_{r'}),$$

ebenso wie

$$f(y_{\varrho+1}),\ \ f(y_{\varrho+2}),\ \ f(y_{\varrho+3})\ .\ .\ .\ (y_{\varrho'})$$

werden dem Verhältnisse der Gleichheit immer näher rücken, so dass man für die erste Summe auch setzen kann:

$$f(x_r)\,(x_{r+1} - x_r + x_{r+2} - x_{r+1} + \ .\ .\ .\ + x_{r'} - x_{r'-1}) = f(x_r)\,(x_{r'} - x_r)$$

und für die zweite:

$$f(y_\varrho)=(y_{\varrho+1}-y_\varrho+y_{\varrho+2}-y_{\varrho+1}+\;.\;.\;.\;+y_{\varrho'}-y_{\varrho'-1})=f(y_\varrho)\,(y_{\varrho'}-y_\varrho).$$

Wegen der Voraussetzung

$$x_r=y_\varrho,\quad x_{r'}=y_{\varrho'}$$

sind aber diese beiden Grenzausdrücke gleich, und da dies von den andern Theilen beider Summen in gleicher Weise gilt, so hat man:

$$U=V,$$

womit unser Satz erwiesen ist.

4) Beispiele der Ausführung von Quadraturen.

Aus dieser Betrachtung folgt, dass man bei den Quadraturen das Entstehungs-Gesetz unter der Bedingung der Continuität beliebig wählen kann. Man nimmt es natürlich derart, dass die Summirung der entstehenden Reihe möglichst einfach wird.

Dies Verfahren ist von Fermat und Andern schon lange vor Erfindung der höhern Analysis eingeschlagen worden. In den wenigsten Fällen wird man das Gesetz einer arithmetischen Progression zu wählen haben.

Beispiel. Es sei zu bestimmen:

$$U=\int_a^b u^s\,du.$$

Wenn man hierin setzen würde:

$$U=\alpha[(a+\alpha)^s+(a+2\alpha)^s+(a+3\alpha)^s+\;.\;.\;.\;+(a+p\alpha)^s],$$

so hätte man die Summe der sten Potenzen einer arithmetischen Reihe zu finden, eine Aufgabe, die nicht ganz leicht ist, namentlich wenn $s$ keine ganze positive Zahl ist. Wir setzen daher

$$x_p=rx_{p-1},$$

also

$$U=(r-1)a[(ra)^s+r(r^2a)^s+r^2(r^3a)^s+\;.\;.\;.\;+r^{p-1}(r^pa)^s],$$

wo $r$ unendlich wenig von der Einheit entfernt und $r^pa=b$ ist.

Man hat hier offenbar eine leicht zu summirende geometrische Reihe, was auch $s$ sei, nämlich:

$$U=(r-1)r^sa^{s+1}[1+r^{s+1}+r^{2s+2}+r^{3s+3}+\ldots+r^{(p-1)s+p-1}]$$
$$=\frac{r^{p(s+1)}-1}{r^{s+1}-1}(r-1)r^sa^{s+1}$$

oder, wenn man $r^p=\frac{b}{a}$, $r=\sqrt[p]{\frac{b}{a}}$ setzt:

$$U=\frac{(b^{s+1}-a^{s+1})\,(b^{\frac{1}{p}}-a^{\frac{1}{p}})\,b^{\frac{s}{p}}}{b^{\frac{s+1}{p}}-a^{\frac{s+1}{p}}}=\frac{(b^{s+1}-a^{s+1})\,\left(1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}\right)}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{s+1}{p}}}.$$

Der Factor $\dfrac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}}{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{s+1}{p}}}$ ist gleich $\dfrac{1}{1+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{2}{p}}+\;\ldots\;+\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{s}{p}}}$,

ein Ausdruck, der für unendlich grosses $p$ offenbar, da $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}}=1$ ist, die Summe $\left(\frac{1}{s+1}\right)$ giebt. Somit hat man:

$$\int_b^a u^s\,du=\frac{1}{s+1}(b^{s+1}-a^{s+1}).$$

5) Einige Sätze über die Quadraturen ergeben sich unmittelbar aus der Summenform.

Es ist:

$$\int_{x_0}^{x_p} f(x)dx = (x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \ldots + (x_p - x_{p-1}) f(x_p)$$
$$= (x_p - x_{p-1}) f(x_p) + (x_{p-1} - x_{p-2}) f(x_{p-1}) + \ \ldots\ + (x_1 - x_0) f(x_1).$$

In dem letzten Ausdrucke ist die Reihenfolge der $x$:

$$x_p, x_{p-1}, x_{p-2} \ \ldots \ x_2, x_1, x_0.$$

Da nun das Zeichen $dx$ der abgekürzte Ausdruck für die Differenz eines beliebigen $x$ und des Vorhergehenden war, so ist jetzt:

$$dx = x_{s-1} - x_s$$

zu setzen, also:

$$-dx = x_s - x_{s-1},$$

wodurch man für die letztere Reihe erhält:

$$-dx_p f(x_p) - dx_{p-1} f(x_{p-1}) - \ \ldots\ - dx_1 f(x_1) = -\int_{x_p}^{x_0} f(x)dx.$$

Man hat also:

$$\int_{x_p}^{x_0} f(x)dx = -\int_{x_0}^{x_p} f(x)dx$$

oder:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u)\,du = -\int_{\beta}^{\alpha} f(u)du.$$

„Man kann die Grenzen des bestimmten Integrals vertauschen, wenn man das Vorzeichen ändert.“

Ist $f(x) = 1$, so erhält man sogleich:

$$\int_b^a dx = b - a.$$

Aus der blossen Form des Ausdruckes:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = (x_1 - \alpha)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \ \ldots\ + (-x_s)f(\gamma) + (x_{s+2} - \gamma)f(x_{s+2})$$
$$+ \ \ldots\ + (\beta - x_p) f(\beta),$$

wo $\gamma = x_{s+1}$ ein beliebiger Werth von $x$ zwischen $\alpha$ und $\beta$ ist, folgt sogleich:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx.$$

„Es bleibt aber diese Formel auch noch richtig, wenn $\gamma$ nicht zwischen $\alpha$ und $\beta$ liegt.“ Denn es ist:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx - \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx$$

oder, wenn man nach dem eben bewiesenen Satze:

$$-\int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx$$

setzt:

$$\int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx,$$

was offenbar mit dem Vorigen übereinstimmt, wenn man $\beta$ mit $\gamma$ vertauscht. Es fällt aber hierin $\beta$ nicht zwischen $\alpha$ und $\gamma$, sondern über $\gamma$ hinaus.

Noch ist selbstverständlich:

$$\int_\alpha^\beta (f(x) \pm \varphi(x) \pm \psi(x) \ldots) dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \pm \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx \pm \int_\alpha^\beta \psi(x)\,dx \pm \ldots,$$

d. h. „das Integral einer Summe oder Differenz ist gleich der Summe oder Differenz der einzelnen Integrale."

Ferner, wenn $c$ eine Constante ist:

$$\int_\alpha^\beta cf(x)\,dx = c\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Auch ist klar, „dass jedes bestimmte Integral einen positiven Werth hat, wenn $f(x)$ auf dem ganzen Integrationswege dasselbe Vorzeichen, und gleiches mit $\beta-\alpha$ hat." Denn in der Formel:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \Sigma(x_s - x_{s-1}) f(x_s)$$

haben dann immer die beiden Factoren $x_s - x_{s-1}$ und $f(x_s)$ dasselbe Zeichen, da $x_s - x_{s-1}$ mit $\beta-\alpha$ zugleich positiv und negativ ist. „Dagegen ist der Werth eines bestimmten Integrals negativ, wenn $f(x_s)$ immer dasselbe Zeichen, aber das entgegengesetzte wie $\beta-\alpha$ hat."

Sei jetzt unter dem Summenzeichen ein Product $f(x)\cdot\varphi(x)$ enthalten.

Nehmen wir aber an, dass $\varphi(x)$ sein Zeichen zwischen den Grenzwerthen $\alpha$ und $\beta$ nicht ändert.

Sei dann $M$ der grösste Werth von $f(x)$, $N$ der kleinste, welcher in diesen Grenzen enthalten ist.

Dann ist also immer:

$M - f(x)$ positiv, $N - f(x)$ negativ.

Es haben also auch die Grössen

$$[M - f(x)]\,\varphi(x) \text{ und } [N - f(x)]\,\varphi(x)$$

entgegengesetzte Vorzeichen, und zwar auf dem ganzen Integrationswege jeder immer dasselbe Vorzeichen, da $\varphi(x)$ das seine nicht ändern soll; daher sind auch die Vorzeichen von:

$$\int_\alpha^\beta [M - f(x)]\,\varphi(x)\,dx$$

und

$$\int_\alpha^\beta [N - f(x)]\,\varphi(x)\,dx$$

einander entgegengesetzt, d. h. die von:

$$M\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

und

$$N\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx - \int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Es muss also das Integral:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

zwischen

$$N\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx \text{ und } M\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$$

liegen.

Da $M$ und $N$ Werthe von $f(x)$ aus der von $\alpha$ und $\beta$ begrenzten Reihe, unser Integral aber continuirlich ist, so muss dasselbe offenbar gleich

$$f(x')\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$$

sein, wo $x'$ in der angegebenen Reihe liegt, man kann aber setzen:

$$x' = \alpha + \varepsilon(\beta - \alpha),$$

wo $\varepsilon$ zwischen Null und Eins liegt, denn je nach der Wahl von $\varepsilon$, erhält man hieraus für $x'$ alle zwischen $\alpha$ und $\beta$ fallenden Werthe von $x$. Man hat also schliesslich:

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x) f(x)\,dx = f[\alpha + \varepsilon(\beta - \alpha)]\int_\alpha^\beta \varphi(\alpha)\,dx,$$

jedoch nur, wenn $\varphi(x)$ sein Zeichen nicht ändert. Diese Formel, obgleich die Grösse von $\varepsilon$ darin noch nicht bestimmt ist, ist dennoch zur Berechnung der Grenzen bestimmter Integrale von grosser Wichtigkeit.

6) Differenziation der Integrale nach einer Constante.

Es sei jetzt ein bestimmtes Integral nach einer der Grenzen, oder nach einer in ihm enthaltenen, bei der Quadratur selbst als constant betrachteten Grösse (Parameter) zu differenziiren.

Offenbar ist nach dem Obigen:

$$\int_\alpha^{x_{p+1}} f(x)\,dx - \int_\alpha^{x_p} f(x)\,dx = \int_{x_p}^{x_{p+1}} f(x)\,dx.$$

Sind $x_p$, $x_{p+1}$ zwei auf einander folgende Elemente unserer Reihe, so ist aber:

$$\frac{\int_\alpha^{x_{p+1}} f(x)\,dx - \int_\alpha^{x_p} f(x)\,dx}{x_{p+1} - x_p} = \frac{d\left(\int_\alpha^{x_{p+1}} f(x)\,dx\right)}{dx_p},$$

was man auch schreibt:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_\alpha^{x_{p+1}} f(x)dx\right).$$

Das Integral $\int_{x_p}^{x_{p+1}} f(x)\,dx$ besteht aber nur aus einem Gliede:

$$(x_{p+1} - x_p)\,f(x_{p+1}) = dx_{p+1}\,f(x_{p+1}),$$

also da man für $x_{p+1}$ auch $x_p$ setzen kann, da diese Ausdrücke bis auf ein unendlich Kleines einander gleich sind, wenn man $x_p = \beta$ setzt:

$$\frac{d}{d\beta}\left(\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\right) = f(\beta).$$

Es ist diese Formel allerdings schon aus der ersten Definition der Quadraturen abzuleiten, da

$$\frac{dy}{dx} = f(x),\ y = \int_\alpha^x f(x)\,dx$$

war. Wegen der Gleichung:

$$\int_\beta^\alpha f(x)\,dx = -\int_\beta^\alpha f(x)\,dx$$

ist dann auch:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\int_\alpha^\beta f(x)dx\right) = -f(\alpha).$$

Enthalte jetzt das Integral $f(x)$ noch eine Constante $c$, nach welcher differenziirt werden soll.

Es ist:

$$\int_\alpha^\beta f(x,c')dx - \int_\alpha^\beta f(x,c)\,dx = \int_\alpha^\beta [f(x,c') - f(x,c)]\,dx,$$

also wenn $c'$ unendlich wenig von $c$ verschieden ist, und man auf beiden Seiten durch $c' - c$ dividirt:

$$\frac{d}{dc}\left(\int_\alpha^\beta f(x,c)dx\right) = \int_\alpha^\beta \frac{df(x,c)}{dc}dx.$$

Aus der Vereinigung dieser 3 Arten des Differenziirens ergibt sich noch, wenn $\alpha$, $\beta$, $c$ Functionen einer vierten Grösse $u$ sind:

$$\frac{d}{du}\left(\int_\alpha^\beta f(x,c)\,dx\right) = \frac{\partial\int_\alpha^\beta}{\partial\beta}\frac{d\beta}{du} + \frac{\partial\int_\alpha^\beta}{\partial\alpha}\frac{d\alpha}{du} + \frac{\partial\int_\alpha^\beta}{\partial c}\frac{dc}{du},$$

wo der Kürze wegen für $\int_\alpha^\beta f(x,c)$ nur $\int_\alpha^\beta$ geschrieben ist. Wegen der obigen Formeln aber hat man:

$$\frac{d}{du}\left(\int_\alpha^\beta f(x,c)\,dx\right) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial f(x,c)}{\partial c}dx \cdot \frac{dc}{du} + f(\beta)\frac{d\beta}{du} + f(\alpha)\frac{d\alpha}{du}.$$

7) **Uebergang von den bestimmten Integralen zu den unbestimmten:** Aus einem bestimmten Integral lässt sich immer das allgemeine oder unbestimmte vermöge der Formel:

$$\int f(x)\,dx = C + \int_\alpha^x (f(x)\,dx$$

ableiten. Indess nimmt auch der Ausdruck für

$$\int f(x)\,dx,$$

welches auch der gegebene Werth von $c$ sei, stets die Form des bestimmten Integrals an.

Wenn man nämlich die Gleichung

$$C = \int_\lambda^\alpha f(x)\,dx = -\int_\alpha^\lambda f(x)\,dx$$

auflöst, wo also $\lambda$ als Function von $C$ zu bestimmen ist, so erhält man:

$$\int f(x)\,dx = \int_\lambda^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^x f(x)\,dx = \int_\lambda^x f(x)\,dx.$$

Es fragt sich nur, ob die Gleichung:

$$\varphi(\lambda) = C,$$

wo

$$\varphi(\lambda) = \int_\lambda^\alpha f(x)\,dx$$

gesetzt wurde, immer einer Auflösung fähig ist.

Dies ist, wie leicht zu sehen, immer der Fall, wenn $\varphi(\lambda)$ eine eindeutige Function ist.

Wir haben nämlich in dem Artikel „Quadratische Factoren“ gezeigt, dass es immer wenigstens einen Werth von $\lambda$ gibt, für welchen eine eindeutige Function, also auch

$$\varphi(\lambda) - C$$

der Null gleich wird, und es muss somit für diesen Werth von $\lambda$, $\varphi(\lambda) = C$ sein. Ist aber $\varphi(\lambda)$ eine mehrdeutige Function, so wird sich dieselbe immer aus einer Gleichung:

$$f(\lambda, u) = 0$$

herleiten lassen, wo $f$ eine eindeutige Function von $\lambda$ und $u$ ist, und $u = \varphi(\lambda)$ zu setzen ist. Setzt man hierin $u = C$, wo $C$ gegeben ist, so hört $f(\lambda, C)$ nicht auf, eindeutig zu sein, und diese Function hat eine Variable $\lambda$, und muss daher für irgend einen Werth von $\lambda$ Null werden, und für diesen also wird

$$\varphi(\lambda) = C$$

sein.

Es ist jedoch wohl zu bemerken, dass der Werth von $\lambda$, welcher diese Gleichung erfüllt, imaginär sein kann. Somit sind, um diese Betrachtung völlig durchzuführen, noch die Untersuchungen über Quadraturen in imaginären Grenzen nöthig, die wir bis jetzt unterlassen haben.

8) Einführung neuer Variablen.

Da das Gesetz, nach welchem sich die Variable $x$ in dem Integral: $\int_b^a f(x)\,dx$ ändert, ganz beliebig ist, so kann man sich $x$ als Function einer andern Variable $y$ denken. Ist dann $x = \varphi(y)$, so hat man

$$f(x) = \psi(y)$$

und:

$$\int_b^a f(x)dx = [\varphi(y_1) - \varphi(y_0)]\,\psi(y_1) + [\varphi(y_2) - \varphi(y_1)]\,\psi(y_2) + \ldots + [\varphi(y_p) - \varphi(y_{p-1})\psi(y_p)$$

$$= dy_1 \frac{d\varphi(y_1)}{dy_1}\,\psi(y_1) + dy_2 \frac{d\varphi(y_2)}{dy_2}\,\psi(y_2) + \frac{d\varphi(y_p)}{dy_p}\,\psi(y_p) = \int_{y_0}^{y_p} \psi(y) \frac{d\varphi(y)}{dy} dy.$$

Oder wenn man für $\varphi(y)$ wieder $x$, $f(x)$ für $\psi(y)$ schreibt:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{y_0}^{y_p} f(x) \frac{dx}{dy} dy.$$

Die Grenzen $y_0$ und $y_p$ aber sind so zu bestimmen, dass

$$a = \varphi y_0, \; b = \varphi(y_p)$$

wird.

Dieser wichtige Satz lehrt die Integrale durch Einführung einer neuen Variablen umformen, und ist für die wirkliche Ausführung der Quadraturen von grosser Wichtigkeit.

Beispiel. Suchen wir z. B. das Integral:

$$\int_\alpha^\beta (a+x)^n dx,$$

so setzen wir $x = y - a$, also $dx = dy$; es ist dann:

da für

$$x = \alpha,$$
$$y = \alpha + a$$

wird und für

$$x = \beta,$$
$$y = \beta + a$$

wird,

also:

$$\int_{\alpha}^{\beta}(a+x)^n dx=\int_{\alpha+a}^{\beta+a} y^n dy=\frac{(\beta+a)^{n+1}-(\alpha+a)^{n+1}}{n+1}.$$

Der Werth dieses bestimmten Integrals ist nämlich in Abschnitt (4) berechnet worden.

Ein andrer wichtiger Satz für die Berechnung der bestimmten Integrale ist der folgende. Sei wieder:

$$\int_a^b f(x)dx=(x_1-x_0)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_2)+\cdots+(x_p-x_{p-1})f(x_p),$$

wo

$$x_p=b,\quad x_0=a$$

ist, so kann man dafür bei andrer Anordnung der Glieder auch schreiben:

$$x_p f(x_p)-x_0 f x_1-[f(x_2)-f(x_1)]\,x_1-[f(x_3)-f(x_2)]\,x_2-[f(x_4)-f(x_3)]\,x_3-\cdots\cdots$$
$$-[f(x_p)-f(x_{p-1})]\,x_{p-1},$$

oder, da für jedes Element $x_1$, $x_2$ . . . auch das folgende gesetzt werden kann, wenn $f(x)$ continuirlich bleibt:

$$\int_a^b f(x)dx=bf(b)-af(a)-df(x_1)\cdot x_1-df(x_2)\cdot x_2-df(x_3)\cdot x_3-\cdots-df(x_p)\cdot x_p,$$

also

$$\int_a^b f(x)\,dx=bf(b)-af(a)-\int_{f(a)}^{f(b)} x\,df(x)$$

oder, wenn man

$$f(x)=y,\ f(a)=y_a,\ f(b)=y_b$$

schreibt:

$$\int_a^b y\,dx=by_b-ay_a-\int_{y_a}^{y_b} x\,dy.$$

**Beispiele.** Es sei zu bestimmen das Integral: $\int_a^b \lg(x)dx$, so ist:

$$\int_a^b \lg x\,dx=b\lg(b)-a\lg(a)-\int_{\lg a}^{\lg b} x\,dy,$$

wo $y=\lg x$. Da aber

$$d\lg x=\frac{dx}{x}$$

ist, so hat man:

$$\int_{\lg a}^{\lg b} x\,dy=\int_a^b dx=b-a,$$

also:

$$\int_a^b \lg x\,dx=b\lg b-a\lg a-b+a.$$

Beide letzten Sätze vereinigt geben noch folgendes Resultat. Es ist, wenn man

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=\varphi'(x)$$

setzt:

$$\int_a^b f(x)\varphi'(x)dx=\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)d\varphi(x)=f(b)\varphi(b)-f(a)\varphi(a)-\int_{f(a)}^{f(b)}\varphi(x)df(x),$$

wie man erhält, wenn man in der letzten Formel $\varphi(x)$ für $x$ gesetzt denkt. Aber es ist

$$\int_{f(a)}^{f(b)} \varphi(x)\, df(x) = \int_a^b \varphi(x)\, f'(x)\, dx,$$

wo wieder

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

ist, also:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx = f(b)\varphi(b) - f(a)\,\varphi(a) - \int_a^b \varphi(x)\, f'(x)\, dx.$$

Es sei nun

$$\varphi'(x) = \frac{d\varphi(x)}{dx} = \psi(x),$$

so ist offenbar:

$$\varphi(x) = \int_\lambda^x \psi(x)\, dx$$

die untere Gränze. $\lambda$ ist hier völlig willkührlich, da darüber Nichts festgesetzt war, also:

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = f(b)\int_\lambda^b \psi(x)\,dx - f(a)\int_\lambda^a \psi(x)\,dx - \int_a^b \left\{\int_\lambda^x \psi(x)\,dx\right\} f'(x)\,dx.$$

Uebrigens ist trotz der Willkürlichkeit von $\lambda$ der Werth des rechtsstehenden Ausdrucks stets derselbe, wie auch $\lambda$ bestimmt werde, da $\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx$ völlig bestimmt ist. Dies ist auch direct zu erweisen. Denn setzt man $\mu$ für $\lambda$, so wird:

$$\int_\mu^x \psi(x)\,dx = \int_\mu^\lambda \psi(x)\,dx + \int_\lambda^x \psi(x)\,dx,$$

und wenn wir diese Werthe in die vorletzte Formel, nachdem daselbst $\lambda$ für $\mu$ geschrieben ist, einsetzen:

$$\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx = f(b)\int_\lambda^b \psi(x)\,dx - f(a)\int_\lambda^a \psi(x)\,dx + \int_\mu^\lambda \psi(x)\,dx\,[f(b)-f(a)]$$
$$-\int_a^b \left\{\int_\lambda^x \psi(x)\,dx + \int_\mu^\lambda \psi(x)\,dx\right\} f'(x)\,dx.$$

Es ist aber:

$$\int_a^b \left\{\int_\lambda^x \psi(x)\,dx + \int_\mu^\lambda \psi(x)\,dx\right\} f'(x)\,dx = \int_a^b \int_\lambda^x \psi(x) f'(x)\,dx$$
$$+\int_\mu^\lambda \psi(x)\,dx \cdot \int_a^b f'(x)\,dx = \int_a^b \int_\lambda^x \psi(x)\,f'(x)\,dx + \int_\mu^\lambda \psi(x)\,dx\,[f(b)-f(a)],$$

da $\int_\mu^\lambda \psi(x)\,d(x)$ offenbar constant ist, und seine Grenzwerthe $x$ selbst nicht enthalten, und da

$$\int_a^b f'(x)\,dx = \int_{f(a)}^{f(b)} df(x) = f(b) - f(a)$$

ist. Setzt man diese Werthe in den letzten Ausdruck von $\int_a^b f(x)\,\psi(x)\,dx$ ein, so

erhält man offenbar denselben Werth wie vorhin, da sich $\mu$ ganz heraus hebt, wie dies zu beweisen war.

Beispiel.

$$\text{Sei } \int_1^b x \lg x \, dx \text{ zu berechnen.}$$

Nach dem vorigen Beispiele ist:

$$\int_1^x \lg x \, dx = x \lg x - x + 1,$$

da

$$\lg 1 = 0$$

ist. Also wenn man $x$ für $f(x)$, $\lg(x)$ für $\varphi(x)$ setzt, und $\lambda = 1$ nimmt:

$$\int_1^b x \lg x \, dx = b(b \lg b - b + 1) - \int_1^b (x \lg x - x + 1)\, dx,$$

da hier

$$f'(x) = 1$$

ist.

Bezeichnet man also $\int_1^b x \lg x \, dx$ mit $U$, so ist:

$$U = b^2 \lg b - b^2 + b - U + \int_1^b (x-1)\, dx = b^2 \lg b - b^2 + b - U + \tfrac{1}{2} b^2 - \tfrac{1}{2} - b + 1$$

$$= b^2 \lg b - \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2} - U$$

oder

$$2U = b^2 \lg b - \tfrac{1}{2} b^2 + \tfrac{1}{2},$$

$$U = \int_1^b x \lg x \, dx = \tfrac{1}{2} b^2 \lg b - \tfrac{1}{4} b^2 + \tfrac{1}{4}.$$

Bei allen diesen Betrachtungen ist wohl zu bemerken, dass die Continuität des Ausdruckes unter dem Integralzeichen auf dem ganzen Wege der Integration vorausgesetzt wurde.

9) Untersuchungen des Falles, wo die Variable imaginär ist.

Wir setzen noch immer Continuität voraus, wollen aber jetzt den Fall betrachten, wo $x$ imaginär werden kann. Sei demnach

$$s = x + yi,$$

so wird man immer haben:

$$\int_{s_0}^{s_p} f(s)\, ds = (s_1 - s_0) f(s_1) + (s_2 - s_1) f(s_2) + \cdots\cdots + (s_p - s_{p-1}) f(s_p).$$

Es kann sich in $s$ aber $x$ und $y$ gleichzeitig jedes nach einem beliebigen Gesetze ändern. Liesse man bloss $x$ sich ändern, bliebe aber $y$ constant, also $= \alpha$, so wäre:

$$\int_{s_0}^{s_p} f(s)\, ds = \int_{x_0}^{x_p} f(x + \alpha i)\, dx = (x_1 - x_0) f(x_1 + \alpha i) + (x_2 - x_1) f(x_2 + \alpha i) + \cdots\cdots$$

$$+ (x_p - x_{p-1}) f(x_p + \alpha i).$$

Es ist dies Integral offenbar nach der reellen Grösse $x$ allein genommen, und $f(x + \alpha i)$ ist eine Function von $x$, also gelten die in dem Vorigen gegebenen Regeln über die Integrale reeller Variablen ganz für diesen Fall, namentlich auch der, dass $x$ sich zwischen $x_0$ und $x_p$ nach einem beliebigen Gesetz ändern kann.

Aehnliches würde eintreten, wenn sich $y$ allein änderte. Es wäre dann:

$$\int_{s_0}^{s_p} f(s)\, ds = i[(y_1 - y_0) f(\alpha + y_1 i) + (y_2 - y_1) f(\alpha + y_2 i) + \cdots + (y_p - y_{p-1}) f(\alpha + y_p i)],$$

also:

$$\int_{s_0}^{s_p} f(s)\,ds = i\int_{y_0}^{y_p} f(a+yi)\,dy,$$

und da $y$ reell ist, kann dies Integral auch wie das obige behandelt werden.

Nun sollen sich endlich $x$ und $y$ gleichzeitig ändern, es ist also zunächst eine Beziehung zwischen $x$ und $y$ festzusetzen. Wir nehmen an

$$x = \varphi(u),\quad y = \psi(u),$$

wo $u$, $\varphi(u)$, $\psi(u)$ in den Grenzen der Integration reell bleiben müssen.

Es ist dann:

$$\int_{s_0}^{s_p} f(s)\,ds = \int_{u_0}^{u_p} f[\varphi(u) + i\psi(u)]\,\frac{d[\varphi(u)+i\psi(u)]}{du}\,du,$$

offenbar nämlich hat das Integral die Summenform:

$$[(\varphi(u_1)-\varphi(u_0))+i(\psi(u_1)-\psi(u_0))]\,f(s_1)+[(\varphi(u_2)-\varphi(u_1))+i(\psi(u_2)-\psi(u_1))]\,f(s_2)+ \cdots + [\varphi(u_p)-\varphi(u_{p-1}))+i(\psi(u_p)-\psi(u_{p-1}))]\,f(s_p),$$

und es ist:

$$\varphi(u_s)-\varphi(u_{s-1})+i(\psi(u_s)-\psi(u_{s-1}))=\frac{d[\varphi(u_s)+i\psi(u_s)]}{du_s}\,du_s.$$

Da übrigens

$$\varphi(u_p) + i\psi(u_p) = s_p$$

ist, kann man auch schreiben:

$$\int_{s_0}^{s_p} f(s)\,ds = \int_{u_0}^{u_p} f(s)\,\frac{ds}{du}\,du.$$

Diese Formel entspricht genau der ersten im vorigen Abschnitte entwickelten, nur ist hier bewiesen, dass sie auch für imaginäres $s$ gilt.

Da übrigens jetzt $u$ als unabhängige Variable zu betrachten, und diese Grösse in den Grenzen der Quadratur reell ist, so finden auch hier die Gesetze, welche oben entwickelt wurden, Anwendung, wenn Continuität stattfindet. Es kann also $u$ sich nach einem beliebigen Gesetze ändern, vorausgesetzt, dass das einmal gewählte $\varphi(u)$ nicht discontinuirlich wird.

Sollte also ein Integral durch Aenderung des Integrationsweges seinen Werth ändern, so kann es nur daran liegen, dass man in den Gleichungen $x = \varphi(u)$ und $y = \psi(u)$ gleichzeitig die Functionen $\varphi$ und $\psi$ ändert.

Ehe wir dies jedoch untersuchen, ist es zweckmässig diesen Betrachtungen eine geometrische Deutung zu geben.

Das Integral sei:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(s)\,ds,$$

wo also $s, \alpha, \beta$ im Allgemeinen complexe Grössen,

$$s = x+yi,\quad \alpha = a+bi,\quad \beta = e+fi,$$

sein sollen. Versteht man unter $x$ und $y$ rechtwinklige Coordinaten, die auf ein gegebenes in der Ebene befindliches Coordinatensystem bezogen sind, so entspricht jeder Werth von $s$ einem bestimmten Punkt in der Ebene, dessen Coordinaten $x$ und $y$ sein sollen. Gibt man also $x$ und $y$ alle möglichen Werthe, so stellt $s$ jeden Punkt der Ebene vor.

Die Grössen $\alpha$ und $\beta$ dagegen entsprechen zwei bestimmten Punkten in der Ebene, deren Coordinatenwerthe bezüglich $a$, $b$ und $e$, $f$ sind.

Sind $\alpha$, $\beta$ und $s$ reel, so ist

$$b = f = y = 0$$

zu setzen. Der Werth von $s$ entspricht einem Punkte der Abscissenaxe, wo ja in der That $y = 0$ ist, und das Integral $\int_a^e f(x)\,dx$ ist so zu verstehen, dass vom Punkte $a$ nach $e$ hin der ganze dazwischenliegende Theil der Abscissenaxe zu durchschreiten, für jeden Punkt $x_s$ der Werth $(x_s - x_{s-1})\,f(x)$ zu berechnen, und alle diese Werthe zu addiren sind. Man kann also in dem Falle, wo $x$ immer reell ist, sagen, dass sich die Quadratur

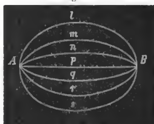
über einen Theil der Abscissenaxe erstrecke.

Wenn aber $\alpha$, $\beta$, $z$ auch complexe Grössen sein können, so stellen $\alpha$ und $\beta$ beliebige Punkte in der Ebene dar, und es ist von $\alpha$ nach $\beta$ auf einem beliebigen continuirlichen Wege, der also immer eine Linie sein wird, fortzuschreiten, und dieser Weg heisst dann der Integrationsweg *). Offenbar geben die Gleichungen

$$x=\varphi(u),\ y=\psi(u),$$

die Gleichung dieser Linie', wenn man daraus $u$ eliminirt. Was die Grenzen anbetrifft, so wird diese Linie immer durch die zwei Punkte gehen müssen, deren Coordinatwerthe $a$, $b$ und $e$, $f$ sind. Demgemäss sind, wenn die Integrationsgrenzen gegeben sind, die Functionen $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ zu wählen. Offenbar kann man auch $u=x$ setzen, und die Gleichung $y=\psi(x)$ annehmen.

Fig. 21.




Es gibt also zwischen zwei gegebenen Punkten $A$ und $B$ (Fig. 21), deren Coordinaten-Werthe $a$, $b$ und $e$, $f$ sind, unendlich viel Integrationswege, welcher jeder einem Werthe des Integrals $\int_\alpha^\beta f(z)\,dz$ entspricht. Diese Wege sind z. B. $AlB$, $AmB$, $AnB$, $ApB$, $AqB$ ... Auf jedem Wege wird, vorausgesetzt, dass auf denselben die Function $f(z)$ continuirlich bleibt, das Integral völlig bestimmt sein. Ob beim Uebergange von einem Wege zum andern, also z. B. von $AlB$ bis $AnB$ sich der Werth des Integrals ändert, soll bald untersucht werden.

Welches auch die Werthe von $\alpha$ und $\beta$ seien, so wird einer der Integrationswege immer eine grade Linie bilden, welche durch die Punkte geht, deren Coordinatenwerthe $a$, $b$ und $e$, $f$ sind. Die Gleichung dieser Linien wird sein:

$$\frac{y-b}{f-b}=\frac{x-a}{e-a}$$

und

$$\int_a^\beta f(z)dz=\int_a^e f(x+yi)\left(1+i\frac{dy}{dx}\right)dx.$$

es ist nämlich

$$u=x$$

in

$$\frac{dz}{du}=\frac{d(x+yi)}{du}$$

zu setzen, woraus sich:

$$\frac{dz}{dx}=1+i\frac{dy}{dx}$$

ergibt. Da aber vermöge der Gleichung der graden Linie:

$$y=b+\frac{f-b}{e-a}(x-a)$$

und

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f-b}{e-a}$$

wird, so hat man:

$$\int_\alpha^\beta f(z)dz=\left(1+i\frac{f-b}{e-b}\right)\int_a^e f\left\{x+i\left(b+\frac{f-b}{e-a}(x-a)\right)\right\}dx.$$

Es ist klar, dass jede gegebene Curve, etwa ein Halbkreis u. s. w., an die Stelle der graden Linie treten kann.

Als wichtig aber erwähnen wir noch den Fall, wo diese Linie in sich selbst zurückkehrt, also $\alpha=\beta$ ist, wie dies z. B. bei einem ganzen Kreise, einer Ellipse u. s. w. geschieht. Auch kann der Integrationsweg natürlich eine gebrochene Linie sein, wo sich dann die Form der Gleichungen

$$x=\varphi(u),\ y=\psi(u) \text{ oder } y=f(x)$$

während des Weges ändern muss.

*) Mit diesem Worte bezeichnen wir jetzt nur die Linie, auf der die Werthe von $z$ zu suchen sind, nicht das Gesetz, nach dem sich $x$ oder $u$ innerhalb dieser Linie ändert, da letzteres keinen Einfluss auf den Werth des Integrals ausübt.

10) Einfluss der Discontinuität.

Werde jetzt für einen Punkt, der sich auf irgend einem Wege zwischen den Grenzen der Integration befindet, die Function $f(x)$ discontinuirlich, so brauchen in der Nähe dieses Punktes die aufgestellten Regeln des Integrirens nicht mehr richtig zu sein. Es kann nämlich in diesem Falle die Reihe

$$\int_\alpha^l f(x)dx = (x_s - x_{s-1})\, f(x_s) + (x_{s+1} - x_s)\, f(x_{s+1}) + \cdots$$

auch aufhören, continuirlich zu sein. Dies findet statt, wenn die einzelnen Elemente $(x_s - x_{s-1})\, f(x_s)$ endlich oder unendlich gross werden. Namentlich der Satz, dass das Gesetz der Aenderung von $x$ den Werth des Integrals nicht ändere, hört in der Nachbarschaft dieses Punktes dann auf, richtig zu sein, da beim Beweise des Gesetzes oben continuirliches Fortschreiten vorausgesetzt wurde.

Indess ist es nicht unbedingt nothwendig, dass diese Reihe an dem bezeichneten Punkte auch der Continuität entbehren muss, da der Factor $x_s - x_{s-1}$ doch unendlich klein ist, und daher möglicher Weise die Discontinuität von $f(x_s)$ wieder compensiren kann. In diesem Falle gelten die Regeln des Integrirens noch immer.

Um sich nun zu überzeugen, ob das eine oder andre stattfinde, also ein Integriren auf diesem Wege möglich sei oder nicht, hat man folgendes Mittel.

Es sei $\int_\alpha^\beta f(z)\,dz$ zu untersuchen.

Der Integrationsweg ist eine bestimmte Linie, auf welcher sich zwischen den Endpunkten $\alpha$ und $\beta$ ein Punkt $\lambda$ befindet, derart, dass $f(\lambda)$ discontinuirlich wird. Statt des obigen Integrals untersuche man dann:

$$\int_\alpha^{\lambda-\delta} f(z)\,dz + \int_{\lambda+\varepsilon}^\beta f(z)\,dz,$$

wo $\delta$ und $\varepsilon$ verschwindend kleine, zwischen $\alpha$ und $\beta$ liegende Grössen sind. Ist der Integrationsweg die Abscissen-Axe, so sind $\delta$ und $\varepsilon$ positiv. Wird nun der Werth dieser Summe von $\delta$ und $\varepsilon$ unabhängig, so kann man offenbar auch $\delta = \varepsilon = 0$ setzen, und hat

$$\int_\alpha^\beta f(z)\,dz = \int_\alpha^\lambda f(z)\,dz + \int_\lambda^\beta f(z)\,dz,$$

worin $\delta$ und $\varepsilon$ gar nicht vorkommen. Die Discontinuität von $f(\lambda)$ übt also keinen Einfluss auf das Integral aus, und man kann dasselbe ganz so behandeln, als existire eine solche nicht.

Wird dagegen der Werth der Summe von $\delta$ und $\varepsilon$ abhängig, so ist keine Integration auf diesem Wege über den Punkt $\lambda$ hinaus, d. h. auf einem Linienstück, welches den Punkt $\lambda$ enthält, möglich.

Beispiel. Sei zu untersuchen

$$\int_{-\alpha}^{+\beta} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_{-\alpha}^{+\beta} (x^{-\frac{1}{2}}dx);$$

$\alpha$ und $\beta$ sollen positive reelle Grössen sein, und $x$ immer reell bleiben, d. h. es soll die Integration zum Wege die Abscissenaxe haben. Offenbar wird

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \infty \text{ für } x = 0.$$

Man nimmt daher:

$$\int_{-\alpha}^{-\delta} x^{-\frac{1}{2}}dx + \int_{+\varepsilon}^\beta x^{-\frac{1}{2}}dx.$$

Wir hatten Abschnitt (4):

$$\int_a^b u^s\,du = \frac{1}{s+1}(b^{s+1} - a^{s+1}),$$

also, wenn $s = -\frac{1}{2}$ gesetzt wird:

$$\int_{-\alpha}^{-\delta} x^{-\frac{1}{2}}dx = -2\,[(-\delta)^{\frac{1}{2}} - (-\alpha)^{\frac{1}{2}}],$$

$$\int_{+\varepsilon}^\beta x^{-\frac{1}{2}}dx = -2(\beta^{\frac{1}{2}} - \varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Offenbar aber ist, bei unendlich kleinem $\delta$ und $\varepsilon$,

$$(-\delta)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon^{\frac{1}{2}} = 0,$$

also:

$$\int_{-\alpha}^{+\beta} x^{-\frac{1}{2}}dx = \int_{-\alpha}^0 x^{-\frac{1}{2}}dx + \int_0^\beta x^{-\frac{1}{2}}dx = -2(\beta^{\frac{1}{2}} - (-\alpha)^{\frac{1}{2}})$$

und auf dies Integral hat folglich die Discontinuität von $\frac{1}{\sqrt{x}}$ keinen Einfluss.

Sei jetzt

$$\int_{-\alpha}^{+\beta}\frac{dx}{x^4}=\int_{-\alpha}^{+\beta}x^{-4}dx$$

über einen Theil der Abcissenaxe zu erstrecken, in welchen sich der Punkt $x=0$ befindet, für den $\frac{1}{x^4}$ ebenfalls unendlich wird.

Man hat:

$$\int_{-\alpha}^{-\delta}\frac{dx}{x^4}=-\tfrac{1}{3}\left[(-\delta)^{-3}-(-\alpha)^{-3}\right],$$

$$\int_{\varepsilon}^{\beta}\frac{dx}{x^4}=-\tfrac{1}{3}(\beta^{-3}-\varepsilon^{-3}).$$

Es werden aber $\varepsilon^{-3}$ und $(-\delta)^{-3}$ für unendlich kleines $\varepsilon$ und $\delta$ unendlich gross, mithin der Werth des Integrals von $\delta$ und $\varepsilon$ abhängig. Man kann also bei diesem Integral nur einen Theil der Abscissenaxe als Integrationsweg nehmen, wenn der Punkt $x=0$ auf demselben nicht liegt.

Ein Integral von der Form

$$\int_{\lambda-\delta}^{\lambda+\varepsilon}f(x)\,dx,$$

wo $\delta$ und $\varepsilon$ unendlich klein sind, $f(\lambda)$ aber discontinuirlich ist, heisst nach Cauchy singuläres Integral.

Würde man das Integral

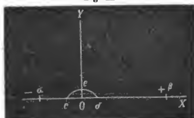
$$\int_{-\alpha}^{+\beta}\frac{dx}{x^4},$$

wo $\alpha$ und $\beta$ positive reelle Grössen sind, nach Abschnitt 4) ohne Weiteres berechnen, so erhielte man:

$$-\tfrac{1}{3}(\beta^{-3}-(-\alpha)^{-3})=-\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\alpha^3}\right),$$

also einen völlig bestimmten Werth. Derselbe gibt allerdings einen Ausdruck für das bezeichnete Integral, nur darf man dasselbe nicht über den Punkt $x=0$ erstrecken. Da nämlich die Grösse $\frac{1}{x^4}$ nur für $x=0$ discontinuirlich wird, so kann man etwa den Integrationsweg derart nehmen, dass man (Fig. 22.) von

Fig. 22.




Punkt $-\alpha$ auf der Abscissenaxe bis in die Nähe von dem Werthe Null fortschreitet, dann aber eine beliebige Ausweichung *ced* von der Abscissenaxe macht, so dass der Punkt Null umgangen wird. Der Weg $\alpha\beta$ kann dann wieder auf dem positiven Theil der Abscissenaxe fortgesetzt werden. Dieser Ausweg kann eine beliebige Linie, z. B. ein Halbkreis oder eine gebrochene Linie sein. Dieser Weg und übrigens auch jeder andere, der von $-\alpha$ nach $\beta$ führt, mit Ausnahme eben der Abscissenaxe, gibt $-\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{\beta^3}+\frac{1}{\alpha^3}\right)$ als Ausdruck für unser Integral. Dieser wichtige Gegenstand wird sogleich weiter ausgeführt werden.

11) Aenderung des Integrationsweges.

Wir betrachten jetzt das Integral:

$$u=\int_{\alpha}^{\beta}(f(x,y)dx+f_1(x,y)dy).$$

Damit dies im Allgemeinen einen Sinn gebe, ist unter $y$ irgend eine Function von $x$, also $\varphi(x)$, die man ganz beliebig wählen kann, zu verstehen; für jeden Werth von $x$, also auch für

$$x=\alpha \text{ und } x=\beta$$

wird dann auch $y$ und mithin das ganze Integral bestimmt sein. Wir wollen übrigens $\alpha$, $\beta$, $x$ und $y$ als stets reell voraussetzen, und annehmen, dass immer

$$y_s = q(x_s),\ x_0 = \alpha,\ x_p = \beta$$

sei. Es ist dann:

$$\begin{aligned} u = & (x_1 - x_0) f(x_1, y_1) + (y_1 - y_0) f_1(x_1, y_1) \\ & + (x_2 - x_1) f(x_2, y_2) + (y_2 - y_1) f_1(x_2, y_2) \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + (x_p - x_{p-1}) f(x_p, y_p) + (y_p - y_{p-1}) \\ & \qquad f_1(x_p, y_p). \end{aligned}$$

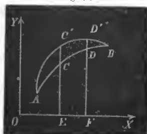
Die Gleichung $y = q(x)$ stellt ganz wie oben jedenfalls eine Linie dar, deren Anfangs- und Endpunkt bezüglich die Coordinaten-Werthe

$$x = \alpha,\ y = q(\alpha) \text{ und } x = \beta,\ y = q(\beta)$$

haben.

Sei $ACB$ diese Linie (Fig. 23), deren Gleichung also $y = q(x)$ ist. Gehen wir nun, indem wir die Form der Function $q(x)$ ändern, zu einer zweiten, der ersten unendlich nahen Linie $AC'B$ über, die jedoch dieselben Endpunkte hat; so ist das Integral noch immer von $\alpha$ nach $\beta$ zu erstrecken. Wir wollen aber sehen, in welcher Weise sich der Werth desselben ändert.

Fig. 23.




Sei $EC = y_s$ die Ordinate von $C$, so wird derjenige Punkt von $AC'B$, $C'$, welchem dieselbe Abscisse als $C$ zukommt, eine Ordinate $y_s + h_s$ haben, wenn man $CC' = h_s$ setzt. Die Grösse $h_s$ wird unendlich klein sein, und sich von Punkt zu Punkt ändern; $h_0$ und $h_p$ werden gleich Null sein, da die Grenzen $\alpha$ und $\beta$ dieselben bleiben.

Sei $u'$ das Integral auf der Linie $AC'B$, so ist also:

$$\begin{aligned} u' = & (x_1 - x_0) f[x_1, y_1 + h_1] + (y_1 - y_0 + h_1) f[x_1, y_1 + h_1] \\ & + (x_2 - x_1) f[x_1, y_2 + h_2] + (y_2 - y_1 + h_2 - h_1) f_1[x_2, y_2 + h_2] \\ & + \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + (x_p - x_{p-1}) f[x_p, y_p + h_p] + (y_p - y_{p-1} + h_p - h_{p-1}) f_1[x_p, y_p], \end{aligned}$$

und da

$$f[x_s, y_s + h_s] = f(x_s, y_s) + \frac{\partial f(x_s, y_s)}{\partial y_s} h_s,$$

$$f_1[x_s, y_s + h_s] = f_1(x_s, y_s) + \frac{\partial f_1(x_s, y_s)}{\partial y_s} h_s$$

zu setzen ist, so hat man:

$$\begin{aligned} u' - u = & (x_1 - x_0) \frac{\partial f(x_1, y_1)}{\partial y_1} h_1 + (x_2 - x_1) \frac{\partial f(x_2, y_2)}{\partial y_2} h_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + (x_{p-1} - x_{p-2}) \frac{\partial f(x_{p-1}, y_{p-1})}{\partial y_{p-1}} h_{p-1} \\ & + (y_1 - y_0) \frac{\partial f_1(x_1, y_1)}{\partial y_1} h_1 + (y_2 - y_1) \frac{\partial f_1(x_2, y_2)}{\partial y_2} h_2 + \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + (y_{p-1} - y_{p-2}) \frac{\partial f_1(x_{p-1}, y_{p-1})}{\partial y_{p-1}} h_{p-1} + h_1 f_1(x_1, y_1) \\ & + (h_2 - h_1) f_1(x_2, y_2) + (h_3 - h_2) f(x_3, y_3) + \cdot \cdot \cdot \cdot \\ & + (h_{p-1} - h_{p-2}) f_1(x_{p-1}, y_{p-1}) + h_{p-1} f_1(x_p, y_p), \end{aligned}$$

da, wenn man Continuität voraussetzt, die Glieder $(h_s - h_{s-1}) \frac{\partial f}{\partial y_s} h_s$ gegen die andern Glieder in $u' - u$ verschwinden.

Man hat also:

$$u'-u=\int_{x_0}^{x_p} h\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dx+\int_{y_0}^{y_p} h\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}dy+h_1 f_1(x_1,y_1)+(h_2-h_1)f_1(x_2,y_2)+\cdots$$
$$+(h_{p-1}-h_{p-2})f_1(x_{p-1},y_{p-1})-h_{p-1}f_1(x_p,y_p).$$

Die Grösse $h$ unter dem Integralzeichen bedeutet den in der Summe jedesmal zu $x_s$ und $y_s$ gehörigen Werth $h_s$.

Der Ausdruck ausserhalb des Integralzeichens gibt bei andrer Anordnung:

$$-h_1[f_1(x_2,y_2)-f_1(x_1,y_1)]-h_2[f_1(x_3,y_3)-f_1(x_2,y_2)]-h_3[f_1(x_4,y_4)-f_1(x_3,y_3)]-\cdots$$
$$-h_{p-1}[f_1(x_p,y_p)-f_1(x_{p-1},y_{p-1})]$$

$$=-h_1\left(\frac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f_1(x_1,y_1)}{\partial y_1}dy_1\right.$$
$$-h_2\left(\frac{\partial f_1(x_2,y_2)}{\partial x_2}dx_2+\frac{\partial f_1(x_2,y_2)}{\partial y_2}dy_2\right.$$
$$-\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.$$
$$-h_{p-1}\left(\frac{\partial f_1(x_p,y_p)}{\partial x_p}dx_p+\frac{\partial f_1(x_p,y_p)}{\partial y_p}dy_p\right)$$
$$=-\int_{x_0}^{x_p} h\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x}dx-\int_{y_0}^{y_p} h\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y}dy,$$

also

$$u'-u=\int_{x_0}^{x_p} h\left[\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right]dx.$$

Das Uebrige hebt sich weg.

Es wurde diese Form der Entwickelung gewählt, um Betrachtungen der Variationsrechnung, welche hier allerdings auf kürzerem Wege zu demselben Resultat geführt hätten, zu vermeiden. Die Grösse $h$ bedeutet die Zunahme von $y$ bei der Veränderung des Integrationsweges, und ist daher unendlich klein, im Uebrigen willkührlich.

Wir stellen jetzt die Frage:

„Wie müssen die Functionen $f(x, y)$ und $f_1(x, y)$ beschaffen sein, damit der Werth des Integrales $u=\int(fdx+f_1 dy)$ von dem Integrationswege unabhängig ist, vorausgesetzt, dass die Grenzen fest sind?"

Offenbar ist die Bedingung dafür:

$$u'-u=0,$$

oder

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x},$$

da wegen des willkürlichen $h$ nur in dem Falle das ganze Integral verschwinden kann, wenn jedes Element desselben verschwindet.

Ist also diese Bedingung, welche übrigens vollständig identisch ist mit der bekannten Bedingung, dass der Ausdruck:

$$du=f(x,y)\,dx+f_1(x,y)\,dy$$

ein vollständiges Differenzial sei, erfüllt, so ist der Werth des Integrals:

$$\int_\alpha^\beta[f(x,y)\,dx+f_1(x,y)\,dy]$$

völlig unabhängig von der Gleichung, welche $x$ mit $y$ verbindet, vorausgesetzt, dass die Integrationsgrenzen dieselben bleiben. Es braucht dann die Entfernung der Curven $ACB$ und $AC'B$ keine unendlich kleine zu sein, sondern kann beliebig werden, da man von $ABC$ immer zu einer unendlich nahen Curve, und so weiter auf continuirlichem Wege bis $AC'B$ fortschreiten kann, auf dem ganzen Wege sich aber der Werth des Integrals nicht ändert, vorausgesetzt, dass $f(x,y)$ und $f_1(x,y)$ überall zwischen $ACB$ und $AC'B$ und auf diesen Curven selbst continuirlich bleiben.

„Dieser ganze Schluss aber wird falsch, wenn sich zwischen $ACB$ und $AC'B$ ein Punkt befindet, in welchem $f(x, y)$ oder $f_1(x, y)$ discontinuirlich wird."

Es kann dann, selbst wenn die obige Bedingungsgleichung für den ganzen übrigen Raum herrscht, bei Ueberschreiten dieses Punktes sich der Werth des Integrals ändern.

Es ist nämlich bei allen diesen Betrachtungen Continuität vorausgesetzt.

Beispiel. Es sei

$$f(x, y) = 2xy,\ f_1(x, y) = x^2,$$

so ist offenbar

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x} = 2x,$$

also unsere Bedingung erfüllt.

In dem Integral:

$$\int_\alpha^\beta (2xy dx + x^2 dy)$$

setzen wir $y = ax$, und erhalten:

$$\int_\alpha^\beta 3ax^2 dx = a\beta^3 - a\alpha^3.$$

Setzen wir aber $y = px^2 + q$, so wird das Integral:

$$\int_\alpha^\beta (4px^3 + 2qx)dx =$$

$$p\beta^4 - p\alpha_4 + q\beta^2 - p\alpha^2.$$

Damit aber die Endwerthe von $y$, welche $x = \alpha$ und $x = \beta$ entsprechen, in beiden Integralen übereinstimmen, ist zu setzen:

$$a\beta = p\beta^2 + q$$

und

$$a\alpha = p\alpha^2 + q,$$

zwei Gleichungen, aus denen sich $p$ und $q$ ergeben, nämlich:

$$p = \frac{a}{\alpha+\beta} \text{ und } q = \frac{a\alpha\beta}{\alpha+\beta}.$$

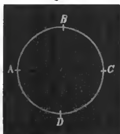
Diese Werthe, in den Ausdruck für das letzte Integral eingesetzt, geben aber:

$$\int_\alpha^\beta (4px^3 + 2qx)dx = \frac{a(\beta^2-\alpha^2)}{\alpha+\beta}(\alpha^2+\beta^2+\alpha\beta) = a\beta^3 - a\alpha^3,$$

also offenbar denselben Werth, welcher unter der Annahme, dass $y = ax$ sei, gefunden wurde.

12) Anwendung des eben gefundenen Satzes.

Fig. 24.




Sei $ABCD$ eine beliebige geschlossene Curve, bei welcher wir jedoch nicht etwa Continuität der Krümmung voraussetzen, so dass dieselbe aus beliebigen Curvenstücken, oder auch graden Linien zusammengesetzt sein kann, also z. B. irgend ein Polygon bilden kann.

Theilen wir diese Curve in zwei Theile $ABC$ und $ADC$, und erstrecken über dieselben das Integral:

$$u = \int (f dx + f_1 dy),$$

wo $f$ und $f_1$ Functionen von $x$ und $y$ sind, welche die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

erfüllen. Befindet sich dann innerhalb des Umfanges $ABCD$ und auf demselben kein Punkt, wo $f$ oder $f_1$ discontinuirlich wird, so geben nach vorigem Abschnitte beide Integrationswege dasselbe Resultat.

Es ist nun aber auf irgend einem Wege:

$$u = \int_\alpha^\beta (f dx + f_1 dy) = -\int_\beta^\alpha (f dx + f_1 dy),$$

wie bereits in Abschnitt (5) dargethan wurde. Das auf irgend einem Werthe $ADC$ berechnete Integral giebt also den entgegengesetzten Werth des auf dem umgekehrten Wege $CDA$ genommenen.

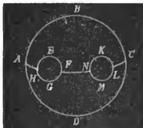
Erstreckt man also das Integral über den Weg $ABC$ und dann über $CDA$ (wo die Ordnung der Buchstaben die Richtung anzeigt), d. h. über den ganzen Umfang $ABCD$, so wird der Werth des Integrals Null.

I. „Wenn die Bedingungsgleichung $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial x}$ erfüllt ist, so ist der Ausdruck

$\int(fdx+f_1dy)$ über eine beliebige geschlossene Curve erstreckt immer gleich Null, falls sich auf dieser Curve und in dem von ihr begrenzten Ebenenstücke keine Discontinuität findet."

Es kann indess ein Flächenstück auch mehrfach begrenzt sein, wie z. B. das zwischen den geschlossenen Curven *ABCD, EFGH, KLMN* liegende. Sind auf diesem

Fig. 25.




dreifach begrenzten Stücke die Functionen $f$ und $f_1$ continuirlich, so kann man, wenn man die Linie *AH, FN, LC* zieht, das Integral $\int(fdx+f_1dy)$

über den Umfang *ABCLKNFEHA*

und

über den Umfang *AHGFNMLCDA*

erstrecken. Beide Integrationswege werden einzeln Null geben, selbst dann, wenn in den Flächenstücken *HEFG* und *NKLM* sich Punkte finden, wo $f$ oder $f_1$ seine Continuität verliert, denn diese Räume werden bei jedem einzelnen der beiden Integrationswege nicht überschritten. Vereinigt man aber beide Resultate, so heben sich die in entgegengesetzter Richtung durchschrittenen Strecken:

*HA* und *AH*, *NF* und *FN*, *CL* und *LC*

fort. Es bleibt das über die Wege:

*ABC, LKN, FEH, HGF, NML, CDA,*

d. h. über die geschlossenen Umfänge *ABCDA, LKNML, FEHGF* genommene Integral übrig, welches also gleich Null ist.

Durchmisst man aber die beiden letzten Umfänge *LMNKL, FHGEF* in entgegengesetzter Richtung, so wird die Summe der ihnen entsprechenden Integrale gleich dem über *ABCD* genommenen sein.

Es ist klar, dass die ganze Schlussweise völlig richtig bleibt, wenn statt der zwei inneren Begränzungen deren mehrere stattfänden. Also:

II. „Wenn in irgend einem mehrfach begrenzten Raume, und auf dessen Begrenzung, $f$ und $f_1$ nicht discontinuirlich sind, so ist das über die äussere Begrenzung erstreckte Integral $\int(fdx+f_1dy)$ gleich der Summe der auf die inneren Begrenzungen erstreckten, wenn man alle in gleicher Richtung durchmisst."

Noch wollen wir aber bemerken, dass wir vorausgesetzt haben, dass $f$ und $f_1$ als eindeutige Functionen betrachtet werden können, oder wenigstens, wenn sie mehrdeutig sind, als solche, die in den betrachteten Räumen nicht von einem Werth in den andern übergehen können. Wäre letzteres der Fall, so könnten die über *HA* und *AH* erstreckten Integrale möglicher Weise verschiedene Werthe von $f$ und $f_1$ umfassen, und sich folglich nicht wegheben, wodurch die obigen Schlüsse falsch werden. Es wird dieser Fall sogleich näher zu erwägen sein.

13) Das in den beiden letzten Abschnitten Gesagte findet sogleich Anwendung auf die Integrale von der Form $\int_\alpha^\beta f(z)\,dz$, wo $z = x + yi$ eine complexe Grösse ist, und der Integrationsweg zwischen den Grenzen $\alpha$ und $\beta$ beliebig genommen ist.

Die Punkte, wo $f(z)$ discontinuirlich ist, nennen wir Discontinuitätspunkte.

Wir wollen aber zunächst noch dasjenige, was die mögliche Mehrdeutigkeit von $f(z)$ anbetrifft, in Betracht ziehen.

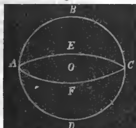
Eine Function wie $\sqrt[n]{x}$ hat allerdings $n$ Werthe. Beim Integriren ist jedoch im Allgemeinen nur ein bestimmter Werth ins Auge zu fassen. Ist auf der unteren Grenze $\alpha$ auch $\sqrt[n]{\alpha} = A$ gegeben, so ist der Wurzelwerth völlig bestimmt.

Da nämlich im Allgemeinen die $n$ Werthe von $\sqrt[n]{x}$ für jeden Punkt des Raumes endliche Unterschiede von einander haben (wie z. B. die beiden Werthe $+u$ und $-u$ von $\sqrt{x}$, deren Unterschied $= 2u$ ist), so kann man auf dem ganzen Integrationswege nicht von einem Werthe zum andern übergehen, weil sonst Discontinuität eintreten würde, bei welcher die Gesetze des Integrirens im Allgemeinen keine Gültigkeit mehr haben. Es ist also, wenn der Werth von $f(z)$ der mehrdeutigen Function auf einer Grenze gegeben ist, die Function für das Integriren keine mehrdeutige mehr.

Eine Ausnahme bilden nur zwei Fälle. Der erste findet an den Punkten statt, wo $f(z)$ schon an sich discontinuirlich ist. Hier unterliegt die Integration überhaupt den schon erwägten Schwierigkeiten.

Der zweite wichtigere Fall aber ist der, wo der Unterschied zweier oder mehrerer Werthe von $f(x)$ Null wird, dann nämlich kann unbeschadet der Continuität ein Werth der Function in den andern übergehen, und dies ist also auch auf dem Integrationswege möglich, wenn sich ein solcher Punkt auf demselben befindet. Es tritt dann eine Mehrdentigkeit ein, und ist dies bei Integralen, die über solche Punkte gehen, wohl zu beachten. Wir nennen die letzteren mehrfache Punkte (doppelte, dreifache u. s. w.). Z. B. $\sqrt[4]{x}$ hat für $x=0$ einen vierfachen Punkt, da hier alle Wurzeln gleich und gleich Null werden. Andere mehrfache Punkte hat diese Wurzel nicht.

Fig. 26.




Befindet sich aber innerhalb des geschlossenen Raumes *ABCD* (Fig. 26.) ein solcher mehrfacher Punkt *O*, so kann möglicher Weise, wenn man den Umfang *ABCD* durchschreitet, man mit einem andern Werthe von $f(x)$ nach *A* zurückkehren, als der ist, von dem man ausging.

Ein Beispiel wird das klar machen. Sei

$$f(z) = \sqrt{z}.$$

Die Figur *ABCD* bilde einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten, also der doppelte Punkt ist, für den $x=y=0$ ist. Sei $r$ der Radius des Kreises, also wenn $\varphi$ der Centriwinkel

$$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,$$

$$z = x + yi = re^{\varphi i},$$

$$f(z) = \sqrt{z} = r^{\frac{1}{2}} e^{\frac{\varphi}{2} i}.$$

Wir gehen von dem Punkte *A* aus, wo $\varphi = 0$ ist, und nehmen den positiven Werth von $\sqrt{z}$; derselbe wird also sein:

$$\sqrt{z} = r^{\frac{1}{2}}.$$

Um den Kreis *ABCDA* zu durchlaufen, muss man $\varphi$ von 0 bis $2\pi$ fortschreiten lassen. Thut man dies, so kommt man für $\varphi = 2\pi$ auf Punkt *A* zurück und hat also

$$\sqrt{z} = r^{\frac{1}{2}} e^{\pi i} = -r^{\frac{1}{2}},$$

also in der That den entgegengesetzten Werth desjenigen, mit dem man begonnen hat.

Der Grund ist leicht einzusehen. Wenn man von Linie *ABC* durch continuirlichen Uebergang zu *ADC* gelangen will, muss man das ganze Innere des Flächenstücks, also auch den mehrfachen Punkt überschreiten, wobei sich der Werth von $f(z)$ ändern kann.

„Selbstverständlich ist letzteres eine Möglichkeit', aber keine Nothwendigkeit."

Wir machen hieraus aber einen wichtigen Schluss auf das im vorigen Abschnitt Gesagte. Befindet sich z. B. innerhalb *NKLM* (siehe die Figur 25. in Abschnitt 12) ein mehrfacher Punkt, so wurde einmal die Strecke *CL*, dann nachdem *LKNM* durchschritten war, auch *LC* zurückgelegt, und angenommen, dass sich die Wege *LC* und *CL* weghoben. Es ist dies aber jetzt nicht richtig, weil ja bei dem Durchschreiten von *LKNM* die Function mit einem andern Werthe nach *L* zurückkehren kann, als der mit welchem begonnen wurde; dann ist das über *CL* erstreckte Integral nicht mehr das entgegengesetzte von dem über *CL* erstreckte. Soll also der in 12) bewiesene Satz allgemeine Gültigkeit haben, so ist hinzuzufügen, das sich innerhalb des ganzen Raumes *ABCD*, also des von der äussern Begrenzung eingeschlossenen, kein mehrfacher Punkt befinden darf.

14) Anwendung auf complexe Grössen.

Es ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(z)\,dz = \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi(x+yi)\,dx + i\varphi(x+yi)\,dy].$$

Damit also das in 11 und 12 Gesagte Anwendung finde, muss man:

$$f = \varphi(x+yi) \text{ und } f_1 = i\varphi(x+yi)$$

setzen. Es wird dann

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(x+yi)}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{i\partial \varphi(x+yi)}{\partial x}.$$

Es müsste also, wenn die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

erfüllt sein soll, auch

$$\frac{\partial \varphi(x+yi)}{\partial y} = \frac{i\partial\varphi(x+yi)}{\partial x}$$

sein.

Diese Gleichung wäre ohne Weiteres richtig, wenn $i$ eine reelle Constante wäre. Für $i = \sqrt{-1}$ bedarf sie einer nähern Erwägung.

Cauchy hat dargethan, dass diese Bedingungsgleichung erfüllt sein muss, damit eine Function $\varphi(z)$ sich in irgend einem Gebiete von Werthen von $z$ nach ganzen Potenzen entwickeln lasse. Er nennt die Functionen, die sie erfüllen, „monogene Functionen.“ (Siehe hierüber den Artikel Quantitäten (imaginäre)).

Da aber alle Functionen complexer Variablen, die aus den Elementen und der Integralrechnung sich ergeben, den Character monogener Functionen haben, so kann man diese Gleichung als das Criterium der Functionen überhaupt annehmen, und sie als immer gültig betrachten. Es findet dann das in 11 und 12 Gesagte in Verbindung mit dem in 13 Gegebenen ohne Weiteres Anwendung, und führt zu folgenden wichtigen Sätzen über Quadraturen auf verschiedenen Integrationswegen, aber zwischen denselben Grenzen.

I. Sucht man das Integral $\int_\alpha^\beta f(z)\,dz$ auf zwei verschiedenen Wegen, wo $f(z)$ eindeutig und continuirlich ist, so können die Resultate nur dann verschieden sein, wenn sich innerhalb des von beiden begrenzten Flächenstückes Discontinuitäts- oder mehrfache Punkte befinden.

II. Das über einen geschlossenen Umfang erstreckte Integral $\int f(z)\,dz$ ist Null, wenn sich innerhalb desselben und auf demselben kein mehrdeutiger oder Discontinuitätspunkt findet.

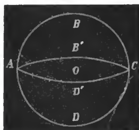
III. Ist ein mehrfach begrenzter Raum gegeben, so ist $\int f(z)\,dz$ für die äussere Begrenzung genommen gleich der Summe der Werthe dieses Integrals für die innern Begrenzungen. Wenn man alle Wege in gleicher Richtung durchschreitet, und sich auf dem mehrfach begrenzten Flächenstück kein Discontinuitätspunkt, innerhalb der ganzen äussern Begrenzung aber auch kein mehrfacher Punkt befindet.

Es ist wichtig, diese letztere Bedingung noch etwas zu modificiren. Mehrfache Punkte, die sich innerhalb derjenigen geschlossenen Curven befinden, welche die inneren Begrenzungen bilden, können den Satz darum ungültig machen, weil dann nach Zurücklegung der entsprechenden Curve die Function zu einem andern Werthe gelangen kann, als sie anfänglich hatte. Ist dies also bei keiner der innern Begrenzungen der Fall, so bleibt der Satz richtig. Es lässt sich also derselbe auch so aussprechen:

III. a. Das Integral auf die äussere Begrenzung erstreckt ist gleich der Summe der auf die innern Begrenzungen zu erstreckenden, wenn $A$) in dem mehrfach begrenzten Flächenstück sich keine mehrfachen oder Discontinuitätspunkte befinden, $B$) beim Umkreisen einer der innern Begrenzungen der Werth der Function nicht geändert wird.

Beispiel. Die Function $\frac{1}{z}$ hat keinen mehrfachen Punkt, wohl aber einen Discontinuitätspunkt, $z=0$, also den Anfangspunkt der Coordinaten.

Fig. 27.




Erstrecken wir das Integral $\int \frac{1}{z}\,dz$ über den Halbkreis $ABC$ (Fig. 27.), welcher seinen Mittelpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten hat, auf der positiven Seite der $y$ liegt, und dessen Radius gleich $r$ sei.

Es ist dann zu setzen:

$x = r\cos\varphi,\ \ y = r\sin\varphi,\ \ s = x + yi = re^{\varphi i},$

$ds = dx + idy = rie^{\varphi i}\,d\varphi,$

$r$ ist nämlich constant. Die Begrenzung erstreckt sich von

$\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$;

man hat also:

$$\int \frac{1}{s}\,ds = \int_0^\pi \frac{rie^{\varphi i}d\varphi}{re^{\varphi i}} = i\int_0^\pi d\varphi = i\pi.$$

Erstreckt man dasselbe Integral ebenfalls von $A$ nach $C$, aber auf dem auf der negativen Seite der $y$ liegenden Halbkreise, so ist von $\varphi = 0$ bis $\varphi = -\pi$ zu gehen, und man hat:

$$\int \frac{1}{s}\,ds = i\int_0^{-\pi} d\varphi = -i\pi,$$

also den entgegengesetzten Werth des Vorigen.

Auf allen Wegen, die von $A$ nach $C$ auf der positiven Seite der $y$ führen, z. B. $AB'C$, erhält man das erste Resultat $i\pi$, dagegen auf allen Wegen $AD'C$, die auf der negativen Seite der $y$ liegen, das letztere $-i\pi$, da zwischen $ABC$ und $AB'C$, $ADC$ und $AD'C$ sich kein Discontinuitäts-Punkt befindet.

Erstreckt man also das Integral über den ganzen geschlossenen Raum $AB'CD'$, so erhält man:

$$i\int_0^\pi d\varphi - i\int_0^{-\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Durchmisst man also den Raum $2, 3 \cdots s$ mal, so wird der Werth des Integrals

$$2\pi i,\ 4\pi i \cdots 2s\pi i,$$

so dass also das Integral: $\int_r^r \frac{ds}{s}$ unendlich viel Werthe hat, nämlich $2s\pi i$, wo $s$ jede ganze Zahl sein kann, positiv oder negativ, je nachdem man den Umfang $ABCD$ in einer oder der andern Richtung durchschreitet.

Anm. Das bezeichnete Integral

$$\int_1^\alpha \frac{ds}{s}$$

gibt, wie wir bald sehen werden, den Logarithmus von $\alpha$ und ist dieser in der That vieldeutig.

15) Unbestimmte Integrale.

Da jedes unbestimmte Integral sich nach Bestimmung der Constanten als ein bestimmtes betrachten lässt, so erstreckt sich die Anwendbarkeit des in den vorigen Abschnitten Gesagten auf alle Quadraturen.

Zu genauen Untersuchungen ist dasselbe unentbehrlich; es war deshalb nöthig mit den Grundzügen der Theorie der bestimmten Integrale zu beginnen.

Wir verlassen dieselbe jetzt auf einige Zeit, um uns zu den unbestimmten Integralen zu wenden.

Da $\int f(x)\,dx = C + \int_\alpha^x f(x)\,dx$ ist, so kann man aus einem bestimmten Integrale leicht das unbestimmte finden, wenn man eine willkürliche Constante hinzuzählt. Enthält das bestimmte Integral ein Glied, das nur von der untern Grenze $\alpha$ abhängt, so kann man dies in der Constante mit inbegriffen denken, und also weglassen. Wir fanden z. B. in Abschnitt IV.:

$$\int_\alpha^x x^s\,dx = \frac{x^{s+1} - \alpha^{s+1}}{s+1}.$$

Es ist also:

$$\int x^s\,dx = C + \frac{x^{s+1}}{s+1}.$$

Selbstverständlich kann man die Constante $C$ immer weglassen, da dieselbe sich immer wieder ergänzen lässt. Nach dem eben Gesagten gestalten sich die in Abschnitt 8 bewiesenen Formeln jetzt folgendermassen:

$$\int f(x)\,dx = \int f(x)\frac{dx}{dy}\,dy.$$

Das durch sie gegebene Integrationsverfahren heisst: „Einführung einer neuen Variable."

$$\int y\,dx = xy - \int x\,dy,$$

wo das von der unteren Grenze abhängige Glied in der Constante mit einbegriffen, und weggelassen ist.

$$\int f(x)\,\psi(x)\,dx = f(x)\int\psi(x)\,dx - \int\left[\int\psi(x)\,dx\right]f'(x)\,dx.$$

Dieses Integrationsverfahren wird auch „theilweises Integriren" genannt.

Bei der wirklichen Berechnung von Integralen werden wir uns der unbestimmten Integrale bedienen. Hat man ein unbestimmtes Integral

$$\int f(x)\,dx = C + \varphi(x),$$

so lässt sich augenblicklich das bestimmte:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$$

finden. Es ist nämlich:

$$\int f(x)\,dx = C + \int_\lambda^x f(x)\,dx = C + \varphi(x),$$

wo $\lambda$ ganz beliebig, also:

$$C + \int_\lambda^\alpha f(x)\,dx = C + \varphi(\alpha),$$

also durch Subtraction:

$$\int_\lambda^x f(x)\,dx - \int_\lambda^\alpha f(x)\,dx = \int_\alpha^x f(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(\alpha),$$

d. h.

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha).$$

Dass hierbei die Aenderung der Werthe der Integrale durch die Aenderung der Integrationswege Berücksichtigung finden muss, ist selbstverständlich.

Wir hatten bereits folgende Integrale:

$$\int dx = x,$$

$$\int x^s\,dx = \frac{x^{s+1}}{s+1}.$$

Das letztere Integral gilt für jeden Werth von $s$, mit Ausnahme von $s=-1$, wo es gleich $\frac{1}{0}$ wird, also seine Bedeutung verliert.

Es lässt sich das Integral

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx$$

jedoch ganz wie das allgemeinere auf directem Wege finden.

Setzen wir in $\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x}$ wieder:

$$x_s = r x_{s-1},$$

so kommt:

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} = \frac{rx_0 - x_0}{rx_0} + \frac{r^2x_0 - rx_0}{r^2x_0} + \frac{r^3x_0 - r^2x_0}{r^3x_0} + \dots + \frac{r^px_0 - r^{p-1}x_0}{r^px_0}$$
$$= \frac{r-1}{r} + \frac{(r-1)}{r} + \frac{r-1}{r} + \dots = p\frac{(r-1)}{r}.$$

Nun ist

$$x_p = r^p x_0, \quad \text{oder } \beta = r^p \alpha,$$

also

$$\frac{\lg\beta - \lg\alpha}{\lg r} = p.$$

Da aber $r$ der Einheit unendlich nahe ist, kann man

$$r = 1 + \nu,\ \lg r = \nu$$

setzen, wo $\nu$ verschwindend klein ist; es wird dann:

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} = p\nu, \text{ und } p = \frac{\lg\beta - \lg\alpha}{\nu},$$

also

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} = \lg\beta - \lg\alpha$$

und

$$\int \frac{dx}{x} = \lg x$$

sein.

Man könnte statt dessen auch in

$$\int_\alpha^\beta x^{\mu-1}\,dx = \frac{\beta^\mu - \alpha^\mu}{\mu}$$

$\mu$ unendlich klein annehmen. Dann wäre

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} = \frac{\beta^\mu - \alpha^\mu}{\mu} = \frac{\beta^\mu - 1}{\mu} - \frac{\alpha^\mu - 1}{\mu}$$

und der letztere Ausdruck gibt bekanntlich als Grenzwerth

$$\lg\beta - \lg\alpha$$

wie oben.

Selbstverständlich kann man auch folglich aus der Formel

$$\frac{d\lg x}{dx} = \frac{1}{x}$$

ableiten:

$$\lg x = \int \frac{dx}{x}.$$

Da man für

$$\int_\alpha^\beta \frac{dx}{x} \text{ auch } \int_\alpha^\alpha \frac{dx}{x} + \int_\alpha^\beta \frac{dx}{x}$$

schreiben kann, aber

$$\int_\alpha^\alpha \frac{dx}{x} = 2i\pi$$

war (siehe Abschnitt 13), so folgt hier-

aus sogleich die Mehrdeutigkeit der Logarithmen. Ist Log$(x)$ der allgemeine, lg$(x)$ ein einzelner Werth eines solchen, so hat man:

$$\mathrm{Lg}(x) = \mathrm{lg}(x) + 2s\pi i.$$

16) Integration der rationalen Functionen.

Suchen wir jetzt die Integrale der rationalen Functionen überhaupt. Ein solches wird die Form haben:

$$\int \frac{f(x)}{q(x)} dx,$$

wo $f(x)$ und $q(x)$ ganze Functionen von $x$ sind.

Wie auch der Ausdruck $\frac{f(x)}{q(x)}$ beschaffen sei, so lässt er sich durch Division in einen andern von der Gestalt:

$$A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + A_{n-2} x^{n-2} + \cdots \, A_1 x + A_0 + \frac{f_1(x)}{q(x)}$$

verwandeln, wo die höchste in $f_1(x)$ enthaltene Potenz von $x$ niedriger ist, als die höchste in $q(x)$ enthaltene. Bezeichnen wir den entwickelten Theil mit $\psi(x)$, so ist:

$$\int \frac{f(x)}{q(x)} dx = \int \psi(x) dx + \int \frac{f_1(x)}{q(x)} dx$$

und

$$\int \psi(x) dx = \frac{A_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{A_{n-1}}{n} x^n + \frac{A_{n-2}}{n-1} x^{n-1} + \cdots + \frac{A_1}{2} x^2 + A_0 x,$$

wo die willkürliche Constante fortgelassen ist.

Was den Ausdruck $\frac{f_1(x)}{q(x)}$ anbetrifft, so lässt sich der Nenner in Factoren zerlegen (siehe den Artikel: quadratische Factoren), so dass man hat:

$$q(x) = (x-\alpha_1)^{s_1} (x-\alpha_2)^{s_2} (x-\alpha_3)^{s_3} \cdots (x-\alpha_p)^{s_p},$$

wo $s_1, s_2, s_3 \cdots s_p$ ganze positive Zahlen, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \cdots \alpha_p$ Constanten sind, die jedoch auch imaginär werden können.

Sind jedoch die Coefficienten von $q(x)$ alle reell, so kann dies Product nur reelle $\alpha$, und solche imaginäre haben, die sich zu zweien derart entsprechen, dass wenn der eine die Form $a_n + b_n i$ hat, der andre die Form $a_n - b_n i$ haben muss, und die entsprechenden Exponenten $s$ bei beiden gleich sind. (Siehe den Artikel: quadratische Factoren.) Man wird dann auch haben:

$$(x-a_n-b_n i)^{s_n} (x_n - a_n + b_n i)^{s_n} = [(x-a_n)^2 + b_n^2]^{s_n}.$$

Ein quadratischer Ausdruck, der nichts Imaginäres mehr enthält.

Es ist nun (siehe den Artikel: Zerlegung der Brüche):

$$\frac{f_1(x)}{q(x)} = \frac{Bs_1}{(x-\alpha_1)^{s_1}} + \frac{Bs_1-1}{(x-\alpha_1)^{s_1-1}} + \frac{Bs_1-2}{(x-\alpha_1)^{s_1-2}} + \cdots + \frac{B_0}{x-\alpha_1}$$
$$+ \frac{Cs_2}{(x-\alpha_2)^{s_2}} + \frac{Cs_2-1}{(x-\alpha_2)^{s_2-1}} + \frac{Cs_2-2}{(x-\alpha_2)^{s_2-2}} + \cdots + \frac{C_0}{x-\alpha_2}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{Hs_p}{(x-\alpha_p)^{s_p}} + \frac{Hs_p-1}{(x-\alpha_p)^{s_p-1}} + \frac{Hs_p-2}{(x-\alpha_p)^{s_p-2}} + \cdots + \frac{H_0}{x-\alpha_p}.$$

Die Ausdrücke

$$B_0, B_1 \cdots Bs_1, C_0 \cdots Cs_2, H_0 \cdots Hs_p$$

sind Constanten, die sich leicht bestimmen lassen.

Das Integral unsers Ausdrucks besteht also aus einer Summe von Gliedern, welche alle die Form haben:

$$\int \frac{A\,dx}{(x-\alpha)^s} = A \int \frac{dx}{(x-\alpha)^s}.$$

Führt man die neue Variable

$$y = x - \alpha$$

ein, so ist

$$dy = dx,$$

also

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^s} = \int \frac{dy}{y^s} = \frac{y^{1-s}}{1-s} = \frac{(x-\alpha)^{1-s}}{1-s}.$$

Nur wenn $s = 1$ ist, erhält man:

$$\int \frac{dy}{y} = \lg y = \lg (x - \alpha).$$

Es wird also sein:

$$\int \frac{f_1(x)}{\varphi(x)} dx = \sum_{s=2}^{s=s_1} \frac{Bs}{1-s}(x-\alpha_1)^{1-s} + \sum_{s=2}^{s=s_2} \frac{Cs}{1-s}(x-\alpha_2)^{1-s}$$

$$+ \cdots + \sum_{s=2}^{s=s_p} \Big( \frac{Hs}{1-s}(x-\alpha_p)^{1-s} + B_0 \lg(x-\alpha_1) + C_0 \lg(x-\alpha_2)$$

$$+ \cdots + H_0 \lg(x-\alpha_p) \Big).$$

Nehmen wir jetzt an, $\varphi(x)$ enthielte lauter reelle Coefficienten, so muss jedem Gliede, wo $\alpha$ und daher auch $B$ imaginär ist:

$$\frac{(P+Qi)}{1-s}(x-a-bi)^{1-s}$$

ein andres von der Form

$$\frac{(P-Qi)}{1-s}(x-a+bi)^{1-s}$$

entsprechen, und jedem Gliede:

$$(P_0 + Q_0 i) \lg (x-a-bi)$$

ein andres:

$$(P_0 - Q_0 i) \lg (x-a+bi).$$

Wir wollen zunächst das erste Gliederpaar vereinigen.

Wir setzen:

$$a = r\cos\alpha, \quad b = r\sin a,$$

$$P = R\cos\lambda, \quad Q = R\sin\lambda.$$

Es wird dann:

$$(P+Qi)(x-a-bi)^{-n} = (x-re^{\alpha i})^{-n} Re^{\lambda i} = Re^{\lambda i} \frac{(x-re^{-\alpha i})^n}{(x-re^{\alpha i})^n (x-re^{-\alpha i})^n}$$

$$= Re^{\lambda i} \frac{(x-re^{-\alpha i})^n}{(x^2 - 2rx\cos\alpha + r^2)^n}$$

und

$$(P-Qi)(x-a+bi)^{-n} = Re^{-\lambda i} \frac{(x-re^{\alpha i})^n}{(x^2 - 2rx\cos\alpha + r^2)^n},$$

also, wenn man unter

$n_1, n_2, n_3 \cdots$ die Binomialcoefficienten $n, \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}, \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cdots$

versteht:

$$(P+Qi)(x-a-bi)^{-n} = \frac{R}{(x^2-2rx\cos\alpha+r^2)^n}\,[x^n e^{\lambda i} - n_1 x^{n-1} r e^{(\lambda-\alpha)i}$$
$$+ n_2 x^{n-2} r^2 e^{(\lambda-2\alpha)i} - \ldots (-1)^n r^n e^{(\lambda-n\alpha)i}]$$

und

$$(P-Qi)(x-a+bi)^{-n} = \frac{R}{(x^2-2rx\cos\alpha+r^2)^n}\,[x^n e^{-\lambda i} - n_1 x^{n-1} r e^{-(\lambda-\alpha)i}$$
$$+ n_2 x^{n-2} r^2 e^{-(\lambda-2\alpha)i} - \ldots (-1)^n r^n e^{-(\lambda-n\alpha)i}],$$

also auch:

$$(P+Qi)(x-a-bi)^{-n} + (P-Qi)(x-a+bi)^{-n} = \frac{R}{(x^2-2rx\cos\alpha+r^2)^n}[x^n(e^{\lambda i}+e^{-\lambda i})$$
$$- n_1 r x^{n-1}(e^{(\lambda-\alpha)i} + e^{-(\lambda-\alpha)i}) + n_2 r^2 x^{n-2}(e^{(\lambda-2\alpha)i} + e^{-(\lambda-2\alpha)i} + \ldots$$
$$(-1)^n r^n (e^{(\lambda-n\alpha)i} + e^{-(\lambda-n\alpha)i})]$$

oder da

$$e^{ui} + e^{-ui} = 2\cos u$$

ist:

$$1)\quad \frac{(P+Qi)(x-a-bi)^{1-s} + (P-Qi)(x-a+bi)^{1-s}}{1-s} = \frac{R}{(1-s)(x^2-2rx\cos\alpha+r^2)^{s-1}}$$
$$[x^{s-1}\cos\lambda - n_1 r x^{s-2}\cos(\lambda-\alpha) + n_2 r^2 x^{s-3}\cos(\lambda-2\alpha) - n_3 r^3 x^{s-4}\cos(\lambda-3\alpha) + \cdots$$
$$+ (-1)^{s-1} r^{s-1}\cos(\lambda-(s-1)\alpha)].$$

Es lassen sich sonach diese Gliederpaare immer reell darstellen.

Was jetzt die Glieder

$$(P+Qi)\lg(x-a-bi),\quad (P-Qi)\lg(x-a+bi)$$

anbetrifft, so gibt deren Summe offenbar den Werth:

$$P\lg[(x-a-bi)(x-a+bi)] + Qi\lg\left(\frac{x-a-bi}{x-a+bi}\right) = P\lg[(x-a)^2+b^2]$$
$$+ Qi\lg\left\{\frac{1-\frac{bi}{x-a}}{1+\frac{bi}{x-a}}\right\}.$$

Das erste Glied hat reelle Formen. Für das zweite berücksichtige man die Gleichung:

$$e^{-2ai} = \frac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha + i\sin\alpha} = \frac{1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha},$$

woraus sich ergibt:

$$-2ai = \lg\frac{1-i\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1+i\,\mathrm{tg}\,\alpha};$$

setzen wir hierin:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{x-a},$$

so wird

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x-a}$$

und

$$Qi \lg \left\{ \frac{1 - \frac{bi}{x-a}}{1 + \frac{bi}{x-a}} \right\} = +2Q \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x-a},$$

da übrigens, wenn

$$u = \operatorname{tg} \alpha \text{ auch } \frac{1}{u} = \cot \alpha$$

ist, so ist:

$$\operatorname{arctg} u = \operatorname{arc\,cot} \left(\frac{1}{u}\right) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{1}{u}\right).$$

Man kann daher auch schreiben:

$$Qi \lg \left\{ \frac{1 - \frac{bi}{x-a}}{1 + \frac{bi}{x-a}} \right\} = -2Q \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x-a}{b}\right),$$

indem man $\frac{\pi}{2}$ in die willkürliche Constante mit inbegriffen denkt, und also weglassen kann. Es ist also der Werth des Gliederpaares:

2) $$(P+Qi) \lg (x-a-bi) + (P-Qi) \lg (x-a+bi) = P \lg [(x-a)^2 + b^2] - 2Q \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x-a}{b}\right).$$

Ist die zu integrirende Function, welche diesen Ausdruck giebt, also:

$$\frac{P+Qi}{x-a-bi} + \frac{P-Qi}{x-a+bi},$$

nicht unter dieser Form, sondern gleich mit quadratischem Nenner unter der Form:

$$\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}$$

gegeben, so ist offenbar, wie man erhält, wenn man die beiden ersten Brüche mit linearen Nennern vereinigt:

$$Mx + N = (P+Qi)(x-a+bi) + (P-Qi)(x-a-bi),$$

also

$$Mx + N = 2P(x-a) - 2bQ,$$

also

$$M = 2P, \quad N = -2(aP + bQ),$$

woraus sich ergiebt:

$$P = \frac{M}{2}, \quad Q = -\frac{(N+aM)}{2b},$$

also:

3) $$\frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2} dx = \frac{M}{2} \lg [(x-a)^2 + b^2] + \frac{N+aM}{b} \operatorname{arctg} \frac{x-a}{b}.$$

Man kann aber auch unmittelbar den Werth des Integrals

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+\alpha x+\beta} dx,$$

wo der Nenner zwei reelle Factoren hat, bestimmen. Dieser Nenner lässt sich nämlich auf die Form:

$$\left(x + \frac{\alpha}{2}\right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4}$$

oder kürzer auf die Form:

$$(x-a)^2 - b^2$$

bringen, wo das letzte Glied immer negativ sein muss, damit zwei reelle Wurzeln vorkommen.

Setzt man nun

$$\frac{Mx+N}{(x-a)^2-b^2} = \frac{\alpha}{x-a+b} + \frac{\beta}{x-a-b},$$

so ergibt sich, wenn man mit $x-a+b$ multiplicirt, und dann

$$x-a+b=0$$

setzt:

$$\alpha = -\frac{M(a-b)+N}{2b},$$

und, wenn man mit $x-a-b$ multiplicirt und dann

$$x-a-b=0$$

setzt,

$$\beta = \frac{M(a+b)+N}{2b}$$

und es ist:

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \alpha \lg(x-a+b) + \beta \lg(x-a-b),$$

d. h.

$$\int \frac{Mx+N}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{Ma+N}{2b} \lg \frac{(x-a-b)}{(x-a+b)} + \frac{Mb}{2b} \lg[(x-a)^2+b^2].$$

Beispiel. Es ist zu bilden das Integral:

$$\int \frac{dx}{x^8+x^7-x^4-x^3};$$

es ist also

$$f(x)=f_1(x)=1, \qquad \varphi(x)=x^8+x^7-x^4-x^3$$

zu setzen.

Man findet nun leicht:

$$\varphi(x)=x^3[x^4(x+1)-(x+1)]=x^3(x+1)(x^4-1)=x^3(x+1)(x^2+1)(x^2-1)$$
$$=x^3(x+1)^2(x^2+1)(x-1).$$

Es wird also

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{A}{x^3} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1} + \frac{F}{x-1} + \frac{Gx+H}{x^2+1}.$$

Um die Constanten $A, B, C, D, E, F, G, H$ zu bestimmen, verfährt man folgendermassen (siehe den Artikel: Zerlegung der Brüche). Man multiplicirt mit $x^3$, wodurch man erhält:

$$\frac{x^3}{\varphi(x)} = \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)(x-1)} = A+Bx+Cx^2+\frac{Dx^3}{(x+1)^2}+\frac{Ex^3}{x+1}+\frac{Fx^3}{x-1} + \frac{(Gx+H)x^3}{x^2+1};$$

also, wenn man $x$ gleich Null setzt:

$$A=-1.$$

Man hat sonach

$$\frac{1}{\varphi(x)} + \frac{1}{x^3} = \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1} + \frac{F}{x-1} + \frac{Gx+H}{x^2+1},$$

aber, wenn man für $\varphi(x)$ seinen Werth schreibt, wird:

$$\frac{1}{\varphi(x)} + \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{(x+1)(x^4-1)}+1\right) = \frac{(x^5+x^4-x)}{x^3(x+1)(x^4-1(} = \frac{x^4+x^3-1}{x^2(x+1)(x^4-1)},$$

also:

$$\frac{x^4+x^3-1}{x^2(x+1)(x^4-1)} = \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1} + \frac{F}{x-1} + \frac{Gx+h}{x^2+1}.$$

Wir multipliciren nun mit $x^2$, und setzen dann $x=0$, so ergibt sich:

$$B=+1;$$

und da

$$\frac{x^4+x^3-1}{x^2(x+1)(x^4-1)} - \frac{1}{x^2} = \frac{-x^5+x^3+x}{x^2(x+1)(x^4-1)} = \frac{-(x^4-x^2-1)}{x(x+1)(x^4-1)}$$

ist, so hat man:

$$\frac{-(x^4-x^3-1)}{x(x+1)(x^4-1)} = \frac{C}{x} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1} + \frac{F}{x-1} + \frac{Gx+h}{x^2+1};$$

also wieder mit $x$ multiplicirend, und dann $x=0$ setzend, erhält man:

$$C=+1,$$

$$\frac{-(x^4-x^3-1)}{x(x+1)(x^4-1)} + \frac{1}{x} = \frac{x^5+x^3-x}{x(x+1)(x^4-1)} = \frac{x^4+x-1}{(x+1)^2(x-1)(x^2+1)},$$

also:

$$\frac{(x^4+x-1)}{(x+1)^2(x-1)(x^2+1)} = \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x+1} + \frac{F}{x-1} + \frac{Gx+h}{x^2+1}.$$

Wir multipliciren nun mit $(x+1)^2$, und setzen dann $x=-1$, so ergibt sich:

$$D=+\frac{1}{4}$$

oder es ist:

$$\frac{(x^4+x-1)}{(x+1)^2(x-1)(x^2+1)} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(x+1)^2} = \frac{4x^4-x^3+x^2+3x-3}{4(x+1)^2(x-1)(x^2+1)}$$

$$= \frac{4x^3(x+1)-5x^2(x+1)+6x(x+1)-3(x+1)}{4(x+1)^2(x-1)(x^2+1} = \frac{(4x^3-5x^2+6x-3)}{4(x+1)(x-1)(x^2+1)},$$

also

$$\frac{4x^3-5x^2+6x-3}{4(x+1)(x-1)(x^2+1)} = \frac{E}{x+1} + \frac{F}{x-1} + \frac{Gx+H}{x^2+1}.$$

Abermals mit $x+1$ multiplicirend, und dann $x=-1$ setzend, erhält man:

$$E=+\frac{9}{8}.$$

Multiplicirt man dagegen mit $x-1$ und setzt dann $x=+1$, so kommt:

$$F=+\frac{1}{8}.$$

Es ist aber:

$$\frac{4x^3-5x^2+6x-3}{4(x+1)(x-1)(x^2+1)} - \frac{9}{8}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{x-1} = \frac{4x^3-5x^2+6x-3}{4(x^2-1)(x^2+1)} - \frac{5x-4}{4(x^2-1)}$$

$$= \frac{-x^3-x^2+x+1}{4(x^2-1)(x^2+1)} = -\frac{(x+1)}{4(x^2+1)} = \frac{Gx+H}{x^2+1},$$

woraus sich dann $G=-\frac{1}{4}$, $H=-\frac{1}{4}$ ergibt. Es ist also:

$$\frac{1}{\varphi(x)} = -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{9}{8(x+1)} + \frac{1}{8(x-1)} - \frac{1}{4}\cdot\frac{x+1}{x^2+1}.$$

$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx$ ergibt sich aus der Formel 3, wenn man

$$M=N=1,\ a=0,\ b=1$$

setzt, nämlich:

$$\int \frac{x+1}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\lg(x^2+1) + \operatorname{arc\,tg}(x).$$

Es ist also:

$$\int \frac{dx}{x^3+x^7-x^4-x^8} = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x} - \lg x - \frac{1}{4(x+1)} + \frac{9}{8}\lg(x+1) + \frac{1}{8}\lg(x-1)$$

$$-\frac{1}{8}\lg(x^2+1) - \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x,$$

d. h. wenn man die Brüche und Logarithmen vereinigt:

$$\int \frac{dx}{x^3+x^7-x^4-x^8} = \frac{2-2x-5x^2}{4x^2(1+x)} + \frac{1}{8}\lg\frac{x^2-1}{x^2+1} + \lg\frac{x+1}{x} - \frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg} x + \text{const.}$$

17) **Integration irrationaler und Functionen.**

Ist das Integral

$$\int f(x, y)dx,$$

wo $f(x, y)$ eine rationale Function von $x$ und $y$ ist, zu finden, unter der Bedingung, dass

$$y = (a+bx)^n$$

sei, so lässt sich dies Integral immer bestimmen, mag $n$ eine ganze Zahl oder ein Bruch sein.

Zuvörderst kann $n$ immer als positiv betrachtet werden. Denn ist es negativ, so ist immer:

$$(a+bx)^{-n} = \frac{1}{(a+bx)^n}.$$

Setzt man daher in diesem Falle $y=\frac{1}{u}$, so ist $f(x, y) = f(x, \frac{1}{u})$ eine rationale Function von $x$ und $u$.

Sei daher

$$n=\frac{p}{q},$$

wo $p$ und $q$ ganze positive Zahlen sind.

Man führt dann die neue Variable:

$$(a+bx)^{\frac{1}{q}} = z$$

ein, und erhält:

$$a+bx=z^q$$

$$dx=\frac{qz^{q-1}dz}{b}$$

also:

$$x=\frac{z^q-a}{b}.$$

Es war ferner

$$y=(a+bx)^{\frac{p}{q}} = z^p,$$

also:

$$\int f(x,y)dx = \int f\left(\frac{z^q-a}{b},\ z^p\right)\cdot\frac{q}{b}z^{q-1}dz.$$

Hier steht unter dem Integralzeichen eine Function

$$\frac{q}{b}z^{q-1}f\left(\frac{z^q-a}{b},\ z^p\right),$$

welche nur ganze Potenzen der Variablen $z$ enthält, und die sich also nach dem vorigen Abschnitte immer bestimmen lässt.

**Beispiel.** Es sei zu bestimmen das Integral:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(a+bx)^2}},$$

also

$$f(x, y)=\frac{1}{x^2\cdot y^{\frac{2}{3}}}.$$

Es ist in unsere Formel zu setzen $p=2$, $q=3$, wodurch man erhält:

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \int\frac{3}{b}z^2\frac{1}{\left(\frac{z^3-a}{b}\right)^2\cdot z^2}dz = 3b^2\int\frac{dz}{(z^3-a)^2},$$

ein Ausdruck, der sich nach den Regeln des vorigen Abschnittes ergibt.

Sei ferner gesucht:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{(a+bx)}},$$

wo zu setzen ist: $f(x, y)=\frac{1}{xy}$, $p=1$, $q=3$, also:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{(a+bx)}} = \int\frac{1}{\frac{z^3-a}{b}\cdot z}\cdot\frac{3}{b}z^2dz = 3\int\frac{zdz}{z^3-a}.$$

Sei

$$a=k^3,$$

so ist

$$\frac{z}{z^3-k^3} = \frac{z}{(z-k)(z^2+kz+k^2)}.$$

Wir setzen also:

$$\frac{z}{z^3-k^3} = \frac{A}{z-k} + \frac{Bz+C}{z^2+kz+k^2}.$$

Durch Multiplication mit $z-k$ ergibt sich, wenn man dann $z=k$ setzt:

$$A=\frac{1}{3k}$$

und

$$\frac{z}{z^3-k^3}-\frac{1}{3k(z-k)}=-\frac{(z-k)^2}{3k(z^3-k^3)}=-\frac{(z-k)}{3k(z^2+kz+z^2)},$$

also

$$B=-\frac{1}{3k},\ C=\frac{1}{3}$$

und es ist

$$\int\frac{z\,dz}{z^3-k^3}=\frac{1}{3k}\int\frac{dz}{z-k}-\frac{1}{3k}\int\frac{z-k}{z^2+kz+k^2}\,dz=\frac{1}{3k}\int\frac{dz}{z-x}-\frac{1}{3k}\int\frac{z-k}{\left(z+\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3k^2}{4}}\,dz.$$

Setzt man in der Formel 3) des vorigen Abschnittes:

$$M=1,\quad N=-k,\quad a=-\frac{k}{2},\quad b=\frac{k}{2}\sqrt{3},$$

so kommt

$$\int\frac{(z-k)\,dz}{\left(z+\frac{k}{2}\right)^2+\frac{3k^2}{4}}=\frac{1}{2}\lg(z^2+kz+k^2)-\sqrt{3}\ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z+k}{k\sqrt{3}}\right)$$

und

$$\int\frac{z\,dz}{z^3-k^3}=\frac{1}{3k}\left[\lg(z-k)-\frac{1}{2}\lg(z^2+kz+k^2)+\sqrt{3}\ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z+k}{k\sqrt{3}}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{3k}\left[\lg\frac{z-k}{\sqrt{z^2+kz+k^2}}+\sqrt{3}\ \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2z+k}{k\sqrt{3}}\right)\right].$$

Es war

$$a+bx=z^3,\quad z=\sqrt[3]{(a+bx)},$$

$$a=k^3,\quad k=\sqrt[3]{a},$$

also:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{(a+bx)}}=3\int\frac{z\,dz}{z^3-a}=\frac{1}{\sqrt[3]{a}}\lg\frac{(\sqrt[3]{a+bx}-\sqrt[3]{a})\sqrt{\sqrt[3]{a+bx}-\sqrt[3]{a}}}{\sqrt{bx}}$$

$$+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{a}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\sqrt[3]{a+bx}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{3}{2\sqrt[3]{a}}\lg\frac{\sqrt[3]{a+bx}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{bx}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{a}}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2\sqrt[3]{a+bx}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{a}}\right)\ +\ \text{const.}$$

18) **Integrale der Ausdrücke, welche Quadratwurzeln enthalten.**

Ist dagegen das Integral

$$\int f(x,y)\,dx$$

gegeben, wo $y$ eine Wurzel einer ganzen algebraischen Function von höherem Grade ist, so gelingt nur in wenigen Fällen die Ausführung der Quadratur in der Form bereits bekannter Functionen.

Der einzige allgemeinere Fall dieser Art ist der, wo $y$ eine Quadratwurzel eines ganzen rationalen Ausdruckes vom zweiten Grade ist. In diesem Falle kann durch die Einführung einer neuen Variablen der Ausdruck unter dem Integralzeichen rational gemacht werden.

Sei demnach

$$\int f(x,y)\,dx$$

gegeben, wo $f$ eine rationale Function von $x$ nnd $y$,

$$y=\sqrt{a+bx+cx^2}$$

ist. Um imaginäre Suhstitutionen zu vermeiden, nnterscheiden wir aber zwei Fälle, je nachdem $c$ positiv oder negativ, also je nachdem:

$$y=\sqrt{a+bx+e^2x^2}$$

oder

$$y=\sqrt{a+bx-e^2x^2}$$

ist.

I. Finde das erstere statt, so setzen wir:

$$y=u+ex,$$

wo $u$ die nene Variable vorstellt. Es ist dann:

$$a+bx+e^2x^2=(u+ex)^2$$

oder

$$a+bx=u^2+2uex,$$

also:

$$bdx=2udu+2uedx+2xedu,$$

also:

$$dx=\frac{2(u+ex)du}{b-2eu},$$

$$x=\frac{u^2-a}{b-2eu}.$$

Setzt man in $dx$ nnd in $y=u+ex$ diesen Werth von $x$ ein, so hat man offenbar rationale Functionen von $u$, nämlich:

$$dx=\frac{2(ub-eu^2-ae)}{(b-2eu)^2}du,$$

$$y=\frac{ub-eu^2-ea}{b-2eu},$$

also:

$$\int F(x,y)\,dx=\int\frac{2(ub-eu^2-ae)}{(b-2eu)^2}F\left[\frac{u^2-a}{b-2eu},\ \frac{ub-eu^2-ea}{b-2eu}\right]du;$$

hier steht eine vollständig rationale Function von $u$ unter dem Integralzeichen.

II. Ist aber

$$y=\sqrt{a+bx-e^2x^2},$$

so lässt sich die ganze Rechnnng noch durchführen wie in I., wenn man statt $e$ die Grösse $e\sqrt{-1}$ nimmt. Um jedoch einigermassen langwierige Rechnnngen zu vermeiden, schlägt man ein andres Verfahren ein.

Wir unterscheiden noch die Fälle, wo $a$ positiv nnd $a$ negativ sei.

A. Sei

$$y=\sqrt{f^2+bx-e^2x^2},$$

so kann man setzen:

$$y=ux+f,$$

es wird dann:

$$f^2+bx-e^2x^2=(ux+f)^2,$$

d. h.

$$b-e^2x=u^2x+2uf,$$

also:

$$x=\frac{b-2uf}{u^2+e^2}$$

$$-e^2dx=u^2dx+2uxdu+2fdu,$$

d. h.

$$dx=\frac{-2(f+ux)\,du}{u^2+e^2},$$

oder wenn man für $x$ seinen in $u$ ausgedrückten Werth einsetzt:

$$dx=\frac{-2(-fu^2+fe^2+ub)\,du}{(u^2+e^2)^2}.$$

Setzt man in

$$y=ux+f$$

ebenfalls für $x$ ein, so kommt noch:

$$y=\frac{ub-u^2f+e^2f}{u^2+e^2},$$

also:

$$\int F(x,y)\,dx=-\int\frac{2(-fu^2+fe^2+ub)}{(u^2+e^2)^2}F\left[\frac{b-2uf}{u^2+e^2},\ \frac{ub-u^2f+e^2f}{u^2+e^2}\right]du.$$

B. Ist aber $a$ negativ, also

$$y=\sqrt{-f^2+bx-e^2x^2},$$

so würde dieser Ansdruck Imaginäres enthalten. Dies vermeidet man dnrch folgende Betrachtungen.

Die Gleichnng

$$e^2x^2-bx+f^2=0,$$

wo $e$, $b$ nnd $f$ reelle Zahlen sind, hat zwei reelle Wurzeln (siehe den Artikel: quadratische Gleichnngen), denn wäre

dies nicht der Fall, und wären

$$\alpha+\beta i, \quad \alpha-\beta i$$

die Wurzeln dieser Gleichung, so müsste

$$-f^2+bx-e^2x^2=-e^2(x-\alpha-\beta i)$$
$$(x-\alpha+\beta i)=-e^2[(x-\alpha)^2+\beta^2]$$

sein; es würde also, wenn man auch $x$ reell bestimmt, dieser Ausdruck negativ, und $y=\sqrt{-e^2[(x-\alpha\ )+\beta^2]}$ imaginär sein. Es müsste also während der ganzen Integration $x$ imaginär genommen werden, ein Fall, den wir hier ausschliessen, da er jedenfalls zu imaginären Substitutionen führen, und wenn man denselben anstellen will, das in I. angegebene Integrationsverfahren Anwendung finden könnte.

Nehmen wir also an, es seien $\lambda$ und $\nu$ die Wurzeln unserer Gleichung, und somit:

$$y=\sqrt{e^2(x-\lambda)(\nu-x)}.$$

Die Substitution, welche wir dann einführen, ist:

$$y=eu(x-\lambda).$$

Man erhält:

$$e^2(x-\lambda)(\nu-x)=e^2u^2(x-\lambda)^2,$$

d. h.

$$\nu-x=u^2(x-\lambda),$$
$$x=\frac{\nu+\lambda u^2}{1+u^2},$$
$$-dx=u^2dx+2u(x-\lambda)du,$$

d. h.

$$dx=\frac{2u(\lambda-x)}{(1+u)^2}du$$

oder wenn man für $x$ einsetzt:

$$dx=\frac{2u(\lambda-\nu)}{(1+u^2)^2}du$$

und wegen

$$y=eu(x-\lambda),$$
$$y=\frac{eu(\nu-\lambda)}{1+u^2},$$

also:

$$\int f(x,y)\,dx=\int\frac{2u(\lambda-\nu)}{(1+u^2)^2}f\left[\frac{\nu+\lambda u^2}{1+u^2},\ \frac{eu(\nu-\lambda)}{1+u^2}\right]du.$$

19) **Abkürzung des obigen Verfahrens.**

Von Vortheil für die Ausführung der Integration in dem eben betrachteten Falle ist die Bemerkung, dass sich jedes Integral von der angenommenen Form in eins oder mehrere andere von der Form:

$$\int\frac{q(x)\,dx}{y}$$

oder wenn man will

$$\int y\,q(x)\,dx$$

verwandeln lässt, wo $q(x)$ eine rationale Function von $x$ allein ist. Diese Bemerkung verliert ihre Gültigkeit selbst dann nicht, wenn $y$ eine Quadrat-Wurzel einer ganzen algebraischen Function von höherer Ordnung ist.

Denn wie auch $f(x, y)$ beschaffen sei, so wird immer sein:

$$f(x,y)=\frac{\Sigma(A_{p,q}x^py^q)}{\Sigma(B_{p,q}x^py^{2q})+\Sigma(C_{p,q}x^py^{2q+1})},$$

wo $p$ und $q$ ganze positive Zahlen sind, $A_{p,q}$, $B_{p,q}$, $C_{p,q}$ constante Coefficienten vorstellen, und die Summen beliebig viel Glieder mit wechselndem $p$ und $q$ enthalten.

Der Nenner ist in zwei Glieder getheilt, deren eines die graden Potenzen von $y$, das andre die ungraden enthält. Im Zähler wurde eine solche Trennung nicht für nöthig erachtet. Multipliciren wir Zähler und Nenner des Bruches mit

$$\Sigma(B_{p,q}x^py^{2q})-\Sigma(C_{p,q}x^py^{2q+1}),$$

so wird man erhalten:

$$f(x,y)=\frac{\Sigma(\alpha x^py^{2q})+\Sigma(\beta x^py^{2q+1})}{[\Sigma(Bx^py^{2q})]^2-y^2[\Sigma(Cx^py^{2q})]^2}$$

Im Zähler ist hier der Theil, welcher grade Potenzen von $y$ enthält von dem getrennt, welcher die ungraden hat. Der Nenner enthält nur grade Potenzen von $y$, und da $y^2$ eine ganze Function von $x$ ist, so wird der Nenner eine ganze rationale Function $x$ sein. Dieselbe Eigenschaft hat das erste Glied des Zählers, das zweite hat die Gestalt $y\,\Sigma(\beta x^py^{2q})$, enthält also $y$ nur als Factor, der andre Factor ist eine rationale Function von $x$.

Der Bruch zerfällt also in Glieder von der Form:

$$q(x) \text{ nnd } y\psi(x),$$

wo $q(x)$ und $\psi(x)$ rational sind, also:

$$\int f(x, y)\,dx = \Sigma\left(\int q(x)dx\right) + \Sigma\int y\psi(x)\,dx.$$

Die ersten Glieder fallen in die Theorie der Integrale rationaler Fnnctionen, die zweiten hahen die letztere der vorhin angegehenen Formen. Auf die erstere werden sie gehracht, wenn man die rationale Fnnction $y^2\psi(x) = \chi(x)$ setzt, wo dann die Form $\int \frac{\chi(x)\,dx}{y}$ wird.

Denkt man sich die Integrale immer auf die letztere Form gehracht, nnd ist

$$y = \sqrt{a + bx - e^2x^2},$$

so kann man immer schreiben:

$$\int \frac{q(x)}{y}\,dx = \frac{1}{i}\int \frac{q(x)\ dx}{\sqrt{e^2x^2 - bx - a}},$$

wodnrch das Integral anf die in IIa. betrachtete Form zurückgeführt wird, nnd der Ansdruck $\sqrt{-1}$ nur den Nenner dividirt.

Diese Bemerkung ist wichtig für den Fall, wo die Variahle $x$ imaginär zn denken ist, also die Integration in imaginären Grenzen stattfindet.

Es lässt sich aher $y$ anch auf die Form bringen:

$$y = e\sqrt{\left(x + \frac{b}{2e^2}\right)^2 - \frac{b^2}{4e^4} + \frac{a}{e^2}},$$

wenn der Coefficient von $x^2$ positiv ist, und auf die Form:

$$y = e\sqrt{\frac{a}{e^2} + \frac{b^2}{4e^4} - \left(x - \frac{b}{2e^2}\right)^2},$$

wenn der Coefficient von $x^2$ negativ ist. Setzt man im ersten Falle

$$x + \frac{b}{2e} = u,$$

im letztern

$$x - \frac{b}{2e} = u,$$

so wird $q(x)$ eine ganze rationale Fnnction von $u$ hleiben, nnd das Integral eine der beiden Gestalten hahen:

$$\int \frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{u^2 + a}} \text{ oder } \int \frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{a - u^2}}.$$

„Es lässt sich aher dieser Ansdruck in einen ohne alle Irrationalität, nnd in einen andern, der nnr grade Potenzen von $u$ enthält, verwandeln."

Denn es ist jedenfalls:

$$\psi(u) = \frac{\Sigma(au^p)}{\Sigma(bu^{2p}) + \Sigma(cu^{2p+1})},$$

indem wir wieder wie vorhin im Nenner die graden Potenzen von $u$ von den ungraden trennen. Multipliciren wir Zähler nnd Nenner dann mit

$$\Sigma(bu^{2p}) - \Sigma(cu^{2p+1}),$$

so wird der Nenner

$$\Sigma(bu^{2p})^2 - u^2\Sigma(cu^{2p})^2$$

nur grade Potenzen von $u$ enthalten.

Den Zähler theilen wir dann in zwei Glieder, deren Eins die graden, das Andre die nngraden Potenzen von $u$ enthält, so dass man hat:

$$\psi(u) = \frac{\chi(u^2) + u\chi_1(u^2)}{\vartheta(u^2)}.$$

$\chi$, $\chi_1$ nnd $\vartheta$ sind hier ganze nationale Fnnctionen von $u^2$.

Betrachten wir nnn:

$$\int \frac{\psi(u)\,du}{\sqrt{u^2 + a}} = \int \frac{\chi(u^2)}{\vartheta(u^2)} \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} + \int \frac{\chi_1(u^2)}{\vartheta(u^2)} \frac{udu}{\sqrt{u^2 + a}}$$

nnd snbstituiren im letztern Theile:

$$\sqrt{u^2 + a} = v,$$

also

$$u^2 = v^2 - a$$

nnd

$$udu = vdv,$$

so wird dieser:

$$\int \frac{\chi_1(u^2)}{\vartheta(u^2)} \frac{udu}{\sqrt{u^2 + a}} = \int \frac{\chi_1(v^2 - a)}{\vartheta(v^2 - a)}dv,$$

also ein völlig rationaler Ansdruck. Der irrationale Theil hat also nnr die Form

$$\int \frac{f(u^2)\,du}{\sqrt{u^2 + a}},$$

wenn man:

$$\frac{\chi(u^2)}{\vartheta(u^2)} = f(u^2)$$

schreiht, wo nnter $f$ eine rationale Fnnction von $u^2$ verstanden ist, ebenso führt das zweite Integral auf:

$$\int \frac{f(u^2)\,du}{\sqrt{a - u^2}}.$$

Diese Ansdrücke lassen sich sogar noch etwas vereinfachen. In dem ersteren setzen wir, je nachdem $a$ positiv oder negativ ist,

$$\frac{u}{\sqrt{a}} \text{ oder } \frac{u}{\sqrt{-a}} = v,$$

in dem zweiten

$$\frac{u}{\sqrt{a}} = v,$$

da, wenn die Wurzelgrösse reell bleiben soll, $a$ hier nicht negativ werden kann. Man kommt dann auf eine der drei Formen:

$$\int \frac{f(v^2)\,dv}{\sqrt{v^2+1}},\ \int \frac{f(v^2)\,dv}{\sqrt{v^2-1}},\ \int \frac{f(v^2)\,dv}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Wendet man auf die ersten beiden Ausdrücke die Substitution I. von Abschnitt (18) an, so ist zu setzen:

$$x = v,$$

$$y = \sqrt{v^2 \pm 1} = u + v,$$

$$a = \pm 1,\ b = 0,\ e = 1,$$

$$dv = \frac{-(u+v)du}{u} = \frac{-(u^2 \pm 1)\,du}{2u^2},$$

$$v = \frac{-(u^2 \pm 1)}{2u},$$

$$y = \frac{u^2 \pm 1}{2u}$$

und

$$\text{I.}\quad \int \frac{f(v^2)\,dv}{\sqrt{v^2+1}} = -\int \frac{1}{u} f\left(\frac{(u^2 \mp 1)^2}{4u^2}\right) du.$$

Wendet man dagegen auf den letzten Ausdruck die Substitution II. A. von Abschnitt 18) an, so wird:

$$y = \sqrt{1-v^2},$$

$$f = 1,\ b = 0,\ e = 1,$$

$$\sqrt{1-v^2} = uv + 1,$$

$$-v = u^2 v + 2u,$$

$$v = \frac{-2u}{u^2+1},$$

$$dv = \frac{-2(1+uv)\,du}{u^2+1} = \frac{-2(1-u^2)\,du}{(1+u^2)^2},$$

$$y = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

also:

$$\text{II.}\int \frac{f(v^2)\,dv}{\sqrt{1-v^2}} = -2\int \frac{du}{1+u^2} f\left[\frac{4u^2}{(1+u^2)^2}\right].$$

Diese Formeln in Verbindung mit denen für die Integration rationaler Differenziale reichen also immer für unsern Zweck aus.

Mit Hülfe des in diesen Abschnitten auseinandergesetzten Integrationsverfahrens lässt sich auch das Integral:

$$\int f(x, y, z)\,dx$$

auffinden, wo $f(x, y, z)$ eine rationale Function der drei Variablen, und

$$y = \sqrt{a+bx},\quad z = \sqrt{d+ex}$$

ist, die also zwei Wurzeln linearer Ausdrücke enthält.

Führt man nämlich $y$ als neue Variable ein, so ist:

$$2y\,dy = b\,dx,$$

also:

$$dx = \frac{2y\,dy}{b},$$

$$x = \frac{y^2 - a}{b},$$

$$z = \sqrt{\frac{db - ea + ey^2}{b}},$$

also:

$$\int f(x, y, z)\,dx =$$

$$\int \frac{2y\,dy}{b} f\ \frac{y^2 - a}{b},\ y,\ \sqrt{\frac{db - ea + ey^2}{b}},$$

ein Ausdruck, der nur eine Wurzel einer ganzen Function zweiten Grades enthält, und ganz wie oben zu behandeln ist.

20) **Beispiele zur Integration irrationaler Functionen.**

Es sei gesucht:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm 1}},$$

wo also

$$f(v^2) = 1$$

ist.

Indem man

$$\sqrt{v^2 \pm 1} = u + v,$$

setzt, nimmt Formel I. des vorigen Abschnittes die Gestalt an:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm 1}} = -\int \frac{du}{u} = -\lg u$$

und da

$$u = \sqrt{v^2 \pm 1} - v$$

ist:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm 1}} = -\lg(\sqrt{v^2 \pm 1} - v)$$

$$= \lg\left(\frac{1}{\sqrt{v^2 \pm 1} - v}\right);$$

multiplicirt man Zähler und Nenner unter dem logarithmischen Zeichen mit $\sqrt{v^2 \pm 1} + v$, so wird der Nenner $\pm 1$, also:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} = \lg(v + \sqrt{v^2+1})$$

und

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} = \lg[-(v+\sqrt{v^2-1})].$$

Da der letztere Ausdruck nur reell ist, wenn $v$ negativ ist, so muss man, da

$$\lg(-\alpha) = \lg \alpha + \lg(-1)$$

ist, $\lg(-1)$ aber als in der Integrationsconstante enthalten gedacht werden kann, im Falle $v$ positiv ist, schreiben:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} = \lg(v+\sqrt{v^2-1}).$$

Wäre in der ersten Formel $v$ negativ, so könnte man $\lg(-1)$ dazu addiren, da jede Constante zu einem Integral hinzugefügt werden kann. Man hat also jedenfalls:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} = \lg \pm(v+\sqrt{v^2+1}),$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} = \lg \pm(v+\sqrt{v^2-1}).$$

Sei jetzt gesucht:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+e^2x^2}} = \int \frac{dx}{e\sqrt{\left(x+\frac{b}{2e^2}\right)^2+\frac{a}{e^2}-\frac{b}{4e^4}}}$$

$$= \int \frac{dx}{e\sqrt{\frac{a}{e^2}-\frac{b^2}{4e^4}}\sqrt{\left\{\frac{x+\frac{b}{2e^2}}{\sqrt{\frac{a}{e^2}-\frac{b^2}{4e^4}}}\right\}^2+1}};$$

wenn $\frac{a}{e^2}$ algebraisch grösser als $\frac{b^2}{4e^2}$ ist, gebraucht man diese Form. Dagegen wenn $\frac{b^2}{4e^2}$ grösser als $a$ ist, setzt man:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+e^2x^2}} = \int \frac{dx}{e\sqrt{\frac{b^2}{4e^4}-\frac{a}{e^2}}\sqrt{\left\{\frac{x+\frac{b}{2e^2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4e^4}-\frac{a}{e^2}}}\right\}^2-1}}.$$

Im ersten Falle ist zu setzen:

$$\frac{x+\frac{b}{2e^2}}{\sqrt{\frac{a}{e^2}-\frac{b^2}{4e^4}}} = v,$$

so dass man erhält:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+e^2x^2}} = \frac{1}{e}\int \frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} = \frac{1}{e}\lg(v+\sqrt{v^2+1}),$$

also, wenn man für $v$ wieder seinen Werth setzt, und eine Constante vernachlässigt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+e^2x^2}} = \frac{1}{e}\lg[2e^2x+b+2e\sqrt{e^2x^2+bx+a}].$$

Im letztern Falle hat man:

$$\frac{x+\frac{b}{2e^2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4e^4}-\frac{a}{e^2}}} = v,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+e^2x^2}} = \frac{1}{e}\int \frac{dv}{\sqrt{v^2-1}} = \frac{1}{2}(\lg v+\sqrt{v^2-1}),$$

also wenn man in $v$ wieder seinen Werth in $x$ einsetzt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+e^2x^2}} = \frac{1}{e} \lg(2ex+b+2e\sqrt{e^2x^2+bx-a}).$$

Es ist bei beiden Formeln in den Logarithmen immer das positive Zeichen genommen worden.

Setzen wir in Formel II. des vorigen Abschnittes

$$f(v^2)=1,$$

so erhalten wir:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = -2\int \frac{du}{1+u^2}.$$

Setzt man in Formel 3 des Abschnittes 16)

$$u=x,\ M=0,\ N=1,\ a=0,\ b=1,$$

so erhält man:

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \text{arc tg}\, u,$$

aber, da

$$u = \frac{\sqrt{1-v^2}-1}{v}$$

ist,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = -2\,\text{arc tg}\frac{\sqrt{1-v^2}-1}{v}.$$

Setzt man hierin

$$v=\sin\varphi,$$

so ist:

$$\sqrt{1-v^2}=\cos\varphi,$$

$$1-\sqrt{1-v^2}=1-\cos\varphi=2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)^2,$$

$$\sin\varphi=2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2},$$

also

$$\frac{\sqrt{1-v^2}-1}{v}=-\text{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Es ist aber:

$$\text{arc tg}\left(-\text{tg}\frac{\varphi}{2}\right)=-\text{arc tg}\left(\text{tg}\frac{\varphi}{2}\right)=-\frac{\varphi}{2}$$

und

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}=(-2)\cdot\left(-\frac{\varphi}{2}\right)=\varphi,$$

da $v=\sin\varphi$, $\varphi=\text{arc}\sin v$ ist, so ergibt sich:

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}=\text{arc}\sin(v).$$

Es bedarf kaum der Erwähnung, dass sich dies Resultat auch durch Differenziiren der Function arc sin$(v)$ herleiten lässt.

Indessen sind hier, wie schon im Vorigen, die Quadraturen möglichst unabhängig von den Ergebnissen der Differenzialrechnung hingestellt worden.

Es ist gegeben

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-e^2x^2}} = \int \frac{dx}{e\sqrt{\frac{a}{e^2}+\frac{b^2}{4e^4}-\left(x-\frac{b}{2e^2}\right)^2}}$$

$$= \int \frac{dx}{e\sqrt{\frac{a}{e^2}+\frac{b^2}{4e^4}}\sqrt{1-\left\{\frac{x-\frac{b}{2e^2}}{\sqrt{\frac{a}{e^2}+\frac{b^2}{4e^4}}}\right\}^2}}.$$

Man setzt:

$$\frac{x-\frac{b}{2e^2}}{\sqrt{\frac{a}{e^2}+\frac{b^2}{4e^4}}}=v,$$

so dass man hat:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-e^2x^2}}=\frac{1}{e}\int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}=\text{arc}\sin(v)$$

und, wenn man für $v$ wieder seinen Werth einsetzt:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-e^2x^2}}=\text{arc}\sin\left(\frac{2e^2x-b}{\sqrt{4e^2a+b^2}}\right).$$

21) Integration transcendenter Functionen.

In dem Gegebenen ist das Allgemeine, was sich über die Ausführung der Integrationen algebraischer Functionen sagen lässt, erschöpft, insofern sie durch die vor Entdeckung der Integralrechnung bekannten Functionen geschehen kann. Jedoch können in einzelnen Fällen noch Integrale von irrationalen Ausdrücken complicirterer Art gefunden werden.

Wir werden daher auf diesen Gegenstand zurückkommen müssen. Zunächst wollen wir jedoch das Allgemeinere, was sich über die Integration transcendenter Functionen sagen lässt, hier geben. Die vor der Entdeckung der Integralrechnung bekannten Transcendenten beschränken sich auf Exponentialgrössen und Logarithmen, trigonometrische Functionen, und die zu letztern gehörigen Bogen.

Von diesen stehen jedoch die Exponential- und logarithmischen Grössen in der durch die Gleichung

$$e^{\lg x} = x$$

gegebenen Verbindung.

Die Verbindung zwischen trigonometrischen und Exponentialfunctionen wird vermittelt durch die Gleichungen:

$$e^{xi} = \cos x + i \sin x$$

oder

$$e^{2xi} = \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,x}{1 - i\,\mathrm{tg}\,x}$$

und die zwischen Bogen und Logarithmen mithin, wenn man $x = \operatorname{arc}\,\mathrm{tg}\,u$ setzt, durch die Gleichung:

$$\operatorname{arc}\,\mathrm{tg}\,u = \frac{1}{2i} \lg \frac{1 + i\,\mathrm{tg}\,x}{1 - i\,\mathrm{tg}\,x}$$

und, wenn man $x = \operatorname{arc}\sin(u)$ setzt, durch die Gleichung:

$$\operatorname{arc}\sin u = \frac{1}{i} \lg[\sqrt{1-u^2} + iu]$$

oder, wenn $x = \operatorname{arc}\cos u$ gesetzt wird, durch die Gleichung:

$$\operatorname{arc}\cos u = \frac{1}{i} \lg[u + i\sqrt{1-u^2}].$$

Es kann daher bei den entsprechenden Functionen ein gemeinschaftliches Verfahren eingeschlagen werden.

Sei zunächst zu bestimmen

$$\int x^n e^{\alpha x} dx,$$

wo $\alpha$ eine beliebige Constante ist, $n$ aber eine positive ganze Zahl.

Offenbar ist, wenn man sich $\alpha$ veränderlich denkt:

$$\frac{de^{\alpha x}}{d\alpha} = xe^{\alpha x},$$

$$\frac{d^2 e^{\alpha x}}{dx^2} = x^2 e^{\alpha x},$$

$$\frac{d^n e^{\alpha x}}{d\alpha^n} = x^n e^{\alpha x}.$$

Man kann also auch schreiben:

$$\int x^n e^{\alpha x} dx = \int \frac{d^n (e^{\alpha x})}{d\alpha^n} dx.$$

In Abschnitt 6) wurde nun die Formel abgeleitet:

$$\frac{d}{dc}\left(\int f(x,c)\,dx\right) = \int \frac{df(x,c)}{dc} dx,$$

aus der bei Wiederholung des Differenziirens nach $c$ sich leicht folgern lässt

$$\frac{d^n}{dc^n}\left(\int f(x,c)\,dx\right) = \int \frac{d^n f(x,c)}{dc^n} dx,$$

also in unserm Falle:

$$\int x^n e^{\alpha x} dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\int e^{\alpha x} dx\right).$$

Kann man also den Ausdruck $u = \int e^{\alpha x} dx$ finden, also für den Fall, wo $n = 0$ ist, so ist die Quadratur für Beliebiges $n$ auf die Differenzialrechnung, nämlich auf Bestimmung des Ausdrucks $\frac{d^n u}{d\alpha^n}$ zurückgeführt.

Wir setzen:

$$e^{\alpha x} = y,$$

also

$$dy = \alpha e^{\alpha x} dx = \alpha y dx,$$

$$dx = \frac{dy}{\alpha y},$$

also

$$u = \frac{1}{\alpha} \int dy = \frac{y}{\alpha} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}.$$

Es ist also:

$$\int x^n e^{\alpha x} dx = \frac{d^n \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)}{d\alpha^n}.$$

Ist das Integral

$$\int x^n e^x \, dx$$

zu bestimmen, so muss $e^{\alpha x}$ für $e^x$ geschrieben, und erst nach ausgeführter Differenziation $\alpha$ gleich 1 gesetzt werden.

Beispiele:

$$\int x e^{\alpha x} dx = \frac{d\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)}{d\alpha} = \frac{x e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2},$$

$$\int x^2 e^{\alpha x} dx = \frac{x d\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\right)}{d\alpha} - \frac{d\left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha^2}\right)}{d\alpha} = \frac{x^2 e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{2x e^{\alpha x}}{\alpha^2} + \frac{2 e^{\alpha x}}{\alpha^3} \text{ u. s. w.}$$

Auf diesem Wege kommt man auch leicht zu der allgemeinen Formel:

$$\int x^n e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}\left(x^n - \frac{n}{\alpha} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2} x^{n-2} - \cdots \pm \frac{n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1}{\alpha^n}\right),$$

die sich aus dem Ausdrucke für:

$$\frac{d^n\left(\frac{f(\alpha)}{\alpha}\right)}{d\alpha^n} = \frac{d^n\left(\alpha^{-1} f(\alpha)\right)}{d\alpha^n}$$

ergibt, wenn man

$$f(\alpha) = e^{\alpha x}$$

setzt.

Offenbar nämlich ist:

$$\frac{d\left(\alpha^{-1} f(\alpha)\right)}{d\alpha} = \alpha^{-1} f'(\alpha) - \alpha^{-2} f(\alpha),$$

$$\frac{d^2\left(\alpha^{-1} f(\alpha)\right)}{d\alpha^2} = \alpha^{-1} f''(\alpha) - 2\alpha^{-2} f'(\alpha) + 2\alpha^{-3} f(\alpha),$$

$$\frac{d^3\left(\alpha^{-1} f(\alpha)\right)}{d\alpha^3} = \alpha^{-1} f'''(\alpha) - 3\alpha^{-2} f''(\alpha) + 3 \cdot 2\alpha^{-3} f'(\alpha) - 3 \cdot 2 \cdot 1 f(\alpha),$$

allgemein:

$$\frac{d^n\left(\alpha^{-1} f(\alpha)\right)}{d\alpha^n} = \alpha^{-1} f^{(n)}(\alpha) - n\alpha^{-2} f^{(n-1)}(\alpha) + n(n-1)\alpha^{-3} f^{(n-2)}(\alpha)$$
$$- \cdots \pm n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 f(\alpha),$$

woraus sich der oben angeführte Ausdruck für $\frac{d^n(e^{\alpha x})}{dx^n}$ ergibt.

22) Anwendungen der oben gefundenen Formel

Das Resultat des vorigen Abschnittes ist ein sehr reichhaltiges, aus dem sich viele Formeln ableiten lassen.

Setzt man

$$e^x = y,$$

so wird

$$x = \lg y,$$

$$dx = \frac{dy}{y},$$

also

$$\int x^n e^{\alpha x} dx = \int (\lg y)^n y^{\alpha - 1} dy$$

und man hat:

$$\int y^{\alpha - 1} (\lg y)^n dy = \frac{d^n\left(\frac{y^\alpha}{\alpha}\right)}{d\alpha^n}$$

oder, wenn man sich der Reihenentwicklung des vorigen Abschnittes bedienen will:

$$\int y^{\alpha-1}(\lg y)^n dy = \frac{y^\alpha}{\alpha}\left(\lg y^n - \frac{n}{\alpha}\lg y^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2}\lg y^{n-2} - \cdots \pm \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1}{\alpha^n}\right).$$

Es ist hierin $\alpha$ eine ganz beliebige Zahl, $n$ muss jedoch, wenn die Integration in endlicher Form gelingen soll, eine ganze positive Zahl sein.

Setzt man $\alpha + \beta i$ für $\alpha$, so hat man:

$$\int x^n e^{(\alpha+\beta i)x}dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\int e^{(\alpha+\beta i)x}dx\right).$$

Es ist nämlich bekanntlich völlig gleich, ob man nach $\alpha$ oder nach $(\alpha+\beta i)$ differenziirt.

Also hat man ganz wie oben:

$$\int x^n e^{(\alpha+\beta i)x}dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{e^{(\alpha+\beta i)x}}{\alpha+\beta i}\right).$$

Setzt man für

$e^{\beta ix}$ seinen Werth $\cos\beta x + i\sin\beta x$,

so erhält man:

$$\int x^n e^{\alpha x}\cos\beta x dx + i\int x^n e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\left\{\frac{\alpha-\beta i}{\alpha^2+\beta^2}e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\right\}$$

oder, wenn man Reelles und Imaginäres trennen will:

$$\int x^n e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\left\{\frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\right\},$$

$$\int x^n e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\left\{\frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}\right\}.$$

Man verfährt in der Regel jedoch besser, wenn man in der Reihenentwicklung von $\int x^n e^{\alpha x}dx$ für $\alpha$ schreibt $\alpha+\beta i$, und den reellen Theil gleich

$$\int x^n e^{\alpha x}\cos\beta x dx,$$

den imaginären gleich

$$\int x^n e^{\alpha x}\sin\beta x dx$$

setzt.

Für $n$ gleich Null hat man unmittelbar:

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x)}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)}{\alpha^2+\beta^2}.$$

Selbstverständlich kann man auch nach der Integration $\alpha = 0$ setzen, und erhält dann die Ausdrücke für:

$$\int x^n\cos\beta x dx \text{ und } \int x^n\sin\beta x dx;$$

statt dessen aber kann man auch in der Formel für $\int e^{\alpha x} dx$ unmittelbar $\beta i$ für $\alpha$ setzen, und hat:

$$\int x^n e^{\beta i x} dx = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{d\beta^n} \left( \int e^{\beta i x} dx \right)$$

oder:

$$\int x^n e^{\beta i x} dx = \frac{1}{i^{n+1}} \frac{d^n}{d\beta^n} \left( \frac{e^{\beta i x}}{\beta} \right),$$

d. h.

$$\int x^n \,(\cos \beta x + i \sin \beta x)\, dx = \frac{1}{i^{n+1}} \frac{d^n}{d\beta^n} \left( \frac{\cos \beta x + i \sin \beta x}{\beta} \right).$$

Will man Reelles und Imaginäres trennen, so sind hier die Fälle zu unterscheiden, wo $n$ grade und wo es ungrade ist.

Man hat:

$$\int x^{2n} \cos \beta x dx = (-1)^n \frac{d^{2n}}{d\beta^{2n}} \left( \frac{\sin \beta x}{\beta} \right),$$

$$\int x^{2n} \sin \beta x dx = (-1)^{n+1} \frac{d^{2n}}{d\beta^{2n}} \left( \frac{\cos \beta x}{\beta} \right)$$

oder:

$$\int x^{2n+1} \cos \beta x dx = (-1)^{n+1} \frac{d^{2n+1}}{d\beta^{2n+1}} \left( \frac{\cos \beta x}{\beta} \right)$$

und

$$\int x^{2n+1} \sin \beta x dx = (-1)^{n+1} \frac{d^{2n+1}}{d\beta^{2n+1}} \left( \frac{\sin \beta x}{\beta} \right).$$

Auch kann man sich statt dieser Formeln der Reihenentwickelungen für $\int e^{\alpha x}$ bedienen, und darin $\alpha = \beta i$ setzen.

23) **Andere Ausführungen von Quadraturen.**

Allgemein lässt sich der Ausdruck

$$\int f(e^{\alpha x}) dx$$

bestimmen, wenn $f(u)$ eine rationale Function ist, oder eine solche, welche ausser einem rationalen Theil nur eine Quadratwurzel eines ganzen Polynoms von höchstens zweitem Grade enthält.

Setzt man nämlich

$$e^{\alpha x} = u,$$

also

$$\alpha e^{\alpha x} dx = du$$

oder

$$dx = \frac{du}{\alpha u},$$

so hat man

$$\int f(e^{\alpha x}) dx = \int \frac{f(u)\, du}{\alpha u},$$

also eine algebraische Function, welche immer integrirt werden kann.

Da

$$\sin(\alpha x) = \frac{e^{\alpha x i} - e^{-\alpha x i}}{2i},$$

$$\cos(\alpha x) = \frac{e^{\alpha x i} - e^{-\alpha x i}}{2}$$

rationale Functionen von $e^{\alpha x i}$ sind, so lässt sich hiernach auch

$$\int f(\sin \alpha x, \ \cos \alpha x)\, dx$$

finden, wenn $f$ eine rationale Function zweier Variablen bedeutet; auch können unter dem Functionszeichen die andern trigonometrischen Linien von $\alpha x$ enthalten sein, welche sich auf rationalem Wege aus den sinus und cosinus durch die Formeln:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x},$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

ergeben.

Da aber hier die Substitution

$$e^{\alpha x i} = u$$

gemacht wird, so muss $u$ und $du$ imaginär werden. Es ändert sich also der Integrationsweg. Jedoch tritt hierbei keine Zweideutigkeit des Resultats ein, wenn der Ausdruck $f(u)$ nicht während der Integration, oder beim Uebergang von einem Wege zum andern unendlich wird.

Es ist also die untere Grenze immer so zu wählen, dass dies nicht stattfindet, und kann man dies immer annehmen, so lange das Integral unbestimmt ist. Diese Bemerkung ist für die ganze Integralrechnung wichtig. Es sind dergleichen Substitutionen, wo es sich um Aenderung des Integrationsweges handelt, immer gestattet, so lange das Integral ein unbestimmtes ist. Bei bestimmten Integralen dagegen ist die Berücksichtigung der Grenzwerthe nöthig.

Was unser Integral

$$\int f(\sin \alpha x, \cos \alpha x)\, dx$$

anbetrifft, so führt jedoch auch eine andre Substitution zum Ziele, wobei der Integrationsweg nicht verändert wird. Man setze:

$$\sin \alpha x = y,$$

es wird dann

$$\alpha \cos \alpha x dx = dy,$$

$$\cos \alpha x = \sqrt{1-y^2},$$

also

$$dx = \frac{dy}{\alpha\sqrt{1-y^2}}$$

und

$$\int f(\sin \alpha x, \cos \alpha x) dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{f(y, \sqrt{1-y^2})dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

ein Ausdruck, der ausser einer rationalen Function nur noch eine Wurzel zweiten Grades enthält.

Von gleicher Allgemeinheit ist übrigens das Integral

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx,$$

da man für $\alpha x$ immer eine neue Variable nehmen kann.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall, wo die Function $f$ nur ein Glied enthält. Es führt dieser Fall zu den Integralen:

$$\int \sin x^m \cos x^n\, dx, \quad \int \frac{\sin \alpha^m}{\cos x^n},$$

$$\int \frac{\cos x^n}{\sin x^m}\, dx, \quad \int \frac{dx}{\sin x^m \cos x^n},$$

über die sogleich gesprochen werden soll.

Vorläufig bemerken wir jedoch, dass im allgemeineren Falle des Integrals:

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx$$

es auch eine reelle Substitution gibt, welche keine irrationale Grösse gibt.

Es ist dies die Substitution

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x = u.$$

Da

$$d \operatorname{tg} x = \frac{dx}{(\cos x)^2},$$

ist, so hat man:

$$du = \frac{dx}{2(\cos \frac{1}{2}x)^2}$$

und, da

$$\frac{1}{(\cos\frac{1}{2}x)^2} = (\sec \tfrac{1}{2}x)^2 = 1 + (\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x)^2 = 1 + u^2$$

ist:

$$dx = \frac{2du}{1+u^2},$$

$$\cos x = 2(\cos \tfrac{1}{2}x)^2 - 1 = \frac{2}{1+u^2} - 1 = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2} = \frac{2u}{1+u^2},$$

also:

$$\int f(\sin x, \cos x)\, dx = 2\int f\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}.$$

**Beispiel.** Es sei gesucht:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x}.$$

Es verwandelt sich dies Integral durch die letzte Substitution in:

$$2\int \frac{du}{1+u^2}\,\frac{1}{a+b\frac{1-u^2}{1+u^2}+\frac{2cu}{1+u^2}} = 2\int \frac{du}{a+b+2cu+(a-b)u^2},$$

ein Ausdruck, der sich unmittelbar aus Formel 3 des Abschnittes 16) ergibt, wenn der Nenner 2 imaginäre Factoren hat. d. h. wenn

$$\frac{c^2}{(a-b)^2} < \frac{a+b}{a-b}$$

ist (siehe den Artikel: quadratische Gleichungen). Man setze dann in die angeführte Formel:

$$M=0,\ N=\frac{2}{a-b},$$

$$a=-\frac{c}{a-b},\ b=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}-\frac{c^2}{(a-b)^2}}=\frac{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}{(a-b)}$$

und es ist:

$$2\int \frac{du}{a+b+2cu+(a-b)u^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{u(a-b)+c}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}}.$$

Ist aber $\frac{c^2}{(a-b)^2} > \frac{a+b}{a-b}$, so gibt die Formel (4) des Abschnittes (16), wenn man für $M$, $N$, $a$ dieselben Ausdrücke wie oben, für $b$ jedoch

$$\sqrt{\frac{c^2}{(a-b)^2}-\frac{a+b}{a-b}}=\frac{\sqrt{c^2-a^2+b^2}}{a-b}$$

einsetzt:

$$2\int \frac{du}{a+b+2cu+(a-b)u^2} = \frac{1}{\sqrt{c^2-a^2+b^2}}\lg\frac{(a-b)u+c-\sqrt{c^2-a^2+b^2}}{(a-b)u+c+\sqrt{c^2-a^2+b^2}}.$$

Auf dieses Integral lässt sich auch das folgende zurückführen:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x^2+c\sin x^2},$$

da

$$\cos x^2=\frac{1+\cos 2x}{2},\quad \sin x^2=\frac{1-\cos 2x}{2}$$

ist. Man erhält, wenn man $y$ für $2x$ schreibt:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x^2+c\sin x^2}=\int \frac{dy}{2a+b+c+(b-c)\cos y}.$$

Setzt man in den zuerst entwickelten Werth des vorigen Integrales:

$2a+b+c$ für $a$, $b-c$ für $b$, $0$ für $c$,

so kommt:

$$\int \frac{dx}{a+b\cos x^2+c\sin x^2} = \frac{1}{\sqrt{(a+b)(a+c)}}\operatorname{arc\,tg}\left\{u\sqrt{\frac{a+c}{a+b}}\right\}.$$

Hier ist zu setzen:

$$u=\operatorname{tg}\frac{y}{2}=\operatorname{tg}x.$$

Es lässt sich noch bestimmen das Integral:

$$\int x^m f(e^{\alpha x},\ e^{\beta x},\ e^{\gamma x}\ \ldots)\,dx,$$

wenn $m$ eine ganze positive Zahl, und $f$ eine ganze Function ist, denn dieser Ausdruck besteht aus Gliedern von der Form:

$$A\int x^m e^{\lambda x}dx,$$

deren Integration bereits gegeben wurde. Auch kann man statt der Exponentialgrössen die trigonometrischen Functionen $\sin\alpha x$, $\sin\beta x$, $\cos\alpha x$, $\cos\beta x$ nehmen, welche ganze rationale Functionen von $e^{\alpha x i}$, $e^{\beta x i}$, $e^{-\alpha x i}$ und $e^{-\beta x i}$ sind.

Es gelingt also immer die Integration von

$$\int x^m f(\sin\alpha x,\ \cos\alpha x,\ \sin\beta x,\ \cos\beta x\cdots)dx;$$

jedoch darf sich unter dem Functionszeichen im Allgemeinen keine Tangente oder Cotangente befinden, weil sonst die Functionen aufhörten, ganze Functionen von Exponentialgrössen zu sein.

Was noch die Logarithmen und die Arcus anbetrifft, so kann man $e^x = y$ in den Ausdruck:

$$\int x^m f(e^{\alpha x},\ e^{\beta x}\ \ldots)\,dx$$

setzen; man erhält dann das Integral:

$$\int (\lg y)^m f(y^\alpha,\ y^\beta\ \ldots)\frac{dy}{y},$$

da

$$dx = \frac{dy}{y}$$

ist. Es lässt sich also dies Integral immer bestimmen, wenn $\alpha$ und $\beta$ ganz willkürlich sind, vorausgesetzt, dass $n$ eine ganze positive Zahl, $f$ eine ganze Function sei.

Ebenso lässt sich in

$$\int x^m f(\sin x,\ \cos x)\,dx$$

setzen:

$$\sin x = u,\ \cos x\,dx = du,\ dx = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},\ x = \arcsin u,$$

also

$$\int x^m f(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int (\text{arc}\ \sin u)^m f(u, \sqrt{1-u^2})\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Setzt man

$$\cos x = u,$$

so kommt:

$$-\int (\text{arc}\ \cos u)^m \frac{f(\sqrt{1-u^2},\ u)\,du}{\sqrt{1-u^2}};$$

endlich, wenn

$$\operatorname{tg} x = u$$

ist:

$$x = \text{arc}\ \operatorname{tg} u,$$

$$dx = \frac{du}{1+u^2},$$

$$\sin x = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}},$$

also:

$$\int x^m f(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int (\operatorname{arctg} u)^m \frac{du}{1+u^2} f\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right).$$

Ausgeführt werden können also die Integrale:

$$\int (\text{arc}\ \operatorname{tg} u)^m f\left(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\right)\frac{du}{1+u^2}$$

$$\int (\text{arc}\sin u)^m f(u,\ \sqrt{1-u^2})\ \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\int (\text{arc}\cos u)^m f(u,\ \sqrt{1-u^2})\ \frac{du}{\sqrt{1-u^2}},$$

wo $f$ eine rationale Function zweier Variablen, $m$ eine ganze positive Constante bedeutet.

Ist z. B.

$$f(x, y) = x^p y,$$

wo $p$ eine positive ganze Zahl, so hat man aus den beiden letzten Formeln:

$$\int (\text{arc sin } u)^m u^p du$$

$$\int (\text{arc cos } u)^m u^p du;$$

ist dagegen $f(x,y) = xy$, so gibt die erste Formel:

$$\int (\text{arc tg } u)^m \frac{u\, du}{(1+u^2)^2}.$$

Wir unterlassen die wirkliche Ausführung dieser Quadraturen, da wir zu bequemeren Methoden für dieselben gelangen.

24) Specieller Fall des Vorigen. Das Integral

$$\int x^m f(e^{\alpha x}) dx$$

als ein specieller Fall des bereits angeführten:

$$\int x^m f(e^{\alpha x}, e^{\beta x} \ldots) dx$$

kann immer bestimmt werden, wenn $f$ eine ganze rationale Function ist.

Setzen wir jetzt voraus, dass $f$ keine solche sei, und suchen die Fälle, wo dennoch die Bestimmung möglich ist. Man hat:

$$\frac{df(e^{\alpha x})}{d\alpha} = xe^{\alpha x} f'(e^{\alpha x}),$$

wo

$$f'(u) = \frac{df(u)}{du}$$

ist. Wir setzen:

$$uf'(u) = f_1(u),$$

$$uf'_1(u) = f_2(u)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$uf'_{n-1}(u) = f_n(u);$$

man hat dann:

$$\frac{d^n f(e^{\alpha x})}{d\alpha^n} = x^n f_n(e^{\alpha x}).$$

Es gelingt also immer das Integral:

$$\int x^n f_n(e^{\alpha x}) dx = \frac{d^n}{d\alpha^n} \int f(e^{\alpha x}) dx$$

zu bestimmen, wenn man alle Integrationen, die zu

$$\int f(e^{\alpha x}) dx$$

führen, vollziehen kann.

Sei wieder

$$f(e^{\alpha x}) = u,$$

so ist:

$$\frac{u df_{n-1}(u)}{du} = f_n(u),$$

also:

$$f_{n-1}(u) = \int \frac{f_n(u)\, du}{u}$$

und ebenso

$$f_{n-2}(u) = \int \frac{f_{n-1}(u)\, du}{u},$$

$$f_{n-3}(u) = \int \frac{f_{n-2}(u)\, du}{u},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$f(u) = \int f_1(u) \frac{du}{u},$$

schliesslich:

$$\int f(e^{\alpha x}) dx = \frac{1}{\alpha} \int \frac{f(u) du}{u}.$$

Ist z. B. $f_n(u)$ eine rationale gebrochene Function von $u$, und führt keine der Integrationen auf logarithmische Functionen oder Bogen, so werden auch die Werthe

$$f_{n-1}(u), f_{n-2}(u), \ldots f_1(u), f(u)$$

rational sein, und die Integration gelingt.

Es sei z. B.

$$f_1(u) = \frac{u}{(1+u)^s},$$

so ist:

$$f(u) = \int \frac{du}{(1+u)^s} = -\frac{1}{s-1} \frac{1}{(1+u)^{s-1}},$$

$$\int \frac{f(u) du}{u} = -\frac{1}{s-1} \int \frac{du}{u(1+u)^{s-1}}.$$

Diese Integration ist stets auszuführen, wenn $s$ eine ganze Zahl ist.

Sei

$$\int \frac{du}{u(1+u)^{s-1}} = q(u),$$

so wird, da $n=1$ war:

$$\int \frac{xe^{\alpha x}dx}{(1+e\alpha x)^s} = -\frac{1}{s-1}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\varphi(e^{\alpha x})\right).$$

Ist

$$s=2,$$

so wird

$$\varphi(u) = \int \frac{du}{u(1+u)} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)du,$$

also

$$\varphi(u) = \lg\left(\frac{u}{1+u}\right),$$

mithin:

$$\int \frac{xe^{\alpha x}dx}{(1+e^{\alpha x})^2} = -\frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{1}{\alpha}\lg\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{\alpha x}}\right\} = \frac{d}{d\alpha}\left\{\frac{\lg(1+e^{\alpha x})}{\alpha}\right\} = -\frac{\lg(1+e^{\alpha x})}{\alpha^2} + \frac{xe^{\alpha x}}{\alpha(1+e^{\alpha x})}.$$

Eine ähnliche Betrachtung lässt sich in Bezug auf die trigonometrischen Functionen anstellen.

Sei zu bestimmen der Ausdruck

$$\int x^n f_n(u)\,dx,$$

wo unter $u$ eine der Functionen $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$ oder $\operatorname{tg}(\alpha x)$ verstanden werden soll.

Im ersten Falle ist

$$\frac{df(u)}{d\alpha} = xf'(u)\sqrt{1-u^2}$$

und man kann

$$f'(u)\sqrt{1-u^2} = f_1(u)$$

setzen; ist ebenso

$$f_1'(u)\sqrt{1-u^2} = f_2 u$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f'_{n-1}(u)\sqrt{1-u^2} = f_n(u),$$

so hat man:

$$\int x^n f_n(u)dx = \frac{d}{d\alpha}\,(f(u)\,dx)$$

und

$$f_{n-1}(u) = \int \frac{f_n(u)\,du}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$f_{n-2}(u) = \int \frac{f_{n-1}(u)du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f(u) = \int \frac{f_1(u)\,du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Ist

$$u = \cos \alpha x,$$

so gelten dieselben Formeln, nur muss man die Wurzel jedesmal mit dem negativen Vorzeichen versehen denken.

Ist

$$u = \operatorname{tg} x,$$

so hat man:

$$\frac{df(u)}{d\alpha} = xf'u(1+u^2);$$

es ist also zu setzen:

$$f'(u)(1+u^2) = f_1(u),$$

$$f'_1(u)(1+u^2) = f_2(u)$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$f'_{n-1}(u)(1+u^2) = f_n(u),$$

also:

$$f_{n-1}(u) = \int f_n(u)\frac{du}{1+u^2},$$

$$f_{n-2}(u) = \int f_{n-1}(u)\frac{du}{1+u^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_n = \int f_1(u)\frac{du}{1+u^2},$$

während die Formel:

$$\int x^n f_n(u)\,dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\,(\int f(u)\,dx)$$

in Gültigkeit bleibt.

Es wird erfordert, dass alle diese Integrationen in der That ausführbar sind.

**Beispiel.** Sei gesucht

$$\int x(\operatorname{tg}\alpha x)^m\,(1+\operatorname{tg}\alpha x^2)\,dx.$$

Wir setzen

$$\operatorname{tg} \alpha x = u$$

und in die betreffenden Formeln

$$u^m(1+u^2) = f_1(u), \text{ da } n=1 \text{ ist.}$$

Es wird:

$$f(u) = \int u^m \, du = \frac{u^{m+1}}{m+1},$$

also:

$$\int x\,(\operatorname{tg} \alpha x)^m (1+\operatorname{tg} \alpha x^2)\,dx = \frac{1}{m+1}\frac{d}{d\alpha}\int (\operatorname{tg} \alpha x)^{m+1}\,dx.$$

Dies letztere Integral

$$\int (\operatorname{tg} \alpha x)^{m+1}\,dx = \int \frac{\sin \alpha x^{m+1}}{\cos \alpha x^{m+1}}\,dx$$

gehört nnter die im vorigen Abschnitte betrachteten, und ist stets zu integriren.

Sei z. B. $m=1$, so hat man:

$$\int x \operatorname{tg} \alpha x (1+\operatorname{tg} \alpha x^2)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\int \frac{\sin \alpha x^2}{\cos \alpha x^2}\,dx.$$

Setzt man

$$\operatorname{tg} \alpha x = v,$$

so wird

$$\frac{\alpha dx}{(\cos \alpha x)^2} = dv,$$

also

$$dx = \frac{(\cos \alpha x)^2 dv}{\alpha} = \frac{dv}{\alpha(1+v^2)}$$

und

$$\int (\operatorname{tg} \alpha x)^2\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \frac{v^2 dv}{1+v^2} = \frac{1}{\alpha}\int \left(1-\frac{1}{1+v^2}\right)dv = \frac{v}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\operatorname{arctg} v = \frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\alpha} - x,$$

also:

$$\int x \operatorname{tg} \alpha x (1+\operatorname{tg} \alpha x^2)\,dx = \frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\alpha}\right) = -\frac{1}{2\alpha^2}\operatorname{tg}(\alpha x) + \frac{x}{2\alpha(\cos \alpha x)^2}.$$

Setzt man ausserdem noch, je nachdem

$$u = e^{\alpha x},\ u = \sin \alpha x,\ u = \cos \alpha x,\ u = \operatorname{tg} \alpha x$$

war, in die Formel:

$$\int x^n f_n(u)\,dx = \frac{d^n}{d\alpha^n}\int f(u)\,dx$$

für $dx$ und $x$ den entsprechenden Werth ein, wobei sich ergibt:

$$du = \alpha e^{\alpha x} dx = \alpha u dx,$$

$$du = \alpha \cos \alpha x\,dx = \alpha\sqrt{1-u^2}\,dx,$$

$$du = -\alpha \sin \alpha x\,dx = -\alpha\sqrt{1-u^2}\,dx,$$

$$du = \frac{\alpha dx}{(\cos \alpha x)^2} = \alpha(1+u^2)\,dx,$$

also:

$$dx = \frac{du}{\alpha u},\quad dx = \frac{du}{\alpha\sqrt{1-u^2}},\quad dx = -\frac{du}{\alpha\sqrt{1-u^2}},\quad dx = \frac{du}{\alpha(1+u\ )}$$

nnd

$$x = \frac{\lg u}{\alpha},\quad x = \frac{\arc\sin u}{\alpha},\quad x = \frac{\arc\cos u}{\alpha},\quad x = \frac{\arc\operatorname{tg} u}{\alpha},$$

so wird also, je nachdem der eine oder andre der vier Fälle stattfindet:

$$\int (\lg u)^n f_n(u)\frac{du}{u} = \alpha^{n+1}\frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{1}{\alpha}\int \frac{f(u)}{u}\,du\right)$$

$$\int (\arc\sin u)^n f_n(u)\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \alpha^{n+1}\frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{1}{\alpha}\int \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

$$\int (\arc\cos u)^n f_n(u)\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \alpha^{n+1}\frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{1}{\alpha}\int \frac{f(u)}{\sqrt{1-u^2}}\right)$$

$$\int (\arc\operatorname{tg} u)^n f_n(u)\frac{du}{1+u^2} = \alpha^{n+1}\frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\frac{1}{\alpha}\int \frac{f(u)\,du}{1+u^2}\right)$$

und es werden in jedem Falle die Ausdrücke:

$$f_{n-1}(u),\ f_{n-2}(u)\ \cdots\ f_2(u),\ f_1(u),\ f(u)$$

durch die Formeln gefunden:

$$f_{p-1}(u) = \int f_p(u)\frac{du}{\chi(u)},$$

wo für $\chi(u)$ entsprechend die Werthe:

$$u,\ \sqrt{1-u^2},\ -\sqrt{1-u^2},\ 1+u^2$$

zu setzen sind.

Wohl zu merken ist hierbei, dass in dem Ausdrucke rechts

$$\alpha^{n+1}\frac{d^n}{d\alpha^n}\frac{1}{\alpha}\left(\int \frac{f(u)\,du}{u}\right)$$

nach der Integration, aber vor der Differentiation nach $\alpha$ für $u$ sein in $x$ ausgedrückter Werth wieder herzustellen ist. Es enthält nämlich diese Grösse $u$ ja die Veränderliche $\alpha$ selbst, was beim Differenziiren natürlich wohl zu berücksichtigen ist.

**Beispiel.** In der vorher entwickelten Formel:

$$\int x\operatorname{tg}(\alpha x)^m(1+\operatorname{tg}(\alpha x)^2)dx = \frac{1}{m+1}\frac{d}{d\alpha}\left(\int (\operatorname{tg}\alpha x)^{m+1}dx\right)$$

setzen wir

$$\operatorname{tg}\alpha x = u,$$

und erhalten:

$$\int u^m \arc\operatorname{tg} u\, du = \frac{\alpha^2}{m+1}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\int \frac{u^{m+1}du}{1+u^2}\right).$$

Ist hierin $m=1$, so hat man wieder:

$$\int u\arc\operatorname{tg} u\,du = \frac{\alpha^2}{2}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha x}{\alpha}\right) = -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha x + \frac{\alpha x}{2(\cos\alpha x)^2} = -\frac{1}{2}u + \frac{\arc\operatorname{tg} u}{2}(1+u^2).$$

Ist $m=2$, so ergibt sich:

$$\int u^2 \arc\operatorname{tg} u\, du = \frac{\alpha^2}{3}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\int \frac{u^3du}{1+u^2}\right).$$

Setzt man $u^2 = v$, so wird:

$$\int \frac{u^3du}{1+u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{v\,dv}{1+v} = \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+v}\right)dv = \frac{v}{2} - \frac{\lg(1+v)}{2}$$

oder, wenn man

$$v = (\operatorname{tg} \alpha x)^2$$

einsetzt:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}(\alpha x)^2 - \frac{\lg(1+(\operatorname{tg} \alpha x)^2)}{2},$$

und es wird:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\int\frac{u^2 du}{1+u^2}\right) = \frac{x}{\alpha}\operatorname{tg}(\alpha x)^2 - \frac{1}{2\alpha^2}\;[\operatorname{tg}(\alpha x)^2 - \lg(1+\operatorname{tg}(\alpha x)^2)]$$

$$= \frac{x}{\alpha}(\operatorname{tg}\alpha x)^3 - \frac{1}{2\alpha^2}(\operatorname{tg}\alpha x)^2 + \frac{\lg[1+(\operatorname{tg}\alpha x)^2]}{2\alpha^2},$$

woraus sich ergibt, wenn man wieder $\operatorname{tg} \alpha x = u$ setzt:

$$\int u^2 \operatorname{arc} \operatorname{tg}(u)\, du = \frac{1}{3}u^3 \operatorname{arc} \operatorname{tg} u - \frac{1}{6}u^2 + \frac{1}{6}\lg(1+u^2).$$

25) Theilweises Integriren.

In dem Gesagten sind im Wesentlichen die allgemeinen Fälle enthalten, in denen sich ein Integral auf bereits bekannte Functionen zurückführen lässt. Indess lassen sich noch in einzelnen Fällen complicirtere Integrale auf einfachere zurückführen. Diese Aufgabe wird die Reduction der Integrale genannt. Zum Theil führt auch diese Reduction auf in der Ausführung leichteren als den bereits gegebenen Wegen zu Integralen, deren Möglichkeit der Berechnung nach dem Vorigen bekannt ist.

Wir haben uns also hier noch mit den sogenannten Reductions-Formeln zu beschäftigen.

Dergleichen sind schon die in den vorigen Abschnitten entwickelten, wo ein complicirteres Integral $\int x^n f_n(u)\, dx$ sich aus einem einfacheren $\int f(u)\, dx$ durch Differenziiren nach einer Constante ergab.

Indess leistet hier auch namentlich dasjenige Verfahren gute Dienste, welches wir als „theilweises Integriren" bezeichnet haben.

Es war dies Verfahren in der Formel dargestellt:

$$\int y\, dx = xy - \int x\, dy$$

oder, wenn man will:

$$\int f(x)\varphi(x)\, dx = f(x)\int\varphi(x)\, dx - \int\left(\int\varphi(x)\, dx\right) f'(x)\, dx;$$

jedoch reicht die erstere einfachere Formel immer aus.

Es ist z. B.

$$\int uvd(\lg v) = \int\frac{uvdv}{v} = \int udv,$$

aber da

$$\int udv = uv - \int vdu = uv - \int uvd(\lg u),$$

ist:

$$\int uvd(\lg v) = uv - \int uvd(\lg u).$$

In dieser Formel machen wir folgende drei Substitutionen:

$$\text{I)}\quad u = (ax+b)^m \qquad v = (ex+f)^n$$

$$\text{II)}\quad u = \left(\frac{ax+b}{ex+f}\right)^m \qquad v = (ex+f)^n$$

$$\text{III)}\quad u = (ex+f)^m \qquad v = \left(\frac{ax+b}{ex+f}\right)^n.$$

Es ergibt sich:

$$\text{I)}\quad \int (ax+b)^m (ex+f)^{n-1} dx = \frac{(ax+b)^m (ex+f)^n}{ne}$$

$$- \frac{ma}{ne}\int (ax+b)^{m-1}(ex+f)^n\, dx,$$

$$\text{II)} \quad \int (ax+b)^m (ex+f)^{n-m-1} dx = \frac{(ax+b)^m (ex+f)^{n-m}}{ne}$$
$$- \frac{m\,(af-eb)}{ne} \int (ax+b)^{m-1} (ex+f)^{n-m-1} dx,$$

$$\text{III)} \quad \int (ex+f)^{m-n-1} (ax+b)^{n-1} dx = \frac{(ex+f)^{m-n} (ax+b)^n}{n(af-eb)}$$
$$- \frac{me}{n\,(af-eb)} \int (ex+f)^{m-n-1} (ax+b)^n dx$$

Diese Formeln werden etwas einfacher, wenn man für eine der Grössen

$ax+b$ oder $ex+f$ die Grösse $x$ selbst

setzt. An ihrer Allgemeinheit verlieren sie hierbei nichts, da man ja immer die Substitution:

$$ax+b \text{ oder } ex+f=y$$

machen kann.

Sei demgemäss:

$$a=1, \quad b=0,$$

so hat man:

$$\text{Ia)} \quad \int x^m (ex+f)^{n-1} dx = \frac{x^m (ex+f)^n}{ne} - \frac{m}{ne} \int x^{m-1} (ex+f)^n dx,$$

$$\text{IIa)} \quad \int x^m (ex+f)^{n-m-1} dx = \frac{x^m (ex+f)^{n-m}}{nf} - \frac{mf}{ne} \int x^{m-1} (ex+f)^{n-m-1} dx,$$

$$\text{IIIa)} \quad \int x^{n-1} (ex+f)^{m-n-1} dx = \frac{x^n (ex+f)^{m-n}}{nf} - \frac{me}{nf} \int x^n (ex+f)^{m-n-1} dx.$$

Setzt man dagegen

$$e=1, \quad f=0,$$

so werden diese Formeln:

$$\text{Ib)} \quad \int x^{n-1} (ax+b)^m dx = \frac{x^n (ax+b)^m}{n} - \frac{ma}{n} \int x^n (ax+b)^{m-1} dx,$$

$$\text{IIb)} \quad \int x^{n-m-1} (ax+b)^m dx = \frac{x^{n-m} (ax+b)^m}{n} + \frac{mb}{n} \int x^{n-m-1} (ax+b)^{m-1} dx,$$

$$\text{IIIb)} \quad \int x^{m-n-1} (ax+b)^{n-1} dx = \frac{x^{m-n} (ax+b)^n}{nb} + \frac{m}{nb} \int x^{m-n-1} (ax+b)^n dx.$$

Die Anwendung dieser Formeln ist leicht ersichtlich. Das gegebene Integral wird immer auf ein anderes zurückgeführt, welches dieselbe Form hat. Nur dass in Fall I der Exponent des einen Factors um die Einheit vermindert wird, während der des zweiten um die Einheit zunimmt. Man wird also Falls der erste Factor einen positiven, der zweite einen negativen Exponenten hat, diese Formel mit Vortheil zur möglichsten Verminderung der Exponenten anwenden, und dieselben sogar zum Verschwinden bringen können, falls sie ganze Zahlen sind.

In Fall II wird nur der Exponent des einen Factors vermindert, in Fall III vermehrt. Die Formeln finden Anwendung, wenn beide Factoren positive, entsprechend negative Exponenten haben, wobei denn nach und nach der eine und der andre vermindert werden können.

Uebrigens werden diese Formeln für den Fall unbrauchbar, wenn die constanten Nenner der rechten Seite verschwinden. Es tritt dies ein, wenn

$n$ gleich 0

ist.

Man hat aber in diesem Falle die Integrale:

$$\int (ax+b)^m dx,\ \int (ax+b)^m (ex+f)^{-m-1} dx,\ \int (ex+f)^{m-1} (ax+b)^{-1} dx.$$

Setzt man im ersten $ax+b=y$, so hat man:

$$\int (ax+b)^m dx = \int \frac{y^m dy}{a} = \frac{y^{m+1}}{a(m+1)}.$$

Wird im zweiten Falle

$$\frac{ax+b}{ex+f} = y,$$

also

$$x = \frac{fy-b}{a-ey}$$

gesetzt, woraus sich:

$$dx = \frac{(fa-eb)dy}{(a-ey)^2}$$

ergibt, so hat man:

$$\int (ax+b)^m (ex+f)^{-m-1} dx = \int \frac{y^m (fa-eb)^2 dy}{(a-ey)^3}.$$

Dieses Integral kann immer bestimmt werden, selbst wenn $m$ ein Bruch ist, denn sei

$$m = \frac{p}{q},$$

so kann man

$$y^{\frac{1}{q}} = z$$

setzten, und hat dafür:

$$\int q \frac{z^{p+q-1}(fa-eb)^2}{a-ez^q} dz,$$

wo $p$ und $q$ ganze Zahlen sind.

Im dritten Falle aber setzt man

$$ex+f=y,$$

und hat

$$\int \frac{y^{m-1} dy}{a(y-f)+eb}$$

ein ebenfalls stets zu bestimmendes Integral. Denn ist $m=\frac{p}{q}$, so kann

$$y^{\frac{1}{q}} = z,$$

$$y^{m-1} = z^{p-q},$$

$$y = z^q,$$

$$dy = qz^{q-1} dz$$

gesetzt werden.

Die Formeln Ia, IIa, IIIa, Ib, IIb, IIIb gewinnen noch an Anwendbarkeit, wenn man für

$x$ eine Potenz $y^s$

substituirt. Man erhält dann, wenn man andre Exponenten einführt, und dieselben der beabsichtigten Anwendung gemäss positiv oder negativ annimmt:

$$\text{Ic)}\quad \int x^m (ex^n+f)^{-p} dx = -\frac{x^{m+1-n}(ex^n+f)^{-p+1}}{n(p-1)e} + \frac{m+1-n}{n(p-1)e} \int x^{m-n} (ex^n+f)^{-p+1} dx,$$

$$\text{IIc)}\quad \int x^m (ex^n+f)^p dx = \frac{x^{m+1-n}(ex^n+f)^{p+1}}{e(m+1+np)} - \frac{f(m+1-n)}{e(m+1+np)} \int x^{m-n} (ex^n+f)^p dx,$$

$$\text{IIIc)}\quad \int x^{-m} (ex^n+f)^p = -\frac{x^{1-m}(ex^n+f)^{p+1}}{f(m-1)} + \frac{e(np+n-m+1)}{f(m-1)} \int x^{-m+n} (ex^n+f)^p dx.$$

Id) $$\int x^{-m}(ax^n+b)^p\,dx = -\frac{x^{1-m}(ax^n+b)^p}{m-1} + \frac{anp}{m-1}\int x^{n-m}(ax^n+b)^{p-1}dx,$$

IId) $$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx = \frac{x^{m+1}(ax^n+b)^p}{m+np+1} + \frac{nbp}{m+np+1}\int x^m(ax^n+b)^{p-1}dx,$$

IIId) $$\int x^m(ax^n+b)^{-p}dx = \frac{x^m(ax^n+b)^{-p+1}}{bn(p-1)} - \frac{m-np+n+1}{bn(p-1)}\int xn^m(ax^n+b)^{-p+1}dx.$$

In diesen sechs Formeln kann man immer annehmen, dass $m$ nnd $n$ ganze Zahlen sind.

Denn wäre $m=\frac{p}{q}$, $n=\frac{r}{s}$, so führte man die Snbstitntion

$$x^{\frac{1}{qs}}=y$$

ein, wodnrch

$$x^m=y^{ps},\quad x^n=y^{rq}$$

würde, während

$$dx=qsy^{qs-1}dy$$

sein müsste.

Das Integral nimmt dann eine der nrsprünglichen ganz ähnliche Form an, nur dass statt $m$ nnd $n$ ganze Exponenten erscheinen.

Die Grösse $p$ wird im Allgemeinen ein Bruch sein.

Jedoch lässt sich leicht eine allgemeinere Bedingung dafür geben, in welchem Falle sich dieser Ausdruck auf eine ganze Zahl zurückführen lasse.

Setzt man nämlich in

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx,$$

$$ax^n+b=y,$$

also

$$x=\left(\frac{y-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$$

so wird:

$$dx=\frac{1}{n}\frac{(y-b)^{\frac{1-n}{n}}dy}{a^{\frac{1}{n}}}$$

also:

$$\int x^m(ax^n+b)^p\,dx = \frac{1}{na^{\frac{1+m}{n}}}\int y^p(y-b)^{\frac{m+1}{n}-1}dy,$$

ein dem gegebenen ganz ähnlicher Ausdruck, in welchem der Exponent von $y-b$ eine ganze Zahl ist, wenn $m+1$ dnrch $n$ theilbar ist; dies ist also eine Bedingung, nnter welcher die Exponenten in ganzzahlige verwandelt werden können.

Man kann aber auch schreiben:

$$\int x^m(ax^n+b)^p dx = \int x^{m+np}(bx^{-n}+a)^p dx$$

nnd da dieser Ausdruck dem gegebenen ganz analog ist, wenn man $n$ mit $-n$, $m$ mit $m+np$ vertauscht, so ist eine zweite Bedingung, nnter welcher die Exponenten ganzzahlig werden, die, dass: $m+np+1$ dnrch $n$ theilbar wird.

Die erste Bedingung zeigt, dass alle Integrale von der Form:

$$\int x^{ns-1}(ax^n+b)^p dx$$

sich bestimmen lassen, $p$ mag eine ganze Zahl oder ein Bruch sein, die zweite, dass gleiches bei den Integralen von der Form:

$$\int x^{n(s-p)-1}(ax^n+b)^p dx$$

stattfindet.

26) Betrachten wir beispielsweise die beiden Integrale:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ und } \int \frac{x^{-m} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

wo $m$ eine positive ganze Zahl ist.

Dass die Integration ausführbar ist, wissen wir schon, sonst ergäbe sich dies auch aus dem Schlusse des vorigen Abschnittes. Es ist nämlich hier $n = 2$, $p = -\frac{1}{2}$, also

$$m + np + 1 = m.$$

Da $m$ eine ganze Zahl ist, so wird sie immer durch 2 theilbar sein, wenn $m+1$ nicht durch 2 theilbar ist; also eine unserer Bedingungen ist stets erfüllt.

Im Falle des ersten Integrals findet die Formel IIc. Anwendung. Dieselbe gibt:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m}\int \frac{x^{m-2}\, dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Es wird der Exponent $m$ um zwei Einheiten vermindert. Durch fortgesetzte Anwendung dieser Formel wird man also, je nachdem $m$ grade oder ungrade ist, auf eins der Integrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$$

oder auf

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

geführt.

Sonach erhält man:

A. wenn $m$ ungrade ist:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}x^{m-5} + \cdots + \frac{(m-1)(m-3)\cdots 2}{(m-2)(m-4)\cdots 1}\right];$$

B. wenn $m$ grade ist:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{m}\left[x^{m-1} + \frac{m-1}{m-2}x^{m-3} + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)}x^{m-5} + \cdots + \frac{(m-1)(m-3)\cdots 3}{(m-2)(m-4)\cdots 2}\right] + \frac{(m-1)(m-3)\cdots 3}{m(m-2)(m-4)\cdots 2}\arcsin x.$$

Im zweiten Falle findet die Reductionsformel III c. Anwendung. Dieselbe gibt:

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{-m+1}\sqrt{1-x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1}\int \frac{x^{-m+2} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Bei wiederholter Anwendung gelangt man zuletzt entweder auf

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x,$$

wenn $m$ grade ist, oder auf:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}},$$

wenn es ungrade ist.

Im letztern Falle setzen wir:

$$y = \frac{1}{x}$$

und es wird:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{y^2-1}}$$

$$= \lg\left(\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right) = \lg\left(\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right).$$

27) Die in Abschnitt 25 gegebene Formel:

$$\int uv\, d\lg v = uv - \int uv\, d\lg u$$

führt auch zu bequemen Reductionsformeln für die Integrale der trigonometrischen Functionen, deren Berechnung wir als ausführbar schon erkannt haben.

Wir unterscheiden dabei 6 Fälle und setzen:

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & u = \sin x^m, & v = \cos x^n \\ \text{II)} & u = \operatorname{tg} x^m, & v = \cos x^n \\ \text{III)} & u = \cos x^m, & v = \operatorname{tg} x^n \\ \text{IV)} & u = \cos x^m, & v = \sin x^n \\ \text{V)} & u = \cot x^m, & v = \sin x^n \\ \text{VI)} & u = \sin x^m, & v = \cot x^n. \end{array}$$

Es ergibt sich in jedem der 6 Fälle bezüglich:

$$\text{I)} \int \sin x^{m+1} \cos x^{n-1} dx = -\frac{\sin x^m \cos x^n}{n} + \frac{m}{n} \int \sin x^{m-1} \cos x^{n+1} dx,$$

$$\text{II)} \int \sin x^{m+1} \cos x^{n-m-1} dx = -\frac{\sin x^m \cos x^{n-m}}{n} + \frac{m}{n} \int \sin x^{m-1} \cos x^{n-m-1} dx,$$

$$\text{III)} \int \sin x^{n-1} \cos x^{m-n-1} dx = \frac{\sin x^n \cos x^{m-n}}{n} + \frac{m}{n} \int \sin x^{n+1} \cos x^{m-n-1} dx,$$

$$\text{IV)} \int \sin x^{n-1} \cos x^{m+1} dx = \frac{\sin x^n \cos x^m}{n} + \frac{m}{n} \int \sin x^{n+1} \cos x^{m-1} dx,$$

$$\text{V)} \int \sin x^{n-m-1} \cos x^{m+1} dx = \frac{\sin x^{n-m} \cos x^m}{n} + \frac{m}{n} \int \sin x^{n-m-1} \cos x^{m-1} dx,$$

$$\text{IV)} \int \sin x^{m-n-1} \cos x^{n-1} dx = -\frac{\sin x^{m-n} \cos x^n}{n} + \frac{m}{n} \int \sin x^{m-n-1} \cos x^{n+1} dx.$$

Man sieht leicht, wie diese Formeln zur Reduction der Integrale:

$$\int \sin x^m \cos x^n dx,$$

$$\int \frac{\sin x^m}{\cos x^n} dx,$$

$$\int \frac{\cos x^n}{\sin x^m} dx,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x^m \cos x^n}.$$

zu verwenden sind, wo $m$ und $n$ ganze positive Zahlen bedeuten. Wir wollen daher den 6 Formeln durch Veränderung der Exponenten eine ihrer Anwendung gemässe Gestalt geben.

Ia) $$\int \frac{\sin x^m}{\cos x^n} dx = \frac{\sin x^{m-1}}{(n-1)\cos x^{n-1}} - \frac{m-1}{n-1} \int \frac{\sin x^{m-2}}{\cos x^{n-2}} dx,$$

IIa) $$\int \sin x^m \cos x^n \, dx = -\frac{\sin x^{m-1} \cos x^{n+1}}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \sin x^{m-2} \cos x^n \, dx,$$

IIIa) $$\int \frac{\cos x^n}{\sin x^m} dx = -\frac{\cos x^{n+1}}{(m-1)\sin x^{m-1}} + \frac{m-n-2}{n-1} \int \frac{\cos x^n}{\sin x^{m-2}} dx,$$

IVa) $$\int \frac{\cos x^n}{\sin x^m} dx = -\frac{\cos x^{n-1}}{(m-1)\sin x^{m-1}} - \frac{n-1}{m-1} \int \frac{\cos x^{n-2}}{\sin x^{m-2}} dx,$$

Va) $$\int \sin x^m \cos x^n dx = \frac{\sin x^{m+1} \cos x^{n-1}}{m+n} + \frac{n-1}{m-n} \int \sin x^m \cos x^{n-2} \, dx,$$

VIa) $$\int \frac{\sin x^m}{\cos x^n} dx = \frac{\sin x^{m+1}}{(n-1)\cos x^{n-1}} + \frac{n-m-2}{n-1} \int \frac{\sin x^m}{\cos x^{n-2}} dx$$

Wir wollen uns noch in VIa. $m$ negativ denken, so dass sich die Formel verwandelt in:

VIIa) $$\int \frac{dx}{\sin x^m \cos x^n} = \frac{1}{(n-1)\sin x^{m-1} \cos x^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin x^m \cos x^{n-2}}.$$

Ebenso kann in IIIa. $n$ negativ sein, und man hat:

VIIIa) $$\int \frac{dx}{\sin x^m \cos x^n} = \frac{-1}{(m-1)\sin x^{m-1} \cos x^{n-1}} + \frac{m+n-2}{m-1} \int \frac{dx}{\sin x^{m-2} \cos x^n}.$$

IIa. aber gibt, wenn man $n$ negativ denkt:

IXa) $$\int \frac{\sin x^m}{\cos x^n} dx = -\frac{\sin x^{m-1}}{(m-n)\cos x^{n-1}} + \frac{m-1}{m-n} \int \frac{\sin x^{m-2}}{\cos x^n} dx.$$

Die Anwendung dieser Formeln geschieht nun in folgender Weise.

Ist

$$\int \sin x^m \cos x^n \, dx$$

gegeben, so werden mittels IIa und Va, die man abwechselnd anwendet, die Exponenten von $\sin x$ und $\cos x$ vermindert.

Wird

$$\int \frac{\sin x^m}{\cos x^n} dx$$

gesucht, so wird mittels Ia zugleich der Exponent beider Functionen vermindert; die Function, welche den grössern Exponenten hat, dann in Bezug auf den letztern weiter zu vermindern, kann man sich bezüglich der Formeln VIa oder IXa bedienen.

Für

$$\int \frac{\cos x^n}{\sin x^m} dx$$

führt IVa eine gleichzeitige Verminderung der Exponenten herbei, die man anwendet, nachdem man mittels IIIa den Exponenten des Sinus gleich dem des Cosius oder nur um eine Einheit von ihm verschieden gestaltet hat.

Endlich dient zur Reduction von

$$\int \frac{dx}{\sin x^m \cos x^n}$$

die abwechselnde Anwendung der Formeln VIIa und VIIIa.

Immer gelangt man bei diesen Verfahren anletzt auf eines der 9 Integrale:

$$\int dx = x,$$
$$\int \cos x \, dx = \sin x,$$
$$\int \sin x \, dx = -\cos x,$$

welche beiden letztern augenblicklich aus den Formeln:

$$d \sin x = \cos x \, dx, \quad d \cos x = -\sin x \, dx$$

sich ergeben.

$$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x,$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\lg \cos x,$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d(\sin x)}{\sin x)} = \lg \sin x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{dx}{\cos x^2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \int \frac{d(\operatorname{tg} x)}{\operatorname{tg} x} = \lg \operatorname{tg} x,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \lg \operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = -\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = \lg \cot\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \text{ oder}$$

$$= \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right).$$

Erwähnen wir schliesslich noch der Integration der Functionen:

$$\int \sin \alpha x^p \cos \beta x^q dx,\ \int \sin \alpha x^p \sin \beta x^q dx,\ \int \cos \alpha x^p \cos \beta x^q dx,$$

wo $p$ und $q$ ganze positive Zahlen sind.

Auf die bequemste Weise geschieht diese Quadratur, indem man nach bekannten Sätzen die Grössen

$$\sin \alpha x^p,\ \sin \beta x^q,\ \cos \alpha x^p,\ \cos \beta x^q$$

einzeln in Reihen verwandelt von der Form:

$$A + B \sin \alpha x + C \sin 2\alpha x + D \sin 3\alpha x + \cdots$$

$$A + B \cos \alpha x + C \cos 2\alpha x + D \cos 3\alpha x + \cdots,$$

welche bekannte Coefficienten haben, und immer abbrechen, wenn $p$ und $q$ ganze positive Zahlen sind. In dieser Weise werden die Integrale auf Formen gebracht, worin sie aus Gliedern folgender Art zusammengesetzt sind:

$$\int \sin \lambda x \sin \mu x\, dx,\ \int \sin \lambda x \cos \mu x\, dx,\ \int \cos \lambda x \cos \mu x\, dx.$$

Es ist aber:

$$\sin \lambda x \sin \mu x = \frac{1}{2}\cos(\lambda - \mu)x - \frac{1}{2}\cos(\lambda + \mu)x,$$

$$\sin \lambda x \cos \mu x = \frac{1}{2}\sin(\lambda + \mu)x + \frac{1}{2}\sin(\lambda - \mu)x,$$

$$\cos \lambda x \cos \mu x = \frac{1}{2}\cos(\lambda - \mu)x + \frac{1}{2}\cos(\lambda + \mu)x,$$

und durch Einsetzen dieser Werthe erhält man nur noch Ausdrücke von der Form:

$$\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a}\cos ax,$$

$$\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a}\sin ax,$$

28) Reductionsformeln erleichtern nur bisweilen die Rechnung, wenn es sich um Darstellung eines gegebenen Integrals handelt.

Da dieselben nämlich das letztere durch ein gleichartiges darstellen, welches weiter zu reduciren ist, so wird sich dieses Verfahren möglicher Weise sehr oft wiederholen können.

Im Allgemeinen würde also der directen Darstellung der Integrale in solchen Fällen der Vorzug zu geben sein.

Anders ist es aber, wenn es sich um die Berechnung von Integralverzeichnissen handelt, bei welchen die gegebenen und andere Reductionsformeln sehr gute Dienste thun.

Dergleichen Integralverzeichnisse oder Integraltafeln sind unter andern von Meier Hirsch und von Minding berechnet.

Wir können hier nur eine solche im beschränkten Umfange geben, bei welcher namentlich die zuerst angeführte benutzt ist

## Tafel ausgeführter Quadraturen.

### I. Integrale rationaler Functionen.

1) $\int \frac{x^m\,dx}{a+bx}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int\frac{dx}{X} = \frac{1}{b}\lg X$$

$$\int\frac{x\,dx}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\lg X$$

$$\int\frac{x^2dx}{X} = \frac{x^2}{2b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^3}\lg X$$

$$\int\frac{x^3dx}{X} = \frac{x^3}{3b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2x}{b^3} - \frac{a^3}{b^4}\lg X$$

$$\int\frac{x^4dx}{X} = \frac{x^4}{4b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2x^2}{2b^3} - \frac{a^3x}{b^4} + \frac{a^4}{b^5}\lg X$$

$$\int\frac{x^5dx}{X} = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax^4}{4b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^3x^2}{2b^4} + \frac{a^4x}{b^5} - \frac{a^5}{b^6}\lg X$$

$$\int\frac{x^m dx}{X} = \frac{x^m}{mb} - \frac{ax^{m-1}}{(m-1)b^2} + \frac{a^2x^{m-2}}{(m-2)b^3} - \frac{a^3x^{m-1}}{(m-3)b^4} + \cdots (-1)^{m-1}\frac{a^{m-1}x}{b^m}$$
$$+(-1)^m\frac{a^m}{b^{m+1}}\lg X.$$

2) $\int \frac{x^m dx}{(a+bx)^2}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int\frac{dx}{X^2} = -\frac{1}{bX}$$

$$\int\frac{x\,dx}{X^2} = \frac{a}{b^2X} + \frac{1}{b^2}\lg X$$

$$\int\frac{x^2dx}{X^2} = \left(\frac{x^2}{b} - \frac{2a^2}{b^3}\right)\frac{1}{X} - \frac{2a}{b^3}\lg X$$

$$\int\frac{x^3dx}{X^2} = \left(\frac{x^3}{2b} - \frac{3ax^2}{2b^2} + \frac{3a^3}{b^4}\right)\frac{1}{X} + \frac{3a^2}{b^4}\lg X$$

$$\int\frac{x^4dx}{X^2} = \left(\frac{x^4}{3b} - \frac{2ax^3}{3b^2} + \frac{2a^2x^2}{b^3} - \frac{4a^4}{b^5}\right)\frac{1}{X} - \frac{4a^3}{b^5}\lg X$$

$$\int\frac{x^5dx}{X^2} = \left(\frac{x^5}{4b} - \frac{5ax^4}{12b^2} + \frac{5a^2x^3}{6b^3} - \frac{5a^3x^2}{2b^4} + \frac{5a^5}{b^6}\right)\frac{1}{X} + \frac{5a^4}{b^6}\lg X.$$

3) $\int \frac{x^m dx}{(a+bx)^3}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{dx}{X^3} = -\frac{1}{2bX^2}$$

$$\int \frac{xdx}{X^3} = -\left(\frac{x}{b} + \frac{a}{2b^2}\right)\frac{1}{X^2}$$

$$\int \frac{x^2dx}{X^3} = \left(\frac{2ax}{b^2} + \frac{3a^2}{2b^3}\right)\frac{1}{X^2} + \frac{1}{b^3}\lg X.$$

$$\int \frac{x^3dx}{X^3} = \left(\frac{x^2}{b} - \frac{6a^2x}{b^3} - \frac{9a^3}{2b^4}\right)\frac{1}{X^2} - \frac{3a}{b^4}\lg X$$

$$\int \frac{x^4dx}{X^3} = \left(\frac{x^3}{2b} - \frac{2ax^2}{b^2} + \frac{12a^3x}{b^4} + \frac{9a^4}{b^5}\right)\frac{1}{X^2} + \frac{6a^2}{b^5}\lg X$$

$$\int \frac{x^5dx}{X^3} = \left(\frac{x^4}{3b} - \frac{5ax^3}{6b^2} + \frac{10a^2x^2}{3b^3} - \frac{20a^4x}{b^5} - \frac{15a^5}{b^6}\right)\frac{1}{X^2} - \frac{10a^3}{b^6}\lg X.$$

4) $\int \frac{x^m dx}{(a+bx)^4}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{dx}{X^4} = -\frac{1}{3b X^3}$$

$$\int \frac{xdx}{X^4} = -\left(\frac{x}{2b} + \frac{a}{6b^2}\right)\frac{1}{X^3}$$

$$\int \frac{x^2dx}{X^4} = -\left(\frac{x^2}{b} + \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{3b^3}\right)\frac{1}{X^3}$$

$$\int \frac{x^3dx}{X^4} = \left(\frac{3ax^2}{b^3} + \frac{9a^2x}{2b^3} + \frac{11a^3}{6b^4}\right)\frac{1}{X^3} + \frac{1}{b^4}\lg X$$

$$\int \frac{x^4dx}{X^4} = \left(\frac{x^3}{b} - \frac{12a^2x^2}{b^3} - \frac{18a^3x}{b^4} - \frac{22a^4}{3b^5}\right)\frac{1}{X^3} - \frac{4a}{b^5}\lg X$$

$$\int \frac{x^5dx}{X^4} = \left(\frac{x^3}{2b} - \frac{5ax^4}{2b^3} + \frac{30a^3x^2}{6^4} + \frac{45a^4x}{b^5} + \frac{55a^5}{3b^6}\right)\frac{1}{X^3} + \frac{10a^2}{b^6}\lg X.$$

5) $\int \frac{dx}{x^m(a+bx)}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{a}\lg\frac{x}{X} - \frac{1}{a}\lg\frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\lg\frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2x} - \frac{b^2}{a^3}\lg\frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^4X} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{2a^2x^2} - \frac{b^2}{a^3x} + \frac{b^3}{a^4}\lg\frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^5X} = -\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{3a^2x^3} - \frac{b^2}{2a^3x^2} + \frac{b^3}{a^4x} - \frac{b^4}{a^5}\lg\frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^mX} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{b}{(m-2)a^2x^{m-2}} - \cdots (-)^{m-1}\frac{b^{m-2}}{a^{m-1}x}$$

$$+(-1)^m\frac{b^m}{a^m}\lg\frac{X}{x}.$$

6) $\int \frac{dx}{x^m (a+bx)^2}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{aX} - \frac{1}{a^2} \lg \frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^2X^2} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{2b}{a^2}\right) \frac{1}{X} + \frac{2b}{a^3} \lg \frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^3X^2} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{2a^2x} + \frac{3b^2}{a^3}\right) \frac{1}{X} - \frac{3b^2}{a^4} \lg \frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^4X^2} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{2b}{3a^2x^2} - \frac{2b^2}{a^3x} - \frac{4b^3}{a^4}\right) \frac{1}{X} + \frac{4b^3}{a^5} \lg \frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^5X^2} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{5b}{12a^2x^3} - \frac{5b^2}{6a^3x^2} + \frac{5b^3}{2a^4x} + \frac{5b^4}{a^5}\right) \frac{1}{X} - \frac{5b^4}{a^6} \lg \frac{X}{x}$$

7) $\int \frac{dx}{x^m (a+bx)^3}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{dx}{xX^3} = \left(\frac{3}{2a} + \frac{bx}{a^2}\right) \frac{1}{X^2} - \frac{1}{a^3} \lg \frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^2X^3} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{9b}{2a^2} - \frac{3b^2x}{a^3}\right) \frac{1}{X^2} + \frac{3b}{a^4} \lg \frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^3X^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{2b}{a^2x} + \frac{9b^2}{a^3} + \frac{6b^3x}{a^4}\right) \frac{1}{X^2} - \frac{6b^2}{a^5} \lg \frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^4X^3} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{5b}{6a^2x^2} - \frac{10b^2}{3a^3x} - \frac{15b^3}{a^4} - \frac{10b^4x}{a^5}\right) \frac{1}{X^2} + \frac{10b^3}{a^6} \lg \frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^5X^3} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{2a^2x^3} - \frac{5b^2}{4a^3x^2} + \frac{5b^3}{a^4x} + \frac{45b^4}{2a^5} + \frac{15b^5x}{a^6}\right) \frac{1}{X^2} - \frac{15b^4}{a^7} \lg \frac{X}{x}$$

8) $\int \frac{dx}{x^m (a+bx)^4}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{dx}{xX^4} = \left(\frac{11}{6a} + \frac{5bx}{2a^2} + \frac{b^2x^2}{a^3}\right) \frac{1}{X^3} - \frac{1}{a^4} \lg \frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^2X^4} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{22b}{3a^2} - \frac{10b^2x}{a^3} - \frac{4b^3x^2}{a^4}\right) \frac{1}{X^3} + \frac{4b}{a^5} \lg \frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^3X^4} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{2a^2x} + \frac{55b^2}{3a^3} + \frac{25b^3x}{a^4} + \frac{10b^4x^2}{a^5}\right) \frac{1}{X^3} - \frac{10b^2}{a^6} \lg \frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^4X^4} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{a^2x^2} - \frac{5b^2}{a^3x} - \frac{110b^3}{3a^4} - \frac{50b^4x}{a^5} - \frac{20b^5x^2}{a^6}\right) \frac{1}{X^3} + \frac{20b^3}{a^7} \lg \frac{X}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x^5X^4} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{7b}{12a^2x^3} - \frac{7b^2}{4a^3x^2} + \frac{35b^3}{4a^4x} + \frac{385b^4}{6a^5} + \frac{175b^5x}{2a^6} + \frac{35b^6x^2}{a^7}\right) \frac{1}{X^3} - \frac{35b^4}{a^8} \lg \frac{X}{x}$$

9) $\int \frac{dx}{(a+bx^2)^n}$. Sei $a+bx^2=X$, $\int \frac{dx}{a+bx^2}=U$.

Es ist dann:

a) wenn $a$ und $b$ positiv sind:

$$U = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arc\,tg} x \sqrt{\frac{b}{a}}.$$

b) wenn $b$ positiv, $a$ negativ ist:

$$U = -\frac{1}{\sqrt{-ab}} \lg \frac{\sqrt{-a} - x\sqrt{b}}{\sqrt{-a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{-ab}} \lg \frac{\sqrt{-a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{-a-bx^2}}.$$

c) Ist $b$ negativ und $a$ positiv, so gilt die Formel b),

d) sind $a$ und $b$ negativ, so gilt die Formel a):

$$\int \frac{dx}{X} = U$$

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2aX} + \frac{1}{2a} U$$

$$\int \frac{dx}{X^3} = \left(\frac{1}{4aX^2} + \frac{3}{8a^2X}\right) x + \frac{3}{8a^2} U$$

$$\int \frac{dx}{X^4} = \left(\frac{1}{6aX^3} + \frac{5}{24a^2X^2} + \frac{5}{16a^3X}\right) x + \frac{5}{16a^3} U$$

$$\int \frac{dx}{X^5} = \left(\frac{1}{8aX^4} + \frac{7}{48a^2X^3} + \frac{35}{192a^3X^2} + \frac{35}{128a^4X}\right) x + \frac{35}{128a^4} U$$

$$\int \frac{dx}{X^6} = \left(\frac{1}{10aX^5} + \frac{9}{80a^2X^4} + \frac{21}{160a^3X^3} + \frac{21}{128a^4X^2} + \frac{63}{256a^5X}\right) x + \frac{63}{256a^5} U$$

10) $\int \frac{x^m dx}{a+bx^2}$. Sei $a+bx^2 = X$, $\int \frac{dx}{a+bx^2} = U$.

$$\int \frac{x\,dx}{X} = \frac{1}{2b} \lg X$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} U$$

$$\int \frac{x^3 dx}{X} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{2b^2} \lg X$$

$$\int \frac{x^4 dx}{X} = \frac{x^3}{3b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} U$$

$$\int \frac{x^5 dx}{X} = \frac{x^4}{4b} - \frac{ax^2}{2b^2} + \frac{a^2}{2b^3} \lg X$$

$$\int \frac{x^m dx}{X} = \frac{x^m}{mb} - \frac{ax^{m-2}}{(m-2)b^2} + \frac{a^2x^{m-4}}{(m-4)b^3} - \cdots (-1)^{\frac{m}{2}-1} \frac{a^{\frac{m}{2}-1} x}{b^{\frac{m}{2}}} + (-1)^{\frac{m}{2}} \frac{a^{\frac{m}{2}}}{b^{\frac{m}{2}}} U,$$

wenn $m$ grade ist.

$$\int \frac{x^m dx}{X} = \frac{x^m}{mb} - \frac{ax^{m-2}}{(m-2)b^2} + \frac{a^2x^{m-4}}{(m-4)b^3} - \cdots (-1)^{\frac{m-3}{2}} \frac{a^{\frac{m-3}{2}} x^2}{2b^{\frac{m-1}{2}}}$$

$$+ (-1)^{\frac{m-1}{2}} \frac{a^{\frac{m-1}{2}}}{2b^{\frac{m+1}{2}}} \lg X,$$

wenn $m$ ungrade ist.

11) $\int \frac{x^m dx}{(a+bx^2)^2}$. Sei $a+bx^2 = X$, $\int \frac{dx}{a+bx^2} = U$.

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{2aX} + \frac{1}{2a}U$$
$$\int \frac{x\,dx}{X^2} = -\frac{1}{2b}X$$
$$\int \frac{x^2 dx}{X^2} = -\frac{x}{2bX} + \frac{1}{2b}U$$
$$\int \frac{x^3 dx}{X^2} = \frac{a}{2b^2X} + \frac{1}{2b^2}\lg X$$
$$\int \frac{x^4 dx}{X^2} = \left(\frac{x^3}{b} + \frac{3ax}{2b^2}\right)\frac{1}{X} - \frac{3a}{2b^2}U$$
$$\int \frac{x^5 dx}{X^2} = \left(\frac{x^4}{2b} - \frac{a^2}{b^3}\right)\frac{1}{X} - \frac{a}{b^3}\lg X.$$

12) $\int \frac{x^m dx}{(a+bx^2)^3}$. Sei $a+bx^2 = X$, $\int \frac{dx}{a+bx^2} = U$.

$$\int \frac{dx}{X^3} = \left(\frac{3bx^3}{8a^2} + \frac{5x}{8a}\right)\frac{1}{X^2} + \frac{3}{8a^2}U$$
$$\int \frac{x\,dx}{X^3} = -\frac{1}{4bX^2}$$
$$\int \frac{x^2 dx}{X^3} = \left(\frac{x^3}{8a} - \frac{x}{8b}\right)\frac{1}{X^2} + \frac{1}{8ab}U$$
$$\int \frac{x^3 dx}{X^3} = \left(-\frac{x^2}{2b} - \frac{a}{4b^2}\right)\frac{1}{X^2}$$
$$\int \frac{x^4 dx}{X^3} = \left(-\frac{5x^3}{8b} - \frac{3ax}{8b^2}\right)\frac{1}{X^2} + \frac{3}{8b^2}U$$
$$\int \frac{x^5 dx}{X^3} = \left(\frac{ax^2}{b^2} + \frac{3a^2}{4b^3}\right)\frac{1}{X^2} + \frac{1}{2b^3}\lg X.$$

13) $\int \frac{x^m dx}{(a+bx^2)^4}$. Sei $a+bx^2 = X$, $\int \frac{dx}{a+bx^2} = U$.

$$\int \frac{dx}{X^4} = \left(\frac{5b^2x^5}{16a^3} + \frac{5bx^3}{6a^2} + \frac{11x}{16a}\right)\frac{1}{X^3} + \frac{5}{16a^3}U$$
$$\int \frac{x\,dx}{X^4} = -\frac{1}{6bX^3}$$
$$\int \frac{x^2 dx}{X^4} = \left(\frac{bx^5}{16a^2} + \frac{x^3}{6a} - \frac{x}{16b}\right)\frac{1}{X^3} + \frac{1}{16a^2b}U$$
$$\int \frac{x^3 dx}{X^4} = \left(-\frac{x^2}{4b} - \frac{a}{12b^2}\right)\frac{1}{X^3}$$
$$\int \frac{x^4 dx}{X^4} = \left(\frac{x^5}{16a} - \frac{x^3}{6b} - \frac{ax}{16b^2}\right)\frac{1}{X^3} + \frac{1}{16ab^2}U$$
$$\int \frac{x^5 dx}{X^4} = \left(-\frac{x^4}{2b} - \frac{ax^2}{2b^2} - \frac{a^2}{6b^3}\right)\frac{1}{X^3}$$

$$14)\ \int\frac{dx}{x^m(a+bx^2)}.\quad \text{Sei } a+bx^2=X,\quad \int\frac{dx}{a+bx^2}=U.$$

$$\int\frac{dx}{xX}=\frac{1}{2a}\lg\frac{x^2}{X}$$

$$\int\frac{dx}{x^2X}=-\frac{1}{ax}-\frac{b}{a}U$$

$$\int\frac{dx}{x^3X}=-\frac{1}{2ax^2}-\frac{b}{2a^2}\lg\frac{x^2}{X}$$

$$\int\frac{dx}{x^4X}=-\frac{1}{3ax^3}+\frac{b}{a^2x}+\frac{b^2}{a^2}U$$

$$\int\frac{dx}{x^5X}=-\frac{1}{4ax^4}+\frac{b}{2a^2x^2}+\frac{b^2}{2a^3}\lg\frac{x^2}{X}$$

$$\int\frac{dx}{x^mX}=-\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}}+\frac{b}{(m-3)a^2x^{m-3}}-\frac{b^2}{(m-5)a^3x^{m-5}}$$

$$+\cdots(-1)^{\frac{m}{2}}\frac{b^{\frac{m}{2}-1}}{a^mx}+(-1)^{\frac{m}{2}}\frac{b^{\frac{m}{2}}}{a^{\frac{m}{2}}}U,$$

wenn $m$ grade ist, und

$$\int\frac{dx}{x^mX}=-\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}}+\frac{b}{(m-3)a^2x^{m-3}}-\frac{b^2}{(m-5)a^3x^{m-5}}$$

$$+\cdots(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{b^{\frac{m-3}{2}}}{2a^{\frac{m-1}{2}}x^2}+(-1)^{\frac{m-1}{2}}\frac{b^{\frac{m-1}{2}}}{2a^{\frac{m+1}{2}}}\lg\frac{x^2}{X},$$

wenn $m$ ungrade ist.

$$15)\ \int\frac{dx}{x^m(a+bx^2)^2}.\quad \text{Sei } a+bx^2=X,\quad \int\frac{dx}{a+bx^2}=U.$$

$$\int\frac{dx}{xX^2}=\frac{1}{2aX}+\frac{1}{2a^2}\lg\frac{x^2}{X}$$

$$\int\frac{dx}{x^2X^2}=\left(-\frac{1}{ax}-\frac{3bx}{2a^2}\right)\frac{1}{X}-\frac{3b}{2a^2}U$$

$$\int\frac{dx}{x^3X^2}=\left(-\frac{1}{2ax^2}-\frac{b}{a^2}\right)\frac{1}{X}-\frac{b}{a^3}\lg\frac{x^2}{X}$$

$$\int\frac{dx}{x^4X^2}=\left(-\frac{1}{3ax^3}+\frac{5b}{3a^2x}+\frac{5b^2x}{2a^3}\right)\frac{1}{X}+\frac{5b^2}{2a^3}U$$

$$\int\frac{dx}{x^5X^2}=\left(-\frac{1}{4ax^4}+\frac{3b}{4a^2x^2}+\frac{3b^2}{2a^3}\right)\frac{1}{X}+\frac{3b^2}{2a^4}\lg\frac{x^2}{X}.$$

$$16)\ \int\frac{dx}{x^m(a+bx^2)^3}.\quad \text{Sei } a+bx^2=X,\quad \int\frac{dx}{a+bx^2}=U.$$

$$\int\frac{dx}{xX^3}=\left(\frac{3}{4a}+\frac{bx^2}{2a^2}\right)\frac{1}{X^2}+\frac{1}{2a^3}\lg\frac{x^2}{X}$$

$$\int\frac{dx}{x^2X^3}=\left(-\frac{1}{ax}-\frac{25bx}{8a^2}-\frac{15b^2x^3}{8a^3}\right)\frac{1}{X^2}-\frac{15b}{8a^3}U$$

$$\int\frac{dx}{x^3X^3}=\left(-\frac{1}{2ax^2}-\frac{9b}{4a^2}-\frac{3b^2x^2}{2a^3}\right)\frac{1}{X^2}-\frac{3b}{2a^4}\lg\frac{x^2}{X}$$

$$\int\frac{dx}{x^4X^3}=\left(-\frac{1}{3ax^3}+\frac{7b}{3a^2x}+\frac{175b^2x}{24a^3}+\frac{35b^3x^3}{8a^4}\right)\frac{1}{X^2}+\frac{35b^2}{8a^4}U$$

$$\int\frac{dx}{x^5X^3}=\left(-\frac{1}{4ax^4}+\frac{b}{a^2x^2}+\frac{9b^2}{2a^3}+\frac{3b^3x^2}{a^4}\right)\frac{1}{X^2}+\frac{3b^2}{a^5}\lg\frac{x^2}{X}.$$

17) $\int\frac{dx}{x^m(a+bx^2)^4}$. Sei $a+bx^2=X$, $\int\frac{dx}{a+bx^2}=U$.

$$\int\frac{dx}{xX^4}=\left(\frac{11}{12a}+\frac{5bx^2}{4a^2}+\frac{b^2x^4}{2a^3}\right)\frac{1}{X^3}+\frac{1}{2a^4}\lg\frac{x^2}{X}$$

$$\int\frac{dx}{x^2X^4}=\left(-\frac{1}{ax}-\frac{77bx}{16a^2}-\frac{35b^2x^3}{6a^3}-\frac{35b^3x^5}{16a^4}\right)\frac{1}{X^3}-\frac{35b}{16a^4}U$$

$$\int\frac{dx}{x^3X^4}=\left(-\frac{1}{2ax^2}-\frac{11b}{3a^2}-\frac{5b^2x^2}{a^3}-\frac{2b^3x^4}{a^4}\right)\frac{1}{X^3}-\frac{2b}{a^5}\lg\frac{x^2}{X}$$

$$\int\frac{dx}{x^4X^4}=\left(-\frac{1}{3ax^3}+\frac{3b}{a^2x}+\frac{231b^2x}{16a^3}+\frac{35b^3x^3}{2a^4}+\frac{105b^4x^5}{16a^5}\right)\frac{1}{X^3}+\frac{105b^2}{16a^5}U$$

$$\int\frac{dx}{x^5X^4}=\left(-\frac{1}{4ax^4}+\frac{5b}{4a^2x^2}+\frac{55b^2}{6a^3}+\frac{25b^3x^2}{2a^4}+\frac{5b^4x^4}{a^5}\right)\frac{1}{X^3}+\frac{5b^2}{a^6}\lg\frac{x^2}{X}.$$

Alle diese Formeln 1—17 ergeben sich leicht aus den Reductionsformeln Ic., IIc., IIIc., Id., IId., IIId. des Abschnittes 25.

18) $\int\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^n}$. Sei $a+bx+cx^2=X$ und $4ac-b^2=k$,

$$\int\frac{dx}{X}=U.$$

a) Ist $k$ positiv, so hat man:

$$U=\frac{2}{\sqrt{k}}\operatorname{arctg}\frac{2cx+b}{\sqrt{k}},$$

b) ist $k$ negativ, so ist:

$$U=\frac{2}{\sqrt{-k}}\lg\frac{2cx+b-\sqrt{-k}}{2\sqrt{c}X}.$$

$$\int\frac{dx}{X}=U$$

$$\int\frac{dx}{X^2}=\frac{2cx+b}{kX}+\frac{2c}{k}U$$

$$\int\frac{dx}{X^3}=\left(\frac{1}{2kX^2}+\frac{3c}{k^2X}\right)(2cx+b)+\frac{6c^2}{k^2}U$$

$$\int\frac{dx}{X^4}=\left(\frac{1}{3kX^3}+\frac{5c}{3k^2X^2}+\frac{10c^2}{k^3X}\right)(2cx+b)+\frac{20c^3}{k^3}U$$

$$\int\frac{dx}{X^5}=\left(\frac{1}{4kX^4}+\frac{7c}{6k^2X^3}+\frac{35c^2}{6k^3X^2}+\frac{35c^3}{k^4X}\right)(2cx+b)+\frac{70c^4}{k^4}U$$

$$\int\frac{dx}{X^6}=\left(\frac{1}{5kX^5}+\frac{9c}{10k^2X^4}+\frac{21c^2}{5k^3X^3}+\frac{21c^3}{k^4X^2}+\frac{126c^4}{k^5X}\right)(2cx+b)+\frac{252c^5}{k^5}U.$$

19) $\int \frac{x^m dx}{a+bx+cx^2}$. Sei $a+bx+cx^2 = X$, $\int \frac{dx}{X} = U$.

$$\int \frac{x dx}{X} = \frac{1}{2c} \lg X - \frac{b}{2c} U$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{x}{c} - \frac{b}{2c^2} \lg X + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c}\right) U$$

$$\int \frac{x^3 dx}{X} = \frac{x^2}{2c} - \frac{bx}{c^2} + \left(\frac{b^2}{2c^3} - \frac{a}{2c^2}\right) \lg X - \left(\frac{b^3}{2c^3} - \frac{3ab}{2c^2}\right) U$$

$$\int \frac{x^4 dx}{X} = \frac{x^3}{3c} - \frac{bx^2}{2c^2} + \left(\frac{b^2}{c^3} - \frac{a}{c^2}\right) x - \left(\frac{b^3}{2c^4} - \frac{ab}{c^3}\right) \lg X + \left(\frac{b^4}{2c^4} - \frac{2ab^2}{c^3} + \frac{a^2}{c^2}\right) U$$

$$\int \frac{x^5 dx}{X} = \frac{x^4}{4c} - \frac{x^3}{3c^2} + \frac{(b^2-ac)}{2c^3} x^2 - \frac{1}{c^4}(b^3 - 2abc) x + \frac{1}{c^3}\left(\frac{b^4}{2} - 2ab^2c + a^2c^2\right) \lg X$$
$$- \left(\frac{b^5}{2c^5} - \frac{2ab^3}{c^4} + \frac{a^2 b}{c^3}\right) U.$$

20) $\int \frac{x^m dx}{(a+bx+cx^2)^2}$. Sei $a+bx+cx^2 = X$, $4ac-b^2 = k$, $\int \frac{dx}{X} = U$.

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{2cx+b}{kX} + \frac{2c}{k} U$$

$$\int \frac{x dx}{X^2} = -\frac{1}{2cX} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^2}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^2} = -\frac{x}{cX} + \frac{a}{c} \int \frac{dx}{X^2}$$

$$\int \frac{x^3 dx}{X^2} = \left(\frac{bx}{c^2} + \frac{a}{2c^3}\right) \frac{1}{X} + \frac{1}{2c^2} \lg X - \frac{ab}{2c^2} \int \frac{dx}{X^2} - \frac{b}{2c^3} U$$

$$\int \frac{x^4 dx}{X^2} = \frac{x^3}{cX} - \frac{2b}{c} \int \frac{x^3 dx}{X^2} - \frac{3a}{c} \int \frac{x^2 dx}{X^2}$$

$$\int \frac{x^5 dx}{X^2} = \left(\frac{x^4}{2c} - \frac{3bx^3}{2c^2}\right) \frac{1}{X} + \left(\frac{3b^2}{c^2} - \frac{2a}{c}\right) \int \frac{x^3 dx}{X^2} + \frac{9ab}{2c^2} \int \frac{x^2 dx}{X^2}.$$

21) $\int \frac{x^m dx}{(a+bx+cx^2)^3}$. Sei $a+bx+cx^2 = X$, $4ac-b^2 = k$, $\int \frac{dx}{X} = U$.

$$\int \frac{dx}{X^3} = \left(\frac{1}{2kX^2} + \frac{3c}{k^2 X}\right)(2cx+b) + \frac{6c^2}{k^2} U$$

$$\int \frac{x dx}{X^3} = -\frac{1}{4cX^2} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^3}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X^3} = \left(-\frac{x}{3c} + \frac{b}{12c^2}\right) \frac{1}{X^2} + \left(\frac{b^2}{6c^2} + \frac{a}{3c}\right) \int \frac{dx}{X^3}$$

$$\int \frac{x^3 dx}{X^3} = \left(-\frac{x^2}{2c} - \frac{a}{4c^2}\right) \frac{1}{X^2} - \frac{ab}{2c^2} \int \frac{dx}{X^3}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{X^3} = \left(-\frac{x^3}{c} - \frac{bx^2}{2c^2} - \frac{ax}{c^2}\right) \frac{1}{X^2} + \frac{a^2}{c^2} \int \frac{dx}{X^3}$$

$$\int \frac{x^5 dx}{X^3} = \frac{1}{c} \int \frac{x^3 dx}{X^2} - \frac{a}{c} \int \frac{x^3 dx}{X^3} - \frac{b}{c} \int \frac{x^4 dx}{X^3}.$$

22) $\int \frac{x^m dx}{(a+bx+cx^2)^4}$. Sei $a+bx+cx^2 = X$, $4ac-b^2 = k$, $\int \frac{dx}{X} = U$.

$$\int \frac{dx}{X^4} = \left(\frac{1}{3k X^3} + \frac{5c}{3k^2 X^2} + \frac{10c^2}{k^3 X}\right)(2cx+b) + \frac{20c^3}{k^3} U$$

$$\int \frac{xdx}{X^4} = -\frac{1}{6c X^3} + \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{X^4}$$

$$\int \frac{x^2dx}{X^4} = \left(-\frac{x}{5c} + \frac{b}{15c^2}\right) \frac{1}{X^3} + \left(\frac{b^2}{5c^2} + \frac{a}{5c}\right) \int \frac{dx}{X^4}$$

$$\int \frac{x^3dx}{X^4} = \left[-\frac{X^2}{4c} + \frac{bx}{20c^2} - \left(\frac{b^2}{60c^3} + \frac{a}{12c^2}\right)\right] \frac{1}{X^3} - \left(\frac{b^3}{20c^3} + \frac{3ab}{10c^2}\right) \int \frac{dx}{X^4}$$

$$\int \frac{x^4dx}{X^4} = \left(-\frac{x^3}{3c} - \frac{ax}{5c^2} + \frac{ab}{15c^3}\right) \frac{1}{X^3} + \left(\frac{ab^2}{5c^3} + \frac{a^2}{5c^2}\right) \int \frac{dx}{X^4}$$

$$\int \frac{x^5dx}{X^4} = \left(-\frac{x^4}{2c} - \frac{bx^3}{6c^2} - \frac{ax^2}{2c^2} - \frac{a^2}{6c^3}\right) \frac{1}{X^3} - \frac{a^2b}{2c^3} \int \frac{dx}{X^4}.$$

23) $\int \frac{dx}{x^m(a+bx+cx^2)}$. Sei $a+bx+cx^2 = X$, $\int \frac{dx}{X} = U$.

$$\int \frac{dx}{xX} = \frac{1}{2a} \lg \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a} U$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{2a^2} \lg \frac{x^2}{X} + \left(\frac{b^2}{2a^2} - \frac{c}{a}\right) U$$

$$\int \frac{dx}{x^3 X} = -\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{a^2 x} + \left(\frac{b^2}{2a^3} - \frac{c}{2a^2}\right) \lg \frac{x^2}{X} - \left(\frac{b^3}{2a^3} - \frac{3bc}{2a^2}\right) U$$

$$\int \frac{dx}{x^4 X} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{2a^2 x^2} - \left(\frac{b^2}{a^3} - \frac{c}{a^2}\right) \frac{1}{x} - \left(\frac{b^3}{2a^4} - \frac{bc}{a^3}\right) \lg \frac{x^2}{X}$$
$$+ \left(\frac{b^4}{2a^4} - \frac{2b^2c}{a^3} + \frac{c^2}{a^2}\right) U$$

$$\int \frac{dx}{x^5 X} = -\frac{1}{4ax^4} - \frac{b}{a} \int \frac{dx}{x^4 X} - \frac{c}{a} \int \frac{dx}{x^3 X}.$$

24) $\int \frac{dx}{x^m(a+bx+cx^2)^2}$. Sei $a+bx+cx^2 = X$, $\int \frac{dx}{X} = U$.

$$\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{2aX} + \frac{1}{2a^2} \lg \frac{x^2}{X} - \frac{b}{2a} \int \frac{dx}{X^2} - \frac{b}{2a^2} U$$

$$\int \frac{dx}{x^2 X^2} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{b}{a^2}\right) \frac{1}{X} - \frac{b}{a^3} \lg \frac{x^2}{X} + \left(\frac{b^2}{a^2} - \frac{3c}{a}\right) \int \frac{dx}{X^2} + \frac{b^2}{a^3} U$$

$$\int \frac{dx}{x^3 X^2} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{2a^2 x} + \frac{3b^2}{2a^3} - \frac{c}{a^2}\right) \frac{1}{X} + \left(\frac{3b^2}{2a^4} - \frac{c}{a^3}\right) \lg \frac{x^2}{X}$$
$$- \left(\frac{3b^3}{2a^3} - \frac{11bc}{2a^2}\right) \int \frac{dx}{X^2} - \left(\frac{3b^3}{2a^4} - \frac{bc}{a^3}\right) U$$

$$\int \frac{dx}{x^4 X^2} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{2b}{3a^2 x^2} - \left(\frac{2b^2}{a^3} - \frac{5c}{3a}\right) \frac{1}{x} - \frac{2b^3}{a^4} + \frac{3bc}{a^3}\right] \frac{1}{X}$$
$$- \left(\frac{2b^3}{a^5} - \frac{3bc}{a^4}\right) \lg \frac{x^2}{X} + \left(\frac{2b^4}{a^4} - \frac{9b^2c}{a^3} + \frac{5c^2}{a^2}\right) \int \frac{dx}{X^2} + \left(\frac{2b^4}{a^5} - \frac{3b^2c}{a^4}\right) U$$

$$\int \frac{dx}{x^5 X^2} = -\frac{1}{4ax^4 X} - \frac{5b}{4a} \int \frac{dx}{x^4 X^2} - \frac{3c}{2a} \int \frac{dx}{x^3 X^2}.$$

$$25)\int\frac{dx}{x^m(a+bx+cx^2)^3}.\quad \text{Sei } a+bx+cx^2=X,\ \int\frac{dx}{X}=U.$$

$$\int\frac{dx}{xX^3}=\frac{1}{4aX^2}+\frac{1}{2a^2X}+\frac{1}{2a^3}\lg\frac{x^2}{X}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X^3}-\frac{b}{2a^2}\int\frac{dx}{X^2}-\frac{b}{2a^3}U$$

$$\int\frac{dx}{x^2X^3}=-\frac{1}{axX^2}-\frac{3b}{a}\int\frac{dx}{xX^3}-\frac{5c}{a}\int\frac{dx}{X^3}$$

$$\int\frac{dx}{x^3X^3}=\left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{2b}{a^2x}\right)\frac{1}{X^2}+\left(\frac{6b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right)\int\frac{dx}{xX^3}+\frac{10bc}{a^2}\int\frac{dx}{X^3}$$

$$\int\frac{dx}{x^4X^3}=\left[-\frac{1}{3ax^3}+\frac{5b}{6a^2x^2}-\left(\frac{10b^2}{3a^3}-\frac{7c}{3a^2}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^2}-\left(\frac{10b^3}{a^3}-\frac{12bc}{a^2}\right)\int\frac{dx}{xX^3}$$
$$-\left(\frac{50b^2c}{3a^3}-\frac{35c^2}{3a^2}\right)\int\frac{dx}{X^3}$$

$$\int\frac{dx}{x^5X^3}=-\frac{1}{4ax^4X^2}-\frac{3b}{2a}\int\frac{dx}{x^4X^3}-\frac{2c}{a}\int\frac{dx}{x^3X^3}.$$

$$26)\int\frac{dx}{x^m(a+bx+cx^2)^4}.\quad \text{Sei } a+bx+cx^2=X,\ \int\frac{dx}{X}=U.$$

$$\int\frac{dx}{xX^4}=\frac{1}{6aX^3}+\frac{1}{4a^2X^2}+\frac{1}{2a^3X}+\frac{1}{2a^4}\lg\frac{x^2}{X}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X^4}-\frac{b}{2a^2}\int\frac{dx}{X^3}$$
$$\frac{b}{2a^3}\int\frac{dx}{X^2}-\frac{b}{2a^4}U$$

$$\int\frac{dx}{x^2X^4}=-\frac{1}{axX^3}-\frac{4b}{a}\int\frac{dx}{xX^4}-\frac{7c}{a}\int\frac{dx}{X^4}$$

$$\int\frac{dx}{x^3X^4}=\left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{5b}{2a^2x}\right)\frac{1}{X^3}+\left(\frac{10b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}\right)\int\frac{dx}{xX^4}+\frac{35bc}{2a^2}\int\frac{dx}{X^4}$$

$$\int\frac{dx}{x^4X^4}=\left[-\frac{1}{3ax^3}+\frac{b}{a^2x^2}-\left(\frac{5b^2}{a^3}-\frac{3c}{a^2}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X^3}-\left(\frac{20b^3}{a^3}-\frac{20bc}{a^2}\right)\int\frac{dx}{xX^4}$$
$$-\left(\frac{35b^2c}{a^3}-\frac{21c^2}{a^2}\right)\int\frac{dx}{xX^4}$$

$$\int\frac{dx}{x^5X^4}=-\frac{1}{4ax^4X^3}-\frac{7b}{4a}\int\frac{dx}{x^4X^4}-\frac{5c}{2a}\int\frac{dx}{x^3X^4}.$$

Die Tafeln 18 bis 26 lassen sich auch aus den Rednctionsformeln des Abschnitts 25 herleiten, wenn man vorher:

$$a+bx+cx^2=c\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2+a-\frac{b^2}{4c}=cy^2+a-\frac{b^2}{4c}$$

setzt, wo

$$y=x+\frac{b}{2c},$$
$$x=y-\frac{b}{2c},$$
$$dx=dy$$

zu setzen ist.

Man erhält aber auch direct aus der Formel:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

durch entsprechende Wahl der Grössen $u$ und $v$, und wenn man

$$a + bx^n + cx^{2n} = X$$

setzt:

$$\int x^{m-1}\,dx\,X^p = \frac{x^m X^p}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}\,dx\,X^{p-1} - \frac{2pnc}{m}\int x^{m+2n-1}\,dx\,X^{p-1}$$

$$\int x^{m-1}\,dx\,X^p = \frac{x^{m-2n} X^{p+1}}{(m+2pn)c} - \frac{(m-2n)a}{(m+2pn)c}\int x^{m-2n-1}\,dx\,X^p - \frac{(m-n+pn)b}{(m+2pn)c}\int x^{m-n-1}\,dx\,X^p$$

$$\int x^{m-1}\,dx\,X^p = \frac{x^m X^p}{m+2pn} + \frac{2pna}{m+2pn}\int x^{m-1}\,dx\,X^{p-1} + \frac{pnb}{m+2pn}\int x^{m+n-1}\,dx\,X^{p-1}$$

$$\int x^{m-1}\,dx\,X^p = \frac{x^m X^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+pn)b}{ma}\int x^{m+n-1}\,dx\,X^p - \frac{(m+2n+2pn)c}{ma}\int x^{m+2n-1}\,dx\,X^p$$

$$\int x^{m-1}\,dx\,X^p = \frac{(2ac-b^2)x^m - bcx^{m+n}}{(p+1)(b^2-4ac)na}\,X^{p+1} + \frac{1}{(p+1)(b^2-4ac)na}\int\Big[\big\{n(p+1)(b^2-4ac) - m(2ac-b^2)\big\}\,x^{m-1} + bc(2pn+3n+m)x^{m+n-1}\Big]dx\,X^{p+1}.$$

Aus welchen Formeln sich leicht die hier entwickelten ergeben, wenn man $n=1$ setzt.

27) $\int \frac{x^m dx}{a+bx^3}$. Sei $a+bx^3 = X$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = k$.

$$\int \frac{dx}{X} = \frac{1}{3bk^2}\left(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(x+k)^2}{x^2-xk+k^2} + \sqrt{3}\ \mathrm{arc\,tg}\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}\right)$$

$$\int \frac{x\,dx}{X} = -\frac{1}{3bk}\left(\tfrac{1}{2}\lg\frac{(x+k)^2}{x^2-xk+k^2} - \sqrt{3}\ \mathrm{arc\,tg}\frac{x\sqrt{3}}{2k-x}\right)$$

$$\int \frac{x^2 dx}{X} = \frac{1}{3b}\lg X$$

$$\int \frac{x^3 dx}{X} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int\frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{X} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{b}\int\frac{x\,dx}{X}$$

$$\int \frac{x^5 dx}{X} = \frac{x^3}{3b} - \frac{a}{3b^2}\lg X.$$

28) $\int \frac{x^m dx}{(a+bx^3)^2}$. Sei $a+bx^3 = X$.

$$\int \frac{dx}{X^2} = \frac{x}{3aX} + \frac{2}{3a}\int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x\,dx}{X^2} = \frac{x^2}{3aX} + \frac{1}{3a}\int \frac{x\,dx}{X}$$

$$\int \frac{x^2dx}{X^2} = -\frac{1}{3b}X$$

$$\int \frac{x^3dx}{X^2} = -\frac{x}{3bX} + \frac{1}{3b}\int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{x^4dx}{X^2} = -\frac{x^2}{3bX} + \frac{2}{3b}\int \frac{x\,dx}{X}$$

$$\int \frac{x^5dx}{X^2} = \frac{a}{3b^2X} + \frac{2}{3b^2}\lg X.$$

29) $\int \frac{dx}{x^m(a+bx^3)}$. Sei $a+bx^3 = X$.

$$\int \frac{dx}{xX} = \frac{\lg x}{a} - \frac{\lg X}{3a} = \frac{1}{3a}\lg\frac{x^3}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^2X} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{x\,dx}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^3X} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^4X} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{3a^2}\lg\frac{X}{x^3}$$

$$\int \frac{dx}{x^5X} = -\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{a^2x} + \frac{b^2}{a^2}\int \frac{x\,dx}{X}.$$

30) $\int \frac{dx}{x^m(a+bx^3)^2}$. Sei $a+bx^3 = X$.

$$\int \frac{dx}{xX^2} = \frac{1}{3ax} - \frac{1}{3a^2}\lg\frac{X}{x^3}$$

$$\int \frac{dx}{x^2X^2} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{4bx^2}{3a^2}\right)\frac{1}{X} - \frac{4b}{3a^2}\int \frac{x\,dx}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^3X^2} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{5bx}{6a^2}\right)\frac{1}{X} - \frac{5b}{3a^2}\int \frac{dx}{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^4X^2} = \left(-\frac{1}{3ax^3} - \frac{2b}{3a^2}\right)\frac{1}{X} + \frac{2b}{3a^3}\lg\frac{X}{x^3}$$

$$\int \frac{dx}{x^5X^2} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{7b}{4a^2x} + \frac{7b^2x^2}{3a^3}\right)\frac{1}{X} + \frac{7b^2}{3a^3}\int \frac{x\,dx}{X}.$$

$$31) \int \frac{dx.\ x^m}{X}.$$

Es ist $X$ ein Product von einfachen oder quadratischen Factoren.

$$\int \frac{dx}{(x+\alpha)(x+\beta)} = \frac{1}{\beta-\alpha} \lg \frac{x+\alpha}{x+\beta}$$

$$\int \frac{xdx}{(x+\alpha)(x+\beta)} = \frac{1}{\beta-\alpha} [\beta \lg (x+\beta) - \alpha \lg (x+\alpha)]$$

$$\int \frac{dx}{(x+\alpha)(x+\beta)^2} = \frac{1}{(\beta-\alpha)(x+\beta)} + \frac{1}{(\beta-\alpha)^2} \lg \frac{x+\alpha}{x+\beta}$$

$$\int \frac{xdx}{(x+\alpha)(x+\beta)^2} = \frac{-\beta}{(\beta-\alpha)(x+\alpha)} + \frac{\alpha}{(\beta-\alpha)^2} \lg \frac{x+\alpha}{x+\beta}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x+\alpha)(x+\beta)^2} = \frac{-\beta^2}{(\beta-\alpha)(x+\alpha)} + \frac{\alpha^2}{(\beta-\alpha)^2} \lg (x+\alpha) + \frac{\beta^2-2\alpha\beta}{(\beta-\alpha)^2} \lg (x+\beta)$$

$$\int \frac{dx}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2} = \frac{-1}{(\beta-\alpha)^2} \left(\frac{1}{x+\alpha} + \frac{1}{x+\beta}\right) - \frac{2}{(\beta-\alpha)^3} \lg \frac{x+\alpha}{x+\beta}$$

$$\int \frac{xdx}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2} = \frac{1}{(\beta-\alpha)^2} \left(\frac{\alpha}{x+\alpha} + \frac{\beta}{x+\beta}\right) + \frac{\alpha+\beta}{(\beta-\alpha)^3} \lg \frac{x+\alpha}{x+\beta}$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2} = \frac{-1}{(\beta-\alpha)^2} \left(\frac{\alpha^2}{x+\alpha} + \frac{\beta^2}{x+\beta}\right) - \frac{2\alpha\beta}{(\beta-\alpha)^3} \lg \frac{x+\alpha}{x+\beta}$$

$$\int \frac{x^3dx}{(x+\alpha)^2(x+\beta)^2} = \frac{1}{(\beta-\alpha)^2} \left(\frac{\alpha^3}{x+\alpha} + \frac{\beta^3}{x+\beta}\right) + \frac{\alpha^2(3\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)^3} \lg (x+\alpha)$$
$$+ \frac{\beta^2(\beta-3\alpha)}{(\beta-\alpha)^3} \lg (x+\beta)$$

$$\int \frac{dx}{(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)} = \frac{1}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} \lg (x+\alpha) + \frac{1}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} \lg (x+\beta)$$
$$+ \frac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} \lg (x+\gamma)$$

$$\int \frac{xdx}{(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)} = -\frac{\alpha}{(\beta-\alpha)(\gamma-\beta)} \lg(x+\alpha) - \frac{\beta}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} \lg (x+\beta)$$
$$- \frac{\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} \lg (x+\gamma)$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x+\alpha)(x+\beta)(x+\gamma)} = \frac{\alpha^2}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)} \lg (x+\alpha) + \frac{\beta^2}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)} \lg (x+\beta)$$
$$+ \frac{\gamma^2}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)} \lg (x+\gamma)$$

$$\int \frac{dx}{(x+\lambda)(x^2+ax+b)} = \frac{1}{\lambda^2-a\lambda+b} \left[\tfrac{1}{2} \lg \frac{(x+\lambda)^2}{x^2+ax+b} + (\lambda-\tfrac{1}{2}a) \int \frac{dx}{x^2+ax+b}\right]$$

$$\int \frac{xdx}{(x+\lambda)(x^2+ax+b)} = -\frac{1}{\lambda^2-a\lambda+b}\left[-\tfrac{1}{2}\lambda \lg \frac{(x+\lambda)^2}{x^2+ax+b} + (b-\tfrac{1}{2}a\lambda) \int \frac{dx}{x^2+ax+b}\right]$$

$$\int \frac{x^2dx}{(x+\lambda)(x^2+ax+b)} = \frac{1}{\lambda^2-a\lambda+b}\left[\lambda^2 \lg (x+\lambda) + \tfrac{1}{2}(b-a\lambda) \lg (x^2+ax+b)\right.$$
$$\left. + \tfrac{1}{2}(a^2\lambda-ab-2b\lambda) \int \frac{dx}{x^2+ax+b}\right]$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+a)(x^2+b)} = \frac{1}{b-a}\left[\int \frac{dx}{x^2+a} - \int \frac{dx}{x^2+b}\right]$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2+a)(x^2+b)} = \frac{1}{2(b-a)} \lg \frac{x^2+a}{x^2+b}$$

$$\int\frac{x^2dx}{(x^2+a)(x^2+b)}=\frac{1}{a-b}\left[a\int\frac{dx}{x^2+a}-b\int\frac{dx}{x^2+b}\right]$$

$$\int\frac{dx}{(x+\lambda)^2(x^2+a)}=\frac{1}{(\lambda^2+a)^2}\left[\lambda\lg\frac{(x+\lambda)^2}{x^2+a}+(\lambda^2-a)\int\frac{dx}{x^2+a}\right]-\frac{1}{(\lambda^2+a)(x+\lambda)}$$

$$\int\frac{xdx}{(x+\lambda)^2(x^2+a)}=\frac{1}{(\lambda^2+a)^2}\left[\frac{a-\lambda^2}{2}\lg\frac{(x+\lambda)^2}{x^2+a}+2a\lambda\int\frac{dx}{x^2+a}\right]+\frac{\lambda}{(\lambda^2+a)(x+\lambda)}$$

$$\int\frac{x^2dx}{(x+\lambda)^2(x^2+a)}=\frac{1}{(\lambda^2+a)^2}\left[-a\lambda\lg\frac{(x+\lambda)^2}{x^2+a}-a(\lambda^2-a)\int\frac{dx}{x^2+a}\right]$$

$$-\frac{\lambda^2}{(\lambda^2+a)(x+\lambda)}$$

$$\int\frac{x^3dx}{(x+\lambda)^2(x^2+a)}=\frac{\lambda^2(\lambda^2+3a)}{(\lambda^2+a)^2}\lg(x+\lambda)-\frac{a(\lambda^2-a)}{2(\lambda^2+a)^2}\lg(x^2+a)$$

$$-\frac{2a^2\lambda}{(\lambda^2+a)^2}\int\frac{dx}{x^2+a}+\frac{\lambda^3}{(\lambda^2+a)(x+\lambda)}$$

Allgemeinere Formeln.

32) $a+bx=X$.

$$\int\frac{dx}{X^n}=-\frac{1}{(n-1)bX^{n-1}}$$

$$\int\frac{x^m dx}{X}=\frac{x^m}{mb}-\frac{ax^{m-1}}{(m-1)b^2}+\frac{a^2x^{m-2}}{(m-2)b^3}-\frac{a^3x^{m-3}}{(m-3)b^4}$$

$$+\cdots(-1)^n\frac{a^{n-1}x^{m-n+1}}{(m-n+1)b^n}(-1)^{n+1}\frac{a^n}{b^n}\int\frac{x^{m-n}ax}{X}$$

$$\int\frac{x^m dx}{X^2}=(A_0x^m-A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}\cdots\cdots(-1)^{n-2}A_{n-2}x^{m-n+2}$$

$$(-1)^{n-1}A_{n-1}x^{m-n+1})\frac{1}{X}(-1)^n A_n(m-n+1)a\int\frac{x^{m-n}dx}{X}$$

Es ist hier zu setzen:

$$A_s=\frac{m-s+1}{m-s-1}A_{s-1}\quad\text{und}\quad A_2=\frac{1}{(m-1)b}$$

$$\int\frac{x^m dx}{X^3}=\Big[A_0x^m-A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}-A_3x^{m-3}+\cdots$$

$$(-1)^{n-2}A_{n-2}x^{m-n+2}(-1)^{n-1}A_{n-1}x^{m-n+1}\Big]\frac{1}{X^2}$$

$$(-1)^n A_{n-1}(m-n+1)a\int\frac{x^{m-n}dx}{X^3},$$

wo $A_s=\frac{m-s+1}{m-s-2}\frac{a}{b}A_{s-1}$, $A_0=\frac{1}{(m-2)b}$.

$$\int\frac{x^m dx}{X^4}=\Big[A_0x^m-A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}-A_3x^{m-3}+\cdots$$

$$(-1)^{n-2}A_{n-2}x^{m-n+2}(-1)^{n-1}A_{n-1}x^{m-n+1}\Big]\frac{1}{X^3}$$

$$(-1)^n A_{n-1}(m-n+1)a\int\frac{x^{m-n}dx}{X^4},$$

$$\text{wo } A_s = \frac{m-s+1}{m-s-3}\frac{a}{b}A_{s-1},\ A_0 = \frac{1}{(m-3)b}.$$

. . . . . . . . . . . . . . .

. . . . . . . . . . . . . . .

$$\int\frac{x^m\,dx}{X^p} = \Big[A_0 x^m - A_1 x^{m-1} + A_2 x^{m-2} - A_3 x^{m-3} + \cdots$$

$$(-1)^{n-2}A_{n-2}x^{m-n+2}(-1)^{n-1}A_{n-1}x^{m-n+1}\Big]\frac{1}{X^{p-1}}$$

$$(-1)^n A_{n-1}(m-n+1)a\int\frac{x^{m-n}dx}{X^p},$$

$$\text{wo } A_s = \frac{m-s+1}{m-s-p+1},\quad A_0 = \frac{1}{(m-p+1)b}.$$

$$\int\frac{dx}{x^m X} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}} + \frac{b}{(m-2)a^2x^{m-2}} - \frac{b^2}{(m-3)a^3x^{m-3}} + \frac{b^3}{(m-4)a^4x^{m-4}}$$

$$+ \cdots (-1)^{m-1}\frac{b^{m-2}}{a^{m-1}x}(-1)^m\frac{b^{m-1}}{a^m}\lg\frac{X}{x}$$

$$\int\frac{dx}{x^m X^2} = \Big[\frac{A_1}{x^{m-1}} - \frac{A_2}{x^{m-2}} + \frac{A_3}{x^{m-3}} - \frac{A_4}{x^{m-4}} + \cdots$$

$$(-1)^n\frac{A_{n-1}}{x^{m-n+1}}(-1)^{n+1}\frac{A_n}{x^{m-n}}\Big]\frac{1}{X}(-1)^{n+1}A_n(m-n+1)b\int\frac{dx}{x^{m-n}X^2},$$

$$\text{wo } A_s = \frac{m-s+2}{m-s}\frac{b}{a}A_{s-1},\ A_1 = -\frac{1}{(m-1)a}.$$

$$\int\frac{dx}{x^m X^3} = \Big[\frac{A_1}{x^{m-1}} - \frac{A_2}{x^{m-2}} + \frac{A_3}{x^{m-3}} - \frac{A_4}{x^{m-4}} + \cdots$$

$$(-1)^n\frac{A_{n-1}}{x^{m-n+1}}(-1)^{n+1}\frac{A_n}{x^{m-n}}\Big]\frac{1}{X^2}(-1)^{n+1}A_n(m-n+2)b\int\frac{dx}{x^{m-n}X^3},$$

$$\text{wo } A_s = \frac{m-s+3}{m-s}\frac{b}{a}A_{s-1},\ A_1 = -\frac{1}{(m-1)a}.$$

$$\int\frac{dx}{x^m X^4} = \Big[\frac{A_1}{x^{m-1}} - \frac{A_2}{x^{m-2}} + \frac{A_3}{x^{m-3}} - \frac{A_4}{x^{m-4}} + \cdots$$

$$(-1)^n\frac{A_{n-1}}{x^{m-n+1}}(-1)^{n+1}\frac{A_n}{x^{m-n}}\Big]\frac{1}{X^3}(-1)^{n+1}A_n(m-n+3)b\int\frac{dx}{x^{m-n}X^4},$$

$$\text{wo } A_s = \frac{m-s+4}{m-s}\frac{b}{a}A_{s-1},\ A_1 = -\frac{1}{(m-1)a}.$$

$$\int\frac{dx}{x^m X^p} = \Big[\frac{A_1}{x^{m-1}} - \frac{A_2}{x^{m-2}} + \frac{A_3}{x^{m-3}} - \frac{A_4}{x^{m-4}} + \cdots$$

$$(-1)^n\frac{A_{n-1}}{x^{m-n+1}}(-1)^{n+1}\frac{A_n}{x^{m-n}}\Big]\frac{1}{X^{p-1}}(-1)^{n+1}A_n(m-n+p-1)b\int\frac{dx}{x^{m-n}X^p},$$

$$\text{wo } A_s = \frac{m-s+p}{m-s}\frac{b}{a}A_{s-1},\quad A_1 = -\frac{1}{m-1)a}.$$

33) $a + bx^2 = X.$

$$\int \frac{dx}{X^p} = \Big[\frac{A_1}{X^{p-1}} + \frac{A_2}{X^{p-2}} + \frac{A_3}{X^{p-3}} + \frac{A_4}{X^{p-4}} + \cdots$$

$$+ \frac{A_{n-1}}{X^{p-n+1}} + \frac{A_n}{X^{p-n}}\Big] x + A_n(p-2n+1) \int \frac{dx}{X^{p-n}},$$

wo $A_s = \frac{2p-2s+1}{(p-s)2a} A_{s-1}$, $A_1 = \frac{1}{(p-1)2a}$.

$$\int \frac{x^m\,dx}{X} = A_1 x^{m-1} - A_3 x^{m-3} + A_5 x^{m-5} - A_7 x^{m-7} + \cdots$$

$$(-1)^{n-2} A_{2n-3} x^{m-2n+3} (-1)^{n-1} A_{2n-1} x^{m-2n+1}$$

$$(-1)^n A_{2n-1}(m-2n+1) a \int \frac{x^{m-2n}\,dx}{X},$$

wo $A_{2s-1} = \frac{(m-2s+3)\,a}{(m-2s+1)\,b} A_{2s-3}$, $A_1 = \frac{1}{(m-1)b}$.

$$\int \frac{x^m\,dx}{X^2} = \Big[A_1 x^{m-1} - A_3 x^{m-3} + A_5 x^{m-5} - A_7 x^{m-7} + \cdots$$

$$(-1)^{n-2} A_{2n-3} x^{m-2n+3} (-1)^{n-1} A_{2n-1} x^{m-2n+1}\Big] \frac{1}{X}$$

$$(-1)^n A_{2n-1}(m-2n+1) a \int \frac{x^{m-2n}\,dx}{X^2},$$

wo $A_{2s-1} = \frac{(m-2s+3)\,a}{(m-2s-1)\,b} A_{2s-3}$, $A_1 = \frac{1}{(m-3)b}$.

$$\int \frac{x^m\,dx}{X^p} = \Big[A_1 x^{m-1} - A_3 x^{m-3} + A_5 x^{m-5} - A_7 x^{m-7} + \cdots$$

$$(-1)^{n-2} A_{2n-3} x^{m-2n+3} (-1)^{n-1} x^{m-2n+1}\Big] \frac{1}{X^{p-1}}$$

$$(-1)^n A_{2n-1}(m-2n+1) a \int \frac{x^{m-2n}\,dx}{X^p},$$

wo $A_{2s-1} = \frac{m-2s+3}{m-2s+3-2p} A_{2s-3}$, $A_1 = \frac{1}{(m+1-2p)b}$.

$$\int \frac{dx}{x^m X} = \frac{A_1}{x^{m-1}} - \frac{A_3}{x^{m-3}} + \frac{A_5}{x^{m-5}} - \frac{A_7}{x^{m-7}} + \cdots$$

$$(-1)^{n-2} \frac{A_{2n-3}}{x^{m-2n+3}} (-1)^{n-1} \frac{A_{2n-1}}{x^{m-2n+1}} (-1)^n A_{2n-1}(m-2n+1) b \int \frac{1}{x^{m-2n} X},$$

wo $A_{2n-1} = \frac{m-2n+3}{m-2n+1} \frac{b}{a} A_{2n-3}$, $A_1 = -\frac{1}{(m-1)a}$.

$$\int \frac{dx}{x^m X^2} = \Big[ \frac{A_1}{x^{m-1}} - \frac{A_3}{x^{m-3}} + \frac{A_5}{x^{m-5}} - \frac{A_7}{x^{m-7}} + \cdots$$

$$(-1)^{n-2} \frac{A_{2n-3}}{x^{m-2n+3}} (-1)^{n-1} \frac{A_{2n-1}}{x^{m-2n+1}} \Big] \frac{1}{X}$$

$$(-1)^n A_{2n-1} (m-2n+3) b \int \frac{dx}{x^{m-2n} X^2},$$

wo $A_{2s-1} = \frac{m-2s+5}{m-2s+1} \frac{b}{a} A_{2s-3}$, $A_1 = -\frac{1}{(m-1)a}$.

$$\int \frac{dx}{x^m X^3} = \Big[ \frac{A_1}{x^{m-1}} - \frac{A_3}{x^{m-3}} + \frac{A_5}{x^{m-5}} - \frac{A_7}{x^{m-7}} + \cdots$$

$$(-1)^{n-2} \frac{A_{2n-3}}{x^{m-2n+3}} (-1)^{n-1} \frac{A_{2n-1}}{x^{m-2n+1}} \Big] \frac{1}{X^2}$$

$$(-1)^n (m-2n+5) b \int \frac{dx}{x^{m-2n} X^3},$$

wo $A_{2s-1} = \frac{m-2s+7}{m-2s+1} \frac{b}{a} A_{2s-3}$, $A_1 = \frac{-1}{(m-1)a}$.

$$\int \frac{dx}{x^m X^p} = \Big[ \frac{A_1}{x^{m-1}} - \frac{A_3}{x^{m-3}} + \frac{A_5}{x^{m-5}} - \frac{A_7}{x^{m-7}} + \cdots$$

$$(-1)^{n-2} \frac{A_{2n-3}}{x^{m-2n+3}} (-1)^{n-1} \frac{A_{2n-1}}{x^{m-2n+1}} \Big] \frac{1}{X^{p-1}}$$

$$(-1)^n (m-2n-1+2p) b \int \frac{dx}{x^{m-2n} X^p},$$

wo $A_{2s-1} = \frac{m-2s+1+2p}{m-2s+1} \frac{b}{a} A_{2s-3}$, $A_1 = \frac{-1}{(m-1)a}$.

Auch diese Formeln sind durch die Reductionsformeln des Abschnitts 25) gegeben.

## II. Integrale irrationaler Functionen.

1) $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(a+bx)}}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{2}{b}\sqrt{X}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = (\tfrac{1}{3}X - a)\frac{2\sqrt{X}}{b^2}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X}} = (\tfrac{1}{5}X^2 - \tfrac{2}{3}aX + a^2)\frac{2\sqrt{X}}{b^3}$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X}} = (\tfrac{1}{7}X^3 - \tfrac{3}{5}aX^2 + a^2X - a^3)\frac{2\sqrt{X}}{b^4}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{X}} = (\tfrac{1}{9}X^4 - \tfrac{4}{7}aX^3 + \tfrac{6}{5}a^2X^2 - \tfrac{4}{3}a^3X + a^4)\frac{2\sqrt{X}}{b^5}$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{X}} = (\tfrac{1}{11}X^5 - \tfrac{5}{9}aX^4 + \tfrac{10}{7}a^2X^3 - 2a^3X^2 + \tfrac{5}{3}a^4X - a^5)\frac{2\sqrt{X}}{b^6}$$

2) $\int \frac{dx}{x^m \sqrt{(a+bx)}}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg \frac{\sqrt{(a+bx)}-\sqrt{a}}{\sqrt{(a+bx)}+\sqrt{a}}, \text{ wenn } a \text{ positiv,}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{2}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{(a+bx)}}{\sqrt{-a}}, \text{ wenn } a \text{ negativ ist.}$$

Wir setzen: $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = U.$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = U$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{ax} - \frac{b}{2a}U$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{4a^2x}\right)\sqrt{X} + \frac{3b^2}{8a^2}U$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{X}} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{5b}{12a^2x^2} - \frac{5b^2}{8a^3x}\right)\sqrt{X} + \frac{5b^3}{16a^3}U$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{X}} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{7b}{24a^2x^3} - \frac{35b^2}{96a^3x^2} + \frac{35b^3}{64a^4x}\right)\sqrt{X} + \frac{35b^4}{128a^4}U$$

3) $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{(a+bx)^3}}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{2}{b\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = (X+a)\frac{2}{b^2\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}} = (\tfrac{1}{3}X^2 - 2aX - a^2)\frac{2}{b^3\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{X^3}} = (\tfrac{1}{5}X^3 - aX^2 + 3a^2X + a^3)\frac{2}{b^4\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{X^3}} = (\tfrac{1}{7}X^4 - \tfrac{4}{5}aX^3 + 2a^2X^2 - 4a^3X - a^4)\frac{2}{b^5\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{X^3}} = (\tfrac{1}{9}X^5 - \tfrac{5}{7}aX^4 + 2a^2X^3 - \tfrac{10}{3}a^3X^2 + 5a^4X + a^5)\frac{2}{b^6\sqrt{X}}$$

4) $\int \frac{dx}{x^m\sqrt{(a+bx)^3}}$. Sei $a+bx=X$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = U$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{2}{a\sqrt{X}} + \frac{1}{a}U$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{3b}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{X}} - \frac{3b}{2a^2}U$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{4a^2x} + \frac{15b^2}{4a^3}\right)\frac{1}{\sqrt{X}} + \frac{15b^2}{8a^3}U$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{X^3}} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{7b}{12a^2x^2} - \frac{35b^2}{24a^3x} - \frac{35b^3}{8a^4}\right)\frac{1}{\sqrt{X}} - \frac{35b^3}{16a^4}U$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{X^3}} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{3b}{8a^2x^3} - \frac{21b^2}{32a^3x^2} + \frac{105b^3}{64a^4x} + \frac{315b^4}{64a^5}\right)\frac{1}{\sqrt{X}} + \frac{315b^4}{128a^5}U$$

5) $\frac{x^m dx}{\sqrt{(a+bx)^3}}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{2}{3bX\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -(X+\tfrac{1}{3}a)\frac{2}{b^2X\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}} = (X^2+2aX-\tfrac{1}{3}a^2)\frac{2}{b^3X\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{X^3}} = (\tfrac{1}{3}X^3-3aX^2-3a^2X+\tfrac{1}{3}a^3)\frac{2}{b^4X\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{X^3}} = (\tfrac{1}{5}X^4-\tfrac{4}{3}aX^3+6a^2X^2+4a^3X-\tfrac{1}{3}a^4)\frac{2}{b^5X\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{X^3}} = (\tfrac{1}{7}X^5-aX^4+\tfrac{10}{3}a^2X^3-10a^3X^2-5a^4X+\tfrac{1}{3}a^5)\frac{2}{b^6X\sqrt{X}}.$$

6) $\int \frac{dx}{x^m\sqrt{(a+bx)^3}}$. Sei $a+bx=X$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}=U$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \left(\frac{8}{3a}+\frac{2bx}{a^2}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}}+\frac{1}{a^2}\,U$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = \left(-\frac{1}{ax}-\frac{20b}{3a^2}-\frac{5b^2x}{a^3}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}}-\frac{5b}{2a^3}\,U$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = \left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{7b}{4a^2x}+\frac{35b^2}{3a^3}+\frac{35b^3x}{4a^4}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}}+\frac{35b^2}{8a^4}\,U$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{X^3}} = \left(-\frac{1}{3ax^3}+\frac{3b}{4a^2x^2}-\frac{21b^2}{8a^3x}-\frac{35b^3}{2a^4}-\frac{105b^4x}{8a^5}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}}-\frac{105b^3}{16a^5}\,U$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{X^3}} = \left(-\frac{1}{4ax^4}+\frac{11b}{24a^2x^3}-\frac{33b^2}{32a^3x^2}+\frac{231b^3}{64a^4x}+\frac{385b^4}{16a^5}+\frac{1155b^5x}{64a^6}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}} + \frac{1155b^4}{128a^6}\,U.$$

7) $\int x^m\sqrt{(a+bx)}dx$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \sqrt{X}dx = \frac{2X\sqrt{X}}{3b}$$

$$\int x\sqrt{X}dx = (\tfrac{1}{5}X-\tfrac{1}{3}a)\frac{2X\sqrt{X}}{b^2}$$

$$\int x^2\sqrt{X}dx = (\tfrac{1}{7}x^2-\tfrac{2}{5}aX+\tfrac{1}{3}a^2)\frac{2X\sqrt{X}}{b^3}$$

$$\int x^3\sqrt{X}dx = (\tfrac{1}{9}X^3-\tfrac{3}{7}aX^2+\tfrac{3}{5}a^2X-\tfrac{1}{3}a^3)\frac{2X\sqrt{X}}{b^4}$$

$$\int x^4\sqrt{X}dx = (\tfrac{1}{11}X^4-\tfrac{4}{9}aX^3+\tfrac{6}{7}a^2X^2-\tfrac{4}{5}a^3X+\tfrac{1}{3}a^4)\frac{2X\sqrt{X}}{b^5}$$

$$\int x^5\sqrt{X}dx = (\tfrac{1}{13}X^5-\tfrac{5}{11}aX^4+\tfrac{10}{9}a^2X^3-\tfrac{10}{7}a^3X^2+a^4X-\tfrac{1}{3}a^5)\frac{2X\sqrt{X}}{b^6}$$

8) $\int \frac{\sqrt{(a+bx)}\,dx}{x^m}$. Sei $a+bx=X$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}=U$.

$$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x} = 2\sqrt{X} + aU$$

$$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x} + \frac{b}{2}\,U$$

$$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^3} = -\frac{X\sqrt{X}}{2ax^2} + \frac{b\sqrt{X}}{4ax} - \frac{b^2}{8a}\,U$$

$$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^4} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{4a^2x^2}\right)X\sqrt{X} - \frac{b^2\sqrt{X}}{8a^2x} + \frac{b^3}{16a^2}\,U$$

$$\int \frac{\sqrt{X}\,dx}{x^5} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{5b}{24a^2x^3} - \frac{5b^2}{32a^3x^2}\right)X\sqrt{X} + \frac{5b^3\sqrt{X}}{64a^3x} - \frac{5b^4}{128a^3}\,U.$$

9) $\int x^m \sqrt{(a+bx)^3}\,dx$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \sqrt{X^3}\,dx = \frac{2X^2\sqrt{X}}{5b}$$

$$\int x\sqrt{X^3}\,dx = \left(\tfrac{1}{7}X - \tfrac{1}{5}a\right)\frac{2X^2\sqrt{X}}{b^2}$$

$$\int x^2\sqrt{X^3}\,dx = \left(\tfrac{1}{9}X^2 - \tfrac{2}{7}aX + \tfrac{1}{5}a^2\right)\frac{2X^2\sqrt{X}}{b^3}$$

$$\int x^3\sqrt{X^3}\,dx = \left(\tfrac{1}{11}X^3 - \tfrac{3}{9}aX^2 + \tfrac{3}{7}a^2X - \tfrac{1}{5}a^3\right)\frac{2X^2\sqrt{X}}{b^4}$$

$$\int x^4\sqrt{X^3}\,dx = \left(\tfrac{1}{13}X^4 - \tfrac{4}{11}aX^3 + \tfrac{6}{9}a^2X^2 - \tfrac{4}{7}a^3X + \tfrac{1}{5}a^4\right)\frac{2X^2\sqrt{X}}{b^5}$$

$$\int x^5\sqrt{X^3}\,dx = \left(\tfrac{1}{15}X^5 - \tfrac{5}{13}aX^4 + \tfrac{10}{11}a^2X^3 - \tfrac{10}{9}a^3X^2 + \tfrac{5}{7}a^4X - \tfrac{1}{5}a^5\right)\frac{2X^2\sqrt{X}}{b^6}$$

10) $\int \frac{\sqrt{(a+bx)^3}\,dx}{x^m}$. Sei $a+bx=X$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}=U$.

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x} = \left(\tfrac{1}{3}X + a\right)2\sqrt{X} + a^2\,U$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^2} = -\frac{X^2\sqrt{X}}{ax} + \frac{3b}{2a}\int \frac{dx\sqrt{X^3}}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{4a^2x}\right)X^2\sqrt{X} + \frac{3b^2}{8a^2}\int \frac{dx\sqrt{X^3}}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^4} = \left(+\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{12a^2x^2} + \frac{b^2}{24a^3x}\right)X^2\sqrt{X} - \frac{b^3}{16a^3}\int \frac{dx\sqrt{X^3}}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^5} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{8a^2x^3} - \frac{b^2}{32a^3x^2} - \frac{b^3}{64a^4x}\right)X^2\sqrt{X} + \frac{3b^4}{128a^4}\int \frac{dx\sqrt{X^3}}{x}$$

11) $\int x^m \sqrt{(a+bx)^5}\, dx.$ Sei $a+bx=X.$

$$\int \sqrt{X^5}\,dx = \frac{2X^3\sqrt{X}}{7b}$$

$$\int x\sqrt{X^5}\,dx = (\tfrac{1}{9}X-\tfrac{1}{7}a)\frac{2X^3\sqrt{X}}{b^2}$$

$$\int x^2\sqrt{X^5}\,dx = (\tfrac{1}{11}X^2-\tfrac{2}{9}aX+\tfrac{1}{7}a^2)\frac{2X^3\sqrt{X}}{b^3}$$

$$\int x^3\sqrt{X^5}\,dx = (\tfrac{1}{13}X^3-\tfrac{3}{11}aX^2+\tfrac{3}{9}a^2X-\tfrac{1}{7}a^3)\frac{2X^3\sqrt{X}}{b^4}$$

$$\int x^4\sqrt{X^5}\,dx = (\tfrac{1}{15}X^4-\tfrac{4}{13}aX^3+\tfrac{6}{11}a^2X^2-\tfrac{4}{9}a^3X+\tfrac{1}{7}a^4)\frac{2X^3\sqrt{X}}{b^5}$$

$$\int x^5\sqrt{X^5}\,dx = (\tfrac{1}{17}X^5-\tfrac{5}{15}aX^4+\tfrac{10}{13}a^2X^3-\tfrac{10}{11}a^3X^2+\tfrac{5}{9}a^4X-\tfrac{1}{7}a^5)\frac{2X^3\sqrt{X}}{b^6}$$

12) $\int \frac{\sqrt{(a+bx)^5}\,dx}{x^m}.$ Sei $a+bx=X,$ $\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}=U.$

$$\int\frac{\sqrt{X^5}\,dx}{x} = (\tfrac{1}{5}X^2+\tfrac{1}{3}aX+a^2)2\sqrt{X}+a^3U$$

$$\int\frac{\sqrt{X^5}\,dx}{x^2} = -\frac{X^3\sqrt{X}}{ax}+\frac{5b}{2a}\int\frac{dx\sqrt{X^5}}{x}$$

$$\int\frac{\sqrt{X^5}\,dx}{x^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2}-\frac{3b}{4a^2x}\right)X^3\sqrt{X}+\frac{15b^2}{8a^2}\int\frac{dx\sqrt{X^5}}{x}$$

$$\int\frac{\sqrt{X^5}\,dx}{x^4} = \left(-\frac{1}{3ax^3}-\frac{b}{12a^2x^2}-\frac{b^2}{8a^3x}\right)X^3\sqrt{X}+\frac{5b^3}{16a^3}\int\frac{dx\sqrt{X^5}}{x}$$

$$\int\frac{\sqrt{X^5}\,dx}{x^5} = \left(-\frac{1}{4ax^4}+\frac{b}{24a^2x^3}+\frac{b^2}{96a^3x^2}+\frac{b^3}{64a^4x}\right)X^3\sqrt{X}-\frac{5b^4}{128a^4}\int\frac{dx\sqrt{X^5}}{x}$$

13) $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt[3]{(a+bx)}},$ $a+bx=X.$

$$\int\frac{dx}{\sqrt[3]{X}} = \frac{3\sqrt[3]{X^2}}{2b}$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{X}} = (\tfrac{1}{5}X-\tfrac{1}{2}a)\frac{3\sqrt[3]{X^2}}{b^2}$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt[3]{X}} = (\tfrac{1}{8}X^2-\tfrac{2}{5}aX+\tfrac{1}{2}a^2)\frac{3\sqrt[3]{X^2}}{b^3}$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt[3]{X}} = (\tfrac{1}{11}X^3-\tfrac{3}{8}aX^2+\tfrac{3}{5}a^2X-\tfrac{1}{2}a^3)\frac{3\sqrt[3]{X^2}}{b^4}$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt[3]{X}} = (\tfrac{1}{14}X^4-\tfrac{4}{11}aX^3+\tfrac{3}{4}a^2X^2-\tfrac{4}{5}a^3X+\tfrac{1}{2}a^4)\frac{3\sqrt[3]{X^2}}{b^5}$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt[3]{X}} = (\tfrac{1}{17}X^5-\tfrac{5}{14}aX^4+\tfrac{10}{11}a^2X^3-\tfrac{5}{4}a^3X^2+a^4X-\tfrac{1}{2}a^5)\frac{3\sqrt[3]{X^2}}{b^6}$$

14) $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{X^2}} = \frac{3\sqrt[3]{X}}{b}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{X^2}} = \left(\tfrac{1}{4}X-a\right)\frac{3\sqrt[3]{X}}{b^2}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{X^2}} = \left(\tfrac{1}{7}X^2-\tfrac{1}{2}aX+a^2\right)\frac{3\sqrt[3]{X}}{b^3}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt[3]{X^2}} = \left(\tfrac{1}{10}X^3-\tfrac{3}{7}aX^2+\tfrac{3}{4}a^2X-a^3\right)\frac{3\sqrt[3]{X}}{b^4}$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt[3]{X^2}} = \left(\tfrac{1}{13}X^4-\tfrac{2}{5}aX^3+\tfrac{6}{7}a^2X^2-a^3X+a^4\right)\frac{3\sqrt[3]{X}}{b^5}$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt[3]{X^2}} = \left(\tfrac{1}{16}X^5-\tfrac{5}{13}aX^4+a^2X^3-\tfrac{10}{7}a^3X^2+\tfrac{5}{4}a^4X-a^5\right)\frac{3\sqrt[3]{X}}{b^6}.$$

15) $\int \frac{dx}{x^m\sqrt[3]{(a+bx)}}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{X}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\left[\tfrac{3}{2}\lg\frac{\sqrt[3]{X}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{X}+\sqrt[3]{a}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{a}}\right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{X}} = -\frac{\sqrt[3]{X^2}}{ax}-\frac{b}{3a}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{X}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{X}} = \left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{2b}{3a^2x}\right)\sqrt[3]{X^2}+\frac{2b^2}{9a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{X}}$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt[3]{X}} = \left(-\frac{1}{3ax^3}+\frac{7b}{18a^2x^2}-\frac{14b^2}{27a^3x}\right)\sqrt[3]{X^2}-\frac{14b^3}{81a^3}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{X}}$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt[3]{X}} = \left(-\frac{1}{4ax^4}+\frac{5b}{18a^2x^3}-\frac{35b^2}{108a^3x^2}+\frac{35b^3}{81a^4x}\right)\sqrt[3]{X^2}+\frac{35b^4}{243a^4}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{X}}$$

16) $\frac{dx}{x^m\sqrt[3]{(a+bx)^2}}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{X^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\left[\tfrac{3}{2}\lg\frac{\sqrt[3]{X}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt[3]{X}+2\sqrt[3]{a}}{\sqrt{3}\sqrt[3]{a}}\right]$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{X^2}} = -\frac{\sqrt[3]{X}}{ax}-\frac{2b}{3a}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{X^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{X^2}} = \left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{5b}{6a^2x}\right)\sqrt[3]{X}+\frac{5b^2}{9a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{X^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt[3]{X^2}} = \left(-\frac{1}{3ax^3}+\frac{4b}{9a^2x^2}-\frac{20b^2}{27a^3x}\right)\sqrt[3]{X}-\frac{40b^3}{81a^3}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{X^2}}$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt[3]{X^2}} = \left(-\frac{1}{4ax^4}+\frac{11b}{36a^2x^3}-\frac{11b^2}{27a^3x^2}+\frac{55b^3}{81a^4x}\right)\sqrt[3]{X}+\frac{110b^4}{243a^4}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{X^2}}$$

17) $\int x^m \sqrt[3]{(a+bx)}\,dx$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \sqrt[3]{X}dx = \frac{3X\sqrt[3]{X}}{4b}$$

$$\int x\sqrt[3]{X}dx = (\tfrac{1}{7}X-\tfrac{1}{4}a)\frac{3X\sqrt[3]{X}}{b^2}$$

$$\int x^2\sqrt[3]{X}dx = (\tfrac{1}{10}X^2-\tfrac{2}{7}aX+\tfrac{1}{4}a^2)\frac{3X\sqrt[3]{X}}{b^3}$$

$$\int x^3\sqrt[3]{X}dx = (\tfrac{1}{13}X^3-\tfrac{3}{10}aX^2+\tfrac{3}{7}a^2X-\tfrac{1}{4}a^3)\frac{3X\sqrt[3]{X}}{b^4}$$

$$\int x^4\sqrt[3]{X}dx = (\tfrac{1}{16}X^4-\tfrac{4}{13}aX^3+\tfrac{3}{5}a^2X^2-\tfrac{4}{7}a^3X+\tfrac{1}{4}a^4)\frac{3X\sqrt[3]{X}}{b^5}$$

$$\int x^5\sqrt[3]{X}dx = (\tfrac{1}{19}X^5-\tfrac{5}{16}aX^4+\tfrac{10}{13}a^2X^3-a^3X^2+\tfrac{5}{7}a^4X-\tfrac{1}{4}a^5)\frac{3X\sqrt[3]{X}}{b^6}$$

18) $\int x^m \sqrt[3]{(a+bx)^2}\,dx$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \sqrt[3]{X^2}\,dx = \frac{3X\sqrt[3]{X^2}}{5b}$$

$$\int x\sqrt[3]{X^2}\,dx = (\tfrac{1}{8}X-\tfrac{1}{5}a)\frac{3X\sqrt[3]{X^2}}{b^2}$$

$$\int x^2\sqrt[3]{X^2}\,dx = (\tfrac{1}{11}X^2-\tfrac{1}{4}aX+\tfrac{1}{5}a^2)\frac{3X\sqrt[3]{X^2}}{b^3}$$

$$\int x^3\sqrt[3]{X^2}\,dx = (\tfrac{1}{14}X^3-\tfrac{3}{11}aX^2+\tfrac{3}{8}a^2X-\tfrac{1}{5}a^3)\frac{3X\sqrt[3]{X^2}}{b^4}$$

$$\int x^4\sqrt[3]{X^2}\,dx = (\tfrac{1}{17}X^4-\tfrac{2}{7}aX^3+\tfrac{6}{11}a^2X^2-\tfrac{1}{2}a^3X+\tfrac{1}{5}a^4)\frac{3X\sqrt[3]{X^2}}{b^5}$$

$$\int x^5\sqrt[3]{X^2}\,dx = (\tfrac{1}{20}X^5-\tfrac{5}{17}aX^4+\tfrac{5}{7}a^2X^3-\tfrac{10}{11}a^3X^2+\tfrac{5}{8}a^4X-\tfrac{1}{5}a^5)\frac{3X\sqrt[3]{X^2}}{b^6}$$

19) $\int \frac{\sqrt[3]{(a+bx)}}{x^m}\,dx$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{X}\,dx}{x} = 3\sqrt[3]{X}+a\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{X^2}}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{X}\,dx}{x^2} = -\frac{X\sqrt[3]{X}}{ax} = \frac{b}{3a}\int\frac{\sqrt[3]{X}\,dx}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{X}\,dx}{x^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{b}{3a^2x}\right)X\sqrt[3]{X}-\frac{b^2}{9a^2}\int\frac{\sqrt[3]{X}\,dx}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{X}\,dx}{x^4} = \left(-\frac{1}{3ax^3}+\frac{5b}{18a^2x^2}-\frac{5b^2}{27a^3X}\right)X\sqrt[3]{X}+\frac{5b^3}{81a^3}\int\frac{\sqrt[3]{X}\,dx}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{X}\,dx}{x^5} = \left(-\frac{1}{4ax^4}+\frac{2b}{9a^2x^3}-\frac{5b^2}{27a^3x^2}+\frac{10b^3}{81a^4x}\right)X\sqrt[3]{X}-\frac{10b^4}{243a^4}\int\frac{\sqrt[3]{X}dx}{x}$$

20) $\int \frac{\sqrt[3]{(a+bx)^2}\,dx}{x^m}$. Sei $a+bx=X$.

$$\int \frac{\sqrt[3]{X^2}\,dx}{x} = \tfrac{3}{2}\sqrt[3]{X^2} + a\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{X}}$$

$$\int \frac{\sqrt[4]{X^2}\,dx}{x^2} = -\frac{X\sqrt[3]{X^2}}{ax} + \frac{2b}{3a}\int \frac{\sqrt[3]{X^2}\,dx}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{X^2}\,dx}{x^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{b}{6a^2x}\right) X\sqrt[3]{X^2} - \frac{b^2}{9a^2}\int \frac{\sqrt[3]{X^2}\,dx}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{X^2}\,dx}{x^4} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{2b}{9a^2x^2} - \frac{2b^2}{27a^3x}\right) X\sqrt[3]{X^2} + \frac{4b^3}{81a^3}\int \frac{\sqrt[3]{X^2}\,dx}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{X^2}\,dx}{x^5} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{7b}{36a^2x^3} - \frac{7b^2}{54a^3x^2} + \frac{7b^3}{162a^4x}\right) X\sqrt[3]{X^2} - \frac{7b^4}{243a^4}\int \frac{\sqrt[3]{X^2}\,dx}{x}$$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)^n}}$. Sei $a+bx^2=X$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \lg [x\sqrt{b} + \sqrt{(a+bx^2)}],$$

wenn $b$ positiv,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right),$$

wenn $b$ negativ ist.

Sei $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)}} = U$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = U$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X^5}} = \left(\frac{1}{3aX} + \frac{2}{3a^2}\right)\frac{x}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X^7}} = \left(\frac{1}{5aX^2} + \frac{4}{15a^2X} + \frac{8}{15a^3}\right)\frac{x}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X^9}} = \left(\frac{1}{7aX^3} + \frac{b}{35a^2X^2} + \frac{8}{35a^3X} + \frac{16}{35a^4}\right)\frac{x}{\sqrt{X}}$$

22) $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)}}$. Sei $a+bx^2=X$, $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = U$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = U$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{\sqrt{X}}{b}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{x\sqrt{X}}{2b} - \frac{a}{2b}U$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right)\sqrt{X}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x^3}{4b} - \frac{3ax}{8b^2}\right)\sqrt{X} + \frac{3a^2}{8b^2}\ U$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{X}} = \left(\frac{x^4}{5b} - \frac{4ax^2}{15b^2} + \frac{8a^2}{15b^3}\right)\sqrt{X}$$

23) $\int \frac{dx}{x^m \sqrt{(a+bx^2)}}$. Sei $a+bx^2 = X$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \lg \frac{\sqrt{(a+bx^2)}-\sqrt{a}}{\sqrt{(a+bx^2)}+\sqrt{a}},$$

wenn $a$ positiv,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sec} \left(x\sqrt{\frac{-b}{a}}\right),$$

wenn $a$ negativ ist.

Sei $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = U$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = U$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{ax}$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{2ax^2} - \frac{b}{2a}\ U$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{X}} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{2b}{3a^2x}\right)\sqrt{X}$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{X}} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{3b}{8a^2x^2}\right)\sqrt{X} + \frac{3b^2}{8a^2}\ U$$

24) $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}$. Sei $a+bx^2 = X$, $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = U$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x}{a\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{1}{b\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{x}{b\sqrt{X}} + \frac{1}{b}\ U$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{X^3}} = \left(\frac{x^2}{b} + \frac{2a}{b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{X^3}} = \left(\frac{x^3}{2b} + \frac{3ax}{2b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{X}} - \frac{3a}{2b^2}\ U$$

$$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{X^3}} = \left(\frac{x^4}{3b} - \frac{4ax^2}{3b^2} - \frac{8a^2}{3b^3}\right)\frac{1}{\sqrt{X}}$$

25) $\int \frac{dx}{x^m (a+bx^2)^3}$. Sei $a+bx^2 = X$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = U$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a\sqrt{X}} + \frac{1}{a}\,U$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{2bx}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{3b}{2a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{X}} - \frac{3b}{2a^2}\,U$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{X^3}} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{4b}{3a^2x} + \frac{8b^2x}{3a^3}\right)\frac{1}{\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{X^3}} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{5b}{8a^2x^2} + \frac{15b^2}{8a^3}\right)\frac{1}{\sqrt{X}} + \frac{15b^2}{8a^3}\,U$$

26) $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{(a+bx^2)^5}}$. Sei $a+bx^2 = X$. $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = U$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X^5}} = \left(\frac{2bx^3}{3a^2} + \frac{x}{a}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^5}} = -\frac{1}{3bX\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{X^5}} = \frac{x^3}{3aX\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{X^5}} = \left(-\frac{x^2}{b} - \frac{2a}{3b^2}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{X^5}} = \left(-\frac{4x^3}{3b} - \frac{ax}{b^2}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}} + \frac{1}{b^2}U$$

$$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{X^5}} = \left(\frac{x^4}{b} + \frac{4ax^2}{b^2} + \frac{8a^2}{3b^3}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}}$$

27) $\int \frac{dx}{x^m\sqrt{(a+bx^2)^5}}$. Sei $a+bx^2 = X$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = U$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X^5}} = \left(\frac{4}{3a} + \frac{bx^2}{a^2}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}} + \frac{1}{a^2}\,U$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^5}} = -\frac{1}{axX\sqrt{X}} - \frac{4b}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{X^5}}$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X^5}} = -\frac{1}{2ax^2X\sqrt{X}} - \frac{4b}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{X^5}}$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{X^5}} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{2b}{a^2x}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}} + \frac{8b^2}{a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{X^5}}$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{X^5}} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{7b}{8a^2x^2}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}} + \frac{35b^2}{8a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{X^5}}$$

28) $\int x^m\,dx\sqrt{(a+bx^2)}$. Sei $a+bx^2=X$, $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=U$.

$$\int dx\sqrt{X} = \frac{x\sqrt{X}}{2}+\frac{a}{2}\,U$$

$$\int x\,dx\sqrt{X} = \frac{X\sqrt{X}}{3b}$$

$$\int x^2dx\sqrt{X} = \frac{xX\sqrt{X}}{4b}-\frac{a}{4b}\int\sqrt{X}\,dx$$

$$\int x^3dx\sqrt{X} = \left(\frac{x^2}{5b}-\frac{2a}{15b^2}\right)X\sqrt{X}$$

$$\int x^4dx\sqrt{X} = \left(\frac{x^3}{6b}-\frac{ax}{8b^2}\right)X\sqrt{X}+\frac{a^2}{8b^2}\int\sqrt{X}\,dx$$

$$\int x^5dx\sqrt{X} = \left(\frac{x^4}{7b}-\frac{4ax^2}{35b^2}+\frac{8a^2}{105b^3}\right)X\sqrt{X}$$

29) $\int\frac{dx\sqrt{(a+bx^2)}}{x^m}$. Sei $a+bx^2=X$, $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=U$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}=V$.

$$\int\frac{\sqrt{X}dx}{x} = \sqrt{X}+aV$$

$$\int\frac{\sqrt{X}dx}{x^2} = -\frac{\sqrt{X}}{x}+bU$$

$$\int\frac{\sqrt{X}dx}{x^3} = -\frac{\sqrt{X}}{2x^2}+\frac{b}{2}V$$

$$\int\frac{\sqrt{X}dx}{x^4} = -\frac{X\sqrt{X}}{3ax^3}$$

$$\int\frac{\sqrt{X}dx}{x^5} = -\frac{X\sqrt{X}}{4ax^4}+\frac{b\sqrt{X}}{8ax^2}-\frac{b^2}{8a}V$$

30) $\int x^m\sqrt{(a+bx^2)^3}$. Sei $a+bx^2=X$, $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=U$.

$$\int\sqrt{X^3}dx = \left(\frac{X}{4}+\frac{3a}{8}\right)x\sqrt{X}+\frac{3a^2}{8}\,U$$

$$\int x\sqrt{X^3}dx = \frac{X^2\sqrt{X}}{5b}$$

$$\int x^2\sqrt{X^3}dx = \frac{xX^2\sqrt{X}}{6b}-\frac{a}{6b}\int\sqrt{X^3}dx$$

$$\int x^3\sqrt{X^3}dx = \left(\frac{x^2}{7b}-\frac{2a}{35b^2}\right)X^2\sqrt{X}$$

$$\int x^4\sqrt{X^3}dx = \left(\frac{x^3}{8b}-\frac{ax}{16b^2}\right)X^2\sqrt{X}+\frac{a^2}{16b^2}\int\sqrt{X^3}dx$$

$$\int x^5\sqrt{X^3}dx = \left(\frac{x^4}{9b}-\frac{4ax^2}{63b^2}+\frac{8a^2}{315b^3}\right)X^2\sqrt{X}$$

31) $\int \frac{\sqrt{(a+bx^2)^3}\,dx}{x^m}$. Sei $a+bx^2=X$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}=U$.

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x} = \left(\frac{X}{3}+a\right)\sqrt{X}+a^2U$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^2} = -\frac{X^2\sqrt{X}}{ax}+\frac{4b}{a}\int \sqrt{X^3}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^3} = -\frac{X^2\sqrt{X}}{2ax^2}+\frac{3b}{2a}\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^4} = \left(-\frac{1}{3ax^3}-\frac{2b}{3a^2x}\right)X^2\sqrt{X}+\frac{8b^2}{3a^2}\int \sqrt{X^3}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^5} = \left(-\frac{1}{4ax^4}-\frac{b}{8a^2x^2}\right)X^2\sqrt{X}+\frac{3b^2}{8a^2}\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x}$$

32) $\int x^m\sqrt{(a+bx^2)^5}\,dx$. Sei $a+bx^2=X$, $\int \frac{dx}{\sqrt{X}}=U$.

$$\int \sqrt{X^5}\,dx = \left(\frac{X^2}{6}+\frac{5ax}{24}+\frac{5a^2}{16}\right)x\sqrt{X}+\frac{5a^3}{16}\,U$$

$$\int x\sqrt{X^5}\,dx = \frac{X^3\sqrt{X}}{7b}$$

$$\int x^2\sqrt{X^5}\,dx = \frac{xX^3\sqrt{X}}{8b}-\frac{a}{8b}\int \sqrt{X^5}\,dx$$

$$\int x^3\sqrt{X^5}\,dx = \left(\frac{x^2}{9b}-\frac{2a}{63b^2}\right)X^3\sqrt{X}$$

$$\int x^4\sqrt{X^5}\,dx = \left(\frac{x^3}{10b}-\frac{3ax}{80b^2}\right)X^3\sqrt{X}+\frac{3a^2}{80b^2}\int \sqrt{X^5}\,dx$$

$$\int x^5\sqrt{X^5}\,dx = \left(\frac{x^4}{11b}-\frac{4ax^2}{99b^2}+\frac{8a^2}{693b^3}\right)X^3\sqrt{X}$$

33) $\int \frac{\sqrt{(a+bx^2)^5}\,dx}{x^m}$. Sei $a+bx^2=X$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}}=U$.

$$\int \frac{\sqrt{X^5}\,dx}{x} = \left(\frac{X^2}{5}+\frac{aX}{3}+a^2\right)\sqrt{X}+a^3U$$

$$\int \frac{\sqrt{X^5}\,dx}{x^2} = -\frac{X^3\sqrt{X}}{ax}+\frac{6b}{a}\int \sqrt{X^5}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{X^5}\,dx}{x^3} = -\frac{X^3\sqrt{X}}{2ax^2}+\frac{5b}{2a}\int \frac{\sqrt{X^5}\,dx}{x}$$

$$\int \frac{\sqrt{X^5}\,dx}{x^4} = \left(-\frac{1}{3ax^3}-\frac{4b}{3a^2x}\right)X^3\sqrt{X}+\frac{8b^2}{a^2}\int \sqrt{X^5}\,dx\ .$$

$$\int \frac{\sqrt{X^5}\,dx}{x^5} = \left(-\frac{1}{4ax^4}-\frac{3b}{8a^2x^2}\right)X^3\sqrt{X}+\frac{15b^2}{8a^2}\int \frac{\sqrt{X^5}\,dx}{x}$$

34) $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^n}}$. Sei $a+bx+cx^2=X$, $4ac-b^2=k$, $\int \frac{dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}=U$.

$$U=\frac{1}{\sqrt{c}}\lg\left[2cx+b+2\sqrt{c}\sqrt{X}\right], \text{ wenn } c \text{ positiv,}$$

$$U=\frac{-1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{2cx+b}{\sqrt{(b^2-4ac)}}, \text{ wenn } c \text{ negativ ist.}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=U$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X^3}}=\frac{2(2cx+b)}{k\sqrt{X}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X^5}}=\left(\frac{1}{3kX}+\frac{8c}{3k^2}\right)\frac{2(2cx+b)}{\sqrt{X}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X^7}}=\left(\frac{1}{5kX^2}+\frac{4^2c}{15k^2X}+\frac{2\cdot4^2c^2}{15k^3}\right)\frac{2(2cx+b)}{\sqrt{X}}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X^9}}=\left(\frac{1}{7kX^3}+\frac{6\cdot4\cdot c}{35k^2X^2}+\frac{2\cdot4^2c^2}{35k^3X}+\frac{4^3c^3}{35k^4}\right)\frac{2(2cx+b)}{\sqrt{X}}$$

35) $\int\sqrt{(a+bx+cx^2)^n}$. Sei $a+bx+cx^2=X$, $4ac-b^2=k$, $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=U$.

$$\int\sqrt{X}dx=\frac{(2cx+b)\sqrt{X}}{4c}+\frac{k}{8c}U$$

$$\int\sqrt{X^3}dx=\left(\frac{X}{8c}+\frac{3k}{64c^2}\right)(2cx+b)\sqrt{X}+\frac{3k^2}{128c^2}U$$

$$\int\sqrt{X^5}dx=\left(\frac{X^2}{12c}+\frac{5kX}{192c^2}+\frac{5k^2}{512c^3}\right)(2cx+b)\sqrt{X}+\frac{5k^3}{1024c^3}U$$

$$\int\sqrt{X^7}dx=\left(\frac{X^3}{16c}+\frac{7kX^2}{6\cdot4^2c^2}+\frac{35k^2X}{6\cdot4^3c^3}+\frac{35k^3}{4^7c^4}\right)(2cx+b)\sqrt{X}+\frac{35k^4}{2\cdot4^7c^4}U$$

$$\int\sqrt{X^9}dx=\left(\frac{X^4}{20c}+\frac{9kX^3}{10\cdot4^2c^2}+\frac{21k^2X^2}{5\cdot4^3c^3}+\frac{21k^3X}{4^7c^4}+\frac{63k^4}{2\cdot4^8c^5}\right)(2cx+b)\sqrt{X}+\frac{63k^5}{4^9c^5}U$$

36) $\int\frac{x^m\,dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)}}$. Sei $a+bx+cx^2=X$, $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=U$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=U$$

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{X}}=\frac{\sqrt{X}}{c}-\frac{b}{2c}U$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{X}}=\left(\frac{x}{2c}-\frac{3b}{4c^2}\right)\sqrt{X}+\left(\frac{3b^2}{8c^2}-\frac{a}{2c}\right)U$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{X}}=\left(\frac{x^2}{3c}-\frac{5bx}{12c^2}+\frac{5b^2}{8c^3}-\frac{2a}{3c^2}\right)\sqrt{X}-\left(\frac{5b^3}{16c^3}-\frac{3ab}{4c^2}\right)U$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{X}}=\left[\frac{x^3}{4c}-\frac{7bx^2}{24c^2}+\left(\frac{35b^2}{96c^3}-\frac{3a}{8c^2}\right)x-\frac{35b^3}{64c^4}+\frac{55ab}{48c^3}\right]\sqrt{X}$$
$$+\left(\frac{35b^4}{128c^4}-\frac{15ab^2}{16c^3}+\frac{3a^2}{8c^2}\right)U$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{X}}=\frac{x^4\sqrt{X}}{5c}-\frac{4a}{5c}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{X}}-\frac{9b}{10c}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{X}}$$

37) $\int \frac{dx}{x^m \sqrt{(a+bx+cx^2)}}$. Sei $a+bx+cx^2 = X$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = U$.

$$U = \frac{1}{\sqrt{a}} \lg \frac{2a+bx-2\sqrt{a}\sqrt{X}}{x}, \text{ wenn } a \text{ positiv,}$$

$$U = \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2a+bx}{2\sqrt{(-a)}\sqrt{X}}, \text{ wenn } b \text{ negativ ist.}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = U$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X}} = -\frac{\sqrt{X}}{ax} - \frac{b}{2a} U$$

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{X}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{4a^2x}\right)\sqrt{X} + \left(\frac{3b^2}{8a^2} - \frac{c}{2a}\right) U$$

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{X}} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{5b}{12a^2x^2} - \left(\frac{5b^2}{8a^3} - \frac{2c}{3a^2}\right)\frac{1}{x}\right]\sqrt{X} - \left(\frac{5b^3}{16a^3} - \frac{3bc}{4a^2}\right) U$$

$$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{X}} = \left[-\frac{1}{4ax^4} + \frac{7b}{24a^2x^3} - \left(\frac{35b^2}{96a^3} - \frac{3c}{8a^2}\right)\frac{1}{x^2} + \left(\frac{35b^3}{64a^4} - \frac{55bc}{48a^3}\right)\frac{1}{x}\right]\sqrt{X}$$
$$+ \left(\frac{35b^4}{128a^4} - \frac{15b^2c}{16a^3} + \frac{3c^2}{8a^2}\right) U$$

38) $\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}$. Sei $a+bx+cx^2 = X$, $4ac - b^2 = k$, $\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = U$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{2(2cx+b)}{k\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{2(2a+bx)}{k\sqrt{X}}$$

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}} = -\frac{(4ac-2b^2)x - 2ab}{ck\sqrt{X}} + \frac{1}{c} U$$

$$\int \frac{x^3dx}{\sqrt{X^3}} = \frac{x^2}{c\sqrt{X}} - \frac{2a}{c}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} - \frac{3b}{2c}\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}}$$

$$\int \frac{x^4dx}{\sqrt{X^3}} = \left(\frac{x^3}{2c} - \frac{5bx^2}{4c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{X}} + \frac{5ab}{2c^2}\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}} + \left(\frac{15b^2}{8c^2} - \frac{3a}{2c}\right)\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}}$$

$$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{X^3}} = \left[\frac{x^4}{3c} - \frac{7bx^3}{12c^2} + \left(\frac{35b^2}{24c^3} - \frac{4a}{3c^2}\right)x^2\right]\frac{1}{\sqrt{X}} - \left(\frac{35ab^2}{12c^3} - \frac{8a^2}{3c^2}\right)\int \frac{x\,dx}{\sqrt{X^3}}$$
$$- \left(\frac{35b^3}{16c^3} - \frac{15ab}{4c^2}\right)\int \frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}}$$

39) $\int \frac{dx}{x^m \sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}$. Sei $a+bx+cx^2 = X$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = U$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{X^3}} = \frac{1}{a\sqrt{X}} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} + \frac{1}{a} U$$

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}} = \left(-\frac{1}{ax} + \frac{3b}{2a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{X}} + \left(\frac{3b^2}{4a^2} - \frac{2c}{a}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{X^3}} - \frac{3b}{2a^2} U$$

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}}=\left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{5b}{4a^2x}+\frac{15b^2}{8a^3}-\frac{3c}{2a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{X}}-\left(\frac{15b^3}{16a^3}-\frac{13bc}{4a^2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{X^3}}$$
$$+\left(\frac{15b^2}{8a^3}-\frac{3c}{2a^2}\right)U$$

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{X^3}}=\left[-\frac{1}{3ax^3}+\frac{7b}{12a^2x^2}-\left(\frac{35b^2}{24a^3}-\frac{4c}{3a^2}\right)\frac{1}{x}\,\frac{35b^3}{16a^4}-\frac{15bc}{4a^3}\right]\frac{1}{\sqrt{X}}$$
$$+\left(\frac{35b^4}{32a^4}-\frac{115b^2c}{24a^3}+\frac{8c^2}{3a^2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{X^3}}-\left(\frac{35b^3}{16a^4}-\frac{15bc}{4a^3}\right)U$$

$$\int\frac{dx}{x^5\sqrt{X^3}}=-\frac{1}{4ax^4\sqrt{X}}-\frac{9b}{8a}\int\frac{dx}{x^4\sqrt{X^3}}-\frac{5c}{4a}\int\frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}}$$

40) $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}$. Sei $a+bx+cx^2=X$, $4ac-b^2=k$.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{X^3}}=\left(\frac{1}{3kX}+\frac{8c}{3k^2}\right)\frac{2(2cx+b)}{\sqrt{X}}$$

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{X^3}}=-\frac{1}{3cX\sqrt{X}}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{X^3}}$$

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}}=\left(-\frac{x}{2c}+\frac{b}{12c^2}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}}+\left(\frac{b^2}{8c^2}+\frac{a}{2c}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{X^3}}$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{X^3}}=\left(-\frac{x^2}{c}-\frac{bx}{4c^2}+\frac{b^2}{24c^3}-\frac{2a}{3c^2}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}}+\left(\frac{b^3}{16c^3}-\frac{3ab}{4c^2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{X^3}}$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{X^3}}=\frac{1}{c}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}}-\frac{a}{c}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{X^3}}-\frac{b}{c}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{X^3}}$$

$$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{X^3}}=\frac{x^4}{cX\sqrt{X}}-\frac{4a}{c}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{X^3}}-\frac{5b}{2c}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{X^3}}$$

41) $\int\frac{dx}{x^m\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}$. Sei $a+bx+cx^2=X$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}=U$.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{X^3}}=\left(\frac{1}{3ax}+\frac{1}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{X}}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{X^3}}-\frac{b}{2a^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X^3}}+\frac{1}{a^2}U$$

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{X^3}}=-\frac{1}{axX\sqrt{X}}-\frac{5b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{X^3}}-\frac{4c}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{X^3}}$$

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}}=\left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{7b}{4a^2x}\right)\frac{1}{X\sqrt{X}}+\left(\frac{35b^2}{8a^2}-\frac{5c}{2a}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{X^3}}+\frac{7bc}{a^2}\int\frac{dx}{\sqrt{X^3}}$$

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{X^3}}=\left[-\frac{1}{3ax^3}+\frac{3b}{4a^2x^2}-\left(\frac{21b^2}{8a^3}-\frac{2c}{a^2}\right)\frac{1}{x}\right]\frac{1}{X\sqrt{X}}$$
$$-\left(\frac{105b^3}{16a^3}-\frac{35bc}{4a^2}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{X^3}}-\left(\frac{21b^2c}{2a^3}-\frac{8c^2}{a^2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{X^3}}$$

$$\int\frac{dx}{x^5\sqrt{X^3}}=-\frac{1}{4ax^4X\sqrt{X}}-\frac{11b}{8a}\int\frac{dx}{x^4\sqrt{X^3}}-\frac{7c}{4a}\int\frac{dx}{x^3\sqrt{X^3}}$$

42) $\int x^m\,dx\,\sqrt{(a+bx+cx^2)}$. Sei $a+bx+cx^2=X$, $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=U$.

$$\int\sqrt{X}dx=\frac{2cx+b}{4c}\sqrt{X}+\frac{4ac-b^2}{8c}U$$

$$\int x\sqrt{X}dx=\frac{X\sqrt{X}}{3c}-\frac{b}{2c}\int\sqrt{X}dx$$

$$\int x^2\sqrt{X}dx=\left(\frac{x}{4c}-\frac{5b}{24c^2}\right)X\sqrt{X}+\left(\frac{5b^2}{16c^2}-\frac{a}{4c}\right)\int\sqrt{X}dx$$

$$\int x^3\sqrt{X}dx=\left(\frac{x^2}{5c}-\frac{7bx}{40c^2}+\frac{7b^2}{48c^3}-\frac{2a}{15c^2}\right)X\sqrt{X}-\left(\frac{7b^3}{32c^3}-\frac{3ab}{8c^2}\right)\int\sqrt{X}dx$$

$$\int x^4\sqrt{X}dx=\left[\frac{x^3}{6c}-\frac{3bx^2}{20c^2}+\left(\frac{21b^2}{160c^3}-\frac{a}{8c^2}\right)x-\frac{7b^3}{64c^4}+\frac{49ab}{240c^3}\right]X\sqrt{X}$$
$$+\left(\frac{21b^4}{28c^4}-\frac{7ab^2}{16c^3}+\frac{a^2}{8c^2}\right)\int\sqrt{X}dx$$

$$\int x^5\sqrt{X}dx=\frac{x^4X\sqrt{X}}{7c}-\frac{4a}{7c}\int x^3\sqrt{X}dx-\frac{11b}{14c}\int x^4\sqrt{X}dx$$

43) $\int\frac{\sqrt{(a+bx+cx^2)}\,dx}{x^m}$. Sei $a+bx+cx^2=X$, $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=U$, $\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}=V$.

$$\int\frac{\sqrt{X}dx}{x}=\sqrt{X}+aV+\frac{b}{2}U$$

$$\int\frac{\sqrt{X}dx}{x^2}=-\frac{\sqrt{X}}{x}+\frac{b}{2}V+cU$$

$$\int\frac{\sqrt{X}dx}{x^3}=-\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{b}{4ax}\right)\sqrt{X}-\left(\frac{b^2}{8a}-\frac{c}{2}\right)V$$

$$\int\frac{\sqrt{X}dx}{x^4}=-\frac{X\sqrt{X}}{3ax^3}+\left(\frac{b}{4ax^2}+\frac{b^2}{8a^2x}\right)\sqrt{X}+\left(\frac{b^3}{16a^2}-\frac{bc}{4a}\right)V$$

$$\int\frac{\sqrt{X}dx}{x^5}=\left(-\frac{1}{4ax^4}+\frac{5b}{24a^2x^3}\right)X\sqrt{X}-\left[\left(\frac{5b^2}{32a^2}-\frac{c}{8a}\right)\frac{1}{x^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{5b^3}{64a^3}-\frac{bc}{16a^2}\right)\frac{1}{x}\right]\sqrt{X}-\left(\frac{5b^4}{128a^3}-\frac{3b^2c}{16a^2}+\frac{c^2}{8a}\right)V.$$

44) $\int x^m\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}\,dx$. Sei $a+bx+cx^2=X$, $4ac-b^2=k$, $\int\frac{dx}{\sqrt{X}}=U$.

$$\int\sqrt{X^3}dx=\left(\frac{X}{8c}+\frac{3k}{64c^2}\right)(2cx+b)\sqrt{X}+\frac{3k^2}{128c^2}U$$

$$\int x\sqrt{X^3}dx=\frac{X^2\sqrt{X}}{5c}-\frac{b}{2c}\int\sqrt{X^3}dx$$

$$\int x^2\sqrt{X^3}dx=\left(\frac{x}{6c}-\frac{7b}{60c^2}\right)X^2\sqrt{X}+\left(\frac{7b^2}{24c^2}-\frac{a}{6c}\right)\int\sqrt{X^3}dx$$

$$\int x^3\sqrt{X^3}dx=\left(\frac{x^2}{7c}-\frac{3bx}{28c^2}+\frac{3b^2}{40c^3}-\frac{2a}{35c^2}\right)X^2\sqrt{X}-\left(\frac{3b^3}{16c^3}-\frac{ab}{4c^2}\right)\int\sqrt{X^3}dx$$

$$\int x^4\sqrt{X^3}dx=\left[\frac{x^3}{8c}-\frac{11bx^2}{112c^2}+\left(\frac{33b^2}{448c^3}-\frac{a}{16c^2}\right)x-\frac{33b^3}{640c^4}+\frac{93ab}{1120c^3}\right]X^2\sqrt{X}$$
$$+\left(\frac{33b^4}{256c^4}-\frac{9ab^2}{32c^3}+\frac{a^2}{16c^2}\right)\int\sqrt{X^3}dx$$

$$\int x^5\sqrt{X^3}dx=\frac{x^4X^2\sqrt{X}}{9c}-\frac{4a}{9c}\int x^3\sqrt{X^3}dx-\frac{13b}{18c}\int x^4\sqrt{X^3}dx$$

45) $\int \frac{\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}\,dx}{x^m}$. Sei $a+bx+cx^2 = X$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = U, \int \frac{dx}{x\sqrt{X}} = V.$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x} = \left(\frac{X}{3}+a\right)\sqrt{X} + a^2 V + \frac{ab}{2}U + \frac{b}{2}\int \sqrt{X}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^2} = -\frac{X^2\sqrt{X}}{ax} + \frac{3b}{2a}\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x} + \frac{4c}{a}\int \sqrt{X^3}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{4a^2x}\right)X^2\sqrt{X} + \left(\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{3c}{2a}\right)\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x} + \frac{bc}{a^2}\int \sqrt{X^3}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^4} = \left[-\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{12a^2x^2} + \left(\frac{b^2}{24a^3} - \frac{2c}{3a^2}\right)\frac{1}{x}\right]X^2\sqrt{X}$$
$$- \left(\frac{b^3}{16a^3} - \frac{3bc}{4a^2}\right)\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x} - \left(\frac{b^2c}{6a^3} - \frac{8c^2}{3a^2}\right)\int \sqrt{X^3}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^5} = \left[-\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{8a^2x^3} - \left(\frac{b^2}{32a^3} + \frac{c}{8a^2}\right)\frac{1}{x^2} - \left(\frac{b^3}{64a^4} - \frac{3bc}{16a^3}\right)\frac{1}{x}\right]X^2\sqrt{X}$$
$$+ \left(\frac{3b^4}{128a^4} - \frac{3b^2c}{16a^3} + \frac{3c^2}{8a^2}\right)\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x} + \left(\frac{b^3c}{16a^4} - \frac{3bc^2}{4a^3}\right)\int \sqrt{X^3}\,dx$$

46) $\int x^m \sqrt{(a+bx+cx^2)^5}\,dx$. Sei $a+bx+cx^2 = X$, $4ac-b^2 = k$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}} = U.$$

$$\int \sqrt{X^5}\,dx = \left(\frac{X^2}{12c} + \frac{5kX}{192c^2} + \frac{5k^2}{112c^3}\right)(2cx+b)\sqrt{X} + \frac{5k^3}{1024c^3}U$$

$$\int x\sqrt{X^5}\,dx = \frac{X^3\sqrt{X}}{7c} - \frac{b}{2c}\int \sqrt{X^5}\,dx$$

$$\int x^2\sqrt{X^5}\,dx = \left(\frac{x}{8c} - \frac{9b}{112c^2}\right)X^3\sqrt{X} + \left(\frac{9b^2}{32c^2} - \frac{a}{8c}\right)\int \sqrt{X^5}\,dx$$

$$\int x^3\sqrt{X^5}\,dx = \left(\frac{x^2}{9c} - \frac{11bx}{144c^2} + \frac{11b^2}{224c^3} - \frac{2a}{63c^2}\right)X^3\sqrt{X} - \left(\frac{11b^3}{64c^3} - \frac{3ab}{16c^2}\right)\int \sqrt{X^5}\,dx$$

$$\int x^4\sqrt{X^5}\,dx = \left[\frac{x^3}{10c} - \frac{13bx^2}{180c^2} + \left(\frac{143b^2}{2880c^3} - \frac{3a}{80c^2}\right)x - \frac{143b^3}{4480c^4} + \frac{451ab}{10080c^3}\right]X^3\sqrt{X}$$
$$+ \left(\frac{143b^4}{1280c^4} - \frac{33ab^2}{160c^3} + \frac{3a^2}{80c^2}\right)\int \sqrt{X^5}\,dx$$

$$\int x^5\sqrt{X^5}\,dx = \frac{x^4X^3\sqrt{X}}{11c} - \frac{4a}{11c}\int x^3\sqrt{X^5}\,dx - \frac{15b}{22c}\int x^4\sqrt{X^5}\,dx$$

$$47)\ \int \frac{\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}\,dx}{x^m}.\quad \text{Sei } a+bx+cx^2=X,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}}=U,\ \int\frac{dx}{x\sqrt{X}}=V.$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x}=\left(\frac{X^2}{5}+\frac{aX}{3}+a^2\right)\sqrt{X}+a^3V+\frac{a^2b}{2}U+\frac{ab}{2}\int\sqrt{X}dx+\frac{b}{2}\int\sqrt{X^3}dx$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^2}=-\frac{X^2\sqrt{X}}{ax}+\frac{5b}{2a}\int\frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x}+\frac{6c}{a}\int\sqrt{X^3}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^3}=\left(-\frac{1}{2ax^2}-\frac{3b}{4a^2x}\right)X^2\sqrt{X}+\left(\frac{15b^2}{8a^2}+\frac{5c}{2a}\right)\int\frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x}+\frac{9bc}{2a^2}\int\sqrt{X^3}dx$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^4}=\left[-\frac{1}{3ax^3}-\frac{b}{12a^2x^2}-\left(\frac{b^2}{8a^3}+\frac{4c}{3a^2}\right)\frac{1}{x}\right]X^2\sqrt{X}$$

$$+\left(\frac{5b^3}{16a^3}+\frac{15bc}{4a^2}\right)\int\frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x}+\left(\frac{3b^2c}{4a^3}+\frac{8c^2}{a^2}\right)\int\sqrt{X^3}\,dx$$

$$\int \frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^m}=-\frac{X^2\sqrt{X}}{4ax^5}-\frac{b}{8a}\int\frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^4}+\frac{3c}{4a}\int\frac{\sqrt{X^3}\,dx}{x^3}$$

$$48)\ \int\frac{dx}{(\alpha+\beta x)^n\sqrt{(a+bx)}}.\quad \text{Sei } \alpha+\beta x=U,\ a+bx=V,\ b\alpha-a\beta=k,$$

$$\int\frac{dx}{U\sqrt{V}}=W.$$

$$W=\pm\frac{2}{\sqrt{\beta k}}\,\text{arc tg}\sqrt{\frac{\beta V}{k}},$$

wenn $\beta$ und $k$ gleiche Vorzeichen haben, wo das obere Zeichen zu nehmen ist, wenn sie positiv, das untere, wenn sie negativ sind;

$$W=\frac{1}{\sqrt{(-\beta k)}}\lg\frac{[b\alpha-2a\beta-b\beta x+2\sqrt{(-\beta kv)}]}{U},$$

wenn $\beta$ und $k$ ungleiche Vorzeichen haben.

$$\int\frac{dx}{U\sqrt{V}}=W$$

$$\int\frac{dx}{U^2\sqrt{V}}=\frac{\sqrt{V}}{kU}+\frac{b}{2k}W$$

$$\int\frac{dx}{U^3\sqrt{V}}=\left(\frac{1}{2kU^2}+\frac{3b}{4k^2U}\right)\sqrt{V}+\frac{3b^2}{8k^2}W$$

$$\int\frac{dx}{U^4\sqrt{V}}=\left(\frac{1}{3kU^3}+\frac{5b}{12k^2U^2}+\frac{5b^2}{8k^3U}\right)\sqrt{V}+\frac{5b^3}{16k^3}U$$

$$\int\frac{dx}{U^5\sqrt{V}}=\left(\frac{1}{4kU^4}+\frac{7b}{24k^2U^3}-\frac{35b^2}{96k^3U^2}+\frac{35b^3}{64k^4U}\right)\sqrt{V}+\frac{35b^4}{128k^4}W.$$

Die in Abschnitt 25 gegebenen Reductionsformeln liegen diesen Entwickelungen II. 1 bis 48 zu Grunde.

### Allgemeinere Formeln.

49) $a+bx=X.$

$$m_1=m,\quad m_2=\frac{m(m-1)}{1\cdot 2},\quad m_3=\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\;\cdots\cdots$$

$$\int\frac{x^m\,dx}{X^{\frac{p}{q}}}=\Big(\frac{X^m}{qm-p+q}-\frac{m_1 a X^{m-1}}{qm-p}+\frac{m_2 a^2 X^{m-2}}{qm-p-q}-\frac{m_3 a^3 X^{m-3}}{qm-p-2q}+\cdots$$

$$(-1)^{m-2}\frac{m_{m-2}a^{m-2}X^2}{-(p-3q)}(-1)^{m-1}\frac{m_{m-1}a^{m-1}X}{-(p-2q)}(-1)^m\frac{a^m}{-(p-q)}\Big)\frac{q}{b^{m+1}X^{\frac{p}{q}-1}}.$$

$$\int x^m X^{\frac{p}{q}}dx=\Big(\frac{X^m}{qm+p+q}-\frac{m_1 a X^{m-1}}{qm+p}+\frac{m_2 a^2 X^{m-2}}{qm+p-q}-\frac{m_3 a^3 X^{m-3}}{qm+p-2q}+\cdots$$

$$(-1)^{m-2}\frac{m_{m-2}a^{m-2}X^2}{p+3q}(-1)^{m-1}\frac{m_{m-1}a^{m-1}X}{p+2q}(-1)^{m-1}\frac{a^m}{p+q}\Big)\frac{qX^{\frac{p}{q}+1}}{b^{m+1}}.$$

$$\int\frac{dx}{x^m X^{\frac{p}{q}}}=\Big(\frac{A_1}{x^{m-1}}-\frac{A_2}{x^{m-2}}+\frac{A_3}{x^{m-3}}-\cdots\cdots$$

$$(-1)^{m-1}\frac{A_{m-2}}{x^2}(-1)^m\frac{A_{m-1}}{x}\Big)\frac{1}{X^{\frac{p-q}{q}}}(-1)^m\frac{pbA_{m-1}}{q}\int\frac{dx}{xX^{\frac{p}{q}}},$$

wo $A_s=\dfrac{(qm+p-sq)b}{(m-s)qa}A_{s-1},\ A_1=-\dfrac{1}{(m-1)a}.$

$$\int\frac{X^{\frac{p}{q}}dx}{x^m}=\Big(\frac{A_1}{x^{m-1}}-\frac{A_2}{x^{m-2}}+\frac{A_3}{x^{m-3}}-\cdots\cdots$$

$$(-1)^{m-1}\frac{A_{m-2}}{x^2}(-1)^m\frac{A_{m-1}}{x}\Big)X^{\frac{p+q}{q}}(-1)^m\frac{pbA_{m-1}}{q}\int\frac{X^{\frac{p}{q}}dx}{x},$$

wo $A_s=\dfrac{(qm-p-sq)b}{(m-s)qa}A_{s-1},\ A_1=-\dfrac{1}{(m-1)a}.$

$$\int\frac{dx}{xX^{\frac{p}{q}}}=\frac{q}{(p-q)aX^{\frac{p}{q}-1}}+\frac{q}{(p-2q)a^2X^{\frac{p}{q}-2}}+\frac{q}{(p-3q)a^3X^{\frac{p}{q}-3}}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{q}{(p-sq)a^s X^{\frac{p}{q}-s}}+\frac{1}{a^s}\int\frac{dx}{xX^{\frac{p}{q}-s}}.$$

$$\int\frac{X^{\frac{p}{q}}dx}{x}=\frac{qX^{\frac{p}{q}}}{p}+\frac{qaX^{\frac{p}{q}-1}}{p-q}+\frac{qa^2X^{\frac{p}{q}-2}}{p-2q}+\frac{qa^3X^{\frac{p}{q}-3}}{p-3q}+\cdots\cdots$$

$$+\frac{qa^{s-1}X^{\frac{p}{q}-s+1}}{p-(s-1)q}+a^s\int\frac{dxX^{\frac{p}{q}-s}}{x}.$$

$$\int\frac{x^m\sqrt{x}dx}{X^n}=(A_0x^m-A_1x^{m-1}+A_2x^{m-2}-A_3x^{m-3}+\cdots$$

$$(-1)^{m-2}A_{m-2}x^2\ (-1)^{m-1}A_{m-1}x)\frac{2\sqrt{x}}{X^{n-1}}(-1)^m\frac{3aA_{m-1}}{2}\int\frac{dx\sqrt{x}}{X^n},$$

wo $A_s=\dfrac{(2m-s)a}{(2m-2n-s)b}A_{s-1},\ A_0=\dfrac{1}{(2m-2n+3)b}.$

$$\int \frac{dx}{X^p \sqrt{(\alpha+\beta x)}} = \Big(\frac{A_1}{X^{p-1}} + \frac{A_2}{X^{p-2}} + \frac{A_3}{X^{p-3}} + \dots$$

$$+ \frac{A_{p-2}}{X^2} + \frac{A_{p-1}}{X}\Big) \sqrt{(\alpha+\beta x)} + \frac{\beta A_{p-1}}{2} \int \frac{dx}{X\sqrt{(\alpha+\beta x)}},$$

wo $A_s = \frac{(2p-2s+1)\beta}{2(p-s)k} A_{s-1}$, $A_1 = \frac{1}{(p-1)k}$,

$k = \alpha\beta - b\alpha$.

50) Sei $a + bx^2 = X$.

$$\int \frac{x^m\,dx}{X^{\frac{n}{2}}} = \Big[A_1 x^{m-1} - A_3 x^{m-3} + A_5 x^{m-5} - \dots$$

$$(-1)^{p-2} A_{2p-3} x^{m-2p+3} (-1)^{p-1} A_{2p-1} x^{m-2p+1}\Big] X^{-\frac{n}{2}+1}$$

$$(-1)^p (m-2p+1) A_{2p-1} a \int \frac{x^{m-2p} dx}{X^{\frac{n}{2}}},$$

wo $A_{2s+1} = \frac{(m-2s+1)a}{(m-n-2s+1)b} A_{2s-1}$, $A_1 = \frac{1}{(m-n+1)b}$.

$$\int \frac{dx}{x^m X^{\frac{n}{2}}} = \Big[\frac{A_1}{x^{m-1}} - \frac{A_3}{x^{m-3}} + \frac{A_5}{x^{m-5}} - \dots$$

$$(-1)^{p-2} \frac{A_{2p-3}}{x^{m-2p+3}} (-1)^{p-1} \frac{A_{2p-1}}{x^{m-2p+1}}\Big] X^{-\frac{n}{2}+1}$$

$$(-1)^{p-1} (m+n-2p+1) b A_{2p-1} \int \frac{dx}{x^{m-2p} X^{\frac{n}{2}}},$$

wo $A_{2s+1} = \frac{m+n-2s-1)b}{(m-2s-1)a} A_{2s-1}$, $A_1 = -\frac{1}{(m-1)a}$.

$$\int x^m X^{\frac{n}{2}} dx = \Big[A_1 x^{m-1} - A_3 x^{m-3} + A_5 x^{m-5} - \dots$$

$$(-1)^{p-2} A_{2p-3} x^{m-2p+3} (-1)^{p-1} A_{2p-1} x^{m-2p+1}\Big] X^{\frac{n}{2}+1}$$

$$(-1)^p (m-2p+1) A_{2p-1} \int x^{m-2p} X^{\frac{n}{2}} dx,$$

wo $A_{2s+1} = \frac{(m-2s+1)a}{(m+n-2s+1)b} A_{2s-1}$, $A_1 = \frac{1}{(m+n+1)b}$.

$$\int \frac{X^{\frac{n}{2}} dx}{x^m} = \Big[\frac{A_1}{x^{m-1}} - \frac{A_3}{x^{m-3}} + \frac{A_5}{x^{m-5}} - \dots$$

$$(-1)^{p-2} \frac{A_{2p-3}}{x^{m-2p+3}} (-1)^{p-1} \frac{A_{2p-1}}{x^{m-2p+1}}\Big] X^{\frac{n}{2}+1}$$

$$(-1)^{p-1} (m-n-2p-1) b A_{2p-1} \int \frac{X^{\frac{n}{2}} dx}{x^{m-2p}},$$

wo $A_{2s+1} = \frac{(m-n-2s-1)b}{(m-2s-1)a} A_{2s-1}$, $A_1 = -\frac{1}{(m-1)a}$.

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{2n+1}{2}}} = \left[\frac{A_1}{X^{n-1}} + \frac{A_2}{X^{n-2}} + \frac{A_3}{X^{n-3}} + \cdots \frac{A_{n-1}}{X} + A_n\right] \frac{x}{\sqrt{X}}.$$

$$\text{wo } A_s = \frac{2(n-s+1)}{(2n-2s-1)a} A_{s-1}, \; A_1 = \frac{1}{(2n-1)a}.$$

$$\int \frac{x\,dx}{X^n} = -\frac{1}{(n-1)2b X^{n-1}}$$

$$\int X^{\frac{2n+1}{2}} dx = (A_0 X^n + A_1 X^{n-1} + A_2 X^{n-3} + \cdots$$
$$+ A_{n-1} X + A_n) x \sqrt{X} + A_n a \int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

$$\text{wo } A_s = \frac{(2n-2s+3)a}{2n-2s+1} A_{s-1}. \quad A_1 = \frac{1}{2n+2}.$$

$$\int x\,dx\, X^n = \frac{X^{n+1}}{(n+1)2b}.$$

$$\int \frac{X^{\frac{2n+1}{2}} dx}{x} = \left(\frac{X^n}{2n+1} + \frac{a X^{n-1}}{2n-1} + \frac{a^2 X^{n-2}}{2n-3} + \cdots\right.$$
$$\left. + \frac{a^{n-2} X^2}{5} + \frac{a^{n-1} X}{3} + \frac{a^n}{1}\right) \sqrt{X} + a^{n+1} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int \frac{dx}{x X^{\frac{2n+1}{2}}} = \left[\frac{1}{(2n-1)a X^{n-1}} + \frac{1}{(2n-3)a^2 X^{n-2}} + \frac{1}{(2n-5)a^3 X^{n-3}} + \cdots\right.$$
$$\left. + \frac{1}{3a^{n-1} X} + \frac{1}{a^n}\right] \frac{1}{\sqrt{X}} + \frac{1}{a^n} \int \frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

51) $ax + bx^2 = X.$

$$\int x^m X^{\frac{n}{2}} dx = (A_1 x^{m-1} - A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} + \cdots$$
$$(-1)^p A_{p-1} x^{m-p+1} (-1)^{p+1} A_p x^{m-p}) X^{\frac{n}{2}+1}$$
$$(-1)^{p+2} \left(m + \frac{n}{2} - p + 1\right) a A_p \int x^{m-p} X^{\frac{n}{2}} dx,$$

$$\text{wo } A_s = \frac{(2m+n-2s+4)a}{(m+n-s+2)2b} A_{s-1}, \; A_1 = \frac{1}{(m+n+1)b}.$$

$$\int \frac{X^{\frac{n}{2}} dx}{x^m} = \left[\frac{A_0}{x^m} - \frac{A_1}{x^{m-1}} + \frac{A_2}{x^{m-2}} - \cdots\right.$$
$$\left.(-1)^{p-2} \frac{A_{p-2}}{x^{m-p+2}} (-1)^{p-1} \frac{A_{p-1}}{x^{m-p+1}}\right] X^{\frac{n}{2}+1}$$
$$(-1)^{p-1} (m-n-p-1) b A_{p-1} \int \frac{X^{\frac{n}{2}} dx}{x^{m-p}},$$

$$\text{wo } A_s = \frac{(m-n-s-1)2b}{(2m-n-2s-2)a} A_{s-1}, \; A_0 = -\frac{2}{(2m-n-2)a}.$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{X^{\frac{n}{2}}} = \Big[ A_1 x^{m-1} - A_2 x^{m-2} + A_3 x^{m-3} - \cdots$$

$$(-1)^{p-2} A_{p-1} x^{m-p+1} (-1)^{p-1} A_p x^{m-p} \Big]' X^{-\frac{n}{2}+1}$$

$$(-1)^p \left(m - \frac{n}{2} - p + 1\right) a A_p \int \frac{x^{m-p}\,dx}{X^{\frac{n}{2}}},$$

wo $A_s = \frac{(2m-n-2s+4)a}{(m\ n-s+2)2b} A_{s-1}$, $A_1 = \frac{1}{(m-n+1)b}$.

$$\int \frac{dx}{x^m\, X^{\frac{n}{2}}} = \Big[ \frac{A_0}{x^m} - \frac{A_1}{x^{m-1}} + \frac{A_2}{x^{m-2}} - \frac{A_3}{x^{m-3}} + \cdots$$

$$(-1)^{p-2} \frac{A_{p-2}}{x^{m-p+2}} (-1)^{p-1} \frac{A_{p-1}}{x^{m-p+1}} \Big] X^{-\frac{n}{2}+1}$$

$$(-1)^{p-1} (m-n-p+1) b A_{p-1} \int \frac{dx}{x^{m-p} X^{\frac{n}{2}}},$$

wo $A_s = \frac{(m+n-s-1)2b}{(2m+n-2s-2)a} A_{s-1}$.

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}}} = \Big[ \frac{A_1}{X^{\frac{n-3}{2}}} - \frac{A_3}{X^{\frac{n-5}{2}}} + \frac{A_5}{X^{\frac{n-7}{2}}} - \cdots$$

$$(-1)^{\frac{n-3}{2}} \frac{A_{n-4}}{X^2} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{A_{n-2}}{X} \Big] \frac{2U}{\sqrt{X}} (-1)^{\frac{n-1}{2}} 8b A_{n-1} \int \frac{dx}{\sqrt{X^3}},$$

wo $A_{2s+1} = \frac{(n-2s+2)4b}{(n-2s+1)a^2} A_{2s-1}$, $A_1 = -\frac{1}{(n-2)a^2}$,

$U = a + 2bx$.

52) Sei $a + bx + cx^2 = X$, $4ac - b^2 = k$.

$$\int x^m X^p\,dx = \frac{x^{m+1} X^p}{m+1} - \frac{pb}{m+1} \int x^{m+1} X^{p-1}\,dx - \frac{2pc}{m+1} \int x^{m+2} X^{p-1}\,dx.$$

$$\int x^m X^p\,dx = \frac{x^{m-1} X^{p+1}}{(m+2p+1)c} - \frac{(m-1)a}{(m+2p+1)c} \int x^{m-2} X^p\,dx$$

$$- \frac{(m+p)b}{(m+2p+1)c} \int x^{m-1} X^p\,dx.$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{X^p} = \frac{x^{m-1}}{(m-2p+1)cX^{p-1}} - \frac{(m-1)a}{(m-2p+1)c} \int \frac{x^{m-2}\,dx}{X^p}$$

$$- \frac{(m-p)b}{(m-2p+1)c} \int \frac{x^{m-1}\,dx}{X^p}.$$

$$\int \frac{x^p\,dx}{x^m} = - \frac{X^p}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{pb}{m-1} \int \frac{X^{p-1}\,dx}{x^{m-1}} + \frac{2pc}{m-1} \int \frac{X^{p-1}\,dx}{x^{m-2}}.$$

$$\int x^m X^p\,dx = \frac{x^{m+1} X^p}{m+2p+1} + \frac{2pa}{m+2p+1} \int x^m X^{p-1}\,dx$$

$$\frac{pb}{m+2p+1} \int x^{m+1} X^{p-1}\,dx.$$

$$\int \frac{X^p dx}{x^m} = -\frac{X^p}{(m-2p-1)\,x^{m-1}} - \frac{2pa}{m-2p-1}\int \frac{X^{p-1}dx}{x^m}$$
$$- \frac{pb}{m-2p-1}\int \frac{X^{p-1}dx}{x^{m-1}}.$$

$$\int \frac{X^p dx}{x^m} = -\frac{X^{p+1}}{(m-1)ax^{m-1}} - \frac{(m-p-2)\,b}{(m-1)\,a}\int \frac{X^p\,dx}{x^{m-1}} - \frac{(m-2p-3)\,c}{(m-1)\,a}\int \frac{X^p\,dx}{x^{m-2}}.$$

$$\int \frac{dx}{x^m\,X^p} = -\frac{1}{(m-1)\,a^{m-1}\,X^{p-1}} - \frac{(m+p-2)\,b}{(m-1)\,a}\int \frac{dx}{x^{m-1}\,X^p}$$
$$- \frac{(m+2p-3)\,c}{(m-1)\,a}\int \frac{dx}{X^{m-2}X^p}.$$

$$\int \frac{dx}{X^p} = \frac{2cx+b}{(p-1)kX^{p-1}} + \frac{(2p-3)2c}{(p-1)k}\int \frac{dx}{X^{p-1}}.$$

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}}} = \left(\frac{A_3}{X^{\frac{n-3}{2}}} + \frac{A_5}{X^{\frac{n-5}{5}}} + \frac{A_7}{X^{\frac{n-7}{2}}} + \cdots\right.$$
$$\left. + \frac{A_{2p-1}}{X^{\frac{n-2p+1}{2}}} + \frac{A_{2p+1}}{X^{\frac{n-2p-1}{2}}}\right) \frac{2(2cx+b)}{\sqrt{X}} + (n-2p-1)4cA_{2p+1}\int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}-p}},$$

wo $A_{2s+1} = \frac{(n-2s+1)4c}{(n-2s)\,k}A_{2s-1},\ A_3 = \frac{1}{(n-2)k}.$

$$\int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}}} = \left(\frac{A_3}{X^{\frac{n-3}{2}}} + \frac{A_5}{X^{\frac{n-5}{2}}} + \frac{A_7}{X^{\frac{n-7}{2}}} + \cdots\right.$$
$$\left. + \frac{A_{n-4}}{X^2} + \frac{A_{n-2}}{X}\right) \frac{2(2cx+b)}{\sqrt{X}} + 8c\,A_{n-2}\int \frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}},$$

wo $A_{2s+1} = \frac{(n-2s+1)4c}{(n-2s)k}A_{2s-1},\ A_s = \frac{1}{(n-2)\,k}.$

$$\int X^{\frac{n}{2}}dx = \left(A_1 x^{\frac{n-1}{2}} + A_3 X^{\frac{n-3}{2}} + A_5 X^{\frac{n-5}{2}} + \cdots + A_{2p-3}X^{\frac{n-2p+3}{2}}\right.$$
$$\left. + A_{2p-1}X^{\frac{n-2p+1}{2}}\right)(2cx+b)\sqrt{X} + \frac{n-2p+2}{2}k\,A_{2p-1}\int X^{\frac{n}{2}-p}dx,$$

wo $A_{2s-1} = \frac{(n-2s+4)k}{(n-2s+3)4c}A_{2s-3},\ A_1 = \frac{1}{(n+1)2c}.$

$$\int X^{\frac{n}{2}}dx = \left(A_1 X^{\frac{n-1}{2}} + A_3 X^{\frac{n-3}{2}} + A_5 X^{\frac{n-5}{2}} + \cdots\right.$$
$$\left. + A_{n-4}X^2 + A_{n-2}X\right)(2cx+b)\sqrt{X} + \frac{3k\,A_{n-2}}{2}\int \sqrt{X}dx,$$

wo $A_{2s-1} = \frac{(n-2s+4)k}{(n-2s+3)4c}A_{2s-3},\ A_1 = \frac{1}{(n+1)2c}.$

$$\int \frac{xdx}{X^{\frac{n}{2}}} = -\frac{1}{(n-2)c\,X^{\frac{n}{2}-1}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{X^{\frac{n}{2}}}.$$

$$\int xX^{\frac{n}{2}}dx = \frac{X^{\frac{n}{2}+1}}{(n+2)c} - \frac{b}{2c}\int X^{\frac{n}{2}}dx.$$

$$\int \frac{dx}{xX^{\frac{n}{2}}} = \frac{1}{(n-2)aX^{\frac{n-2}{2}}} + \frac{1}{a}\int\frac{dx}{xX^{\frac{n-2}{2}}} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X^{\frac{n}{2}}}.$$

$$\int \frac{X^{\frac{n}{2}}dx}{x} = \frac{X^{\frac{n}{2}}}{n} + a\int\frac{X^{\frac{n-2}{2}}dx}{x} + \frac{b}{2}\int X^{\frac{n-2}{2}}dx.$$

$$\int\frac{dx}{xX^{\frac{2n+1}{2}}} = \Big[\frac{1}{(2n-1)aX^{n-1}} + \frac{1}{(2n-3)a^2X^{n-2}} + \frac{1}{(2n-5)a^3X^{n-3}} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{5a^{n-2}X^2} + \frac{1}{3a^{n-1}X} + \frac{1}{a^n}\Big]\frac{1}{\sqrt{X}}$$

$$-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{X^{\frac{2n+1}{2}}} - \frac{b}{2a^2}\int\frac{dx}{X^{\frac{2n-1}{2}}} - \frac{b}{2a^3}\int\frac{dx}{X^{\frac{2n-3}{2}}} - \cdots$$

$$-\frac{b}{2a^{n-1}}\int\frac{dx}{X^{\frac{5}{2}}} - \frac{b}{2a^n}\int\frac{dx}{X^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{a^n}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

$$\int\frac{X^{\frac{2n+1}{2}}dx}{x} = \Big[\frac{X^n}{2n+1} + \frac{aX^{n-1}}{2n-1} + \frac{a^2X^{n-2}}{2n-3} + \frac{a^3X^{n-3}}{2n-5} + \cdots$$

$$+ \frac{a^{n-2}X^2}{5} + \frac{a^{n-1}X}{3} + a^n\Big]\sqrt{X}$$

$$+\frac{b}{2}\int X^{\frac{2n-1}{2}}dx + \frac{ab}{2}\int X^{\frac{2n-3}{2}}dx + \frac{a^2b}{2}\int X^{\frac{2n-5}{2}}dx + \cdots$$

$$+\frac{a^{n-2}b}{2}\int X^{\frac{3}{2}}dx + \frac{a^{n-1}b}{2}\int\sqrt{X}dx + \frac{a^nb}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{X}} + a^{n+1}\int\frac{dx}{x\sqrt{X}}.$$

### III. Integrale transcendenter Functionen.

1) $\int \sin\varphi^m d\varphi$.

$$\int\sin\varphi\, d\varphi = -\cos\varphi$$

$$\int\sin\varphi^2 d\varphi = -\tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\int\sin\varphi^3 d\varphi = (-\tfrac{1}{3}\sin\varphi^2 - \tfrac{2}{3})\cos\varphi$$

$$\int\sin\varphi^4 d\varphi = (-\tfrac{1}{4}\sin\varphi^3 - \tfrac{3}{8}\sin\varphi)\cos\varphi + \tfrac{3}{8}\varphi$$

$$\int\sin\varphi^5 d\varphi = (-\tfrac{1}{5}\sin\varphi^4 - \tfrac{4}{15}\sin\varphi^2 - \tfrac{8}{15})\cos\varphi.$$

2) $\int \cos\varphi^m d\varphi$.

$$\int\cos\varphi\, d\varphi = \sin\varphi$$

$$\int\cos\varphi^2 d\varphi = \tfrac{1}{2}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi$$

$$\int\cos\varphi^3 d\varphi = (\tfrac{1}{3}\cos\varphi^2 + \tfrac{2}{3})\sin\varphi$$

$$\int\cos\varphi^4 d\varphi = (\tfrac{1}{4}\cos\varphi^3 + \tfrac{3}{8}\cos\varphi)\sin\varphi + \tfrac{3}{8}\varphi$$

$$\int\cos\varphi^5 d\varphi = (\tfrac{1}{5}\cos\varphi^4 + \tfrac{4}{15}\cos\varphi^2 + \tfrac{8}{15})\sin\varphi.$$

3) $\int\sin\varphi^p\cos\varphi^n d\varphi.$

$$\int\sin\varphi\cos\varphi^n d\varphi = -\frac{1}{n+1}\cos\varphi^{n+1}$$

$$\int\cos\varphi\sin\varphi^n d\varphi = \frac{1}{n+1}\sin\varphi^{n+1}$$

$$\int\sin\varphi^2\cos\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{3}\sin\varphi^3$$

$$\int\sin\varphi^2\cos\varphi^2 d\varphi = \tfrac{1}{4}\sin\varphi^3\cos\varphi - \tfrac{1}{8}\sin\varphi\cos\varphi + \tfrac{1}{8}\varphi$$

$$\int\sin\varphi^2\cos\varphi^4 d\varphi = \tfrac{1}{6}\sin\varphi^3\cos\varphi^3 + \tfrac{1}{2}\int\sin\varphi^2\cos\varphi^2 d\varphi$$

$$\int\sin\varphi^2\cos\varphi^5 d\varphi = (\tfrac{1}{7}\cos\varphi^4 + \tfrac{4}{35}\cos\varphi^2 + \tfrac{8}{105})\sin\varphi^3$$

$$\int\sin\varphi^3\cos\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{4}\sin\varphi^4$$

$$\int\sin\varphi^3\cos\varphi^2 d\varphi = (\tfrac{1}{5}\sin\varphi^4 - \tfrac{1}{15}\sin\varphi^2 - \tfrac{2}{15})\cos\varphi$$

$$\int\sin\varphi^3\cos\varphi^3 d\varphi = (\tfrac{1}{6}\cos\varphi^2 + \tfrac{1}{12})\sin\varphi^4$$

$$\int\sin\varphi^3\cos\varphi^4 d\varphi = \tfrac{1}{7}\sin\varphi^4\cos\varphi^5 - \tfrac{3}{7}\int\sin\varphi^3\cos\varphi^2 d\varphi$$

$$\int\sin\varphi^4\cos\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{5}\sin\varphi^5$$

$$\int\sin\varphi^4\cos\varphi^2 d\varphi = (\tfrac{1}{6}\sin\varphi^5 - \tfrac{1}{24}\sin\varphi^3 - \tfrac{1}{16}\sin\varphi)\cos\varphi + \tfrac{1}{16}\varphi$$

$$\int\sin\varphi^4\cos\varphi^3 d\varphi = (\tfrac{1}{7}\cos\varphi^2 + \tfrac{2}{35})\sin\varphi^5$$

$$\int\sin\varphi^5\cos\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{6}\sin\varphi^6$$

$$\int\sin\varphi^5\cos\varphi^2 d\varphi = \tfrac{1}{7}\sin\varphi^6\cos\varphi + \tfrac{1}{7}\int\sin\varphi^5 d\varphi$$

$$\int\sin\varphi^5\cos\varphi^3 d\varphi = (\tfrac{1}{8}\cos\varphi^2 + \tfrac{1}{24})\sin\varphi^6.$$

4) $\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^n}$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \lg\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^2} = -\cot\varphi$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^3} = -\frac{\cos\varphi}{2\sin\varphi^2} + \tfrac{1}{2}\lg\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^4} = -\cot\varphi - \tfrac{1}{3}\cot\varphi^3$$

$$\int\frac{d\varphi}{\sin\varphi^5} = \left(-\frac{1}{4\sin\varphi^4} - \frac{3}{8\sin\varphi^2}\right)\cos\varphi + \tfrac{3}{8}\lg\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

5) $\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^n}$.

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^2} = \operatorname{tg}\varphi$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^3} = \frac{\sin\varphi}{2\cos\varphi^2} + \tfrac{1}{2}\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^4} = \operatorname{tg}\varphi + \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\varphi^3$$

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi^5} = \left(\frac{1}{4\cos\varphi^4} + \frac{3}{8\cos\varphi^2}\right)\sin\varphi + \tfrac{3}{8}\lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

6) $\int \frac{\sin\varphi^n}{\cos\varphi} d\varphi$.

$$\int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} d\varphi = -\lg\cos\varphi$$

$$\int \frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi} d\varphi = -\sin\varphi + \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\int \frac{\sin\varphi^3}{\cos\varphi} d\varphi = -\frac{\sin\varphi^2}{2} - \lg\cos\varphi$$

$$\int \frac{\sin\varphi^4}{\cos\varphi} d\varphi = -\frac{\sin\varphi^3}{3} - \sin\varphi + \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\int \frac{\sin\varphi^5}{\cos\varphi} d\varphi = -\frac{\sin\varphi^4}{4} - \frac{\sin\varphi^2}{2} - \lg\cos\varphi.$$

7) $\int \frac{\cos\varphi^n}{\sin\varphi} d\varphi$.

$$\int \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} d\varphi = \lg\sin\varphi$$

$$\int \frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi} d\varphi = \cos\varphi + \lg \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$\int \frac{\cos\varphi^3}{\sin\varphi} d\varphi = \frac{\cos\varphi^2}{2} + \lg\sin\varphi$$

$$\int \frac{\cos\varphi^4}{\sin\varphi} d\varphi = \frac{\cos\varphi^3}{3} + \cos\varphi + \lg \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$\int \frac{\cos\varphi^5}{\sin\varphi} d\varphi = \frac{\cos\varphi^4}{4} + \frac{\cos\varphi^2}{2} + \lg\sin\varphi.$$

8) $\int \frac{\sin\varphi^n}{\cos\varphi^2} d\varphi$.

$$\int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^2} d\varphi = \frac{1}{\cos\varphi} = \sec\varphi$$

$$\int \frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2} d\varphi = \operatorname{tg}\varphi - \varphi$$

$$\int \frac{\sin\varphi^{3}}{\cos\varphi^{2}} = \cos\varphi + \sec\varphi$$

$$\int \frac{\sin\varphi^{4}}{\cos\varphi^{2}}\, d\varphi = (-\tfrac{1}{2}\sin\varphi^{3} + \tfrac{3}{2}\sin\varphi)\frac{1}{\cos\varphi} - \tfrac{3}{2}\varphi$$

$$\int \frac{\sin\varphi^{5}}{\cos\varphi^{2}}\, d\varphi = (-\tfrac{1}{3}\sin\varphi^{4} - \tfrac{4}{3}\sin\varphi^{2} + \tfrac{8}{3})\frac{1}{\cos\varphi}.$$

9) $\int \frac{\cos\varphi^{n}}{\sin\varphi^{2}}\, d\varphi.$

$$\int \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi^{2}}\, d\varphi = -\frac{1}{\sin\varphi}$$

$$\int \frac{\cos\varphi^{2}}{\sin\varphi^{2}}\, d\varphi = -\cot\varphi - \varphi$$

$$\int \frac{\cos\varphi^{3}}{\sin\varphi^{2}}\, d\varphi = -\sin\varphi - \operatorname{cosec}\varphi$$

$$\int \frac{\cos\varphi^{4}}{\sin\varphi^{2}}\, d\varphi = (\tfrac{1}{2}\cos\varphi^{3} - \tfrac{3}{2}\cos\varphi)\frac{1}{\sin\varphi} - \tfrac{3}{2}\varphi$$

$$\int \frac{\cos\varphi^{5}}{\sin\varphi^{2}}\, d\varphi = (\tfrac{1}{3}\cos\varphi^{4} + \tfrac{4}{3}\cos\varphi^{2} - \tfrac{8}{3})\frac{1}{\sin\varphi}.$$

10) $\int \frac{\sin\varphi^{n}}{\cos\varphi^{3}}\, d\varphi.$

$$\int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^{3}}\, d\varphi = \frac{1}{2\cos\varphi^{2}}$$

$$\int \frac{\sin\varphi^{2}}{\cos\varphi^{3}}\, d\varphi = \frac{\sin\varphi}{2\cos\varphi^{2}} - \tfrac{1}{2}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\int \frac{\sin\varphi^{3}}{\cos\varphi^{3}}\, d\varphi = \frac{1}{2\cos\varphi^{2}} + \lg\cos\varphi$$

$$\int \frac{\sin\varphi^{4}}{\cos\varphi^{3}}\, d\varphi = (-\sin\varphi^{3} + \tfrac{3}{2}\sin\varphi)\frac{1}{\cos\varphi^{2}} - \tfrac{3}{2}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\int \frac{\sin\varphi^{5}}{\cos\varphi^{3}}\, d\varphi = (-\tfrac{1}{2}\sin\varphi^{4} + 1)\frac{1}{\cos\varphi^{2}} + 2\lg\cos\varphi,$$

11) $\int \frac{\cos\varphi^{n}}{\sin\varphi^{3}}\, d\varphi.$

$$\int \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi^{3}}\, d\varphi = -\frac{1}{2\sin\varphi^{2}}$$

$$\int \frac{\cos\varphi^{2}}{\sin\varphi^{3}}\, d\varphi = -\frac{\cos\varphi}{2\sin\varphi^{2}} - \tfrac{1}{2}\lg\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$\int \frac{\cos\varphi^{3}}{\sin\varphi^{3}}\, d\varphi = -\frac{1}{2\sin\varphi^{2}} - \lg\sin\varphi$$

$$\int \frac{\cos\varphi^{4}}{\sin\varphi^{3}}\, d\varphi = (\cos\varphi^{3} - \tfrac{3}{2}\cos\varphi)\frac{1}{\sin\varphi^{2}} - \tfrac{3}{2}\lg\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$\int \frac{\cos\varphi^{5}}{\sin\varphi^{3}}\, d\varphi = (\tfrac{1}{2}\cos\varphi^{4} - 1)\frac{1}{\sin\varphi^{2}} - 2\lg\sin\varphi.$$

12) $\int \frac{\sin\varphi^n}{\cos\varphi^4}\,d\varphi.$

$$\int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^4}\,d\varphi = \frac{1}{3\cos\varphi^3}$$

$$\int \frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi^4}\,d\varphi = \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\varphi^3$$

$$\int \frac{\sin\varphi^3}{\cos\varphi^4}\,d\varphi = (\sin\varphi^2 - \tfrac{2}{3})\frac{1}{\cos\varphi^3}$$

$$\int \frac{\sin\varphi^4}{\cos\varphi^4}\,d\varphi = \tfrac{1}{3}\operatorname{tg}\varphi^3 - \operatorname{tg}\varphi + \varphi$$

$$\int \frac{\sin\varphi^5}{\cos\varphi^4}\,d\varphi = (-\sin\varphi^4 + 4\sin\varphi^2 - \tfrac{8}{3})\frac{1}{\cos\varphi^3}.$$

13) $\int \frac{\cos\varphi^n}{\sin\varphi^4}\,d\varphi.$

$$\int \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi^4}\,d\varphi = -\frac{1}{3\sin\varphi^3}$$

$$\int \frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi^4}\,d\varphi = -\tfrac{1}{3}\cot\varphi^3$$

$$\int \frac{\cos\varphi^3}{\sin\varphi^4}\,d\varphi = (-\cos\varphi^2 + \tfrac{2}{3})\frac{1}{\sin\varphi^3}$$

$$\int \frac{\cos\varphi^4}{\sin\varphi^4}\,d\varphi = -\tfrac{1}{3}\cot\varphi^3 + \cot\varphi + \varphi$$

$$\int \frac{\cos\varphi^5}{\sin\varphi^4}\,d\varphi = (\cos\varphi - 4\cos\varphi^2 + \tfrac{8}{3})\frac{1}{\sin\varphi^3}.$$

14) $\int \frac{\sin\varphi^n}{\cos\varphi^5}\,d\varphi.$

$$\int \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi^5}\,d\varphi = \frac{1}{4\cos\varphi^4}$$

$$\int \frac{\sin\varphi^2}{\cos\varphi^5}\,d\varphi = (\tfrac{1}{4}\sin\varphi^3 + \tfrac{1}{8}\sin\varphi)\frac{1}{\cos\varphi^4} - \tfrac{1}{8}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\int \frac{\sin\varphi^3}{\cos\varphi^5}\,d\varphi = \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\varphi^4$$

$$\int \frac{\sin\varphi^4}{\cos\varphi^5}\,d\varphi = (\tfrac{5}{8}\sin\varphi^3 - \tfrac{3}{8}\sin\varphi)\frac{1}{\cos\varphi^4} + \tfrac{3}{8}\lg\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\int \frac{\sin\varphi^5}{\cos\varphi^5}\,d\varphi = \tfrac{1}{4}\operatorname{tg}\varphi^4 - \tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\varphi^2 - \lg\cos\varphi.$$

15) $\int \frac{\cos\varphi^n}{\sin\varphi^5}\,d\varphi.$

$$\int \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi^5}\,d\varphi = -\frac{1}{4\sin\varphi^4}$$

$$\int \frac{\cos\varphi^2}{\sin\varphi^5}\,d\varphi = (-\tfrac{1}{4}\cos\varphi^3 - \tfrac{1}{8}\cos\varphi)\frac{1}{\sin\varphi^4} - \tfrac{1}{8}\lg\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$\int \frac{\cos\varphi^3}{\sin\varphi^5}\,d\varphi = -\tfrac{1}{4}\cot\varphi^4$$

$$\int \frac{\cos\varphi^4}{\sin\varphi^5}\,d\varphi = \left(-\tfrac{3}{8}\cos\varphi^3 + \tfrac{3}{8}\cos\varphi\right)\frac{1}{\sin\varphi^4} + \tfrac{3}{8}\ \text{tg}\ \lg\frac{\varphi}{2}$$

$$\int \frac{\cos\varphi^5}{\sin\varphi^5}\,d\varphi = -\tfrac{1}{4}\cot\varphi^4 + \tfrac{1}{2}\cot\varphi^2 + \lg\sin\varphi.$$

$$16)\quad \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^n\ \cos\varphi^n}.$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi\ \cos\varphi} = \lg\,\text{tg}\,\varphi$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi\ \cos\varphi^2} = \frac{1}{\cos\varphi} + \lg\,\text{tg}\,\frac{\varphi}{2}$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi\ \cos\varphi^3} = \frac{1}{2\cos\varphi^2} + \lg\,\text{tg}\,\varphi$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi\ \cos\varphi^4} = \frac{1}{3\cos\varphi^3} + \frac{1}{\cos\varphi} + \lg\,\text{tg}\,\frac{\varphi}{2}$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi\ \cos\varphi^5} = \frac{1}{4\cos\varphi^4} + \frac{1}{2\cos\varphi^2} + \lg\,\text{tg}\,\varphi$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^2\ \cos\varphi} = -\frac{1}{\sin\varphi} + \lg\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^2\ \cos\varphi^2} = -2\cot 2\varphi$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^2\ \cos\varphi^3} = \left(\frac{1}{2\cos\varphi^2} - \tfrac{3}{2}\right)\frac{1}{\sin\varphi} + \tfrac{3}{2}\lg\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^2\ \cos\varphi^4} = \frac{1}{3\sin\varphi\ \cos\varphi^3} - \tfrac{8}{3}\cot 2\varphi$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^3\ \cos\varphi} = -\frac{1}{2\sin\varphi^2} + \lg\,\text{tg}\,\varphi$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^3\ \cos\varphi^2} = \frac{1}{\sin\varphi^2\ \cos\varphi} + 3\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^3}$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^3\ \cos\varphi^3} = -\frac{2\cos 2\varphi}{\sin 2\varphi^2} + 2\lg\,\text{tg}\,\varphi$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^4\ \cos\varphi} = -\frac{1}{3\sin\varphi^3} - \frac{1}{\sin\varphi} + \lg\,\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^4\ \cos\varphi^2} = -\frac{1}{3\cos\varphi\ \sin\varphi^3} - \tfrac{8}{3}\cot 2\varphi$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^5\ \cos\varphi} = -\frac{1}{4\sin\varphi^4} - \frac{1}{2\sin\varphi^2} + \lg\,\text{tg}\,\varphi$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi^5\ \cos\varphi^2} = \left(-\frac{1}{4\sin\varphi^4} - \frac{5}{8\sin\varphi^2} + \tfrac{15}{8}\right)\frac{1}{\cos\varphi} + \tfrac{15}{8}\lg\,\text{tg}\,\frac{\varphi}{2}.$$

**Diesen Entwicklungen liegen die Reductionsformeln des Abschnittes 27) zu Grunde.**

17) $\int \varphi^n \sin \varphi d\varphi$.

$$\int \varphi^n \sin \varphi d\varphi = -\varphi^n \cos \varphi + n\varphi^{n-1} \sin \varphi + n(n-1)\varphi^{n-2} \cos \varphi$$
$$- n(n-1)(n-2)\varphi^{n-3} \sin \varphi - n(n-1)(n-2)(n-3)\varphi^{n-4} \cos \varphi + \cdots$$

$$\int \varphi \sin \varphi d\varphi = -\varphi \cos \varphi + \sin \varphi$$

$$\int \varphi^2 \sin \varphi d\varphi = -\varphi^2 \cos \varphi + 2\varphi \sin \varphi + 2 \cos \varphi$$

$$\int \varphi^3 \sin \varphi d\varphi = -\varphi^3 \cos \varphi + 3\varphi^2 \sin \varphi + 6\varphi \cos \varphi - 6 \sin \varphi$$

$$\int \varphi^4 \sin \varphi d\varphi = -\varphi^4 \cos \varphi + 4\varphi^3 \sin \varphi + 12\varphi^2 \cos \varphi - 24\varphi \sin \varphi - 24 \cos \varphi$$

$$\int \varphi^5 \sin \varphi d\varphi = -\varphi^5 \cos \varphi + 5\varphi^4 \sin \varphi + 20\varphi^3 \cos \varphi - 60\varphi^2 \sin \varphi - 120\varphi \cos \varphi + 120 \sin \varphi$$

18) $\int \varphi^n \cos \varphi d\varphi$.

$$\int \varphi^n \cos \varphi d\varphi = \varphi^n \sin \varphi + n\varphi^{n-1} \cos \varphi - n(n-1)\varphi^{n-2} \sin \varphi$$
$$- n(n-1)(n-2)\varphi^{n-3} \cos \varphi + \cdots$$

$$\int \varphi \cos \varphi d\varphi = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$$

$$\int \varphi^2 \cos \varphi d\varphi = \varphi^2 \sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi$$

$$\int \varphi^3 \cos \varphi d\varphi = \varphi^3 \sin \varphi + 3\varphi^2 \cos \varphi - 6\varphi \sin \varphi - 6 \cos \varphi$$

$$\int \varphi^4 \cos \varphi d\varphi = \varphi^4 \sin \varphi + 4\varphi^3 \cos \varphi - 12\varphi^2 \sin \varphi - 24\varphi \cos \varphi + 24 \sin \varphi$$

$$\int \varphi^5 \cos \varphi d\varphi = \varphi^5 \sin \varphi + 5\varphi^4 \cos \varphi - 20\varphi^3 \sin \varphi - 60\varphi^2 \cos \varphi + 120\varphi \cos \varphi + 120 \sin \varphi$$

19) $\int X \varphi dx$.

$X$ ist eine beliebige algebraische Function, $\varphi$ irgend ein Arcus von $x$.

$$\int X \arcsin x dx = \arcsin x \int X dx - \int \frac{dx \int X dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\int X \arccos x dx = \arccos x \int X dx + \int \frac{dx \int X dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\int X \operatorname{arc\,tg} x dx = \operatorname{arc\,tg} x \int X dx - \int \frac{dx \int X dx}{1+x^2}$$

$$\int X \operatorname{arc\,cot} x dx = \operatorname{arc\,cot} x \int X dx + \int \frac{dx \int X dx}{1+x^2}$$

Einzelne Fälle:

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\int x^m \arcsin x dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \arcsin x - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)}} dx = \tfrac{1}{2} (\arcsin x)^2$$

$$\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)}}\,dx = -\arcsin x \cdot \sqrt{(1-x^2)} + x$$

$$\int \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}(\operatorname{arc\,tg} x)^2$$

20) $\int X \lg Z^n \, dx.$

X und Z sind algebraische Functionen von $x$.

$$\int X \lg Z dx = \lg Z \int X dx - \int \frac{dZ \int X dx}{Z}$$

$$\int x^m \lg x \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\lg x - \frac{1}{m+1}\right)$$

$$\int (a+bx)^m \lg x \, dx = \frac{(a+bx)^{m+1}}{(m+1)b} \lg x - \frac{1}{(m+1)b} \int \frac{(a+bx)^{m+1}}{x}\,dx$$

$$\int X \lg x^n dx = X_1 \lg x^n - n X_2 \lg x^{n-1} + n(n-1) X_3 \lg x^{n-2}$$
$$+ n(n-1)(n-2) X_4 \lg x^{n-3} + \cdots,$$

wo $X_1 = \int X dx, \quad X_2 = \int \frac{X_1 dx}{x}, \quad X_3 = \int \frac{X_2 dx}{x} \cdots\cdot$

$$\int \frac{\lg x^n}{x}\,dx = \frac{1}{n+1} \lg x^{n+1}$$

$$\int x^m \lg x^2 \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\lg x^2 - \frac{2}{m+1} \lg x + \frac{2\cdot 1}{(m+1)^2}\right)$$

$$\int x^m \lg x^3 dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\lg x^3 - \frac{3}{m+1} \lg x^2 + \frac{3\cdot 2}{(m+1)^2} \lg x - \frac{3\cdot 2\cdot 1}{(m+1)^3}\right)$$

$$\int \frac{X}{\lg x^n}\,dx = -\frac{Xx}{(n-1)\lg x^{n-1}} - \frac{X'x}{(n-1)(n-2)\lg x^{n-2}}$$
$$- \frac{X''x}{(n-1)(n-2)(n-3)\lg x^{n-3}} - \cdots - \frac{X^{(s)}x}{(n-1)(n-2)\cdots(n-s-1)\lg x^{n-s-1}}$$
$$+ \frac{1}{(n-1)(n-2)\cdots(n-s-1)} \int \frac{X^{(s+1)} dx}{\lg x^{n-s-1}},$$

wo $X' = \frac{d(Xx)}{dx}, \quad X'' = \frac{d(X'x)}{dx}, \quad X''' = \frac{d(X''x)}{dx}, \cdots\cdot$

$$\int \frac{x^m dx}{\lg x^n} = -\frac{x^{m+1}}{(n-1)\lg x^{n-1}} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{(n-1)(n-2)\lg x^{n-2}}$$
$$- \frac{(m+1)^2 x^{m+1}}{(n-1)(n-2)(n-3)\lg x^{n-3}} - \cdots - \frac{(m+1)^{n-2}\, x^{m+1}}{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1 \lg x}$$
$$+ \frac{(m+1)^{n-1}}{(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1} \int \frac{x^m dx}{\lg x}$$

$$\int \frac{x^m dx}{\lg x^2} = -\frac{x^{m+1}}{\lg x} + (m+1)\int \frac{x^m dx}{\lg x}$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{\lg x^3} = -\frac{x^{m+1}}{2\lg x^2} - \frac{(m+1)x^{m+1}}{2\cdot 1\lg x} + \frac{(m+1)^2}{2\cdot 1}\int \frac{x^m\,dx}{\lg x}$$

$$\int \frac{x^m\,dx}{\lg x} = \int \frac{dy}{\lg y}, \text{ wenn } y = x^{m+1} \text{ ist.}$$

21) $\int a^x X dx.$

$$\int a^x X dx = \frac{a^x X}{\lg a} - \frac{a^x X'}{\lg a^2} + \frac{a^x X''}{\lg a^3} - \frac{a^x X'''}{\lg a^4} + \dots,$$

$$\text{wo } X' = \frac{dX}{dx},\quad X'' = \frac{dX'}{dx},\quad X''' = \frac{dX''}{dx} \dots,$$

$$\int a^x X dx = a^x X_1 - a^x X_2 \lg a + a^x X_3 \lg a^2 - \dots$$

$$\text{wo } X_1 = \int X dx,\quad X_2 = \int X_1 dx,\quad X_3 = \int X_2 dx \dots$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\lg a}$$

$$\int x a^x dx = \frac{x a^x}{\lg a} - \frac{a^x}{\lg a^2}$$

$$\int x^2 a^x dx = \frac{a^x x^2}{\lg a} - \frac{2x a^x}{\lg a^2} + \frac{2a^x}{\lg a^3}$$

$$\int x^3 a^x dx = \frac{x^3 a^x}{\lg a} - \frac{3x^2 a^x}{\lg a^2} + \frac{3\cdot 2 x a^x}{\lg a^3} - \frac{3\cdot 2\cdot a^x}{\lg a^4}$$

$$\int \frac{a^x dx}{x^2} = -\frac{a^x}{x} + \lg a \int \frac{a^x dx}{x}$$

$$\int \frac{a^x dx}{x^3} = -\frac{a^x}{2x^2} - \frac{a^x \lg a}{2\cdot 1 x} + \frac{\lg a^2}{2\cdot 1}\int \frac{a^x dx}{x}$$

22) $\int e^{\alpha x} \sin x^n dx. \quad \int e^{\alpha x} \cos x^n dx.$

$$\int e^{\alpha x} \sin x^n dx = \frac{e^{\alpha x} \sin x^{n-1}(\alpha \sin x - n \cos x)}{\alpha^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2 + n^2}\int e^{\alpha x} \sin^{n-2} x dx$$

$$\int e^{\alpha x} \cos x^n dx = \frac{e^{\alpha x} \cos x^{n-1}(\alpha \cos x + n \sin x)}{\alpha^2 + n^2} + \frac{n(n-1)}{\alpha^2 + n^2}\int e^{\alpha x} \cos^{n-2} x dx$$

$$\int e^{\alpha x} \sin x dx = \frac{e^{\alpha x}(a \sin x - \cos x)}{\alpha^2 + 1}$$

$$\int e^{\alpha x} \sin x^2 dx = \frac{e^{\alpha x} \sin x(\alpha \sin x - 2\cos x)}{\alpha^2 + 4} + \frac{1\cdot 2}{\alpha(\alpha^2+4)} e^{\alpha x}$$

$$\int e^{\alpha x} \sin x^3 dx = \frac{e^{\alpha x} \sin x^2 (\alpha \sin x - 3\cos x)}{\alpha^2 + 9} + \frac{2\cdot 3 e^{\alpha x}(\alpha \sin x - \cos x)}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+9)}$$

$$\int e^{\alpha x}\cos x\,dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha\cos x+\sin x)}{\alpha^2+1}$$

$$\int e^{\alpha x}\cos x^2\,dx = \frac{e^{\alpha x}\cos x(\alpha\cos x+2\sin x)}{\alpha^2+4}+\frac{1\cdot 2}{\alpha(\alpha^2+4)}e^{\alpha x}.$$

$$\int e^{\alpha x}\cos x^3\,dx = \frac{e^{\alpha x}\cos x^2(\alpha\cos x+3\sin x)}{\alpha^2+9}+\frac{2\cdot 3e^{\alpha x}(\alpha\cos x+\sin x)}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+9)}$$

23) $\int\frac{(\alpha+\beta\cos\varphi)d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n}$.

$$\int\frac{(\alpha+\beta\cos\varphi)d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^n} = \frac{(a\beta-b\alpha)\sin\varphi}{(n-1)(a^2-b^2)(a+b\cos\varphi)^{n-1}}$$
$$+\frac{1}{(n-1)(a^2-b^2)}\int\frac{[(n-1)(a\alpha-b\beta)+(n-2)(a\beta-b\alpha)\cos\varphi]d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^{n-1}}$$

$$\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\arccos\frac{b+a\cos\varphi}{a+b\cos\varphi},$$

wenn $b$ kleiner als $a$,

$$\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(b^2-a^2)}}\lg\frac{b+a\cos\varphi+\sqrt{(b^2-a^2)}\sin\varphi}{a+b\cos\varphi},$$

wenn $b$ grösser als $a$ ist.

$$\int\frac{d\varphi}{a+a\cos\varphi} = \frac{1}{a}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$

$$\int\frac{d\varphi\sin\varphi}{a+b\cos\varphi} = -\frac{1}{b}\lg(a+b\cos\varphi)$$

$$\int\frac{d\varphi\cos\varphi}{a+b\cos\varphi} = \frac{\varphi}{b}-\frac{a}{b}\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}$$

$$\int\frac{d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2} = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{-b\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}+a\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}\right)$$

$$\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(a+b\cos\varphi)^2} = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{a\sin\varphi}{a+b\cos\varphi}-b\int\frac{d\varphi}{a+b\cos\varphi}\right)$$

29) Integration durch Reihen.

Die Darstellung eines Integrals in der Gestalt schon bekannter algebraischer oder transcendenter Functionen gelingt natürlich nicht in allen Fällen, und was namentlich die Quadraturen algebraischer Functionen anbetrifft, so lassen sich dieselben im Allgemeinen nur dann in der angegebenen Form darstellen, wenn darin nur eine Wurzel vorhanden ist, die den zweiten Grad nicht überschreitet, und eine ganze Function der Unbekannten von einem ebenfalls nicht höherm Grade als dem zweiten enthält. Von transcendenten Functionen sind ebenfalls die meisten nicht in dieser Weise darstellbar. Z. B. bei den oft vorkommenden Integralen:

$$\int\frac{dx}{\lg x},\quad\int e^{ax}\frac{dx}{x},\quad\int e^{-ax^2}dx$$

ist dieses der Fall.

Man kann aber in jedem Falle die Function unter dem Integralzeichen in eine unendliche Reihe entwickeln, und die letztere integriren, wodurch man das Integral ebenfalls in Form einer unendlichen Reihe erhält, die auch im Allgemeinen dann convergiren wird, wenn die erste Reihe convergirt.

Ist nämlich:

$$f(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\varphi_3(x)+\cdots+\varphi_n(x)+\psi_n(x)$$

eine solche convergirende Entwicklung von $f(x)$ und $\psi_n(x)$ der Rest, der sich also mit wachsendem $n$ der Null nähert, so wird auch sein:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta \varphi_1(x)\,dx+\int_\alpha^\beta \varphi_2(x)\,dx+\int_\alpha^\beta \varphi_3(x)\,dx+$$

$$\cdots+\int_\alpha^\beta \varphi_n(x)dx+\int_\alpha^\beta \psi_n(x)dx$$

und der Rest $\int_\alpha^\beta \psi_n(x)dx$ wird mit wachsendem $n$ verschwinden, wenn das Argument $\psi_n(x)$ innerhalb der Grenzen der Integration, also zwischen $\alpha$ und $\beta$ verschwindet, „somit wird die Entwicklung für $\int f(x)dx$ also convergiren, wenn die Entwicklung von $f(x)$ für alle Werthe von $x$ zwischen $\alpha$ und $\beta$ convergirt." Es ist hier vorausgesetzt, dass $\alpha$ und $\beta$ reell sind, und der Weg der Integration auch nur durch reelle Werthe von $x$ geht. „Ist dies aber nicht der Fall, so muss die Entwicklung von $f(x)$ für alle Werthe von $x$ convergiren, denen man auf dem Integrationswege begegnet," damit die Reihenentwicklung für das Integral einen Sinn gebe.

In einem gewissen Falle kann aber die Reihenentwicklung für das Integral noch dann stattfinden, wenn die für das Argument schon aufgehört hat zu convergiren.

Ist nämlich

$$f(x)=\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\cdots+\varphi_n(x)+\cdots$$

convergent für alle Werthe von $x=\alpha$ bis $x=\beta$, jedoch die Grenze $\beta$ nicht eingeschlossen, so dass die Entwicklung für $f(\beta)$ also nicht mehr stattfindet; ist aber die Entwicklung:

$$\int_\alpha^{\beta'} f(x)\,dx=\int_\alpha^{\beta'} \varphi_1(x)dx+\int_\alpha^{\beta'} \varphi_2(x)\,dx+\int_\alpha^{\beta'} \varphi_3(x)dx+$$

$$\cdots+\int_\alpha^{\beta'} \varphi_n(x)dx+\cdots$$

noch convergent für $\beta'=\beta$, so bleibt diese Reihenentwicklung für diesen Fall noch richtig, vorausgesetzt, dass

$\int_\alpha^\beta f(x)dx$ und die Reihenentwicklung rechts nicht discontinuirlich werden.

Denn beide Ausdrücke rechts und links sind continuirlich, und stimmen für alle Werthe von $\beta'$ zwischen $\alpha$ und $\beta$ miteinander überein, können also für $\beta'=\beta$ um keine endliche Grösse von einander abweichen. Die am häufigsten vorkommende Reihenentwicklung ist die nach Potenzreihen.

Sei

$$f(x)=\Sigma a_p x^p$$

und convergire diese Entwicklung zwischen $x=\alpha$ und $x=\beta$, so ist:

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\Sigma a_p\left(\frac{\beta^{p+1}-\alpha^{p+1}}{p+1}\right).$$

**Beispiele.**

Sei gegeben

$$\int\frac{dx}{\lg x}.$$

Die untere Grenze dieses Integrals möge Null sein. Setzen wir

$$y=-\lg x,$$

so wird

$$dy=-\frac{dx}{x}$$

und

$$dx=-x dy=-e^{-y}dy,$$

für

$$x=0$$

wird

$$y=+\infty,$$

also:

$$\int_0^x\frac{dx}{\lg x}=\int_{+\infty}^y\frac{e^{-y}dy}{y}.$$

Diese beiden in bereits bekannten Formen nicht darstellbare Integrale lassen

sich also durch einander ausdrücken. Das erstere wird auch „Integrallogarithmus" genannt.

Wie die Tafeln des vorigen Abschnittes zeigen, lässt sich jedes Integral von der Form $\int \frac{X dx}{\lg x^n}$, wo $X$ eine rationale Function von $x$ ist, auf einen entwickelbaren Theil und einen Integrallogarithmus zurückführen.

Die Reihe:

$$e^{-y} = 1 - y + \frac{y^2}{1\cdot2} - \frac{y^3}{1\cdot2\cdot3} + \cdots$$

$$(-1)^s \frac{y^s}{1\cdot2\cdot3\cdots s} \pm \cdots,$$

convergirt immer, also auch:

$$\frac{e^{-y}}{y} = \frac{1}{y} - 1 + \frac{y}{1\cdot2} - \frac{y^2}{1\cdot2\cdot3} + \cdots$$

$$(-1)^s \frac{y^{s-1}}{1\cdot2\cdot3\cdots s} \pm \cdots,$$

wenn $y$ nicht gleich Null ist, und man hat:

$$\int \frac{e^{-y} dy}{y} = \lg y - y + \frac{y^2}{1\cdot2\cdot2} - \frac{y^3}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4}$$

$$- \cdots (-1)^s \frac{y^s}{1\cdot2\cdots s\cdot s} \pm \cdots + \text{Const.}$$

Es ist noch die Constante zu bestimmen aus der Bedingung, dass für $y = \infty$ das Integral Null werden soll.

Sei

$$\varphi(y) = \lg y - y + \frac{y^2}{1\cdot2\cdot2} - \frac{y^3}{1\cdot2\cdot3\cdot3} + \cdots,$$

so ist

$$\int_\infty^y \frac{e^{-y} dy}{y} = \varphi(y) + C$$

und

$$\varphi(\infty) + C = 0,$$

also:

$$\int_\infty^y \frac{e^{-y} dy}{y} = \varphi(y) - \varphi(\infty).$$

Die Entwicklung des Werthes von $\varphi(\infty)$ ist deshalb nicht ohne Schwierigkeit, weil für $y = \infty$ auch $\lg y$ ins Unendliche wächst; jedoch lässt sich zeigen, dass nichts desto weniger $\varphi(y)$ für diesen Werth endlich bleibt.

Nimmt man nämlich die untere Grenze des Integrals gleich einer zu bestimmenden Zahl $a$ an, so ist

$$\int_a^y \frac{e^{-y} dy}{y} = \varphi(y) - \varphi(a).$$

Wir setzen ferner

$$f(y) = \frac{1}{a}(e^{-a} - e^{-y}),$$

woraus sich ergibt

$$\varphi'(y) = \frac{e^{-y}}{y},$$

$$f'(y) = \frac{e^{-y}}{a},$$

und es ist $f(y)$ das Integral von $f'(y)dy$ in denselben Grenzen $a$ und $y$ wie das eben betrachtete genommen.

Sei nun $y$ grösser als $a$, so wird der Ausdruck $f'(y)$ immer grösser als $\varphi'(y)$ sein, und beide Ausdrücke sind immer positiv, es wird also sowohl $\varphi(y) - \varphi(a)$ als auch $f(y)$ immer zunehmen, wenn $y$ wächst, der erstere Ausdruck aber wird langsamer wachsen als der zweite. Wird nun

$$y = \infty,$$

so hat man

$$f(\infty) = \frac{1}{ae^a}$$

und es wird sein:

$$\varphi(\infty) - \varphi(a) < \frac{1}{ae^a}.$$

Setzt man also für $a$ eine hinreichend grosse Zahl, so wird dieser Werth sich nur um eine Grösse, die kleiner als $\frac{1}{ae^a}$ ist, von $\varphi(\infty)$ unterscheiden können, also zur Berechnung von $\varphi(\infty)$ dienen können, da $\frac{1}{ae^a}$ nach Null hin convergirt.

Es ist z. B. für $a = 10$ $\quad \frac{1}{ae^a} < 0{,}0001,$

$$\varphi(a) = \lg a - a + \frac{a^2}{1\cdot2\cdot2} - \frac{a^3}{1\cdot2\cdot3\cdot3} + \cdots = 0{,}57721,$$

also

$$\varphi(\infty) = 0{,}5772 \cdots,$$

da eine Abweichung erst in der fünften Bruchstelle stattfinden kann. Mithin

$$\int_{\infty}^{y}\frac{e^{-y}dy}{y}=\lg y-y+\frac{y^2}{1\cdot2\cdot2}-\frac{y^3}{1\cdot2\cdot3\cdot3}+\frac{y^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4}\cdots-0{,}5772-\cdots,$$

jedoch nur unter der Bedingung, dass $y$ positiv sei.

Da

$$y=-\lg x$$

war, so setzt das voraus, dass $\lg x$ negativ, also $x$ kleiner als 1 ist, und man hat:

$$\int_{0}^{x}\frac{dx}{\lg x}=\lg(-\lg x)+\lg x+\frac{(\lg x)^2}{1\cdot2\cdot2}+\frac{(\lg x)^3}{1\cdot2\cdot3\cdot3}+\cdots+C,$$

wenn $x$ kleiner als Eins ist.

Ist $x$ grösser als Eins, so setzt man

$$s=+\lg x,$$

und erhält:

$$\int_{a}^{x}\frac{dx}{\lg x}=\int_{\lg \alpha}^{s}\frac{e^s\,ds}{s}=\lg s+s+\frac{s^2}{1\cdot2\cdot2}+\frac{s^3}{1\cdot2\cdot3\cdot3}+\cdots+C$$

und wenn man die Reihe

$$\lg s+s+\frac{s^2}{1\cdot2\cdot2}+\frac{s^3}{1\cdot2\cdot3\cdot3}+\cdots=\psi(s)$$

setzt, so ist

$$C=-\psi(\lg \alpha)$$

und

$$\int_{\alpha}^{x}\frac{dx}{\lg(x)}=\lg(\lg x)+\lg x+\frac{(\lg x)^2}{1\cdot3\cdot2}+\frac{(\lg x)^3}{1\cdot2\cdot3\cdot3}+\frac{(\lg x)^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot4}+\cdots-\psi(\lg \alpha).$$

Wir haben hier die untere Grenze vor der Hand willkürlich angenommen.

Nimmt man dieselbe gleich 1 oder kleiner als 1, so wird das Argument unendlich, wenn man sich die Quadratur auf dem gradlinigten Wege ausgeführt denkt.

Es ist nämlich $\lg 1=0$. Es finden also die Betrachtungen des Abschnitts 10) Anwendung. Sei $\lambda$ kleiner als 1, so ist:

$$\int_{\lambda}^{1-\delta}\frac{dx}{\lg(x)}=\varphi[-\lg(1-\delta)]-\varphi(-\lg\lambda).$$

Es ist nämlich, wenn $\delta$ positiv ist, die zuerst gegebene Entwicklung anzuwenden, wo $y=-\lg x$ gesetzt wurde.

$$\int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dx}{\lg x}=\psi(\lg x)-\psi\lg(1+\varepsilon).$$

Nähern sich aber $\delta$ und $\varepsilon$ der Null, so verschwinden in den Reihen für

$$\varphi[-\lg(1-\delta)]$$

und

$$\psi[\lg(1+\varepsilon)]$$

alle Glieder bis auf die ersten, und es wird:

$$\psi[\lg(1+\varepsilon)]=\lg\lg(1+\varepsilon),$$

$$\varphi[-\lg(1-\delta)]=\lg[-\lg(1-\delta)],$$

so dass man hat:

$$\int_{\lambda}^{x}\frac{dx}{\lg x}=\int_{\lambda}^{1-\delta}\frac{dx}{\lg x}+\int_{1+\varepsilon}^{x}\frac{dx}{\lg x}=\psi\lg(x)-\varphi(-\lg\lambda)+\lg\left(-\frac{\lg(1-\delta)}{\lg(1+\varepsilon)}\right).$$

Da aber

$$-\frac{\lg(1-\delta)}{\lg(1+\varepsilon)}=\frac{\delta}{\varepsilon}$$

mit abnehmenden $\delta$ und $\varepsilon$ wird, so ist das Integral völlig unbestimmt, und man muss daher, falls man die Integration auf einer graden Linie fortführen will, die untere Grenze $\alpha$ grösser als Eins nehmen, wenn die obere grösser als Eins ist.

Macht man jedoch um den Punkt $x=1$ herum eine Ausbiegung, lässt also die Variable imaginär werden, so nimmt das Integral je nach der Wahl des Weges eine ganz bestimmte Bedeutung an.

Wenn man z. B. einen unendlich kleinen Halbkreis mit Radius $r$ unter der Abscissenaxe (d. h. auf der Seite, wo die Ordinaten negativ sind) wählt, so hat man für diesen Weg:

$$\int \frac{dx}{\lg x} = -\int_0^{\pi} \frac{d(re^{\varphi i})}{\lg(1-re^{\varphi i})},$$

wo

$$x = 1 - re^{\varphi i}$$

gesetzt worden ist *). Aber für unendlich kleines $r$ ist:

$$\lg(1-re^{\varphi i}) = -re^{\varphi i},$$

also

$$\int_0^{\pi} \frac{-dre^{\varphi i}}{\lg(1-re^{\varphi i})} = \int_0^{\pi} \frac{rie^{\varphi i}\,d\varphi}{re^{\varphi i}} = i\pi.$$

Soll der Halbkreis über der Abscissen-Axe (d. h. da, wo die Ordinaten positiv sind) liegen, so werden die Integrationsgrenzen dieses Weges 0 und $-\pi$, und man hat den Werth des Integrals $-i\pi$. Es ist aber:

$$\int_{\lambda}^{x} \frac{dx}{\lg x} = \int_{\lambda}^{1-r} \frac{dx}{\lg x} + \int \frac{dx}{\lg x} + \int_{1+r}^{x} \frac{dx}{\lg x},$$

wo das mittlere Integral das über den Halbkreis erstreckte ist. In der Formel

$$-\frac{\lg(1-\delta)}{\lg(1+\varepsilon)} = \frac{\delta}{\varepsilon}$$

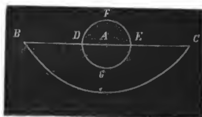
ist also $\delta = \varepsilon = r$ zu setzen, und es ergibt sich

$$\lg\left(-\frac{\lg(1-\delta)}{\lg(1+\varepsilon)}\right) = \lg 1 = 0,$$

$$\int_{\lambda}^{x} \frac{dx}{\lg x} = \psi(\lg x) - \varphi(-\lg\lambda) \pm \pi,$$

je nachdem man den über oder unter der Abscissenaxe liegenden Halbkreis nimmt.

Fig. 28.




Im ersten Falle ist (Fig. 28.) das Integral über den Weg $BDFEC$, im zweiten über $BDGEC$ erstreckt, wo Punkt $A$ den Abscissenwerth 1 hat, und $AD = AE = r$ ist.

Man kann aber auch den Weg von $B$ bis $D$ nehmen, dann den ganzen Kreis $DGEF$ beliebig viele Male in einer oder der andern Richtung entlang, und dann von $D$ auf dem ersten oder dem zweiten Wege weiter nach $C$ gehen. Es wird dann unser Ausdruck bei der Umkreisung noch um das über $DGEFD$ erstreckte Integral von $\int \frac{dx}{\lg x}$ vermehrt. Dies Integral aber ist gleich:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dre^{\varphi i}}{re^{\varphi i}} = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i,$$

oder gleich:

$$i\int_0^{-2\pi} d\varphi = -2\pi i,$$

je nachdem man die Richtung $DGEFD$ oder $DFEGD$ wählt.

Denkt man sich also dieses Umkreisen eine beliebige Anzahl von Malen fortgesetzt, so kommt

$$\int_{\lambda}^{x} \frac{dx}{\lg x} + \psi(\lg x) - \varphi(-\lg\lambda) + (2s+1)\pi,$$

wo $s$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ist.

*) Setzt man nämlich $x = p + qi$, und denkt sich unter $p$ und $q$ Coordinaten, so ist

$$p = 1 - r\cos\varphi,\quad q = -r\sin\varphi,$$

also $\qquad x = 1 - re^{\varphi i}$.

Das Integral hat also unendlich viel Werthe, die sich um ungrade Vielfache von $\pi$ von einander unterscheiden.

Da übrigens nur für $x = 1$ die Discontinuität von $\frac{1}{\lg x}$ stattfindet, so kann nach dem Abschnitt 13, I. Gesagten kein andrer Integrationsweg neue Werthe für unser Integral ergeben.

Denn da sich z. B. zwischen *BMC* und *BDGEC* kein Discontinuitätspunkt befindet, so geben beide Wege gleiche Werthe für unser Integral.

II. Bestimmen wir noch das Integral $\int_0^x e^{-x^2} dx$, welches in der Methode der kleinsten Quadrate (siehe den entsprechenden Artikel) eine wichtige Rolle spielt, wie überhaupt in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Man hat:

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{1\cdot 2} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots$$

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{x^5}{5} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{x^7}{7} + \cdots,$$

eine Reihe, welche immer convergirt, und also zur Berechnung dieses Integrals gebraucht werden kann, was auch $x$ sei. Mehrdeutigkeit findet bei diesem Integral nicht statt, da $e^{-x^2}$ stets continuirlich ist, so lange $x$ nicht unendlich wird.

30) Nicht immer aber braucht man die ganze unter dem Integralzeichen befindliche Function in eine Reihe zu entwickeln. Ist z. B.

$$\int f(x)\cdot \varphi(x)\, dx$$

gegeben, und

$$f(x) = \Sigma a_p x^p$$

eine convergirende Entwicklung, so ist:

$$\int f(x)\varphi(x)\,dx = \Sigma a_p \int x^p \varphi(x)\,dx,$$

und es ist dann möglich, dass sich das Integral $\int x^p \varphi(x)\,dx$ bestimmen lässt.

Diese Methode findet z. B. Anwendung, wenn $\varphi(x)$ eine Exponentialgrösse oder eine trigonometrische Function, oder eine Quadratwurzel einer ganzen algebraischen Function zweiter Ordnung vorstellt.

Ein Beispiel bietet das Integral des elliptischen Bogens:

$$\int_0^x dx \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x_2}},$$

bei welchem wir annehmen, dass e kleiner als 1 ist. Man hat

$$\sqrt{(1-e^2x^2)} = 1 - \tfrac{1}{2}e^2x^2 - \frac{1}{1\cdot 2}\frac{1}{2^2}e^4x^4 - \frac{1\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\; 2^3}e^6x^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 2^4}e^8x^8 - \cdots,$$

$$\int_0^x dx\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)}} - \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2s-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots s\cdot 2^s} e^{2s} \int_0^x \frac{x^{2s}dx}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$= \arcsin x + \frac{e^2}{4}(x\sqrt{(1-x^2)} - \arcsin x) + \frac{e^4}{32}[(x^3+\tfrac{3}{2}x)\sqrt{(1-x^2)} - \tfrac{3}{2}\arcsin x]$$

$$+ \frac{e^6}{96}[(x^5+\tfrac{5}{4}x^3+\frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}x)\sqrt{(1-x^2)} - \frac{3\cdot 5}{2\cdot 4}\arcsin x] + \cdots\cdots$$

Diese Reihe convergirt sehr stark, wenn $e$ ein sehr kleiner Bruch ist. Ist letzteres nicht der Fall, so kann man setzen:

$$\sqrt{(1-e^2x^2)} = \sqrt{[1-e^2+e^2(1-x^2)]} = e\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{1+\frac{1-e^2}{e^2(1-x^2)}}$$

und es wird:

$$\sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}} = e\sqrt{1+\frac{1-e^2}{e^2(1-x^2)}} = e[1+\tfrac{1}{2}\frac{1-e^2}{e^2(1-x^2)} - \tfrac{1}{8}\frac{(1-e^2)^2}{e^4(1-x^2)^2}$$

$$- \tfrac{1}{16}\frac{(1-e^2)^3}{e^6(1-x^2)^3} - \cdots]$$

$$\int dx \sqrt{\frac{1-e^2x^2}{1-x^2}} = e\left[x + \frac{1-e^2}{4e^2}\lg\frac{1+x}{1-x} - \frac{(1-e^2)^2}{16e^4}\left(\frac{x}{1-x^2} + \tfrac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}\right)\right.$$
$$\left. - \frac{(1-e^2)^3}{64e^6}\left(\frac{x}{(1-x^2)^2} + \tfrac{3}{2}\frac{x}{1-x^2} + \tfrac{3}{4}\lg\frac{1+x}{1-x}\right) + \cdots\right],$$

eine Reihe, welche gut convergirt, wenn $e$ der Eins sehr nahe liegt.

Auch das theilweise Integriren bietet ein Mittel zur Reihenentwicklung dar. Man hat:

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int x\frac{df(x)}{dx}dx$$

oder in der Lagrangeschen Bezeichnung:

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \int xf'(x)\,dx$$
$$\int xf'(x)dx = \tfrac{1}{2}x^2f'(x) - \tfrac{1}{2}\int x^2f''(x)\,dx$$
$$\int x^2f''(x)\,dx = \tfrac{1}{3}x^3f''(x) - \tfrac{1}{3}\int x^3f'''(x)\,dx$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\int x^{n-1}f^{(n-1)}(x)\,dx = \frac{1}{n}x^nf^{(n-1)}(x) - \frac{1}{n}\int x^nf^{(n)}(x)\,dx,$$

also:

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \frac{1}{1\cdot2}x^2f'(x) + \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}f''(x) - \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}f'''(x) + \cdots$$
$$(-1)^{n-1}\frac{1}{1\cdot2\cdots n}x^nf^{(n-1)}(x)\ \frac{(-1)^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\int x^nf^n(x)\,dx + \text{const.}$$

Also wenn man als die Grenzen des Integrals $x$ und $\alpha$ annimmt:

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx = xf(x) - \frac{x^2}{1\cdot2}f'(x) + \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}f''(x) - \cdots \frac{(-1)^{n-1}}{1\cdot2\cdots n}x^nf^{(n-1)}(x)$$
$$-\alpha f(\alpha) + \frac{\alpha^2}{1\cdot2}f'(\alpha) - \frac{\alpha^3}{1\cdot2\cdot3}f''(\alpha) - \cdots (-1)^{n-1}\frac{\alpha^n}{1\cdot2\cdots n}f^{(n-1)}\alpha$$
$$\frac{(-1)^n}{1\cdot2\cdot3\cdots n}\int_\alpha^x x^nf^{(n)}(x)\,dx.$$

Diese Reihe convergirt also immer, wenn der Ausdruck $\int_\alpha^x x^n f^{(n)}(x)dx$ mit wachsendem $n$ sich der Null nähert.

In Abschnitt 6) wurde die Formel bewiesen:

$$\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,f(x)\,dx = f[\alpha+\varepsilon(\beta-\alpha)]\int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx,$$

wo $\varepsilon$ ein positiver echter Bruch ist, und $\varphi(x)$ zwischen den Grenzen $\alpha$ und $\beta$ sein Zeichen nicht ändert.

Wenden wir dies auf das Integral $\int_\alpha^x x^n f^{(n)}(x)\,dx$ an, bei welchem wir voraussetzen, dass $\alpha$ und $x$ gleiche Vorzeichen haben, dann wird auch $x^n$ zwischen $\alpha$ und $x$ seine Zeichen nicht ändern, und man hat:

$$\int_\alpha^x x^nf^{(n)}(x)dx = f^{(n)}[\alpha+\varepsilon(x-\alpha)]\frac{(x^{n+1} - \alpha^{n+1})}{n+1},$$

also:

$$\int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx = xf(x) - \frac{x^2}{1\cdot 2} f''(x) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(x) - \cdots$$

$$\frac{(-1)^{n-1} x^n f^{(n-1)}(x)}{1\cdot 2 \cdots n-1.} \; \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n+1} f^n[\alpha + \varepsilon(x-\alpha)]$$

$$-\alpha f(\alpha) + \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} f''(\alpha) - \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3} f'''(\alpha) + \cdots - \frac{(-1)^{n-1} \alpha^n f^{(n-1)}(\alpha)}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n-1}$$

$$\frac{(-1)^n}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n+1} \alpha^{n+1} f^n[\alpha + \varepsilon(x-\alpha)],$$

ein Ausdruck, von dem der letzte nach Potenzen von $\alpha$ geordnete Theil verschwindet, wenn man die untere Integrationsgrenze gleich Null nimmt.

Selbstverständlich kann auch die theilweise Integration in andrer, als der hier gegebenen Weise fortgesetzt werden, und so zu Reihenentwicklungen führen, wovon wir hier noch ein Beispiel geben wollen:

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = xe^{-x^2} + 2\int_0^x x^2 e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^x x^2 e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{3} x^3 e^{-x^2} + \tfrac{2}{3} \int_0^x x^4 e^{-x^2} dx$$

$$\int_0^x x^4 e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{5} x^5 e^{-x^2} + \tfrac{2}{5} \int_0^x x^6 e^{-x^2} dx.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int_0^x x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2n+1} x^{2n+1} e^{-x^2} + \frac{2}{2n+1.} \int_0^x x^{2n+2} e^{-x^2} dx.$$

Also wenn man diese Resultate vereinigt:

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = xe^{-x^2} [1 + \tfrac{2}{3} x^2 + \frac{2^2}{3\cdot 5} x^4 + \frac{2^3}{3\cdot 5\cdot 7} x^6 + \cdots$$

$$+ \frac{2^n}{3\cdot 5\cdot 7 \cdots (2n+1)} x^{2n} + \frac{2^{n+1}}{3\cdot 5\cdot 7 \cdots (2n+1).} \int_0^x x^{2n+2} e^{-x^2} dx],$$

$$\int_0^x x^{2n+2} e^{-x^2} dx = e^{-\varepsilon x^2} \frac{x^{2n+3}}{2n+3},$$

wo $\varepsilon$ ein ächter Bruch ist. Da nun der Ausdruck:

$$\frac{2^{n+1}}{3\cdot 5\cdot 7 \cdots 2n+1.} \int_0^x x^{2n+2} e^{-x^2} dx = \frac{(2x^2)^{n+1} x}{3\cdot 5\cdot 7 \cdots 2n+1} \frac{e^{-\varepsilon x^2}}{2n+3}$$

selbst bei wachsendem $n$ über alle Grenzen abnimmt, da die wachsenden Factoren des Nenner, die sich gleichbleibenden des Zähler

$$(2x^2)\cdot(2x^2)\,(2x^2)\cdots$$

zuletzt um jede beliebige Grösse übertreffen müssen, so convergirt die Entwicklung, und man hat:

$$\int_0^x e^{-x^2} dx = xe^{-x^2} [1 + \tfrac{2}{3} x^2 + \frac{2^2}{3\cdot 5} x^4 + \frac{2^3}{3\cdot 5\cdot 7} x^6 + \cdots].$$

31) Mechanische Quadratur.

Die oben gegebene Integrationsmethode durch Reihen ist an die Convergenzbedingungen gebunden, also nicht allgemein anwendbar.

Dagegen ergibt sich zur annähernden Berechnung der Integrale unmittelbar aus der Grundform, welche wir den Integralen gegeben haben, eine allgemein gültige Methode.

Es war nämlich:

$$\int_{x_0}^{x_p} f(x)\,dx = \lim\,[(x_1-x_0)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_2)+(x_3-x_2)f(x_3)+\cdots +(x_p-x_{p-1})f(x_p)],$$

wo $x_1, x_2 \cdots x_{p-1}$ zwischen $x_0$ und $x_p$ liegende Zwischenwerthe sind, welche durch den Integrationsweg bestimmt werden. Hat $f(x)$ keinen mehrfachen und keinen Discontinuitätspunkt, so kann immer die von $x_0$ und $x_p$ begrenzte grade Linie genommen werden, wie ja stets zwei Wege mit einander vertauscht werden können, die zwischen $x_0$ und $x_p$ liegen, und zwischen denen sich ein solcher Punkt nicht befindet (siehe Abschnitt 13). Wir werden hier annehmen, dass $x_0$ und $x_p$ reell, und also der Integrationsweg die Abscissenaxe sei, da die Betrachtungen für andre Fälle keine weitern Schwierigkeiten machen.

Nimmt man die Unterschiede $x_1-x_0$, $x_2-x_1 \cdots x_p-x_{p-1}$ hinreichend klein, so wird der entsprechende Ausdruck, der sich unter dem Zeichen lim. befindet:

$$A=(x_1-x_0)f(x_1)+(x_2-x_1)f(x_2)+(x_3-x_2)f(x_3)+\cdots+(x_p-x_{p-1})f(x_p)$$

einen Näherungswerth für $\int_{x_0}^{x_p} f(x_p)\,dx$ geben, da, wenn diese Differenzen unendlich klein sind, das bestimmte Integral selbst erscheint. Vorausgesetzt ist natürlich, dass jedes Glied unsrer Summe: $(x_s-x_{s-1})f(x_s)$ nach Null hin convergirt, wenn sich $x_s$ und $x_{s-1}$ einander nähern.

Uebrigens ist auch:

$$\int_{x_0}^{x_p} f(x)\,dx = \lim\,[(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+(x_3-x_2)f(x_2)+\cdots +(x_p-x_{p-1})f(x_{p-1})],$$

da die Grössen $(x_s-x_{s-1})f(x_s)$ und $(x_s-x_{s-1})f(x_{s-1})$ nur einen verschwindenden Unterschied haben. Es ist also auch

$$B=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+(x_3-x_2)f(x_2)+\cdots+(x_p-x_{p-1})f(x_{p-1})$$

ein Annäherungswerth unseres Integrals.

Man kann aber auch statt eines unserer beiden Werthe, die arithmetische Mitte beider nehmen, also:

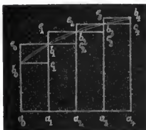
$$\frac{(x_1-x_0)}{2}[f(x_1)+f(x_0)]+\frac{(x_2-x_1)}{2}[f(x_2)+f(x_1)]+\frac{(x_3-x_2)}{2}[f(x_3)+f(x_2)]+\cdots +\frac{(x_p-x_{p-1})}{2}[f(x_p)+f(x_{p-1})]=C=\frac{A+B}{2}$$

und dieser Ausdruck wird jedenfalls dem wahren Werth des Integrals näher liegen, als einer der beiden zuerst gegebenen $A$ und $B$, nämlich als derjenige, welcher am weitesten von diesem wahren Werthe entfernt ist.

Nimmt man noch an, dass auf dem ganzen Integrationswege $f(x)$ sein Zeichen nicht wechsele und stets im Zunehmen bleibe, so wird offenbar $A$ zu gross, $B$ zu klein sein, während das Gegentheil stattfindet, wenn $f(x)$ stets abnimmt, und in diesem Falle wird also der Ausdruck $C$ als Mitte zwischen einem zu grossen und einem zu kleinen Werth, diesen beiden vorzuziehen sein.

Die Ausdrücke $A, B, C$ sind aber auch einer geometrischen Deutung fähig.

Fig. 29.



Sei die Curve (Fig. 29.) $b_0 b_1 b_2 b_3 b_4$ derart bestimmt, dass ihre Gleichung die Form

$$y = f(x)$$

habe.

Sei $a_0 a_4$ ein Stück der Absbissenaxe und mögen den Punkten

$$a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4$$

die Abscissenwerthe

$$x_0\, x_1\, x_2\, x_3\, x_4$$

entsprechen, so sind die Ordinaten

$$a_0 b_0,\ a_1 b_1,\ a_2 b_2,\ a_3 b_3,\ a_4 b_4$$

entsprechend gleich

$$f(x_0),\ f(x_1),\ f(x_2),\ f(x_3),\ f(x_4),$$

und es ist klar, dass wenn man die Anzahl der Theilpunkte $a_0 a_1 a_2 \ldots$ gleich $p+1$ annimmt, die Summe der Rechtecke:

$$a^0 b_0 a_1 c_1 + a_1 b_1 a_2 c_2 + a_2 b_2 a_3 c_3 + a_3 b_3 a_4 c_4 + \ldots \text{ gleich } B,$$

die Summe der Rechtecke:

$$a_0 e_0 a_1 b_1 + a_1 e_1 a_2 b_2 + a_2 e_2 a_3 b_3 + a_3 e_3 a_4 b_4 + \ldots \text{ gleich } A,$$

die Summe der Trapeze:

$$a_0 b_0 a_1 b_1 + a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2 b_2 a_3 b_3 + a_3 b_3 a_4 b_4 + \ldots \text{ gleich } C$$

ist. Alle drei Ausdrücke aber nähern sich, wenn die Punkte $a_0 a_1 a_2 a_3 a_4$ einander näher rücken, dem von der Curve, der Abscissenaxe und zwei Ordinaten begrenzten Ebenenstücke $a_0 b_0 b_4 a_4$ und dies ist also der wahre Werth des Integrals.

Es bleibt indess noch übrig, den Grad der Annäherung der Ausdrücke $A$, $B$, $C$ zu bestimmen.

Wir setzen wieder den gradlinigen Integrationsweg voraus, es werden dann die Grössen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1 \ldots x_p - x_{p-1}$ alle dasselbe Zeichen haben. Wir nehmen dies als positiv an.

Nun ist:

$$\int_{x_0}^{x_p} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx + \ldots$$
$$+ \int_{x_{p-1}}^{x_p} f(x)\,dx = \sum_{s=0}^{s=p-1} \int_{x_s}^{x_s+1} f(x)\,dx.$$

Wir setzen hierin

$$x = x_s + u.$$

Es werden dann die Grenzen der Integration

$$u = 0 \text{ für } x = x_s$$

und

$$u = x_{s+1} - x_s \text{ für } x = x_{s+1},$$

also:

$$\int_{x_0}^{x_p} f(x)\,dx = \sum_{s=0}^{s=p-1} \int_0^{x_s+1-x_s} f(x_s + u)\,du.$$

Es ergibt sich aber durch theilweises Integriren:

$$\int_0^{x_s+1-x_s} f(x_s+u)\,du = (x_{s+1} - x_s) f(x_{s+1}) - \int_0^{x_s+1-x_s} u f'(x_s+u)\,du,$$

wo

$$f'(x_s+u) = \frac{\partial f(x_s+u)}{\partial x_s} = \frac{\partial f(x_s+u)}{\partial u}$$

gesetzt wurde.

Durch Summation der den verschiedenen Werthen von $s$ entsprechenden Integrale erhält man einen Ausdruck, dessen entwickelter Theil mit dem Werthe von $A$ übereinstimmt, und es ist also:

$$\int_{x_0}^{x_p} f(x)\,dx = A - \sum_{s=0}^{s=p-1} \int_0^{x_{s+1}-x_s} uf'(x_s+u)du.$$

Da aber die Grösse $u$ zwischen 0 und $x_{s+1}-x_s$ ihr Zeichen nicht ändert, so hat man auch (vergleiche Abschnitt 6)

$$\int_0^{x_{s+1}-x_s} uf'(x_s+u)du = \tfrac{1}{2} f'[x_s+\epsilon(x_{s+1}-x_s)](x_{s+1}-x_s)^2,$$

wo $\epsilon$ ein positiver echter Bruch ist. Man hat also:

$$\int_{x_0}^{x_p} f(x)dx = A - \tfrac{1}{2} \sum_{s=0}^{s=p-1} (x_{s+1}-x_s)^2 f'[x_s+\epsilon(x_{s+1}-x_s)).$$

Der unter der Summe befindliche Theil aber verschwindet, wenn die Differenz $x_{s+1}-x_s$ abnimmt, und $f'(x)$ nicht unendlich wird. $A$ gibt also in diesem Falle einen Näherungswerth.

Setzen wir in den Ausdruck

$$\int_{x_s}^{x_{s+1}} f(x)dx,$$

$$x = x_{s+1} - u,$$

so wird:

$$u = x_{s+1} - x_s \text{ für } x = x_s,$$

$$u = 0 \text{ für } x = x_{s+1},$$

also:

$$\int_{x_s}^{x_{s+1}} f(x)\,dx = -\int_{x_{s+1}-x_s}^{0} f(x_{s+1}-u)du = \int_0^{x_{s+1}-x_s} f(x_{s+1}-u)\,du$$

und

$$\int_0^{x_{s+1}-x_s} f(x_{s+1}-u)du = (x_{s+1}-x_s)f(x_s) + \int_0^{x_{s+1}-x_s} uf'(x_{s+1}-u)\,du.$$

Es wird also wieder, wenn man die den verschiedenen Werthen von $x_s$ entsprechenden Integrale addirt:

$$\int_{x_0}^{x_p} f(x)\,dx = B + \sum_{s=0}^{s=p-1} \int_0^{x_{s+1}-x_s} uf'(x_{s+1}-u)\,du$$

oder wenn $\vartheta$ ein positiver echter Bruch ist:

$$\int_{x_0}^{x_p} f(x)dx = B + \tfrac{1}{2} \sum_{s=0}^{s=p-1} f'[x_{s+1} - \vartheta(x_{s+1}-x_s)](x_{s+1}-x_s)^2.$$

Aus den beiden Formen für das gesuchte Integral ergibt sich noch, dass falls $f'(x)$ während der Integration sein Zeichen nicht ändert, einer der Werthe $A$ und $B$ stets zu klein, der andere aber zu gross ist, und zwar ist, falls $f'(x)$ positiv ist, also der Werth von $f(x)$ immer wächst, $B$ zu klein, im entgegengesetzten Falle $A$ zu klein.

Durch Addition der beiden Werthe unseres Integrals ergibt sich noch:

$$\int_{x_0}^{x_p} f(x)\,dx = \frac{A+B}{2} + \sum_{s=0}^{s=p-1} \tfrac{1}{2}\int_0^{x_{s+1}-x_s} u[f'(x_{s+1}-u)-f'(x_s+u)]\,du$$

oder:

$$\int_{x_0}^{x_p} f(x)\,dx = \frac{A+B}{2} + \sum_{s=0}^{s=p-1} \tfrac{1}{4}(x_{s+1}-x_s)^2\,[f'(x_{s+1}-\vartheta(x_{s+1}-x_s)) - f'(x_s+\varepsilon(x_{s+1}-x_s))].$$

Es scheint in allen drei Ausdrücken hier die Bedingung, dass $A$, $B$ und $C$ Näherungswerthe für unser Integral geben, davon abzuhängen, dass $f'(x)$ auf dem Integrationswege nicht unendlich wäre. Jedoch ist dies nicht der Fall. Die Annäherung findet auch dann noch statt, wenn $f'(x)$ unendlich wird, vorausgesetzt, dass $f(x)$ seine Continuität nicht verliert. Es sei z. B.

$$f'(x_\varrho) = \infty,$$

so wird:

$$\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{x_\varrho - \varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_{\varrho+\vartheta}}^{x} f(x)\,dx,$$

wenn $\varepsilon$ und $\vartheta$ ins Unendliche abnehmen; denn da $f(x)$ endlich bleibt, kann der Fall eines singulären Integrals, wo der Werth von $\vartheta$ und $\varepsilon$ abhängt, nicht eintreten.

Entwickelt man nun die beiden Theil-Integrale

$$\int_{x_0}^{x_\varrho - \varepsilon} f(x)\,dx,$$

$$\int_{x_{\varrho+\vartheta}}^{x} f(x)\,dx$$

ganz nach der obigen Weise, so wird der erste Theil der Summe beider bezüglich mit $A$, $B$, $C$ zusammenfallen, wenn $\varepsilon$ und $\vartheta$ verschwinden, der Rest aber den Ausdruck $f'(x_\varrho)$ nicht enthalten, also ersterer ins Unendliche abnehmen, wenn die Differenz $x_{s+1}-x_s$ verschwindet.

32) Die im vorigen Abschnitte entwickelte Theorie gibt eine Art der mechanischen Quadratur. Im Allgemeinen aber bezeichnet man mit diesem Ausdruck jedes annähernde Integrationsverfahren, wobei statt der Differenziale endliche, aber kleine Differenzen genommen werden.

Es sollen hier noch einige Arten der mechanischen Quadratur entwickelt werden.

Sei wieder das Integral $\int_{x_0}^{x_p} f(x)dx$ gegeben, wo $f(x)$ innerhalb der Integrationsgrenzen continuirlich bleibt. Der Bequemlichkeit wegen bringen wir es jedoch auf die Grenzen Null und Eins, indem wir setzen:

$$x = x_0 + (x_p - x_0)u,$$

für $x = x_0$ wird in der That $u = 0$,
für $x = x_p$ wird $u = 1$;

ist noch

$$(x_p - x_0) f[x_0 + (x_p - x_0)u] = \varphi(u),$$

so hat man es mit dem Integral

$$\int_0^1 \varphi(u)\,du$$ zu thun.

Seien jetzt $a_1$, $a_2 \cdots a_n$ Zwischenwerthe zwischen Null und Eins ganz wie im vorigen Abschnitte. Wir wollen aber jetzt die Function $\varphi(u)$ durch eine andere ersetzen, da es nicht auf den allgemeinen Werth derselben, sondern nur auf die Werthe $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2) \cdots \varphi(a_n)$ ankommt. Wir suchen also eine ganze algebraische Function $\psi(u)$, welche für $u = a_1$, $u = a_2 \cdots u = a_n$ mit $\varphi(u)$ zusammenfallen soll.

Es ist dies die bekannte Aufgabe der Interpolation, deren Lösung darin besteht, dass man setzt:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3) \cdots (x - a_n),$$

$$\frac{\psi(x)}{f(x)} = \frac{\psi(a_1)}{f'(a_1)(x-a_1)} + \frac{\psi(a_2)}{f'(a_2)(x-a_2)} + \frac{\psi(a_3)}{f'(a_3)(x-a_3)} + \cdots + \frac{\psi(a_n)}{f'(a_n)(x-a_n)},$$

Nimmt man an, dass

$$\psi(a_1)=\varphi(a_1),\ \psi(a_2)=\varphi(a_2)\ \ldots\ \psi(a_n)=\varphi(a_n)$$

ist, so wird für:

$$x=a_1,\ x=a_2\ \ldots\ x=a_n$$

diese Gleichung identisch, also:

$$\psi(x)=f(x)\left[\frac{\varphi(a_1)}{f'(a_1)(x-a_1)}+\frac{\varphi(a_2)}{f'(a_2)(x-a_2)}+\frac{\varphi(a_3)}{f'(a_3)(x-a^3)}+\cdots+\frac{\varphi(a_n)}{f'(a_n)(x-a_n)}\right].$$

Es ist also $\psi(x)$ ein ganzes Polynom vom $n-1$ten Grade, welches unsre Bedingung erfüllt. Man ersetzt dann das Integral $\int_0^1 \varphi(u)\,du$ durch das immer zu berechnende $\int_0^1 \psi(u)\,du$, wobei man einen Fehler begeht, der gleich

$$\int_0^1 [\varphi(u)-\psi(u)]\,du$$

ist, oder gleich:

$$\varphi(\varepsilon)-\psi(\varepsilon),$$

wo $\varepsilon$ ein positiver echter Bruch ist, wie sich ergibt, wenn man das in Abschnitt 6 Gesagte hier anwendet. Da nun $\varphi(u)$ und $\psi(u)$ continuirliche Functionen sind, die $n$ mal gleich werden, so wird $\varphi(\varepsilon)-\psi(\varepsilon)$ der Null sehr nahe kommen, wenn $n$ gross wird.

Sind z. B. die Differenzen:

$a_2-a_1,\ a_3-a_2\ \ldots\ a_n-a_{n-1}$ alle gleich und gleich $\mu$,

$$a_1=0,\ a_n=1,$$

ferner

$$\varphi(0)=A_0,\ \varphi(\mu)=A_1,\ \varphi(2\mu)=A_2\ \ldots\ \varphi(1)=a_n,$$

so ist

$$\frac{1}{\mu}=n$$

und

$$\psi(x)=f(x)\sum_{s=0}^{s=\frac{1}{\mu}}\frac{A_s}{f'(\mu s)(x-\mu s)}.$$

Ist

$$K_s=\frac{1}{f'(\mu s)}\int_0^1\frac{f(x)\,dx}{x-\mu s},$$

so erhält man:

$$\int_0^1 \psi(x)dx=K_0A_0+K_1A_1+K_2A_2+\cdots+K_nA_n.$$

Es ist aber

$$K_{\left(\frac{1}{\mu}-s\right)}=\frac{1}{f'(1-s\mu)}\int_0^1\frac{f(x)dx}{x-1+s\mu}$$

und

$$f(1-x)=(1-x)(1-\mu-x)(1-2\mu-x)\ldots$$

$$\ldots(\mu-x)(-x)=(-1)^{\frac{1}{\mu}+1}f(x),$$

also:

$$f'(1-x)=(-1)^{\frac{1}{\mu}}f'(x),$$

$$f'(x)=(-1)^{\frac{1}{\mu}}f'(1-x),$$

woraus sich ergiht:

$$f'(s\mu)=(-1)^{\frac{1}{\mu}}f'(1-s\mu).$$

Schreibt man ferner $1-y$ für $x$, so kommt:

$$\int_0^1\frac{f(x)}{x-s\mu}dx=\int_0^1\frac{f(1-y)dy}{(1-s\mu)-y}$$

aber:

$$\frac{f(1-y)}{1-s\mu-y}=\frac{(-1)^{\frac{1}{\mu}}f(y)}{y-1+s\mu},$$

also:

$$\frac{1}{f'(s\mu)}\int_0^1\frac{f(x)dx}{x-s\mu}=\frac{1}{f'(1-s\mu)}\int_0^1\frac{f(y)\,dy}{y-1+sm},$$

d. h.

$$K_s=K_{\left(\frac{1}{\mu}-s\right)}.$$

Es ist aber auch:

$$K_0+K_1+K_2+\ldots+K_n=\int_0^1 f(x)\,dx\left[\frac{1}{f'(0)x}+\frac{1}{f'(\mu)(x-\mu)}+\frac{1}{f'(2\mu)(x-2\mu)}+\ldots+\frac{1}{f'(1)(x-1)}\right]$$

und

$$\frac{1}{xf'(0)}+\frac{1}{(x-\mu)f'(\mu)}+\frac{1}{(x-2\mu)f'(2\mu)}+\ldots+\frac{1}{(x-1)f'(1)}=\frac{1}{f(x)},$$

eine bekannte Formel, die sich leicht verificiren lässt. Sie wird nämlich identisch für $x=0$, $x=\mu$, $x=2\mu\ldots x=1$ und unendlich gross, folglich ist der umgekebrte Werth des Gliedes links mit $f(x)$ übereinstimmend bis auf einen constanten Factor, da beides ganze algebraische Functionen $n+1$ ter Ordnung sind, welche gleichzeitig Null werden. Was nun den constanten Factor anbetrifft, so bestimmen wir denselben, indem wir

$$x=\epsilon$$

unendlich klein annehmen; es wird dann das Glied links:

$$\frac{1}{\epsilon f'(0)},$$

da die übrigen Theile gegen den ersten verschwinden. Der Ausdruck rechts aber wird

$$\frac{1}{f(\epsilon)}.$$

Nun ist

$$f(\epsilon)=\epsilon(\epsilon-\mu)(\epsilon-2\mu)\ldots(\epsilon-n\mu)=(-1)^n 1\cdot2\cdot3\cdots n\mu^n\epsilon,$$

aber

$$f'(0) \text{ bekanntlich gleich } (-1)^n 1\cdot2\cdot3\ldots n\mu^n,$$

wonach die Ausdrücke rechts und links völlig gleich sind, also der constante Factor links gleich der Einheit sein muss.

Es ist also:

$$K_0+K_1+K_2+\ldots+K_n=1.$$

Der Ausdruck

$$K_s=\frac{1}{f'(s\mu)}\int\frac{f(x)\,dx}{x-s\mu},$$

wo

$$f(x)=x(x-\mu)(x-2\mu)\ldots(x-n\mu)$$

ist, kann leicht berechnet werden, woraus sich dann der Werth von

$$\int_0^1\psi(x)dx$$

oder der Näherungswerth von

$$\int_0^1\varphi(x)\,dx=K_0A_0+K_1A_1+K_2A_2+\ldots+K_nA_n$$

ergibt.

Die folgende Tafel gibt diese Näherungswerthe für jede gegebene Anzahl der Ordinaten $A_0$, $A_1$, $A_2\ldots$ von 2 bis 11, wobei bemerkt wird, dass $A_s$ den Werth von $\varphi(s\mu)$ vorstellt.

| Anzahl der Zwischenwerthe. | Näherungswerthe. |
|---|---|
| 2 | $\frac{A_0+A_1}{2}$ |
| 3 | $\frac{A_0+4A_1+A_2}{6}$ |
| 4 | $\frac{A_0+3A_1+3A_2+A_3}{8}$ |
| 5 | $\frac{7A_0+32A_1+12A_2+32A_3+7A_4}{90}$ |
| 6 | $\frac{19A_0+75A_1+50A_2+50A_3+75A_4+19A_5}{288}$ |
| 7 | $\frac{41A_0+216A_1+27A_2+272A_3+27A_4+216A_5+41A_6}{840}$ |
| 8 | $\frac{751A_0+3577A_1+1323A_2+2989A_3+2989A_4+\dots}{17280}$ |
| 9 | $\frac{989A_0+5888A_1-928A_2+10496A_3-4540A_4+10496A_5-\dots}{2835}$ |
| 10 | $\frac{2857A_0+15741A_1+1080A_2+19344A_3+5778A_4+5778A_5+\dots}{89600}$ |
| 11 | $\frac{16067A_0+106300A_1-48525A_2+272400A_3-260550A_4+427368A_5-2060550A_6+\dots}{59872}$ |

Bei diesen Ausdrücken wurden die letzten Glieder zum Theil weggelassen, da ihre Coefficienten sich symmetrisch an die ersten anschliessen, und daher leicht zu ergänzen sind.

Man sieht, dass dies Integrationsverfahren nur dann mit dem im vorigen Abschnitt gegebenen übereinstimmt, wenn die Anzahl der Zwischenwerthe 2 ist.

Uebrigens haben beide mechanischen Quadraturen den Vortheil gemein, dass man sie auch dann noch anwenden kann, wenn die allgemeine Form von $\varphi(x)$ gar nicht gegeben, sondern dieser Ausdruck nur für gewisse Werthe

$$x=a_1,\ x=a_2\ \dots\ x=a_n$$

bekannt ist. Dieser Vortheil ist für die Anwendung in der Physik, Astronomie u. s. w. nicht gering anzuschlagen, und macht auch dann noch eine annähernde Integration möglich, wenn gewisse Functionen nur durch die Werthe bekannt sind, welche sie in bestimmten Fällen annehmen, die sich durch Beobachtungen bestimmen lassen. Z. B. ist dies der Fall, wenn $\varphi(x)$ die Temperatur eines gewissen Tages oder Jahres als Function der Zeit ausdrückt, wo von einem analytischen Gesetze nicht füglich die Rede sein kann.

33) Die im vorigen Abschnitte gegebene Methode der Quadratur rührt wie die folgende, die wir schliesslich noch geben, von Gauss her.

Es sei wie vorhin:

$$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n),$$

$$\psi(x)=f(x)\left[\frac{\varphi(a_1)}{f'(a_1)(x-a_1)}+\frac{\varphi(a_2)}{f'(a_2)(x-a_2)}+\frac{\varphi(a_3)}{f'(a_3)(x-a_3)}+\dots+\frac{\varphi(a_n)}{f'(a_n)(x-a_n)}\right].$$

Sei nun:

$$\varphi(x)=\psi(x)+Vf(x),$$

so wird bei der Anwendnng des im vorigen Abschnitte gegebenen Verfahrens der Fehler sein gleich:

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx - \int_0^1 \psi(x)\,dx = \int_0^1 Vf(x)\,dx.$$

Sei nnn $\varphi(x)$ in eine Reihe nach steigenden Potenzen von $x$ entwickelt, also:

$$\varphi(x) = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_n x^n + \ldots,$$

so ist:

$$\frac{\varphi(x)}{f(x)} = \frac{\psi(x)}{f(x)} + V;$$

aber $\frac{\psi(x)}{f(x)}$ enthält keine ganze Function von $x$, es ist also $V$ der Quotient der Entwicklung von $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$, $\psi(x)$ der Divisionsrest. Um $V$ zu erhalten, kann man nnn $\frac{1}{f(x)}$ nach fallenden Potenzen von $x$ entwickeln:

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{B_0}{x^n} + \frac{B_1}{x^{n+1}} + \frac{B_2}{x^{n+2}} + \ldots \frac{B_s}{x^{n+s}}$$

und diese Reihe mit $\varphi(x)$ multipliciren; $V$ ist dann der Inbegriff aller Glieder, welche positive Exponenten haben.

Man erhält:

$$\begin{aligned} V = {} & B_0 C_n + B_1 C_{n+1} + B_2 C_{n+2} + \ldots \\ & + (B_0 C_{n+1} + B_1 C_{n+2} + B_2 C_{n+3} + \ldots)x \\ & + (B_0 C_{n+2} + B_1 C_{n+3} + B_2 C_{n+4} + \ldots)x^2 \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

oder wenn man nach den Coefficienten $C$ ordnet:

$$V = C_n B_0 + C_{n+1}(B_0 x + B_1) + C_{n+2}(B_0 x^2 + B_1 x + B_2) + \ldots;$$

hiernach wird der Fehler sein:

$$\int_0^1 Vf(x)\,dx = C_n B_0 \int_0^1 f(x)dx + C_{n+1}\int_0^1 (B_0 x + B_1) f(x) dx$$
$$+ C_{n+2}\int_0^1 (B_0 x^2 + B_1 x + B_2) f(x) dx + \ldots$$

Es sollen jetzt die Zwischenwerthe $a_1, a_2 \ldots a_n$ nicht willkürlich, sondern so bestimmt werden, dass die $n$ ersten Glieder dieses Fehlers oder, was dasselbe ist, die Integrale:

$$\int_0^1 f(x)\,dx,\ \int_0^1 xf(x)\,dx,\ \int_0^1 x^2 f(x)\,dx \ldots \int_0^1 x^{n-1} f(x)\,dx$$

verschwinden, es fallen dann die Coefficienten $C_n, C_{n+1}, C_{n+2}, \ldots C_{2n-1}$ ganz weg und der Fehler hängt nur von $C_{2n}, C_{2n+1} \ldots$ ab.

Nun ist:

$$\int x^m f(x)\,dx = x^m \int f(x)dx - m\int [x^{m-1}\int f(x)dx]\,dx = x^m \int f(x)dx - mx^{m-1}\int\int f(x)dx$$
$$+ m(m-1)\int x^{m-2}\left[\int\left(\int f(x)dx\right)dx\right]dx$$

und indem man so fortfährt:

$$\int x^m f(x)\,dx = x^m \int f(x)dx - m x^{m-1} \int \left[\int f(x)dx\right] dx$$
$$+ m(m-1)\, x^{m-2} \int \left[\int \left(\int f(x)dx\right) dx\right] dx - \ldots$$
$$(-1)^m (m-1)(m-2) \ldots 2\,.\,1 \int f(x) dx^{m+1},$$

wenn man mit $\int f(x)dx^{m+1}$ das $m+1$fache Integral:

$$\int\left[\int\left(\int \ldots \left(\int f(x)dx\right)dx\right)dx\right] \ldots dx$$

bezeichnen will.

Damit also die Integrale:

$$\int_0^1 f(x)\,dx,\ \int_0^1 x f(x)\,dx \ldots, \int_0^1 x^{n-1} f(x)\,dx$$

verschwinden, ist es nöthig, dass auch:

$$\int f(x)\,dx,\ \int f(x)\,dx^2,\ \int f(x)\,dx^3 \ \ldots, \int f(x)\,dx^n$$

gleich Nnll werden. Setzt man nun:

$$\int f(x)\,dx^n = (x^2-x)^n,$$

so ist:

$$\int f(x)dx^{n-1} = \frac{d(x^2-x)^n}{dx} = n(x^2-x)^{n-1}(2x-1),$$

$$\int f(x)dx^{n-2} = \frac{d^2(x^2-x)^n}{dx^2} = n(n-1)(x^2-x)^{n-2}(2x-1)^2 + 2n(x^2-x)^{n-1},$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int f(x)\,dx = \frac{d^{n-1}(x^2-x)^n}{dx^{n-1}},\quad f(x) = \frac{d^n(x^2-x)^n}{dx^n}.$$

Alle Differenzialcoefficienten von $(x^2-x)^n$ bis inclusive zum $n-1$ten enthalten aber den Factor $x^2-x$; setzt man Eins für $x$ und Null für $x$, so verschwindet derselbe, also werden alle diese Integrale in den Grenzen Nnll und Eins genommen verschwinden.

Damit nnn

$$\int f(x)\,dx^n = (x^2-x)^n,\quad f(x) = \frac{d^n(x^2-x)^n}{dx^n}$$

sei, entwickelt man $(x^2-x)^n$ nach dem binomischen Satze. Es ergibt sich:

$$(x^2-x)^n = x^{2n} - n_1 x^{2n-1} + n_2 x^{2n-2} - n_3 x^{2n-3} + \ldots$$

und durch $n$maliges Differenziiren:

$$\frac{n!}{2n!}\,\frac{d^n(x_2-x)^n}{dx^n} = x^n - \frac{n!\,n!\,(2n-1)!}{1!\,n-1!\,n-1!\,2n!}\,x^{n-1} + \frac{n!\,n!\,(2n-2)!}{2!\,n-2!\,n-2!\,2n!}\,x^{n-2}$$
$$- \frac{n!\,n!\,(2n-3)!}{3!\,n-3!\,n-3!\,2n!}\,x^{n-3} + \ldots,$$

es hedenten hier $n_1, n_2 \ldots$ die Binomialcoefficienten, $n!$ den Ausdruck $1.2.3\ldots n$.

Dies zuletzt entwickelte Polynomen muss für $f(x)$ genommen werden. Der Factor $\frac{n!}{2n!}$ nämlich kann ohne die ohigen Schlüsse zn ändern zn $(x^2-x)^n$ hinzugefügt werdeu. Die Wnrzeln der Gleichung

$$\frac{d^n(x^2-x)^n}{dx^n} = f(x) = 0$$

sind dann positive und ungleiche echte

Brüche, welche die Werthe von $a_1$, $a_2$, $a_3$ . . . $a_n$ gehen, zu welchen die Ausdrücke $f(a_1)$, $f(a_2)$ . . . $f(a_n)$ berechnet werden müssen *).

Es sei wieder: $$K_s = \int_0^1 \frac{f(x)\,dx}{f'(a_\mu)(x-a_\mu)},$$

so hat man: $$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = K_1 f(a_1) + K_2 f(a_2) + \ldots K_n f(a_n).$$

Die folgende Tafel enthält die Werthe von $a$ und $K$, wenn die Anzahl der Zwischenwerthe bekannt ist.

| Anzahl der Zwischenwerthe. | | |
|---|---|---|
| 2 | $a_1 = 0{,}21132487$ | $K_1 = \frac{1}{2}$ |
| | $a_2 = 0{,}78867513$ | $K_2 = \frac{1}{2}$ |
| 3 | $a_1 = 0{,}11270167$ | $K_1 = \frac{5}{18}$ |
| | $a_2 = 0{,}50000000$ | $K_2 = \frac{4}{9}$ |
| | $a_3 = 0{,}88729833$ | $K_3 = \frac{5}{18}$ |
| 4 | $a_1 = 0{,}06943184$ | $K_1 = 0{,}17392742$ |
| | $a_2 = 0{,}33000948$ | $K_2 = 0{,}32607258$ |
| | $a_3 = 0{,}66999052$ | $K_3 = K_2$ |
| | $a_4 = 0{,}93056816$ | $K_4 = K_1$ |
| 5 | $a_1 = 0{,}04691008$ | $K_1 = 0{,}11846344$ |
| | $a_2 = 0{,}23076534$ | $K_2 = 0{,}23931434$ |
| | $a_3 = 0{,}50000000$ | $K_3 = 0{,}28444444$ |
| | $a_4 = 0{,}76923466$ | $K_4 = K_2$ |
| | $a_5 = 0{,}95308992$ | $K_5 = K_1$ |

*) Dass die Gleichung
$$\frac{d^n(x^2-x)^n}{dx^n} = 0,$$
welche offenbar vom $n$ten Grade ist, wirklich $n$ verschiedene positive Brüche zu Wurzeln habe, ist leicht in folgender Weise einzusehen. Der Ausdruck $(x^2-x)^n$ hat zwei $n$fache Wurzeln 0 und 1, zwischen beiden also ein Maximum oder Minimum, welches übrigens gleich $\frac{1}{2}$ ist, da $\frac{d(x^2-x)^n}{dx} = 0$ diesen Werth giebt. Die Gleichung
$$\frac{d(x^2-x)^n}{dx} = 0$$
hat die beiden Wurzeln Null und Eins noch, diese sind aber $n-1$fach, ausserdem $\frac{1}{2}$ als Wurzel; da diese Gleichung vom $2n-1$ten Grade ist, so sind weiter keine Wurzeln vorhanden, und $\frac{1}{2}$ ist eine einfache Wurzel. Es müssen also zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ und zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 Maxima bezüglich Minima von $\frac{d(x^2-x)^n}{dx}$ liegen, welche die Gleichung
$$\frac{d^2(x^2-x)^n}{dx^2} = 0$$
erfüllen, und die wir mit $\alpha$ und $\beta$ bezeichnen. Die letzte Gleichung hat also die $n-2$fachen Wurzeln 0 und 1, ausserdem die einfachen $\alpha$ und $\beta$, also liegen zwischen 0 und $\alpha$, $\alpha$ und $\beta$, $\beta$ und 1 Maxima oder Minima von $\frac{d^2(x^2-x)^n}{dx^2}$, deren Werthe $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ seien, und Gleichung
$$\frac{d^3(x^2-x)^n}{dx^3} = 0$$
hat die Wurzeln $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$, Null und Eins. Die beiden letztern sind $n-2$fach, die übrigen einfach. Indem man so fortfährt, stellen sich 4, 5 . . . Wurzeln zwischen Null und Eins für die höhern Differenzialquotienten von $(x^2-x)^n$ ein, und die Wurzeln Null und Eins werden um je einen Grad niedriger. Bei $\frac{d^n(x^2-x)^n}{dx^n}$ verschwinden die letztern ganz, und die Anzahl der einfachen zwischen Null und Eins liegenden Wurzeln ist $n$. Mehr sind nicht möglich, da dieser Ausdruck vom $n$ten Grade ist.

Dies Integrationsverfahren ist dann anwendbar, wenn man zwar die Form der Function $q(x)$ nicht kennt, jedoch dieselbe für beliebige gegebene Werthe $a_1, a_2 \ldots$ zu berechnen im Stande ist; es verliert aber seinen Nutzen, wenn diese Werthe $a_1, a_2 \ldots$ selbst gegeben sind. Die in den beiden vorigen Abschnitten gegebenen Methoden der mechanischen Quadratur bleiben dann noch anwendbar.

In diesem und dem vorigen Abschnitte sind wir der Darstellung in „Minding's Jahrbuch der Differenzial- und Integralrechnung" gefolgt.

34) Doppelte und vielfache Integrale.

Es sei

$$\int_{x_0}^{x_p} f(x,y)dx = q(y).$$

Bei der Berechnung dieses Integrales ist $y$ als constant betrachtet. Wir setzen jedoch zunächst voraus, dass die Grenzen $x_0$ und $x_p$ von $y$ unabhängig sind. Es ist dann nach unserer Bezeichnung:

$$q(y) = (x_1 - x_0)f(x_1, y) + (x_2 - x_1)f(x_2, y) + (x_3 - x_2)f(x_3, y) + \ldots + (x_p - x_{p-1})f(x_p y)$$

und folglich

$$\int_{y_0}^{y_r} q(y)\,dy = \int_{y_0}^{y_r}\int_{x_0}^{x_p} f(x,y)dx\,dy = \ldots$$

$$= (y_1 - y_0)[(x_1 - x_0)f(x_1, y_1) + (x_2 - x_1)f(x_2, y_1) + (x_3 - x_2)f(x_3, y_1) + \ldots + (x_p - x_{p-1})f(x_p, y_1)]$$

$$+ (y_2 - y_1)[(x_1 - x_0)f(x_1, y_2) + (x_2 - x_1)f(x_2, y_2) + (x_3 - x_2)f(x_3, y_2) + \ldots + (x_p - x_{p-1})f(x_p, y_2)]$$

$$+ (y_3 - y_2)[(x_1 - x_0)f(x_1, y_3) + (x_2 - x_1)f(x_2, y_3) + (x_3 - x_2)f(x_3, y_3) + \ldots + (x_p - x_{p-1})f(x_p, y_3)]$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$+ (y_r - y_{r-1})[(x_1 - x_0)f(x_1, y_r) + (x_2 - x_1)f(x_2, y_r) + (x_3 - x_2)f(x_3, y_r) + \ldots + (x_p - x_{p-1})f(x_p, yr)].$$

Setzt man noch

$$\int_{y_0}^{y_r} f(x,y)\,dx = \psi(x),$$

also:

$$\psi(x) = (y_1 - y_0)f(x, y_1) + (y_2 - y_1)f(x, y_2) + \ldots + (y_r - y_{r-1})f(x, y_r),$$

so ist leicht zu sehen, dass der Ausdruck $\int_{x_0}^{x_p} \psi(x)\,dx$ völlig mit dem obigen übereinstimmt, wenn man die vertical unter einander stehenden Glieder zusammenstellt, und man hat daher:

$$\int_{x_0}^{x_p} \psi(x)dx = \int_{y_0}^{y_r} q(y)\,dy$$

oder:

$$\int_{y_0}^{y_r}\int_{x_0}^{x_p} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x_p}\int_{y_0}^{y_r} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Diese Ausdrücke heissen Doppelintegrale. Man hat für dieselben also den Satz:

„Wenn die Grenzen der Doppelintegrale constant sind, so kommt es auf die Ordnung des Integrirens nicht an."

Dieser Satz lässt sich augenblicklich auf drei und mehrfache Integrale ausdehnen.

Es ist nämlich:

$$\int_{z_0}^{z_s}\int_{y_0}^{y_r}\int_{x_0}^{x_p} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{z_0}^{z_s}\int_{x_0}^{x_p}\int_{y_0}^{y_r} f(x,y,z)\,dy\,dx\,dz$$

$$=\int_{x_0}^{x_p}\int_{z_0}^{z_s}\int_{y_0}^{y_r} f(x,y,z)\,dy\,dz\,dx,$$

wie sich durch wiederholte Anwendung des eben gegebenen Satzes sogleich zeigt.

Bei diesem Satze ist jedoch die von Cauchy gemachte Bemerkung von grosser Wichtigkeit, dass er möglicher Weise seine Anwendung verlieren kann, wenn für einen zwischen den gegebenen Grenzen liegenden Werth von $x$, $y$ u. s. w. das Argument $f(x, y, z)$ discontinuirlich wird. Die Möglichkeit dieser Ausnahme ist für die ganze Integralrechnung bereits erwiesen, und es kommt nur darauf an, zu finden, in welchen Fällen sie stattfindet, und wie gross der Unterschied zwischen den Integralen wird, wenn wir die Grenzen umkehren.

Wir beschränken uns auf Doppel-Integrale, da sich die Anwendung auf mehrfache ohne Schwierigkeit ergibt.

Zunächst wollen wir diesen Fall an einem Beispiele erläutern.

Es sei gesucht:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}dy\,dx.$$

Das Argument $\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$ wird unendlich nur, wenn $y$ und $x$ sich der Null nähern; offenbar ist nämlich, wenn $x=\mu$, $y=s\mu$ gesetzt wird, wo $\mu$ unendlich klein, $s$ endlich ist:

$$\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}=\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2\mu^2},$$

also in der That unendlich gross.

Nun ist:

$$\int\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}dy=\int\frac{1}{x}\frac{\frac{y^2}{x^2}-1}{\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)^2}d\left(\frac{y}{x}\right)=-\frac{2}{x}\int\frac{ds}{(1+s^2)^2}+\frac{1}{x}\int\frac{ds}{(1+s^2)}$$

$$=-\frac{1}{x}\left(\frac{s}{1+s^2}\right),$$

wo $s=\frac{y}{x}$ gesetzt wurde. Also:

$$\int\frac{y^2-x_2}{(y^2+x^2)^2}dy=-\frac{2}{x}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right)=-\frac{2}{1+x^2};\quad -2\int\frac{dx}{1+x^2}=-2\operatorname{arctg}x,$$

$$-2\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{1+x^2}=\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}dy\,dx=-2\operatorname{arctg}(+1)+2\operatorname{arctg}(-1)$$

und da

$$\operatorname{arctg}(+1)=\frac{\pi}{4},\quad \operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$$

ist:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}dy\,dx=-\pi.$$

Integriren wir nun zuerst nach $x$, so kommt:

$$\int\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}dx=\frac{1}{y}\int\frac{1-\frac{x^2}{y^2}}{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)^2}d\frac{x}{y}=\frac{1}{y}\cdot\frac{\frac{x}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}},$$

also:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} dx = \frac{2}{1+y^2},$$

$$2\int_{-1}^{+1} \frac{dy}{1+y^2} = 2 \operatorname{arc tg}(+1) - 2 \operatorname{arc tg}(-1),$$

mithin:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} dx\, dy = +\pi,$$

so dass, wenn man die Grenzen des Integrals umkehrt, sich der entgegengesetzte Werth $+\pi$ statt $-\pi$ ergibt, also der Unterschied beider Integrale $2\pi$ beträgt.

Es ist zu bemerken, dass man bei der Berechnung in beiden Fällen nach allgemeinen Regeln, also ohne Berücksichtigung der Discontinuität verfahren ist.

Cauchy zeigt aber auch, wie man im allgemeinen Falle den Unterschied beider Integrale ermitteln kann. Für den Fall, dass derselbe Null ist, kann dann die Umkehrung ohne Bedenken stattfinden.

Wir setzen:

$$A = \int_{\gamma}^{\delta}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\, dx\, dy,$$

$$B = \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)\, dy\, dx.$$

Sei $\lambda$ eine zwischen $\alpha$ und $\beta$ liegende Zahl, $\mu$ eine solche, die zwischen $\gamma$ und $\delta$ liegt, und sei: $f(\lambda, \mu)$ discontinuirlich. Finden sich mehrere Discontinuitäten vor, so ist das jetzt zu gebende Verfahren lediglich zu wiederholen.

Sei ferner:

$$\int f(x,y)\, dx = \varphi(x,y), \quad \int f(x,y)\, dy = \psi(x,y),$$

$\varepsilon$, $\vartheta$ zwei unendlich kleine, aber positiv angenommene Zahlen, so ist:

$$\int_{\gamma}^{\mu-\varepsilon}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\, dx\, dy + \int_{\mu+\vartheta}^{\delta}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\alpha}^{\beta}\left[\int_{\gamma}^{\mu-\varepsilon} f(x,y)\, dy + \int_{\mu+\vartheta}^{\delta} f(x,y)\, dy\right] dx.$$

In diesen Integralen findet sich nämlich keine Discontinuität, es ist mithin die Umkehrung der Grenzen gestattet. Mit Anwendung der oben gegebenen Bezeichnung aber erhält man:

$$\int_{\gamma}^{\mu-\varepsilon} [\varphi(\beta,y) - \varphi(\alpha,y)]\, dy + \int_{\mu+\vartheta}^{\delta} [\varphi(\beta,y) - \varphi(\alpha,y)]\, dy$$
$$= \int_{\alpha}^{\beta} [\psi(x,\mu-\varepsilon) - \psi(x,\gamma) + \psi(x,\delta) - \psi(x,\mu+\vartheta)]\, dx.$$

Lässt man nun sowohl $\varepsilon$ als $\vartheta$ nach Null hin convergiren, so gibt die linke Seite dieser Gleichung:

$$\int_{\gamma}^{\delta} [\varphi(\beta,y) - \varphi(\alpha,y)] dy = \int_{\gamma}^{\delta}\int_{\alpha}^{\beta} f(x,y)\, dx\, dy.$$

Dagegen wird die rechte Seite:

$$\int_{\alpha}^{\beta} [\psi(x,\delta) - \psi(x,\gamma)]\, dx + \int_{\alpha}^{\beta} [\psi(x,\mu-\varepsilon) - \psi(x,\mu+\vartheta)]\, dx,$$

d. h.

$$\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\gamma}^{\delta} f(x,y)\, dy\, dx - \int_{\alpha}^{\beta}\int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\vartheta} f(x,y) dy\, dx;$$

es ist also:

$$B-A=\int_{\alpha}^{\beta}\int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\vartheta}F(x,y)dy\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}[\psi(x,\mu+\vartheta)-\psi(x,\mu-\varepsilon)]\,dx.$$

In dem vorhin berechneten Beispiele war:

$$\varphi(x,y)=\int f(x,y)\,dy=-\frac{1}{x}\,\frac{\frac{y}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}},$$

$$u=0,$$

also:

$$\psi(x,\mu+\vartheta)=\frac{-\vartheta}{x^2+\vartheta^2},$$

$$\psi(x,\mu-\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2},$$

$$\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{-\vartheta}{x^2+\vartheta^2}-\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\right)dx=-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d\frac{x}{\vartheta}}{\frac{x^2}{\vartheta^2}+1}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{d\frac{x}{\varepsilon}}{\frac{x^2}{\varepsilon^2}+1}$$

$$=-\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\vartheta}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\vartheta}+\operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\varepsilon}-\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha}{\varepsilon}\right).$$

Da $\vartheta$ und $\varepsilon$ unendlich klein sind, so geben die 4 Bogen alle $\pm\frac{\pi}{2}$ und zwar den positiven Werth dann, wenn der Zähler $\beta$ oder $\alpha$ positiv, den negativen, wenn er negativ ist. In unserm Falle war $\beta=1$, $\alpha=-1$, man erhält also

$$-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-2\pi$$

und:

$$A-B=2\pi,$$

wie dies auch sich oben ergeben hat.

35) **Doppelintegrale, deren Grenzen nicht constant sind.**

Im Allgemeinen sind aber die Grenzen der Doppelintegrale, wie überhaupt der vielfachen, nicht als constant anzusehen. Wir wollen nur Doppelintegrale betrachten, da vielfache sich immer durch Wiederholung des bei Doppelintegralen einzuschlagenden Verfahrens behandeln lassen; auch setzen wir jetzt voraus, dass die Function $f(x, y)$ während des Integrationsweges continuirlich bleibt, womit der im vorigen Abschnitte behandelte Ausnahmefall wegfällt.

Denken wir uns in der Ebene einen beliebigen Umfang, unter $x$ und $y$ rechtwinklige Coordinaten. Der Umfang kann beliebig gekrümmt sein, auch ganz oder zum Theil aus graden Linien bestehen. Wir setzen ihn aber stets als geschlossen voraus, schliessen jedoch den Fall mit ein, dass einzelne Theile desselben ins Unendliche fallen, in welchem Falle wir die Grenzlinie uns in beliebiger Weise ins Unendliche fortgesetzt denken. Z. B. besteht die Begrenzung nur aus zwei parallelen Graden, so können wir zu ihnen zwei unendlich entfernte senkrechte Grade nehmen, also ein unendlich grosses Rechteck als Umfang betrachten.

Sind $x_1, x_2 \ldots x_s$ beliebige Abscissen, $y_1, y_2 \ldots y_s$ die zugehörigen Ordinaten, von denen jedoch zwei auf einander folgende einander unendlich nahe gedacht werden, so ist:

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy=\lim\Sigma_t\Sigma_s\,(y_s-y_{s-1})\,(x_t-x_{t-1})\,f(x_t,y_s)$$

das über den Theil der Ebene, welcher von unserm Umfange begrenzt wird, erstreckte Doppelintegral. Es ist hierbei der ganze Inhalt in unendlich kleine Rechtecke getheilt, deren Inhalt $(y_s-y_{s-1})\,(x_t-x_{t-1})$ beträgt, und jeder dieser unendlich kleinen Ebenentheile mit dem entsprechenden Werthe von $f(x, y)$ multiplicirt.

Will man eine Veranschaulichung machen, so kann man unter $f(x,y)$ sich die Dichtigkeit des Ebnentheils denken, und es stellt dann das Doppelintegral die Masse des ganzen begrenzten Inhalts vor.

Es ist augenblicklich ersichtlich, wie diese ganze Veranschaulichung auch auf dreifache Integrale Anwendung findet, wenn man dem geschlossenen Umfange eine Grenzfläche, den unendlich kleinen Rechtecken aber Parallelepipeda substituirt.

Es ist nach dieser Definition der Doppelintegrale völlig klar, dass

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f(x,y)\,dy\,dx$$

zu setzen ist, da die unendlich kleinen Parallelogramme $(x_t - x_{t+1})(y_s - y_{s-1})$ und $(y_s - y_{s-1})(x_t - x_{t-1})$ identisch sind, auch findet diese Umkehrung für vielfache Integrale statt.

Es handelt sich aber darum, wie in beiden Gestalten des Integrals die Grenzen von $x$ und $y$ bestimmt werden müssen, damit in der That dasselbe den gegebenen Umfang umfasse.

Fig. 30.




Mögen die Linien (Fig. 30.) $OA$ und $OB$ die Richtung der positiven Abscissen und Ordinaten angeben, und sei $EWFT$ der gegebene Umfang.

Der Ausdruck $\int f(x,y)dy$, wo $x$ beliebig ist, stellt dann ein Integral vor, welches sich über die dem gegebenen $x$ entsprechende Ordinate $GK$ und zwar von $W$ bis $G$ erstreckt. Wir haben hier vorausgesetzt, dass der Umfang ein einfach begrenzender ist, und jede der Abscissenaxe oder der Ordinatenaxe parallele Linie denselben höchstens zweimal schneide. Seien

$$Y_0 = f_0(x),\quad Y_1 = f_1(x)$$

die beiden Ordinatenwerthe, welche für gegebenes $x$ diesen Schnittpuncten $W$ und $G$ der Ordinate entsprechen, so sind

$$Y_0,\quad Y_1$$

die Grenzen unseres Integrals. Sei demnach:

$$\int_{Y_0}^{Y_1} f(x,y)\,dx = \varphi(x),$$

so ist das Integral $\int \varphi(x)dx$ über die Abscissenaxe von Punkt $H$ bis $L$, d. h. von der kleinsten bis zur grössten Abcisse, denen Puncte des Umfanges entsprechen, zu erstrecken, und setzt man also:

$$OH = NE = x_0,\quad OL = MF = x_1,$$

so sind dies die Grenzen; $x_0$ und $x_1$ sind hier gegebene Constanten, während $Y_0$, $Y_1$ Functionen von $x$ sind. Der Werth des Integrals ist also:

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{Y_0}^{Y_1} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{x_0}^{x_1}\int_{f_0(x)}^{f_1(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Wir wollen nun aber die Integration mit $x$ beginnen.

$\int f(x,y)\,dx$ ist dann über eine der Abscissenaxe parallele Linie $PS$ zu erstrecken, welche einem gegebenen Werthe von $y$ entspricht. Die Puncte $P$ und $S$ sind die Schnittpuncte, welche für den gegebenen Ordinatenwerth stattfinden, seien deren Abscissenwerthe bezüglich:

$$X_0 = \varphi_0(y),\quad X_1 = \varphi_1(y),$$

so ist

$$\int_{X_0}^{X_1} f(x,y)\,dx = \psi(y)$$

unser Integral; $\psi(y)$ ist dann nochmals zwischen den Puncten $T$ und $U$, welchen der grösste und der kleinste Ordinatenwerth entsprechen, zu integriren. Sei

$$UV = OA = y_0,\quad TR = OB = y_1,$$

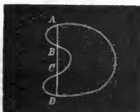
also $y_0$ und $y_1$ Constanten, so hat man:

$$\int_{y_0}^{y_1} \psi(y)\,dy = \int_{y_0}^{y_1}\int_{X_0}^{X_1} f(x,y)\,dx\,dy,$$

also:

$$\int_{y_0}^{y_1}\int_{\varphi_0(y)}^{\varphi_1(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{x_0}^{x_1}\int_{f_0(x)}^{f_1(x)} f(x,y)\,dy\,dx.$$

Fig 31.

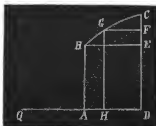



Sollten gewisse der Abscissenaxe oder der Ordinatenaxe parallele Linien (Fig. 31) *ABCD* den Umfang mehr als zweimal schneiden, so ist das betreffende Integral von *A* nach *B* und von *C* nach *D* zu erstrecken, während der über *BC* erstreckte Theil ausfällt. Aehnliches tritt ein, wenn die Begrenzung eine Mehrfache ist. Geht sie zum Theil ins unendliche, so ist der betreffende Werth $Y_1$ oder $X_1$ gleich unendlich zu nehmen. Es setzt dies aber voraus, dass noch der Werth des Integrales ein bestimmter sei, was eigenthümliche Untersuchungen erfordert, die später folgen werden.

Beispiel. Der gewöhnlichste Fall ist der, wo (Fig. 32) der Umfang gebildet wird 1) durch einen Theil der Abscissenaxe *AD*, 2) durch zwei parallele Ordinaten *AB* und *CD*, 3) durch das entweder immer concav oder immer convex gekrümmte Curvenstück *BC*.

Es ist leicht ersichtlich, dass in jedem Falle ein gegebenes Doppelintegral sich in Stücke zerlegen lasse, die in der angegebenen Weise begrenzt sind.

Fig. 32.




Sei

$$f(x,y)=0$$

die Gleichung der Curve *BC*, und möge sich daraus ergeben

$$y=\varphi(x),\quad x=\psi(y).$$

Ist nun $\int\int f(x,y)\,dy\,dx$ auf diesen Inhalt zu erstrecken, so ist offenbar:

$$Y_1=\varphi(x),\ Y_0=0,$$

$$x_0=OA,\ x_1=OD.$$

Soll dagegen die Integration in der Ordnung $\int\int f(x,y)\,dx\,dy$ vollzogen werden, so sieht man sogleich, dass für alle Werthe von $y$, die kleiner als *AB*, d. h. kleiner als $\varphi(x_0)$ sind, $X_1=OD$, $X_0=OA$, also $X_1=x_1$, $X_0=x_0$ zu nehmen sind. Wird aber aber $y=GH$ grösser als *AB*, so ist die Integration über die Strecke *GF*, d. h. von $X_0=\psi(y)$ bis $X_1=OD=x_1$ zu erstrecken. Die Grenzen von $y$ aber sind $y_0=0$, da das kleinste $y$ auf der Abscissenaxe liegt, und $y_1=CD=\varphi(x_1)$ ist.

Man hat also:

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_0^{\varphi(x)} f(x,y)\,dy\,dx=\int_0^{\varphi(x_1)}\int_{x_0}^{x_1} f(x,y)\,dx\,dy+\int_0^{\varphi(x_1)}\int_{\psi(y)}^{x_1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Complicirter noch würde der Ausdruck sein, wenn die Curve *BC* die Krümmungsrichtung änderte, jedoch lässt sie sich in diesem Falle immer in Theile mit gleicher Krümmungsrichtung zerlegen.

Zu Beispielen für diese Sätze werden die folgenden Abschnitte dieses Artikels noch Gelegenheit geben.

36) Transformation mehrfacher Integrale.

Die Transformation einfacher Integrale war durch die Formel

$$\int f(x)\,dx=\int f(x)\frac{dx}{du}\,du$$

gegeben, wo man voraus setzt, dass $x$ eine Function von $u$ sei.

Sei jetzt gegeben

$$\int_\alpha^y F(y)\,dy=\varphi(y),$$

$$F(y)=\frac{d\varphi(y)}{dy},$$

und setzen wir

$$y=\psi(x,u),$$

wo $x$ und $u$ veränderlich sein sollen, so wird:

$$\varphi(y) = \int F(y)\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial u}du\right) = \int\frac{d\varphi(y)}{dy}\left(\frac{\partial y}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial u}du\right).$$

Nach dem in Abschnitt (11) Gesagten ist aber für den Ausdruck

$$\int [f(x,u)\,dx + f_1(x,u)du],$$

welcher in irgend welchen Grenzen genommen ist, der Werth ganz derselbe, welches auch die Gleichung zwischen $x$ und $u$ sei, vorausgesetzt, dass $f$ und $f_1$ continuirlich sind und die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

erfüllen.

Setzt man nun:

$$f = \frac{d\varphi}{dy}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial\varphi}{\partial x},\ f_1 = \frac{d\varphi}{dy}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial u},$$

so verwandelt sich offenbar das letzte Integral in das uns vorliegende, und es ist

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial u},\quad \frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial x},$$

welche Ausdrücke in der That identisch sind.

Ist also $F(y)$ continuirlich, so kann man z. B. voraussetzen, dass $x$ während der Integration constant bleibe, und hat:

$$\int_\alpha^y F(y)\,dy = \int_{u_0}^{u_1} F(y)\frac{\partial\psi}{\partial u}du.$$

Die Grenzen des letzten Integrals müssen denen des ersten entsprechen, und ergeben sich aus den Gleichungen:

$$\psi(x,u_0) = \alpha,\ \psi(x,u_1) = y.$$

Sei jetzt gegeben:

$$A = \int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,dy\,dx,$$

wo $y_0$, $y_1$ im Allgemeinen Functionen von $x$ und $x_0$, $x_1$ Constanten sind, wie dies im vorigen Abschnitte sich ergab.

Machen wir nun die Substitution:

$$y = \psi(x,u),$$

so ergibt sich nach dem Obigen:

$$A = \pm\int_{x_0}^{x_1}\int_{u_0}^{u_1} f\frac{\partial\psi}{\partial u}du\,dx$$

und die Grenzen $u_0$, $u_1$ sind durch die Gleichungen bestimmt:

$$y_0 = \psi(x,u_0),\ y_1 = \psi(x,u_1).$$

Es ist hier aber wohl zu berücksichtigen, dass die Ausdrücke $dx$ und $\frac{d\psi}{du}du$ gleiches Zeichen haben. Ist also z. B. $dx$ positiv und $\frac{d\psi}{du}$ negativ, so ist auch $du$ negativ zu nehmen, wo dann $u_1$ untere, $u_0$ aber obere Grenze sein würde. Um diese Vertauschung der Grenzen zu vermeiden, kann man, wie hier geschehen, $du$ stets positiv denken und das Integral mit doppelten Vorzeichen versehen. Durch Umkehrung der Grenzen ergibt sich dann:

$$A = \int\int\left(f\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}dx\right)du,$$

wo die Grenzen nach dem obigen Verfahren zu bestimmen sind. Sei jetzt:

$$x = \varphi(u,v),$$

so kann man ganz wie oben setzen:

$$A = \int\int f\cdot\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\,du,$$

wo die Grenzen sich ebenfalls nach dem vorigen Abschnitte ergeben. $u$ und $v$ sind durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(u,v),\ y = \psi(x,u)$$

völlig bestimmt. Werde aber die letztere Gleichung ersetzt durch die folgende

$$y = \varphi_1(u,v),$$

so handelt es sich eben nur darum, den Werth von $\frac{\partial\psi}{\partial u}$ durch $\varphi$ und $\varphi_1$ auszudrücken.

$\frac{\partial\psi}{\partial u}$ ist nun der Differenzialquotient von $y$ nach $u$ unter der Bedingung genommen, dass $x$ constant sei. Unter dieser Bedingung hat man aber:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial u} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}$$

und

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} = 0.$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen: $\frac{\partial v}{\partial u}$, so kommt:

$$\frac{\partial\psi}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial v}}\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u}\right),$$

also:

$$A = \int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f\cdot\triangle\,du\,dv,$$

wo

$$\triangle = \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \varphi_1}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi_1}{\partial v}$$

oder, wenn man will:

$$\triangle = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} - \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}$$

und $u$, $v$ durch die Gleichungen:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \varphi_1(u, v)$$

gegeben sind.

Diese Betrachtungen lassen sich leicht auf ein $n$faches Integral ausdehnen. Es sei:

$$A = \iiint \cdots f\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \cdots dx_n,$$

wo $f$ eine Function von $x_1, x_2, \ldots x_n$ ist.

Setzen wir jetzt:

$$x_1 = \psi_1(u_1, x_2, x_3 \cdots x_n)$$
$$x_2 = \psi_2(u_1, u_2, x_3 \cdots x_n)$$
$$x_3 = \psi_3(u_1, u_2, u_3, x_4 \cdots x_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1} = \psi_{n-1}(u_1, u_2, u_3 \cdots u_{n-1}, x_n)$$
$$x_n = \varphi_n(u_1, u_2, u_3 \cdots u_n),$$

so erhält man bei wiederholter Anwendung des obigen Verfahrens:

$$A = \iiint \cdots f \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1}\frac{\partial \psi_2}{\partial u_2}\frac{\partial \psi_3}{\partial u_3} \cdots \frac{\partial \psi_{n-1}}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n} du_1\, du_2 \cdots du_n.$$

Ersetzen wir jetzt die obigen Bedingungsgleichungen durch die folgenden, welche aus den ersteren durch Elimination der Grössen $x$ in den Functionen $\psi$ entstehen, und von denen nur die letzte in der Form mit den obenstehenden übereinstimmt:

$$x_1 = \varphi_1(u_1, u_2, u_3 \cdots u_n)$$
$$x_2 = \varphi_2(u_1, u_2, u_3 \cdots u_n)$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_n = \varphi_n(u_1, u_2, u_3 \cdots u_n),$$

so ist $\frac{\partial \psi_1}{\partial u_1}$ der Differentialquotient von $x_1$ nach $u_1$ unter der Bedingung genommen, dass $x_2, x_3 \cdots x_n$ constant bleiben. Es ergibt sich also durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial u_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial u_1}$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial u_1} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial u_1}$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial u_1} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial u_1}$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_1} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial u_1} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial u_1} + \cdots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial u_n}$$

Eliminirt man hieraus die Grössen

$$\frac{\partial u_2}{\partial u_1}, \frac{\partial u_3}{\partial u_1} \cdots \cdots \frac{\partial u_n}{\partial u_1},$$

so erhält man in Determinantenform:

$$\triangle_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial u_1} = \triangle_1,$$

wo

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial u_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_1} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_2} & \cdots\cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_3} & \cdots\cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_n} \\ \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_2} & \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_3} & \cdots\cdots & \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_2} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_3} & \cdots\cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

Wir wollen jetzt allgemein setzen:

$$\triangle_s = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_s}{\partial u_s} & \frac{\partial\varphi_s}{\partial u_{s+1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial\varphi_s}{\partial u_n} \\ \frac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial u_s} & \frac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial u_{s+1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial\varphi_{s+1}}{\partial u_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_s} & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_{s+1}} & \cdots\cdots & \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_n} \end{vmatrix},$$

so dass also

$$\triangle_n = \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_n}$$

ist.

Der Ausdruck $\frac{\partial\psi_2}{\partial u_2}$ ist nun der Differentialquotient von $x_2$ nach $u_2$ unter der Bedingung genommen, dass nicht allein $u_1$, sondern auch $x_2, x_3 \ldots x_n$ u. s. w. als constant betrachtet sind. Er ist also gegeben durch die Gleichungen:

$$\frac{\partial\psi_2}{\partial u_2} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial u_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial u_2}$$

$$0 = \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_2} + \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial u_2} + \cdots + \frac{\partial\varphi_3}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial u_2}$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$0 = \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_2} + \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_3}\frac{\partial u_3}{\partial u^2} + \cdots + \frac{\partial\varphi_n}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial u_2},$$

aus welchen sich ergibt:

$$\triangle_3 \frac{\partial\psi_2}{\partial u_2} = \triangle_2,$$

in gleicher Weise erhält man:

$$\triangle_4 \frac{\partial\psi_3}{\partial u_3} = \triangle_3, \quad \triangle_5 \frac{\partial\psi_4}{\partial u_4} = \triangle_4 \;\cdots\; \triangle_n \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial u_{n-1}} = \triangle_{n-1},$$

also durch Vereinigung dieser Ausdrücke:

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial u_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial u_2} \cdots \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial u_{n-1}}\frac{\partial\psi_n}{\partial u_n} = \frac{\triangle_1}{\triangle_2}\frac{\triangle_2}{\triangle_3} \cdots \frac{\triangle_{n-1}}{\triangle_{n-2}}\frac{\partial\varphi_n}{\partial u_n} = \triangle_1,$$

da $\frac{\partial\varphi_n}{\partial u_n} = \triangle_n$ war.

Es ist also:

$$\iiint \cdots f\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \cdots dx_n = \iiint \cdots f \triangle_1\, du_1\, du_2\, du_3 \cdots du_n.$$

Sind nur drei Variable gegeben, und bezeichnet man die Ausdrücke:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial u_1}\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_2}\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial u_3}\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_1}\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_2}\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u_3}\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_1}\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_2}\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u_3}$$

bezüglich mit $a \quad b \quad c \quad a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad a_2 \quad b_2 \quad c_2$,
so ist

$$\triangle_1 = ab_1c_2 - ab_2c_1 - a_1bc_2 + a_1cb_2 + a_2bc_1 - a_2b_1c = a(b_1c_2 - b_2c_1) + a_1(b_2c - bc_2) + a_2(bc_1 - b_1c).$$

**Beispiele:**

I) Sei gegeben

$$\iint U\, dx\, dy$$

und führen wir die zwei neuen Unbekannten $r$, $\vartheta$ durch die Gleichungen

$$x = r\cos\vartheta,\quad y = r\sin\vartheta,$$

ein, eine Transformation, welche der Verwandlung rechtwinkliger Coordinaten in Polarcoordinaten entspricht. Man hat dann:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\vartheta,\quad \frac{\partial x}{\partial \vartheta} = -r\sin\vartheta,$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\vartheta,\quad \frac{\partial y}{\partial \vartheta} = r\cos\vartheta,$$

also:

$$\triangle = r\cos\vartheta^2 + r\sin\vartheta^2 = r$$

und

$$\iint U\, dx\, dy = \iint r\, U\, dr\, d\vartheta.$$

II) Ist gegeben

$$x = r\cos\vartheta,$$
$$y = r\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$z = r\sin\vartheta\sin\varphi$$

und sei das zu transformirende Integral:

$$\iiint U\, dx\, dy\, dz,$$

so hat man:

$$a = \cos\vartheta,\qquad b = -r\sin\vartheta,\qquad c = 0,$$
$$a_1 = \sin\vartheta\cos\varphi,\qquad b_1 = r\cos\vartheta\cos\varphi,\qquad c_1 = -r\sin\vartheta\sin\varphi,$$
$$a_2 = \sin\vartheta\sin\varphi,\qquad b_2 = r\cos\vartheta\sin\varphi,\qquad c_2 = r\sin\vartheta\cos\varphi.$$

$$b_1c_2 - b_2c_1 = r^2\sin\vartheta\cos\vartheta,\qquad a(b_1c_2 - b_2c_1) = r^2\sin\vartheta\cos\vartheta^2,$$
$$b_2c - c_2b = r^2\sin\vartheta^2\cos\varphi,\qquad a_1(b_2c - c_2b) = r^2\sin\vartheta^2\cos\varphi^2,$$
$$bc_1 - b_1c = r^2\sin\vartheta^2\sin\varphi,\qquad a_2(bc_1 - b_1c) = r^2\sin\vartheta^2\sin\varphi^2.$$

$$\triangle = r^2\sin\vartheta$$

und

$$\iiint U\, dx\, dy\, dz = \iiint U r^2 \sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi.$$

III) Transformiren wir noch das Integral:

$$\iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}\, dy\, dz,$$

welches den Inhalt einer Oberfläche angibt, deren Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten gegeben ist, ebenfalls durch Einführung der Polarcoordinaten $r, \vartheta, \varphi$, wo

$$x = r\cos\vartheta,\qquad y = r\sin\vartheta\cos\varphi,\qquad z = r\sin\vartheta\sin\varphi$$

ist. Es ist hier $r$ als eine Function von $\vartheta$ und $\varphi$ aufzufassen, und man hat:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = -r\sin\vartheta\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \cos\vartheta\left(\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \frac{\partial r}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right).$$

Die Ausdrücke für $\frac{\partial \vartheta}{\partial y}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ werden gefunden, wenn man die Ausdrücke für $y$ und $z$ nach $y$ differenziirt, wobei der erstere 1, der zweitere 0 zum Differentialquotienten hat, also:

$$1 = \cos\varphi\left(\sin\vartheta\frac{\partial r}{\partial \vartheta} + r\cos\vartheta\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \sin\vartheta\left(\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi} - r\sin\varphi\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

$$0 = \sin\varphi\left(\sin\vartheta\frac{\partial r}{\partial \vartheta} + r\cos\vartheta\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial y} + \sin\vartheta\left(\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi} + r\cos\varphi\right)\frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

Es ergibt sich hieraus:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\sin\varphi \frac{\partial r}{\partial \varphi} + r\cos\varphi}{r\left(r\cos\vartheta + \frac{\partial r}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\right)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\sin\varphi}{r\sin\vartheta}$$

und wenn man diese Werthe in:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}\left(-r\sin\vartheta + \cos\vartheta\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right) + \cos\vartheta\frac{\partial r}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

einsetzt:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial \vartheta} - r\sin\vartheta^2\cos\varphi - \sin\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi}}{\sin\vartheta\left(r\cos\vartheta + \sin\vartheta\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)}.$$

Ferner hat man:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \left(-r\sin\vartheta + \cos\vartheta\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \cos\vartheta\frac{\partial r}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

und indem man die Ausdrücke für $y$ und $z$ nach $z$ differenziirt:

$$0 = \cos\varphi\left(\sin\vartheta\frac{\partial r}{\partial \vartheta} + r\cos\vartheta\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \sin\vartheta\left(\cos\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi} - r\sin\varphi\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$1 = \sin\varphi\left(\sin\vartheta\frac{\partial r}{\partial \varphi} + r\cos\vartheta\right)\frac{\partial \vartheta}{\partial z} + \sin\vartheta\left(\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi} + r\cos\varphi\right)\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial z} = \frac{r\sin\varphi - \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi}}{r\left(\sin\vartheta\frac{\partial r}{\partial \vartheta} + r\cos\vartheta\right)}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\cos\varphi}{r\sin\vartheta},$$

also ist:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\varphi\frac{\partial r}{\partial \vartheta} - r\sin\vartheta^2\sin\varphi + \cos\varphi\frac{\partial r}{\partial \varphi}}{\sin\vartheta\left(r\cos\vartheta + \sin\vartheta\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)}$$

$$1 + \frac{\partial x^2}{\partial y^2} + \frac{\partial x_2}{\partial z_2} = \frac{r^2\sin\vartheta^2 + \sin\vartheta^2\frac{\partial r^2}{\partial \vartheta^2} + \frac{\partial r_2}{\partial \varphi^2}}{\sin\vartheta^2\left(r\cos\vartheta + \sin\vartheta\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\right)^2}.$$

Man hat ferner:

$$\triangle = \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\frac{\partial z}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\frac{\partial y}{\partial \varphi}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial \vartheta} = \frac{\partial r}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\cos\varphi + r\cos\vartheta\cos\varphi$$

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\vartheta\cos\varphi - r\sin\vartheta\sin\varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \vartheta} = \frac{\partial r}{\partial \vartheta}\sin\vartheta\sin\varphi + r\cos\vartheta\sin\varphi$$

$$\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\vartheta\sin\varphi + r\sin\vartheta\cos\varphi$$

also

$$\triangle = r^2\sin\vartheta\cos\vartheta + r\frac{\partial r}{\partial \vartheta}\sin\vartheta^2,$$

also:

$$\iint \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dy\, dz = \iint \frac{\sqrt{r^2 \sin\vartheta^2 + \frac{\partial r^2}{\partial \vartheta^2}\sin\vartheta^2 + \frac{\partial r^2}{\partial \varphi^2}}}{\frac{\triangle}{r}} \triangle\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$= \iint r \sqrt{r^2 \sin\vartheta^2 + \frac{\partial r^2}{\partial \vartheta^2}\sin\vartheta^2 + \frac{\partial r^2}{\partial \varphi^2}}\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Die Bestimmung der Grenzen bei der Transformation ist nach dem Obigen leicht anzustellen, führt indess oft, wie die Transformation selbst, zu langwierigen Rechnungen.

37) Ueber die Berechnung der bestimmten Integrale.

Oft lassen sich Quadraturen in gewissen gegebenen Grenzen, z. B. 0 und $\infty$, $-\infty$ und $\infty$, 0 und 1, 0 und $\pi$ noch dann ausführen, wenn sich das allgemeine Integral der Berechnung entzieht. Diese Berechnungen bilden die so wichtige Theorie der bestimmten Integrale, welche wir jetzt zu geben haben.

Zunächst aber ist eine Bemerkung über diejenigen bestimmten Integrale zu machen, deren eine Grenze unendlich wird.

Es kann hier derselbe Fall wie bei den Reihen eintreten, die eine unendliche Anzahl von Gliedern haben, dass nämlich der Ausdruck aufhört, einen bestimmten Werth zu haben, also entweder unbestimmt oder unendlich gross wird.

Sei das Integral

$$\int_\alpha^\infty f(x)\, dx = \varphi(\alpha)$$

gegeben, so verfährt man, um zu untersuchen, ob dieser Fall eintrete, ähnlich wie bei Reihen, die man in Bezug auf ihre Convergenz oder Divergenz prüft. Man setzt nämlich

$$\varphi(\alpha) = \int_\alpha^k f(x)\, dx + \int_k^\infty f(x)\, dx,$$

wo man sich $k$ endlich, aber unbestimmt gross denkt. Wenn der zweite Theil $\int_k^\infty f(x)\, dx$ mit wachsendem $k$ sich der Null nähert, so hat das Integral einen Grenzwerth, und es ist derselbe gleich $\int_0^k f(x)\, dx$.

Aehnliche Betrachtungen lassen sich machen, wenn die untere Grenze $-\infty$ ist.

Schliesslich bemerken wir noch, dass der Integrationsweg bei bestimmten Integralen angegeben werden muss. Geschicht dies nicht, so setzten wir immer den gradlinigen Weg voraus, der übrigens, wie an seiner Stelle gezeigt wurde, der einzige Werth ist, wenn, wie dies sehr häufig der Fall ist, die Function unter dem Integralzeichen nicht discontinuirlich wird und keine Mehrdeutigkeit besitzt. Noch ist zu beachten, dass selbst Discontinuitäts- oder mehrfache Punkte eine Mehrdeutigkeit des Integrals zwar möglich machen, aber nicht mit Nothwendigkeit bedingen.

38) Erste Methode der Quadratur bestimmter Integrale.

Unter den Methoden, welcher man sich zur Auffindung bestimmter Integrale bedient, ist folgende von grosser Wichtigkeit. Sei

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = U$$

das zu bestimmende Integral, so gelingt es zuweilen, den Ausdruck $f(x)$ unter der Form eines andern bestimmten Integrals auszudrücken. Ist demnach

$$f(x) = \int_\gamma^\delta \varphi(u, x)\, du,$$

so hat man:

$$U = \int_\alpha^\beta \int_\gamma^\delta \varphi(u, x)\, du\, dx,$$

oder bei Umkehrung der Grenzen:

$$U = \int_\gamma^\delta \int_\alpha^\beta \varphi(u, x)\, dx\, du.$$

Gelingt es dann $\int_\alpha^\beta \varphi(u, x)\, du$ auszudrücken, so ist zuweilen auch die noch übrige Integration ausführbar, so dass $U$ in der That bestimmt ist. Diese Methode beruht im Wesentlichen auf Umkehrung der Grenzen.

Anwendungen. I. Sei gesucht das Integral:

$$U=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx,$$

wo $a$ und $b$ positive Zahlen sein sollen. Offenbar hat man:

$$\frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}=\int_a^b e^{-ux}du,$$

wie sich durch Integration verificiren lässt, also:

$$U=\int_0^\infty\int_a^b e^{-ux}du\,dx=\int_a^b\int_0^\infty e^{-ux}dx\,du.$$

Da nun

$$\int e^{-ux}dx=-\frac{e^{-ux}}{u},$$

also wenn man $\infty$ und 0 für $u$ setzt, und die Differenz nimmt:

$$\int_0^\infty e^{-ux}dx=\frac{1}{u}$$

ist, so hat man:

$$U=\int_a^b\frac{du}{u}=\lg b-\lg a,$$

also:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}dx=\lg b-\lg a=\lg\left(\frac{b}{a}\right). \qquad \text{I}$$

Setzt man in diese Gleichung noch

$$x=\lg\left(\frac{1}{y}\right),$$

so erhält man:

$$e^{-ax}-e^{-bx}=y^a-y^b,$$

$$dx=\frac{-dy}{y};$$

für $x=0$ wird $y=1$, für $x=0$ wird $y=0$,

also:

$$\int_0^\infty\frac{(e^{-ax}-e^{-bx})}{x}dx=\int_1^0\frac{(y^{a-1}-y^{b-1})}{\lg y}dy=\int_0^1\frac{y^{b-1}-y^{a-1}}{\lg y}dy,$$

also:

$$\int_0^1\frac{y^{b-1}-y^{a-1}}{\lg y}dy=\lg\left(\frac{b}{a}\right). \qquad \text{II}$$

II. Die Formel I lässt sich auch dann noch anwenden, wenn $a$ complex ist, vorausgesetzt, dass der reelle Theil positiv bleibt.

Denn es ist:

$$\int e^{-(a+bi)x}dx=\frac{-1}{a+bi}e^{-(a+bi)x},$$

$$\int_0^\infty e^{-(a+bi)x}dx=\frac{1}{a+bi},$$

also:

$$U=\int_{-\alpha}^{+\alpha}\int_0^\infty e^{-(a+bi)x}dx\,db=\int_{-\alpha}^{+\alpha}\frac{db}{a+bi}=\frac{1}{i}\lg\frac{a+\alpha i}{a-\alpha i},$$

aber auch:

$$U = \int_0^\infty \int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-(a+bi)x}\, db\, dx = i \int_0^\infty \frac{e^{-(a+\alpha i)x} - e^{-(a-\alpha i)x}}{x} dx,$$

woraus dann folgt:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(a+\alpha i)x} - e^{-(a-\alpha i)x}}{x} dx = \frac{1}{i} \lg \frac{a+\alpha i}{a-\alpha i}.$$

Aus den Gleichungen

$$\frac{e^{\alpha x i} - e^{-\alpha x i}}{2i} = \sin \alpha x,$$

$$e^{2si} = \frac{1+i \operatorname{tg} s}{1-i \operatorname{tg} s}$$

oder, wenn man:

$$\frac{\alpha}{a} = \operatorname{tg} s$$

setzt:

$$2i \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{a} = \lg \frac{a+i\alpha}{a-i\alpha},$$

ergiebt sich:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{a}. \quad \text{III}$$

Es könnte hierbei noch ein Zweifel entstehen, welcher der arcus tangens zu nehmen sei; da, wenn $m$ der kleinste Werth des Arcus tangens ist, der allgemeine Ausdruck für diese Function $m+s\pi$ wird, wo $s$ eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Im Integral I war dieser Zweifel nicht vorhanden, denn $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$ ist eine reelle Grösse, folglich kann auch nur der reelle Werth von $\lg\left(\frac{b}{a}\right)$ dafür genommen werden.

In unserm Falle aber löst sich auch der Zweifel leicht, wenn man bedenkt, dass $\int_0^\infty e^{-\alpha x} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$ eine continuirliche Function von $\alpha$ ist, die für $\alpha = 0$ verschwindet. Es muss also für diesen Fall auch $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{a}$ gleich Null werden, was nur bei dem absolut kleinsten zugehörigen Bogen der Fall, so dass, wie in der Regel, auch hier derselbe unter $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{a}$ zu verstehen ist.

Das mit III bezeichnete Integral gilt für jeden positiven Werth von $a$; es fragt sich, ob es für $a=0$ noch richtig ist.

Offenbar stellen beide Seiten der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{a}$$

Functionen vor, die für positives $a$ continuirlich sind, wie klein auch $a$ sei. Es fragt sich, ob diese Continuität noch stattfindet, wenn $a$ über alle Grenzen hin nach Null abnimmt, in welchem Falle auch dann noch beide Seiten der Gleichung ihren Werth für $a=0$ beibehalten.

Die rechte Seite ist in der That eine continuirliche Function von $a$, welche für verschwindendes $a$ die Werthe $\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ annimmt, je nachdem $\alpha$ positiv oder negativ ist. Was die linke Seite anbetrifft, so schreiben wir

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_0^k \frac{\sin \alpha x}{x} dx + \int_k^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

Continuität findet dann statt, wenn mit wachsendem $k$ das letztere Integral verschwindet. Sei, um dies zu untersuchen

$$k = \frac{2s\pi}{\alpha},$$

so haben wir:

$$\int_k^{k'} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_{\frac{2s\pi}{\alpha}}^{\frac{(2s+1)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{x} dx + \int_{\frac{(2s+1)\pi}{\alpha}}^{\frac{(2s+2)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{x} dx + \cdots$$

$$+ \int_{\frac{(2s+n)\pi}{\alpha}}^{\frac{[2s+(n+1)]\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{x} dx + \cdots + \int_{\frac{[2s+(n+1)]\pi}{\alpha}}^{\frac{[2s+(n+1)+\varepsilon]\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{x} dx.$$

Es ist hier statt der obern Grenze $\infty$ genommen:

$$k' = \frac{(2s+\widehat{n+1}+\varepsilon)\pi}{\alpha},$$

wo $n$ eine beliebig grosse ganze Zahl, $\varepsilon$ aber ein echter positiver Bruch sein soll.

Da in den Grenzen jedes der Theilintegrale $\sin \alpha x$ sein Zeichen nicht ändert, so kann man setzen, wenn $\vartheta$ ein positiver echter Bruch ist, und $u$ eine ganze Zahl:

$$\int_{\frac{u\pi}{\alpha}}^{\frac{(u+1)\pi}{\alpha}} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \int_{\frac{u\pi}{\alpha}}^{\frac{(u+1)\pi}{\alpha}} \sin(\alpha x)\, d(\alpha x) = \frac{1}{(u+\vartheta)\pi} \int_{\frac{u\pi}{\alpha}}^{\frac{(u+1)\pi}{\alpha}} \sin \alpha x\, d(\alpha x),$$

$$\frac{\cos u\pi - \cos(u+1)\pi}{(u+\vartheta)\pi} = \frac{(-1)^u 2}{(u+\vartheta)\pi},$$

also:

$$\int_k^{k'} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \frac{2}{(2s+\vartheta)\pi} - \frac{2}{(2s+1+\vartheta_1)\pi} + \frac{2}{(2s+2+\vartheta_2)\pi} - \cdots\cdots$$

$$+ \frac{(-1)^n 2}{(2s+n+\vartheta_n)\pi} + \frac{2\lambda}{(2s+n+\vartheta_n+\varepsilon)\pi},$$

wo $\lambda$ ebenfalls ein echter Bruch ist.

Die Summe dieser Reihe ist offenbar kleiner, als die der folgenden, welche entsteht, wenn man in den positiven Gliedern $\vartheta$, $\vartheta_2 \cdots$ mit Null, in den negativen $\vartheta_1$, $\vartheta_3 \cdots$ mit Eins vertauscht, und das letzte oder die beiden letzten Glieder, die jedenfalls verschwinden, weglässt.

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{2s+2} + \frac{1}{2s+2} - \frac{1}{2s+4} + \frac{1}{2s+4} - \frac{1}{2s+6} + \cdots\cdots\right) = \frac{2}{\pi}\frac{1}{2s},$$

welche mit wachsendem $s$ offenbar verschwindet.

Sie ist ferner grösser als die ebenfalls verschwindende Reihe, die entsteht, wenn man in den positiven Gliedern 1 für $\vartheta$, und in den negativen dafür Null setzt, in welchem Falle man:

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{2s+1} - \frac{1}{2s+1} + \frac{1}{2s+3} - \frac{1}{2s+3} \cdots\cdots\right) = 0$$

erhält, also jedenfalls:

$$\int_k^{k'} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = 0,$$

wie auch $k'$ wachse, wenn es nur grösser als das ebenfalls wachsende $k$ ist, woraus dann:

$$\int_k^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = 0$$

folgt, und die Continuität unsers Integrals erwiesen ist. Man hat somit:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \pm \frac{\pi}{2}, \qquad \text{III a}$$

wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\alpha$ positiv oder negativ ist.

Für $\alpha$ gleich Noll, wird der Ausdruck

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x} = \lg \infty - \lg (0),$$

also discontinuirlich.

III. Aus der Formel III a lässt sich noch ein andres wichtiges Resultat herleiten. Sei

$$\alpha = a + b,$$

$a$ und $b$ positiv, und $a$ grösser als $b$, so hat man:

$$\int_0^\infty \frac{\sin (a+b)x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin (a-b)x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

also, wenn man diese beiden Formeln addirt und auch subtrahirt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin a x \ \cos b x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin b x \ \cos a x}{x} dx = 0,$$

ein Resultat, dass man auch folgendermassen schreiben kann:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \ \cos \beta x}{x} dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{oder } 0. \quad \text{IV}$$

Der erste Werth gilt, wenn $\alpha$ grösser als $\beta$, der zweite, wenn $\alpha$ kleiner als $\beta$ ist, vorausgesetzt, dass $\alpha$ und $\beta$ positiv sind.

Ist $\beta = \alpha$, so hat man:

$$\int_0^\infty \frac{\sin 2\alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

also:

$$\int_0^\infty \frac{\sin \alpha x \ \cos \alpha x}{x} dx = \frac{\pi}{4}.$$

Der Ausdruck IV ist wichtig für gewisse später folgende Untersuchungen. Dirichlet, von dem dieselben herrühren, nennt das Integral den „discontinuirlichen Factor", und gibt ihm eine Form, wo $\alpha = 1$ ist:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin x \cos \beta x}{x} dx = 1 \text{ oder } = 0. \quad \text{IV a}$$

Der erste Werth gilt, wenn $\beta$ positiv oder negativ kleiner als Eins ist, also zwischen $-1$ und $+1$ liegt, der zweite, wenn $\beta$ irgendwie ausserhalb dieser Grenzen fällt. Das Zeichen von $\beta$ hat nämlich offenbar keinen Einfluss auf das Resultat.

IV. Die Formel

$$\int_0^\infty e^{-(a+bi)x} dx = \frac{1}{a+bi},$$

von welcher wir bei diesen Betrachtungen ausgingen, ist auch an sich wichtig.

Sie zerfällt, wenn man das Reelle vom Imaginären trennt, und

$$\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

setzt, in die beiden andern:

$$\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx = \frac{a}{a^2+b^2} \qquad \text{V}$$

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2+b^2}, \qquad \text{VI}$$

wo $a$ positiv sein muss.

Beide Formeln verlieren ihre Bedeutung, wenn $a$ gleich Null wird. In diesem Falle werden nämlich beide Integrale discontinuirlich.

V. Multipliciren wir die Formel VI mit $\frac{\cos b \, db}{b}$ und integriren in den Grenzen $b$ und $\infty$, so kommt:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx \cos b}{b} dx \, db = \int_0^\infty \frac{\cos b \, db}{a^2+b^2},$$

aber mit Umkehrung der Grenzen:

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-ax} \sin bx \cos b}{b} db \, dx = \int_0^\infty \frac{\cos b \, db}{a^2+b^2}.$$

Es ist aber:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos b\,db}{b} = \frac{\pi}{2} \text{ oder gleich } 0,$$

je nachdem das positive $x$ grösser oder kleiner als 1 ist. Das Integral nimmt also die Gestalt an:

$$\frac{\pi}{2}\int_1^\infty e^{-ax}dx = \int_0^\infty \frac{\cos b\,db}{a^2+b^2},$$

da der von 0 bis 1 gehende Theil des ersten Integrals verschwindet. Berechnet man den Ausdruck links, so kommt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos b\,db}{a^2+b^2} = \frac{\pi}{2}\frac{e^{-a}}{a}$$

oder, wenn man $b = ax$ setzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a}, \qquad \text{VII}$$

wo $a$ aber positiv sein muss. Es kann $a$ auch Null sein, wie sich unmittelbar verificiren lässt; wäre $a$ negativ, so wäre der absolute Werth von $a$ rechts in den Exponenten zu setzen.

Differenziirt man noch $a$ unter dem Integralzeichen, so kommt:

$$\int_0^\infty \frac{x \sin ax\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-a}. \qquad \text{VIII}$$

Integrirt man VII nach $a$ in den Grenzen $a=0$ und $a=a$, so kommt:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax\,dx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{2}(1-e^{-a}) \qquad \text{IX}$$

immer positives $a$ vorausgesetzt.

39) **Zweite Methode der Quadratur bestimmter Integrale.**

Ein öfter angewandtes Mittel gewährt die Einführung neuer Variablen bei Doppelintegralen, auf welche Form die zu bestimmenden Ausdrücke in irgend einer Weise zu bringen sind.

Ein Beispiel wird dies klar machen. Sei das zu bestimmende Integral:

$$U = \int_0^\infty e^{-ax^2}dx,$$

wo $a$ eine positive Grösse oder eine complexe, deren reeller Theil positiv ist. Dann ist offenbar:

$$U^2 = \int_0^\infty e^{-ax^2}dx \cdot \int_0^\infty e^{-ay^2}dy$$

oder auch:

$$U^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-a(x^2+y^2)}dy\,dx.$$

Wir machen nun die Substitution

$$y = s \cdot x,$$

wo auch

$$s = 0 \text{ für } y = 0,$$
$$s = \infty \text{ für } y = \infty$$

wird.

Nach den in Abschnitt 36 enthaltenen Prinzipien ist dann:

$$U^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ax^2(1+s^2)}x\,dx\,ds,$$

wo die Ordnung der Integration vertauscht ist, aber:

$$\int e^{-ax^2(1+s^2)}x\,dx = \tfrac{1}{2}\int e^{-a(1+s^2)x^2}d(x^2) = -\frac{e^{-a(1+s^2)x^2}}{2a(1+s^2)}$$

und im Falle $a$ seinem reellen Theile nach positiv ist:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2(1+s^2)}x\,dx = \frac{1}{2a(1+s^2)},$$

also:

$$U^2 = \frac{1}{2a}\int_0^\infty \frac{ds}{1+s^2} = \frac{\operatorname{arctg}\infty - \operatorname{arctg}0}{2a} = \frac{\pi}{4a}.$$

Es ist somit

$$U = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

d. h.

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}. \qquad \text{X}$$

Für den Fall, wo $\alpha = 1$ ist, ergibt sich hieraus:

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}. \qquad \text{Xa}$$

Differenziirt man den Ausdruck X $n$mal nach $\alpha$, so ergibt sich noch:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, \frac{(2n)!}{4^n\, n!\, \alpha^n}, \qquad \text{XI}$$

wo unter $n!$ das bekannte Product $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ verstanden ist.

Sei jetzt

$$\alpha = a + bi$$

und $a$ immer positiv, so sind die Ausdrücke X und XI noch einiger Transformationen fähig.

Setzt man

$$x^2 = u,$$

so kommt:

$$2x\, dx = du, \quad dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha u} du}{\sqrt{u}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \text{Xb}$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha u} u^{n-\frac{1}{2}} du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, \frac{(2n)!}{4^n\, n!\, \alpha^n}. \qquad \text{XIa}$$

Setze man ferner:

$$e^{-x^2} = s$$

$$-2xe^{-x^2} dx = ds,$$

$$dx = -\frac{ds}{2s\sqrt{\lg \frac{1}{s}}},$$

für

$$x = 0 \text{ wird } s = 1,$$

für

$$x = \infty \text{ wird } s = 0.$$

Die Gleichungen X und XI geben also:

$$\int_0^1 \frac{s^{\alpha-1} ds}{\sqrt{\lg \frac{1}{s}}} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \text{Xc}$$

$$\int_0^1 s^{\alpha-1} \left(\lg \frac{1}{s}\right)^{n-\frac{1}{2}} ds = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, \frac{(2n)!}{4^n\, n!\, \alpha^n}. \qquad \text{XIb}$$

Es ist ferner:

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\alpha x^2} dx = -\int_0^{-\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_0^\infty e^{-\alpha y^2} dy,$$

wie man erhält, wenn man $x = -y$ setzt, und ebenso

$$\int_{-\infty}^0 e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx = \int_0^\infty e^{-\alpha y^2} y^{2n} dy.$$

Diese Resultate, bezüglich zu den Ausdrücken X und XI addirend, erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \qquad \text{Xd}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \frac{(2n)!}{4^n n! \alpha^n}. \qquad \text{XIe}$$

In dem Integral Xd ist die Function $e^{-\alpha x^2}$ stets continuirlich und eindeutig, also der Werth vom Integrationsweg unabhängig, vorausgesetzt, dass die Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ bleiben. Setzen wir jetzt

$$x = y + hi,$$

wo $h$ reell ist, so werden $-s-hi$ und $+s-hi$ die Grenzen von $y$, wo $s$ eine unendlich grosse, aber wesentlich reelle und positive Grösse bedeutet. Nach dem eben Gesagten ist im übrigen der Integrationsweg gleichgültig. Aber:

$$\int_{-s-hi}^{+s-hi} e^{-\alpha(y+hi)^2} dy = \int_{-s-hi}^{-s} + \int_{-s}^{+s} + \int_{+s}^{s-hi},$$

wo in jedem der Theilintegrale rechts dieselbe Function, welche links steht, zu ergänzen ist.

Offenbar aber verschwindet mit wachsendem $s$ im ersten und dritten Theil die Function ganz, und man hat also:

$$\int_{-s}^{+s} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-s-hi}^{s-hi} e^{-\alpha(y+hi)^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(y+hi)^2} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Trennt man den reellen und imaginären Theil, so ergiebt sich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} \cos(2\alpha h) y\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\alpha h^2}$$

und der mit dem sinus behaftete Theil wird Null, wie sich übrigens von selbst versteht. Wir setzen

$$2\alpha h = \beta$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} \cos \beta y\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \qquad \text{XII}$$

Es ist aber auch:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha y^2} \cos \beta y\, dy = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha y^2} \cos \beta y\, dy + \int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha y^2} \cos \beta y\, dy$$

und

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-\alpha y^2} \cos \beta y\, dy = \int_{0}^{\infty} e^{-\alpha y^2} \cos \beta y\, dy,$$

wenn $-y$ für $y$ gesetzt wird.

Es ergiebt sich hieraus:

$$\int_{0}^{\infty} e^{-\alpha y^2} \cos \beta y\, dy = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \qquad \text{XIIa}$$

Bei dem Ausdrucke X kann ein Zweifel entstehen, welcher Werth von $\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ gemeint sei, wenn $\alpha$ eine complexe Zahl ist.

Sei $a = re^{\varphi i}$, so ist

$$\sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\pm\sqrt{r}\,e^{\frac{\varphi}{2}i}}.$$

Es ist dies, so wie das Integral links, eine continuirliche Function von $\varphi$, welche für

$$\varphi = 0$$

in $\frac{\sqrt{\pi}}{+\sqrt{r}}$ übergeht, somit ist also das positive Zeichen zu nehmen.

Da alle in diesem Abschnitte gegebenen Resultate auf den Werth des Integrals:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}dx$$

sich zurückführen liessen, so wäre noch zu beweisen, dass dieser Ausdruck auch wirklich gegen einen bestimmten Werth convergirt, da im entgegengesetzten Falle die gegebenen Schlüsse ungenau wären.

In $\int_k^\infty e^{-ax^2}dx$ ist die Function stets positiv, ausserdem aber

$$e^{-ax^2} < e^{-ax}$$

und da:

$$\int_k^\infty e^{-ax}dx = -\frac{1}{a}\left(e^{-a\infty} - e^{-ak}\right) = \frac{1}{a}e^{-ak}$$

ist, ein Ausdruck, der mit wachsendem $k$ verschwindet, so ist unsere Voraussetzung erwiesen.

40) **Dritte Methode zur Berechnung bestimmter Integrale.**

Ein Mittel zur Berechnung bestimmter Integrale gewährt oft die Auflösung von Differenzialgleichungen. Wir führen ein Beispiel davon an, wobei das der Theorie der Differenzialgleichungen Angehörige, welches vorkommt, keinerlei Schwierigkeiten macht.

Sei gegeben:

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx,$$

differenziirt man nach $a$, so kommt:

$$\frac{du}{da} = -2a\int_0^\infty \frac{e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}}{x^2}dx,$$

setzt man rechts $\frac{a}{z}$ für $x$, so kommt:

$$\frac{du}{da} = -2\int_0^\infty e^{-z^2-\frac{a^2}{z^2}}dz = -2u.$$

Es ist also die Differenzialgleichung:

$$\frac{du}{da} = -2u$$

aufzulösen, welche die Gestalt annimmt:

$$\frac{du}{u} = -2da,$$

also integrirt:

$$\lg u = -2a + \text{const.}$$

oder

$$u = \alpha e^{-2a},$$

wo $\alpha$ eine Constante ist. Man bestimmt dieselbe, indem man $a$ gleich Null setzt. Es wird dann

$$u = \alpha,$$

aber auch:

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi},$$

also:

$$\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{a^2}{x^2}}dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-2a}. \quad \text{XIII}$$

Der Weg, der zu diesem Resultat führt, setzt also die Kenntniss eines speciellen Falles voraus, wo $a$ gleich Null ist. Bei der eben angeführten Methode ist dies durchgehends der Fall und ist sie daher besonders für Fälle geeignet, wo das Integral eine reelle Constante enthält und der Werth desselben gesucht werden soll, im Falle, wo diese Constante complex wird. Da es für diese Betrachtungen aber eine allgemeine Methode gibt, von der sogleich die Rede sein soll, unterlassen wir, von der hier behandelten weitere Anwendungen zu machen, und zeigen nur noch, dass sich auch das in XIII gegebene Resultat auf dem Wege einfacher Substitution ergibt.

Es ist nämlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy = \sqrt{\pi};$$

wir setzen

$$y = x - \frac{a}{x},$$

also

$$dy = \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) dx.$$

Da ferner sich

$$x = \frac{y}{2} \pm \sqrt{\frac{y^2}{4} + a}$$

ergibt, ein Ausdruck, dessen Radikal wir uns mit dem positiven Zeichen versehen denken, so ist

$$x = 0 \text{ für } y = -\infty,$$
$$x = +\infty \text{ für } y = +\infty,$$

also:

$$\int_0^\infty e^{-\left(x - \frac{a}{x}\right)^2} dx \left(1 + \frac{a}{x^2}\right) = \sqrt{\pi}$$

oder:

$$\sqrt{\pi} = e^{2a} \left\{ \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} dx + \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}} \frac{a}{x^2} dx \right\}.$$

Führt man die Substitution

$$x = \frac{a}{z}$$

ein, so verwandelt sich, ganz wie oben, das zweite Integral in ein dem ersten völlig identisches, woraus sich:

$$2e^{2a} \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}} dx^2 = \sqrt{\pi},$$

also das Resultat XIII ergibt.

41) Vierte Methode.

Diese Methode ist von allen die einfachste. Sie besteht eben nur darin, das unbestimmte Integral zu berechnen, und die Fälle aufzusuchen, wo die Specialisirung der Grenzen das Resultat besonders vereinfacht.

Beispiel. Es sollen $f(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale Functionen sein, jedoch $f(x)$ vom niederen Grade als $\varphi(x)$ und habe die Gleichung

$$\varphi(x) = 0$$

nur imaginäre und ungleiche Wurzeln, so lässt sich der Ausdruck $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ immer in Partialbrüche zerlegen. Ist nämlich $\alpha$ eine der Wurzeln, so hat man:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{x - \alpha} + \cdots,$$

wo die andern Glieder rechts $x - \alpha$ nicht als Nenner haben. (Siehe den Artikel: Unbestimmte Coefficienten.) Multiplicirt man also beide Seiten der Gleichung mit $x - \alpha$, so ist:

$$\frac{(x - \alpha) f(x)}{\varphi(x)} = A'$$

für den Fall, wo

$$\alpha = 0$$

ist, da dann alle andern Glieder verschwinden. In diesem Falle werden aber links $(x - \alpha) f(x)$ und $\varphi(x)$ beide gleich Null, und man erhält durch Differensiiren des Zählers und Nenners:

$$A = \frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}.$$

Seien nun zwei conjugirte Wurzeln unserer Gleichung $\varphi(x) = 0$:

$$\alpha = p + qi \text{ und } \alpha' = p - qi,$$

und die Zähler der zugehörigen Partialbrüche:

$$A = P + Qi, \quad A' = P - Qi,$$

$$\frac{A}{x - \alpha} + \frac{A'}{x - \alpha'} = \frac{P + Qi}{x - p - qi} + \frac{P - Qi}{x - p + qi} = 2\frac{P(x - p) - qQ}{(x - p)^2 + q^2},$$

und integrirt man diesen Ausdruck in den Grenzen $-r$ und $rh$, so kommt:

$$\int_{-r}^{rh} \left(\frac{A}{x - \alpha} + \frac{A'}{x - \alpha'}\right) dx = P \log \left[\frac{(rh - p)^2 + q^2}{(r + p)^2 + q^2}\right]$$
$$- 2Q[\operatorname{arc tg}(rh - p) + \operatorname{arc tg}(r + p)]$$

oder wenn man $r$ gleich $\infty$ setzt, wird dies Resultat:

$$2P \lg h - 2Q\pi.$$

Es wird also:

$$\int_{-r}^{+rh} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = 2 \lg h \Sigma P - 2\pi \Sigma Q, \qquad \text{XIV}$$

wo die Summen auf alle den Wurzelpaaren entsprechenden Werthe von $P$ und $Q$ sich beziehen.

Wohl zu bemerken ist, dass dies Resultat von dem Verhältniss $h$ der obern und untern Grenze abhängt, also ganz unbestimmt ist.

Nur in dem Falle, wo $-\Sigma P$ verschwindet, hat dies Integral in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ einen bestimmten und eindeutigen Werth.

Sei z. B.

$$\varphi(x)=1+x^{2n},\quad f(x)=x^{2m}$$

und $m$ kleiner als $n$. Dann ist:

$$\frac{f(x)}{\varphi'(x)}=\frac{1}{2n}x^{2m-2n+1}.$$

Die Wurzeln $\alpha$ der Gleichung

$$1+x^{2n}=0$$

aber sind:

$$\alpha=p+qi=\cos\frac{2s+1}{2n}\pi+i\sin\frac{2s+1}{2n}\pi,$$

wo $s$ jeden der Werthe 0, 1, $2\cdots n-1$ annehmen kann.

In dem Ausdrucke

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}=\frac{1}{2n}e^{\frac{(2s+1)\pi i}{2n}(2m-2n+1)}$$

ist der reelle Theil mit $P$, der imaginaire mit $Q$ zu bezeichnen, also:

$$P=\frac{1}{2n}\cos\frac{2s+1}{2n}(2m-2n+1)\pi,$$

$$Q=\frac{1}{2n}\sin\frac{2s+1}{2n}(2m-2n+1)\pi$$

oder

$$P=-\frac{1}{2n}\cos\frac{(2s+1)(2m+1)\pi}{2n},$$

$$Q=-\frac{1}{2n}\sin\frac{(2s+1)(2m+1)\pi}{2n}.$$

Es ist aber augenblicklich zu sehen, dass für $s=a-1$ und $s=n-a$ die Werthe von $P$ derart sich entsprechen, dass der eine der entgegengesetzte des andern ist, wenn also die Zahl $n$ grade ist, so wird

$$\Sigma P=0.$$

Dies findet auch statt, wenn $n$ ungrade ist, da

$$P=-\frac{1}{2n}\cos\frac{2m+1}{2}\pi=0$$

dem mittlern Werth

$$s=\frac{n-1}{2}$$

entspricht.

In den Ausdruck für $Q$ setzen wir:

$$\frac{(2m+1)\pi}{2n}=\alpha$$

und multipliciren und dividiren mit $\sin\alpha$; es kommt dann:

$$Q=-\frac{1}{4n\sin\alpha}\,\frac{2\sin(2s+1)\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha}$$

$$=-\frac{1}{4n\sin\alpha}(\cos 2s\alpha-\cos 2(s+1)\alpha),$$

woraus sich, wenn man für $s$ die Werthe 0, 1, $2\cdots 2n-1$ setzt, ergibt:

$$\Sigma Q=-\frac{1-\cos 2n\alpha}{4n\sin\alpha}$$

oder, da

$$\cos 2n\alpha=\cos(2m+1)\pi=-1$$

ist:

$$\Sigma Q=-\frac{1}{2n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

In diesem Falle fällt also der logarithmische Theil, welcher unbestimmt war, ganz weg, und man hat, wie auch das reelle Verhältniss der obern zur untern Grenze beschaffen sei:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\frac{\pi}{n\sin\frac{(2m+1)\pi}{2n}}.\qquad\text{XV}$$

Bei diesem Integral ist jedoch der Integrationsweg keineswegs beliebig.

Nimmt man denselben auf der Abscissenaxe, so bleibt $x$ stets reell und es tritt keine Discontinuität ein, da nur für imaginäres $x$ der Nenner $1+x^{2n}$ verschwinden kann. Wählt man einen andern Weg, so darf in dem von demselben und der Abscissenaxe begrenzten Flächentheil keine Wurzel der Gleichung $1+x^{2n}$ enthalten sein, weil sonst nach dem früher (Abschnitt 13) Gesagten das Resultat ein andres werden muss.

In dem Ausdrucke XV können auch die Integrationsgrenzen von Null bis unendlich genommen werden. Es ist nämlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx=\int_{-\infty}^{0}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx+\int_{0}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx,$$

wenn man in dem ersten Integral der rechten Seite die Grenzen vertauscht, und $-x$ für $x$ setzt, so wird dasselbe dem zweiten Integrale völlig gleich, also:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{2n\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}. \quad \text{XV a}$$

Dies schon öfter angewandte Verfahren lässt sich auch in dem allgemein gültigen Satze ausdrücken:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\int_0^\infty f(x)\,dx,$$

wenn

$$f(-x) = f(x),$$

also $f(x)$ eine grade Function ist. Wir fügen auch hinzu, dass immer:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 0,$$

wenn

$$f(-x) = -f(x),$$

also $f(x)$ eine ungrade Function ist. Es wird dann, wenn man das Integral in zwei andre theilt, deren Grenzen $-\infty$ und 0, so wie 0 und $+\infty$ sind, im erstern $-x$ für $x$ setzt, das erste Integral der entgegengesetzte Werth des zweiten.

In XV a setzten wir noch:

$$x = z^\alpha,\quad 2\alpha(m+1) = p,\quad 2\alpha n = q,$$

wo also $p$ immer kleiner als $q$ ist, und erhalten:

$$\int_0^\infty \frac{z^{p-1}dz}{1+z^q}dz = \frac{\pi}{q\sin\frac{p}{q}\pi}, \quad \text{XV b}$$

wo jetzt $p$ und $q$ beliebige reelle Zahlen sein können, vorensgesetzt, dass $p < q$ ist. Untersuchen wir noch das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}-1}dx,$$

so enthält die Function $x^{2n}-1$ im Nenner zunächst zwei reelle Factoren $x+1$ und $x-1$, ein Fall, den wir in unserer allgemeinen Betrachtung ausgeschlossen hatten. Setzen wir daher:

$$\frac{x^{2m}}{x^{2n}-1} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta}{x+1} + \frac{f(x)}{\varphi(x)},$$

so hat die Function $\varphi(x)$ keinen reellen Factor mehr.

Uebrigens ergibt sich $\alpha$ und $\beta$ aus der Formel:

$$\frac{x^{2m}}{\frac{\partial(x^{2n}-1)}{\partial x}} = \frac{1}{2n}x^{2m-2n+1}$$

für den Fall, wo $x$ bezüglich gleich $+1$ oder gleich $-1$ ist, ganz wie dies oben gezeigt wurde. Also:

$$\alpha = \frac{1}{2n},\quad \beta = -\frac{1}{2n},$$

es ist also:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n}-1}dx = \frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x+1} + \int\frac{f(x)}{\varphi(x)}dx.$$

Wir beschäftigen uns zunächst mit dem dritten Integral, welches ein specieller Fall des Ausdrucks XIV ist, man hat nämlich, da $p+qi$ eine imaginäre Wurzel der Gleichung

$$x^{2n}-1 = 0$$

ist:

$$p+qi = \sqrt[2n]{1} = e^{\frac{s\pi i}{n}},$$

wo $s$ jeden der Werthe 1, 2, 3 ⋯ $n-1$ annimmt, die übrigen Wurzeln gibt der Ausdruck $p-qi$, wo $p$ und $q$ immer einem der obigen Werthe entsprechen. Die Werthe $s=0$ und $s=n$ sind hier ausgeschlossen, weil sie zu den reellen Wurzeln führen. Es ist nun:

$$\frac{f(x)}{\varphi'(x)} = \frac{1}{2n}x^{2m-2n+1},$$

also

$$P+Qi = \frac{1}{2n}e^{(2m-2n+1)\frac{s\pi i}{n}} = \frac{1}{2n}e^{\frac{(2m+1)}{n}s\pi i},$$

da man diesen Ausdruck erhält, indem man in den vorigen

$$x = p + qi$$

setzt, also:

$$P = \frac{1}{2n} \cos (2m+1) \frac{s\pi}{n},$$

$$Q = \frac{1}{2n} \sin (2m+1) \frac{s\pi}{n},$$

combinirt man immer je zwei Werthe, denen $s = \alpha$, und $s = n - \alpha$ entspricht, so ist die Summe beider zugehörigen $P$ gleich Null, also

$$\Sigma P = 0,$$

denn ganz wie oben erwiesen ergibt sich, dass auch, wenn $n-1$ ungrade ist, dem mittleren Werth

$$s = \frac{n}{2},$$

welcher allein stehen würde:

$$P = \frac{1}{2n} \cos (2m+1) \frac{\pi}{2} = 0$$

entspricht.

Um $\Sigma Q$ zu berechnen, setzten wir wieder:

$$(2m+1) \frac{\pi}{n} = \alpha,$$

es ist dann:

$$Q = \frac{2 \sin s\alpha \sin \alpha}{4n \sin \alpha} = \frac{\cos (s-1)\alpha \cdot \cos (s+1)\alpha}{4n \sin \alpha},$$

also:

$$\Sigma Q = \frac{1}{4n \sin \alpha} \Sigma [\cos (s-1)\alpha - \cos (s-1)\alpha] = \frac{1 + \cos \alpha - \cos (n-1)\alpha - \cos n\alpha}{4n \sin \alpha},$$

aber

$$\cos n\alpha = \cos (2m+1)\pi = -1$$

und

$$\cos (n-1)\alpha = \cos (n\alpha - \alpha) = \cos [(2m+1)\pi - \alpha] = -\cos \alpha,$$

also

$$\Sigma Q = \frac{1 + \cos \alpha}{2n \sin \alpha} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{2n \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2n \operatorname{tg} \frac{(2m+1)\pi}{2n}},$$

also nach Formel XIV:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} dx = -\frac{\pi}{n \operatorname{tg} \frac{(2m+1)\pi}{2n}}.$$

Was den noch fehlenden Theil des gesuchten Integrals anbetrifft, so erhalten beide Ausdrücke $\frac{1}{1-x}$ und $\frac{1}{1+x}$ eine auf der Abscissenaxe liegende Discontinuität, welche den Punkten $x=1$ und bezüglich $x=-1$ entspricht. Wir eliminiren dieselbe, indem wir um diese Punkte herum kleine Halbkreise ziehen, deren Radius $r$ sei, und die Integrale längs derselben im übrigen aber auf der Abscissenaxe nehmen. Es sind dann aber 4 Integrationswege möglich, welche verschiedene Resultate geben können, je nachdem wir nämlich den einen oder andern dieser Halbkreise auf der Seite nehmen, wo die Ordinaten positiv, oder wo sie negativ sind.

Man setzt demnach:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-1} = \int_{-s}^{1-r} \frac{dx}{x-1} + \int_{1-r}^{1+r} \frac{dx}{x-1} + \int_{1+r}^{+t} \frac{dx}{x-1},$$

wo $s$ und $t$ unendlich gross sind.

Das erste und dritte Integral enthält keine Discontinuität, es ergeben sich für dieselben die Werthe:

$$\lg \frac{r}{s} + \lg \frac{t}{r} = \lg \frac{t}{s}.$$

Das zweite Integral ist auf einem Halbkreise zu nehmen, d. h. zu setzen:

$$x = 1 - r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 1 - re^{-\varphi i},$$

wo die Integrationsgrenzen 0 und $\pi$ oder 0 und $-\pi$ sind, also:

$$\int_{1-r}^{1+r} \frac{dx}{x-1} = \int_0^{\pm\pi} \frac{-rie^{-\varphi i}\,d\varphi}{re^{-\varphi i}} = -\int_0^{\pm\pi} i\,d\varphi = \mp i\pi,$$

ferner ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x+1} = \int_{-s}^{-1-r} \frac{dx}{x+1} + \int_{-1-r}^{-1+r} \frac{dx}{x+1} + \int_{-1+r}^{t} \frac{dx}{x+1}.$$

Die Summe des ersten und dritten Integrals ist:

$$\lg\frac{r}{s} + \lg\frac{t}{r} = \lg\frac{t}{s}.$$

Das mittlere gibt, wenn man

$$x = -1 + r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = -1 - re^{-\varphi i}$$

setzt:

$$\int_{-1-r}^{-1+r} \frac{dx}{x+1} = \int_0^{\pm\pi} \frac{-rie^{-\varphi i}\,d\varphi}{re^{-\varphi i}} = \mp i\pi.$$

Es nimmt also der Ausdruck, von dem wir sprechen

$$\frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2n}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x+1},$$

da der von den unendlichen Grenzen herrührende Theil: $\lg\frac{s}{t} - \lg\frac{s}{t}$ immer verschwindet, folgende Werthe an: Null wenn beide Ausweichungen auf derselben Seite der Abscissenaxe liegen, $-2i\pi$ wenn das erste auf der positiven Seite, das zweite auf der negativen Seite liegt, $+2i\pi$ wenn das Entgegengesetzte der Fall ist, und man hat, wenn man schliesslich noch den Nenner $x^{2n}-1$ mit entgegengesetztem Vorzeichen nimmt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}dx}{1-x^{2n}} = \frac{\pi}{n\,\mathrm{tg}\frac{2m+1}{2n}\pi} + 2\varrho i\pi, \qquad \text{XVI}$$

wo $\varrho$ eine der Zahlen $-1$, $+1$ oder Null bedeutet. In keinem Falle darf das Integral nur über der Abscissenaxe erstreckt werden, sondern es finden immer zwei Ausbiegungen nach der positiven oder negativen Seite statt, welche beliebig sind, aber so klein, dass sie keine zweite Wurzel der Gleichung

$$x^{2n} - 1 = 0$$

umfassen. Nimmt man $\varrho$ gleich Null, also beide Ausbiegungen nach derselben Seite, so lässt sich unser Integral in 2 andere gleiche theilen, da es eine grade Function enthält, und man hat:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{1-x^{2n}} = \frac{\pi}{2n\,\mathrm{tg}\frac{2m+1}{2n}\pi}. \qquad \text{XVIa}$$

Und hier ist nur eine Ausbiegung vorhanden, die aber auf einer **ganz** beliebigen Seite der Axe liegt.

Wie oben erhält man noch, wenn $p$ kleiner als $q$ ist:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}dx}{1-x^q} = \frac{\pi}{q\,\mathrm{tg}\frac{p}{q}\pi}, \qquad \text{XVIb}$$

wo aber immer eine Ausbiegung stattfindet. Diese wichtige Betrachtung fehlt gewöhnlich bei der Entwicklung dieses Integrals in den Lehrbüchern. Sie ist aber unerlässlich, da sonst lediglich ein falsches Resultat sich ergibt.

42) Fünfte Methode.

Die hier zu gehende Methode der Darstellung bestimmter Integrale ist die schönste und allgemeinste aller vorhandenen, sie rührt von Cauchy her, und stützt sich auf die Theorie der Mehrdeutigkeit der Integrale, welche wir in Abschnitt XIII gegeben haben.

Während alle bis jetzt gegebenen Methoden indirect sind, lehrt diese unter gewissen Bedingungen auf directe Weise den Werth der bestimmten Integrale aufzufinden, zunächst für solche Integrale, deren Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ oder 0 und $2\pi$ sind; indess lassen sich durch zweckmässige Transformation diese Grenzen leicht bei allen bestimmten Integralen herstellen.

Sei $f(x)$ eine Function, die innerhalb eines gewissen geschlossenen Umfanges eindeutig, aber nicht immer continuirlich ist. Umgeben wir dann jeden der Discontinuitätspunkte mit einer beliebig kleinen geschlossenen Curve, etwa mit einem Kreis, dessen Radius ins Unendliche abnimmt, so ist nach dem Abschnitt 13

Satz III Gesagten das über den äusseren Umfang ausgedehnte Integral $\int f(x)\,dx$, gleich der Summe derjenigen Integrale derselben Function, welche über die innern die Discontinuitätspuncte umgehenden Umringe in gleicher Richtung als der äussere sich erstrecken. Es ist nämlich in dem zwischen allen diesen Umfängen befindlichen Raum keine weitere Discontinuität der Function $f(x)$ vorhanden. Vorausgesetzt ist hier, dass auf dem äussern Umfang selbst keine Discontinuität eintritt.

Sind $x=\alpha_1, x=\alpha_2 \cdots x=\alpha_p \cdots x=\alpha_n$ die Discontinuitätspunkte und setzen wir unendlich kleine Kreise mit Radius $r$ als Umfänge derselben voraus, so ist:

$$\int f(x)dx = ri\int_0^{2\pi} f(\alpha+re^{\varphi i})\,e^{\varphi i}d\varphi.$$

Für jeden solcher Umringe, also wenn sich $\int'$ auf den äussern Umring bezieht:

$$\int' f(x)\,dx = ri\sum_{p=1}^{p=n}\int_0^{2\pi} f(\alpha_p+re^{\varphi i})\,e^{\varphi i}d\varphi,$$

wo $r$ eine ins Unendliche abnehmende Constante ist.

Nach einem bekannten Satze lässt sich der Ausdruck $f(\alpha_p+u)$, welcher für $u=0$ discontinuirlich wird, so lange in eine nach ganzen positiven und negativen Potenzen geordnete Reihe entwickeln, als der Modul von $\alpha_p+u$ kleiner als jeder derjenigen Moduln ist, für welchen eine zweite Discontinuität eintritt.

Es ist also innerhalb unseres, den Punct $\alpha_p$ umgebenden kleinen Umrings und auf demselben jedenfalls:

$$f(\alpha_p+u) = \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n u^n + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n u^{-n}$$

und

$$ri\int_0^{2\pi} f(\alpha_p+re^{\varphi i})\,e^{\varphi i}d\varphi = ri\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n\int_0^{2\pi} r^n e^{(n+1)\varphi i}d\varphi$$

$$+\,ir\sum_{n=1}^{n=\infty} B_n\int_0^{2\pi} r^{-n}e^{(1-n)\varphi i}d\varphi.$$

Bei der Integration werden alle Integrale Null, da die Werthe der Integrale $e^{s\varphi i}$ für die Grenzen 0 und $2\pi$ gleich werden.

Eine Ausnahme macht nur das mit $B_1$ multiplicirte Glied:

$$iB_1\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i\,B_1.$$

Es ist aber $B_1$ nichts anders als der Coefficient von $\frac{1}{u}$ in der Entwicklung von $f(\alpha_p+u)$. Diesen Coefficienten nennt man nach Cauchy das Residuum von $f(\alpha_p)$. Wir bezeichnen denselben durch:

$$B_1 = \operatorname{Res} f(\alpha_p)$$

und haben also den höchst wichtigen Satz:

$$\int' f(x)\,dx = 2\pi i\sum_{p=1}^{p=n}\operatorname{Res} f(\alpha_p),$$

d. h. „das Integral einer eindeutigen über einen gewissen Umfang erstreckten Function ist gleich der Residuumsumme aller innerhalb dieses Umfanges befindlichen Discontinuitäten multiplicirt mit $2\pi i$.

Befindet sich auf dem Umfange selbst eine Discontinuität, so ist für diesen Punkt eine Ausbiegung zu machen. Geschieht dieselbe nach innen, so fällt diese Discontinuität ganz aus der Betrachtung weg, geschieht sie aber nach aussen, so ist das zugehörige Residuum in die Summe rechts mit aufzunehmen.

Unterwerfen wir jetzt die Function $f(x)$ noch folgender Bedingung: Sie soll verschwinden, wenn man den reellen Theil von $x$ positiv oder negativ unendlich, und wenn man den mit $i$ multiplicirten Theil positiv unendlich setzt. Solche Function ist z. B. $x^{-s}$, wo $s$ eine beliebige positive Zahl ist.

Als Umfang betrachten wir dann ein Rechteck, dessen eine Seite ein Stück

$2a$ der Abscissenaxe bildet, in dessen Mitte der Anfangspunkt der Coordinaten liegt, und wo die beiden nicht parallelen Seiten sich auf der Seite der positiven Ordinate bis zur Höhe $b$ erstrecken. Es ist dann, wenn man

$$x = p + qi$$

setzt, das Integral in 4 andre zu theilen, welche den 4 Seiten des Rechtecks entsprechen, also:

$$\int' f(x)\,dx = \int_{-a}^{+a} f(p)\,dp + \int_0^b f(a+qi)i\,dq + \int_{+a}^{-a} f(p+bi)\,dp + \int_b^0 f(-a+qi)i\,dq.$$

Im ersten und dritten Integral ist nämlich offenbar die Ordinate $q$ constant und bezüglich gleich 0 und $b$, im zweiten und vierten ist die Abscisse constant und bezüglich gleich $+a$ und $-a$.

Lässt man nun die positiven Grössen $a$ und $b$ ins Unendliche wachsen, so verschwinden nach unserer Annahme die Functionen unter den drei letzten Integralzeichen für jeden Werth, den sie während der Integration annehmen, also:

$$f(\infty + qi) = f(p + \infty i) = f(-\infty + qi) = 0.$$

Es ist also $\int' f(x)\,dx$ lediglich gleich dem ersten Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} f(p)dp$, also:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 2\pi i \sum_{p=1}^{p=n} \operatorname{Res} f(a_p), \quad \text{(A)}$$

wo $a_p$ auf alle Discontinuitätspunkte geht, deren imaginärer Theil positiv ist. Die Residuen beziehen sich also auf alle Werthe von $a_p$, deren mit $i$ multiplicirter Theil positiv ist. Das Integral links erstreckt sich über die ganze Abscissenaxe, die Function $f(x)$ ist also immer reell. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, wo $f(x)$ reelle Discontinuitätspunkte hat, die also auf der Abscissenaxe liegen. In diesem Falle ist eine Ausbiegung auf die negative oder positive Ordinaten-Seite zu machen, und im erstern Falle tritt das Residuum der bezeichneten Discontinuität zur Summe rechts hinzu; das Resultat verliert also seine Eindeutigkeit.

Beispiel. Sei

$$f(x) = \frac{e^{axi}}{1+x^2},$$

ein Ausdruck, der in der That für

$$x = \pm\infty \text{ und } x = +\infty i$$

verschwindet. Discontinuität tritt nur für den Fall ein, wo:

$$x = +i$$

ist; setzen wir also

$$x = i + u,$$

so wird:

$$f(x) = \frac{e^{ai(u+i)}}{2ui + u^2} = \frac{e^{-a} e^{aui}}{u(2i+u)}$$

und

$$\operatorname{Res} f(i) = \frac{e^{-a}}{2i},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{axi}}{1+x^2} dx = \pi e^{-a},$$

also wenn man Reelles und Imaginäres trennt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos ax\,dx}{1+x^2} = \pi e^{-a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax\,dx}{1+x^2} = 0.$$

Das erste Resultat haben wir schon früher erhalten. Die meisten schon gefundenen Werthe bestimmter Integrale würden sich aber auf dieselbe Weise ableiten lassen.

43) Weitere Anwendungen der vorigen Methode.

Die Formel $A$ nimmt auch noch eine andre Form an; es ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx + \int_0^{+\infty} f(x)\,dx$$

und wenn wir im ersten Integral rechts $x$ mit $-x$ vertauschen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^{+\infty} [f(x) + f(-x)]\,dx,$$

also:

$$\int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2}dx = \pi i \sum_{p=1}^{p=n} \operatorname{Res} f(\alpha_p), \qquad \text{(B)}$$

ein Resultat, welches, im Falle $f(x)$ eine grade Function, also $f(x)=f(-x)$ ist, die Gestalt annimmt:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \pi i \sum_{p=1}^{p=n} \operatorname{Res} f(\alpha_p). \qquad \text{(C)}$$

Ist $f(x)$ eine ungrade Function, also

$$f(x) = -f(-x),$$

so wird dagegen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{f(x)+f(-x)}{2}dx = 0. \qquad \text{(D)}$$

Beispiele. Sei

$$f(x) = \frac{rF(x)}{x^2+r^2},$$

$r$ ist eine positive Grösse und $F(x)$ eine Function von $x$, die für einen Werth von $x$, dessen mit $i$ multiplicierter Theil positiv ist, nicht unendlich wird, die also den Character einer ganzen Function in diesem Gebiete hat, dann ist die einzige in Betracht kommende Discontinuität die der Wurzel von

$$x^2+r^2=0$$
$$x=ri$$

entsprechende.

Es ist also:

$$\int_0^\infty \frac{F(x)+F(-x)}{2}\,\frac{rdx}{x^2+r^2} = \frac{\pi}{2}F(ri), \qquad \text{XVII}$$

da für $x=ri$

$$Res\left(\frac{1}{x^2+r^2}\right) = \frac{1}{2ri}$$

ist.

Ebenso erhält man, wenn

$$f(x) = \frac{xF(x)}{x^2+r^2}$$

ist,

$$\int_0^\infty \frac{F(x)-F(-x)}{2}\,\frac{xdx}{x^2+r^2} = \frac{\pi i}{2}F(ri). \qquad \text{XVIII}$$

Ist aber gegeben:

$$\int_0^\infty \frac{F(x)-F(-x)}{2}\,\frac{r^2dx}{x(x^2+r^2)}$$

also

$$f(x) = \frac{F(x)}{x(x^2+r^2)},$$

so kommt das auf $x=0$ bezügliche Residuum hinzu, wenn man eine Ausbiegung nach der negativen Ordinaten-Seite hin nimmt, und da

$$\operatorname{Res}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{für} \quad x=0$$

wird:

$$\int_0^\infty \frac{F(x)-F(-x)}{2}\,\frac{r^2dx}{x(x^2+r^2)} = \frac{\pi i}{2}[2F(0)-F(ri)]$$

oder

$$= -\frac{\pi i}{2}F(ri), \qquad \text{XIX}$$

wo der erste oder der letzte Werth gilt, je nachdem die Ausbiegung in positiver oder negativer Richtung geschieht.

Aus der Formel $A$ des Abschnitts 42 aber folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{r+xi} dx = 2\pi F(ri), \qquad \text{XX}$$

da $x = -ri$ die einzige Discontinuität ist, und

$$\text{Res} \left(\frac{1}{r+xi}\right) = \frac{1}{i}$$

für diesen Werth von $x$ wird.

Ist aber gegeben

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{(r+xi)^m} dx,$$

wo $m$ eine ganze positive Zahl ist, so ist, wenn

$$x = ri + u$$

gesetzt wird

$$\frac{F(x)}{(r+xi)^m} = \frac{F(ri+u)}{(ui)^m}.$$

Entwickelt man $F(ri+u)$ nach dem Taylorschen Satze nach Potenzen von $u$, was immer möglich ist, da bei dieser Function keine Discontinuitäten vorkommen, so ist das mit $u^{m-1}$ multiplicirte Glied des Zählers:

$$\frac{F^{(m-1)}(ri)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m-1} u^{m-1},$$

wo $F^{(m-1)}$ die $m-1$ te Ableitung bezeichnet. Da der Nenner $u^m i^m$ ist, so erhält man also das mit $\frac{1}{u}$ multiplicirte Glied oder das Residium, also:

$$\text{Res} \frac{F(x)}{(r+xi)^m} = \frac{1}{(i)^m} \frac{F^{(m-1)}(ri)}{1 \cdot 2 \cdots m-1}$$

und nach der Formel $A$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{(r+xi)^m} dx = (-i)^{m-1} 2\pi \frac{F^{(m-1)}(ri)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m-1}. \qquad \text{XXV}$$

Offenbar ist auch:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x)}{(r-xi)^m} dx = 0, \qquad \text{XXII}$$

weil dieser Ausdruck nur eine dem Werthe

$$x = -ri$$

entsprechende Discontinuität hat, also keine, wo der Coefficient von $i$ positiv ist.

Sei wieder $F(x)$ eine Function, welche keine Discontinuitäten enthält, wenn der mit $i$ multiplicirte Theil positiv ist, und $\varphi(x)$ eine eindeutige Function, welche für

$$x = \alpha$$

discontinuirlich wird, so ist im Allgemeinen:

$$\varphi(\alpha+u) = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m u^m + \sum_{m=1}^{m=\infty} B_m u^{-m}.$$

Ist aber die Discontinuität der Art, dass

$$\varphi(\alpha) = \infty$$

ist, ebenso wie $\varphi(\alpha+r)$ und $\varphi(\alpha-r)$, wo $r$ unendlich klein ist, jedoch für einen dieser Werthe auch $-\infty$, oder $\infty i$ eintreten kann, so ist die zweite Summe immer so beschaffen, dass sie aus einer endlichen Anzahl Glieder besteht. Es ist nämlich

$$\frac{1}{\varphi(\alpha)} = 0$$

und die Function $\frac{1}{\varphi(x)}$ ist im Punct $\alpha$ continuirlich, also in der Nähe von $\alpha$ ist:

$$\frac{1}{\varphi(\alpha+u)} = a_1 u + a_2 u^2 + \cdots + a_p u^p + \cdots$$

Das constante Glied fehlt, weil $\frac{1}{\varphi(\alpha+u)}$ für $u=0$ verschwindet; es können aber auch gewisse Coefficienten $a_1, a_2 \cdots a_{s-1}$ verschwinden, und wir nehmen der Allgemeinheit wegen an, dass in der That $a_s$ der erste Coefficient ist, welcher erscheint, wo $s$ also auch gleich 1 sein kann. Dann ist:

$$\frac{1}{\varphi(\alpha+u)} = a_s u^s + a_{s+1} u^{s+1} + \dots$$

$$\varphi(\alpha+u) = \frac{1}{a_s u^s \left(1 + \frac{a_{s+1}}{a_s} u + \frac{a_{s+2}}{a_s} u^2 + \dots\right)}.$$

Der Ausdruck:

$$\frac{1}{1 + \frac{a_{s+1}}{a_s} u + \frac{a_{s+2}}{a_s} u^2 + \dots},$$

der für $u=0$ Eins wird, lässt sich aber immer nach ganzen positiven Potenzen von $u$ entwickeln und man hat:

$$\varphi(\alpha+u) = \frac{1}{a_s u_s} (1 + b_1 u + b_2 u^2 + \dots)$$

oder:

$$\varphi(\alpha+u) = B_1 u^{-s} + B_2 u^{-s+1} \dots + B_s u^{-1} + B_{s+1} B_{s+2} u + B_{s+3} u^2 + \dots$$

Es ist also die Zahl der mit negativen Potenzen von $u$ multiplicirten Glieder in der That endlich; man nennt den Ausdruck $\varphi(\alpha)$ eine Discontinnität vom $s$ten Grade, wenn $-s$ der algebraisch kleinste Exponent von $u$ in dieser Reihe ist. Die Coefficienten der Reihe lassen sich auch anders ausdrücken: es ist

$$u^s \varphi(\alpha+u) = B_1 + B_2 u + B_3 u^2$$

und da $u^s \varphi(\alpha+u)$ also in der Gegend von $\alpha$ continuirlich ist, auch:

$$u^s \varphi(\alpha+u) = v^s \varphi(\alpha+v) + \frac{\partial v^s \varphi(\alpha+v)}{\partial v} u + \frac{\partial^2 v^s \varphi(\alpha+v)}{1 \cdot 2\, \partial v^2} u^2 + \dots$$

für den Fall, wo $v$ verschwindet, wie der Mac Laurinsche Satz lehrt. Es ist also:

$$B_p = \frac{\partial^{p-1} [v^s \varphi(\alpha+v)]}{\partial v^{p-1}\; 1 \cdot 2 \cdots (p-1)} \quad \text{für } v=0.$$

Suchen wir jetzt das Residuum von $F(x)\ \varphi(x)$. Es ist:

$$F(\alpha+u) = F\alpha + u F'\alpha + \frac{u^2}{1 \cdot 2} F''(\alpha) + \dots$$
$$= A + uA_1 + u^2 A_2 + \dots$$

Sei

$$v^s \varphi(\alpha+v) = \psi(\alpha)$$

für den Fall, wo $v$ verschwindet, so ist:

$$B_p = \frac{\psi^{(p-1)}(\alpha)}{1 \cdot 2 \dots p-1}$$

$$F(\alpha+u)\, \varphi(\alpha+u) = (A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \dots) \left(\frac{B_1}{u^s} + \frac{B_2}{u^{s-1}} + \dots\right).$$

Das mit $\frac{1}{u}$ multiplicirte Glied wird dann:

$$\text{Res}\,[F(\alpha) \varphi(\alpha)] = [B_1 A_{s-1} + B_2 A_{s-2} + B_3 A_{s-3} + \dots B_s A_0]$$

oder

$$\text{Res}\,[F(\alpha)\, \varphi(\alpha)] = \sum_{p=1}^{p=s} \frac{\psi^{(p-1)}(\alpha)\, F^{(s-p)}(\alpha)}{1 \cdot 2 \cdots p-1 \cdot 1 \cdot 2 \cdots s-p},$$

also:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \varphi(x) dx = 2\pi i \Sigma_{\alpha} \sum_{p=1}^{p=s} \frac{\psi^{(p-1)}(\alpha) F^{(s-p)}(\alpha)}{1 \cdot 2 \cdots p-1 \cdot 1 \cdot 2 \cdots s-p}. \qquad \text{XXIII}$$

Das erste Summenzeichen geht auf alle Unendlichkeiten $\alpha$, deren mit $i$ multiplicirter Theil positiv ist.

Sei z. B.

$$F(x) = e^{bxi},$$

wo $b$ positiv ist, so erhält man

$$F^{(n)}(x) = b^n i^n e^{bxi} = b^n e^{(bx + n\frac{\pi}{2})i}.$$

Ist $\alpha = \lambda + \mu i$ eine der Discontinuitäten, so hat man also:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{bxi} \varphi(x) dx = 2\pi \Sigma \sum_{p=1}^{p=s} \frac{b^{s-p} e^{-b\mu + [b\lambda + (s-p+1)\frac{\pi}{2}]i} \psi^{(p-1)}(\lambda + \mu i)}{1 \cdot 2 \cdots p-1 \cdot 1 \cdot 2 \cdots s-p}.$$

Oder wenn man

$$\frac{\psi^{(p-1)}(\lambda + \mu i)}{1 \cdot 2 \cdots p-1} = H_p + K_p i$$

setzt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{bxi} \varphi(x) dx = \Sigma \sum_{p=1}^{p=s} \frac{b^{s-p} e^{-b\mu}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots s-p} \Big\{ H_p \cos[b\lambda + (s-p+1)\frac{\pi}{2}]$$

$$- K_p \sin[b\lambda + (s-p+1)\frac{\pi}{2}] + i K_p \cos[b\lambda + (s-p+1)\frac{\pi}{2}]$$

$$+ i H_p \sin[b\lambda + (s-p+1)\frac{\pi}{2}] \Big\}. \qquad \text{XXIV}$$

Die erste Summe geht auf alle Werthe von $\lambda$, $\mu$, $H$, $K$, welche Discontinuitäten entsprechen. Dies Resultat gibt noch, wenn man Reelles und Imaginäres trennt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos bx \varphi(x) dx = \Sigma \sum_{p=1}^{p=s} \frac{b^{s-p} e^{-b\mu}}{1 \cdot 2 \cdots s-p}$$

$$\Big\{ H_p \cos[b\lambda + (s-p+1)\frac{\pi}{2}] - K_p \sin[b\lambda + (s-p+1)\frac{\pi}{2}] \Big\} \qquad \text{XXIV a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin bx \varphi(x) dx = \Sigma \sum_{p=1}^{p=s} \frac{b^{s-p} e^{-b\mu}}{1 \cdot 2 \cdots s-p}$$

$$\Big\{ K_p \cos[b\lambda + (s-p+1)\frac{\pi}{2}] + H_p \sin[b\lambda + (s-p+1)\frac{\pi}{2}] \Big\}. \qquad \text{XXIV b}$$

Hat $\varphi(x)$ nur Discontinuitäten ersten Grades, so bestehen die zweiten Summen nur aus einem Gliede, welches $s=1$ und $p=1$ entspricht, wo also die Potenz $b^{s-p}$ wegfällt.

Sei ferner

$$F(x) = x^{a-1},$$

wo $a$ eine positive Zahl ist. In dem Ausdrucke

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{a-1} \varphi(x) dx$$

wird dann nur im Falle, wo $a$ ein ächter Bruch, $x^{a-1}$ für $x=0$ unendlich.

Es wäre also (Abschnitt 42) für diesen Fall ausser dem Residuum von $\varphi(x)$ noch ein Glied

$$\int x^{a-1} \varphi(x) dx,$$

wo $x = re^{\lambda i}$ zu setzen, und das Integral in den Grenzen $\lambda = 0$, $\lambda = 2\pi$ zu nehmen ist, $r$ aber ins Unendliche abnimmt, dann hinzuzufügen, wenn man die Ausbiegung nach der negativen Seite der Ordinaten nimmt. Es ist aber unter der Voraussetzung, dass $\varphi(x)$ für $x = 0$ nicht unendlich wird:

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

$$x^{a-1}\varphi(x) = a_0 x^{a-1} + a_1 x^a + a_2 x^{a+1} + \cdots$$

$$\int x^{a-1}\varphi(x)\,dx = \frac{a_0 x^a}{a} + \frac{a_1 x^{a+1}}{a+1} + \frac{a_2 x^{a+2}}{a+2} + \cdots$$

und $r$ und $re^{2\pi i}$ für $x$ setzend, und die Differenz beider Werthe nehmend erhält man:

$$\int_0^{2\pi} x^{a-1}\frac{\varphi(x)\,\partial x}{\partial\lambda}\,d\lambda = \frac{a_0 r^a}{a}(e^{2a\pi i} - 1) + \frac{a_1 r^{a+1}}{a+1}(e^{2(a+1)\pi i} - 1) + \cdots,$$

ein Ausdruck, der mit abnehmendem $r$ immer verschwindet; es hat also die Art der Ausbiegung keinen Einfluss, und man kann das Integral auch über die ganze Abscissenaxe erstrecken. Letzteres würde sich auch aus den Betrachtungen des Abschnitts 10 ergeben, wenn man das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{a-1}\varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-\delta} x^{a-1}\varphi(x)\,dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty} x^{a-1}\varphi(x)\,dx$$

setzt, und $\delta$, $\varepsilon$ ins Unendliche abnehmen lässt, wo dann keine Discontinuität erscheint.

Es ist also in Formel XXIII:

$$F^{(s-p)}(\alpha) = \frac{d^{s-p}\alpha^a}{d\alpha^{s-p}} = a(a-1)\cdots(a-s+p+1)\alpha^{a-s+p}$$

zu setzen. Also:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{a-1}\varphi(x)dx = 2\pi i \sum_\alpha \sum_{p=1}^{p=s} \frac{\psi^{(p-1)}(\alpha)\,\alpha^{a-s+p}}{1\cdot 2\cdots(p-1)} \cdot \frac{a(a-1)\cdots(a-s+p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(s-p)}$$

oder wenn man ganz wie oben setzt:

$$\alpha = \lambda + \mu i$$

$$\frac{\psi^{(p-1)}(\lambda+\mu i)}{1\cdot 2\cdots p-1} = H_p + K_p i$$

und ausserdem

$$\lambda + \mu i = \varrho e^{\vartheta i}$$

$$a_{s-p} = \frac{a(a-1)\cdots(a-s+p-1)}{1\cdot 2\cdots s-p},$$

so kommt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{a-1}\varphi(x)\,dx = 2\pi \sum \sum_{p=1}^{p=s} a_{s-p}(H_p + K_p i)\varrho^{a-s+p} e^{[(a-s+p)\vartheta + \frac{\pi}{2}]i}. \quad \text{XXV}$$

Soll hier das Reelle vom Imaginären getrennt werden, so bemerke man, dass $\varphi(x)$ für reelles $x$ auch reell bleibt, wenn diese Function immer eindeutig ist (also auch keine mehrdeutige Constante enthält). *) Was $x^{a-1}$ anbetrifft, so ist

*) Wäre nämlich z. B. $\varphi(t) = A + Bi$, wo $t$ reell ist, so müsste auch sein: $\varphi(t) = A - Bi$, es könnte also $\varphi$ keine eindeutige Function sein.

für positives $x$ dieser Ausdruck ebenfalls reell. Für negatives $x$ aber ist:

$$(-y)^{a-1} = -y^{a-1} e^{\pi i a},$$

wenn

$$x = -y$$

gesetzt wird. Es zerfällt also unser Integral in:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{a-1} \varphi(x)\, dx = \int_0^{+\infty} x^{a-1} \varphi(x)\, dx - \int_0^{+\infty} y^{a-1} \varphi(-y)\, dy \cos \pi a$$

$$- i \int_0^{+\infty} y^{a-1} \varphi(-y)\, dy \sin \pi a.$$

Nehmen wir nur den letzten Theil und schreiben darin

$$\varphi_1(y) \text{ für } \varphi(-y)$$

so kommt:

$$\int_0^{\infty} y^{a-1} \varphi_1(y)\, dy = -\frac{2\pi}{\sin ap} \Sigma \sum_{p=1}^{p=s} \varrho^{a-s+p} a_{s-p} \Big\{ H_p \sin\left[(a-s+p)\vartheta + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$+ K_p \cos\left[(a-s+p)\vartheta + \frac{\pi}{2}\right]\Big\}. \qquad \text{XXV a}$$

Sei noch gegeben:

$$F(x) = \lg(1 - Axi),$$

ein Ausdruck, der ebenfalls für reelles $x$ nicht unendlich wird, ausser für $x = \pm\infty$. Wir denken uns aber $\varphi(x)$ so beschaffen, dass für diese Werthe dennoch $F(x) \cdot \varphi(x)$ verschwindet. Setzen wir der Einfachheit wegen voraus: die Gleichung: $\frac{1}{\varphi(x)} = 0$ hätte nur einfache Wurzeln, also $\varphi(x)$ nur Unendlichkeiten ersten Grades, eine Voraussetzung, die übrigens nicht nothwendig ist, jedoch das Resultat vereinfacht.

Es wird dann $s = p = 1$. Die zweite Summe besteht aus einem Gliede, und man hat, wenn

$$\alpha = \lambda + \mu i$$

$$\psi(\lambda + \mu i) = H + Ki$$

gesetzt wird:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lg(1 - Axi)\, \varphi(x)\, dx = -2\pi\, \Sigma (K - Hi) \lg(1 + \mu A + \lambda A i). \qquad \text{XXVI}$$

Die Allgemeinheit der hier gegebenen Formeln ist ohne Weiteres ersichtlich, und können aus ihrer Specialisirung viele Resultate abgeleitet werden.

44) Fortsetzung des Obigen.

In Abschnitt 42) gingen wir von einem Umfange aus, der ein unendlich grosses Rechteck bildete. Beziehen wir statt dessen in der Formel:

$$\int' f(x)\, dx = 2\pi i \sum_{p=1}^{p=n} \operatorname{Res} f(\alpha_p)$$

das erste Integral auf einen Kreis mit beliebigem Radius. Die rechte Seite umfasst dann alle Discontinuitäten $\alpha_p$ der Function $f(x)$ innerhalb dieses Kreises. Vorausgesetzt wird noch, dass auf der Peripherie selbst keine Discontinuität stattfinde. Es ist nun, wenn der Anfangspunkt der Coordinaten zugleich der Mittelpunkt des Kreises, $r$ sein Radius, und allgemein $x = p + qi$ ist.

$$p = r\cos\varphi, \quad q = r\sin\varphi,$$

$$x = re^{\varphi i}$$

und die Integration findet in den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ statt, also:

$$\int_0^{2\pi} ri f(re^{\varphi i})\, e^{\varphi i} d\varphi = 2\pi i \Sigma \operatorname{Res} f(\alpha_p)$$

oder wenn man

$$u f(u) = \psi(u)$$

setzt:

$$\int_0^{2\pi} \varphi(re^{\varphi i})\, d\varphi = 2\pi \Sigma \operatorname{Res}\left(\frac{\psi(\alpha_p)}{\alpha_p}\right). \quad (E)$$

Ist $\psi(u)$ eine im ganzen Kreise continuirliche Function, so findet nur eine Discontinuität für $\alpha = 0$ statt, wo der Nenner verschwindet; dann ist wegen:

$$\psi(u) = \psi(0) + u \cdot \psi'(0) + \cdots$$

$$\text{Res}\left[\frac{\psi(u)}{u}\right] = \psi(0),$$

also in diesem Falle:

$$\int_0^{2\pi} \psi(re^{\varphi i})\, d\varphi = 2\pi\psi(0). \qquad (F)$$

Setzt man hierin noch:

$$\psi(u) = f(z+u),$$

so kommt:

$$\int_0^{2\pi} f(z+re^{\varphi i})d\varphi = 2\pi f(z), \qquad (G)$$

wo $f(x)$ eine eindeutige und continuirliche Function für jeden Werth von

$$x = z + \varrho e^{\varphi i}$$

ist, wo $\varrho$ kleiner als $r$ sein muss.

Beispiele. Sei in Formel F:

$$\psi(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$\psi(0) = 1.$$

Ein Ausdruck, der so lange continuirlich bleibt, als in $z = re^{\varphi i}$ die Grösse $r$ kleiner als 1 ist (d. h. wo der analytische Modul von $z$ kleiner als 1 ist). Es ist also:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-re^{\varphi i}} = 2\pi \qquad \text{XXVII}$$

oder wenn man Reelles und Imaginäres trennt:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}\, d\varphi = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2} = 0,$$

wo jedoch $r$ kleiner als 1 sein muss.

Sei ferner:

$$\psi(z) = \lg(1-z)$$

und der Modul von $z$ kleiner als 1, so findet ebenfalls Continuität statt; es ist:

$$\psi(0) = 0,$$

also:

$$\int_0^{2\pi} \lg(1-re^{\varphi i})\, d\varphi = 0.$$

Ist

$$\lg(1-re^{\varphi i}) = p + qi,$$

so wird

$$\lg(1-re^{-\varphi i}) = p - qi$$

sein, also

$$p = \tfrac{1}{2}\lg(1-re^{\varphi i})(1-re^{-\varphi i})$$
$$= \tfrac{1}{2}\lg(1-2r\cos\varphi+r^2).$$

Da nun:

$$\int_0^{2\pi} p\, d\varphi = 0$$

ist, so hat man auch:

$$\int_0^{2\pi} \lg(1-2r\cos\varphi+r^2)d\varphi = 0, \qquad \text{XXVIII}$$

so lange $r$ kleiner als 1 ist.

Sei jetzt $r$ grösser als 1, so ist jedenfalls:

$$\int_0^{2\pi} \lg(1-2r\cos\varphi+r^2)d\varphi = \int_0^{2\pi} \lg r^2\, d\varphi + \int_0^{2\pi} \lg(1-\frac{2}{r}\cos\varphi+\frac{1}{r^2})d\varphi.$$

Das letzte Integral aber verschwindet nach dem Obigen, weil $\frac{1}{r}$ kleiner als 1 ist, und man hat:

$$\int_0^{2\pi} \lg r^2\, d\varphi = 4\pi\lg r,$$

also:

$$\int_0^{2\pi} \lg(1-2r\cos\varphi+r^2)\, d\varphi = 4\pi\lg r. \qquad \text{XXVIII a}$$

Die Formeln XXVIII und XXVIIIa gelten, je nachdem $r$ grösser oder kleiner als 1 ist; für $r=1$ ergibt sich noch immer der Werth Null, denn beide Formeln gehn in diesen für diesen Fall über, die Function hört also nicht auf continuirlich zu sein.

Es ist noch:

$$\int_0^{2\pi} \lg(1-2r\cos\varphi+r^2)d\varphi = \int_0^{\pi} + \int_{\pi}^{2\pi}.$$

wo die Function in beiden Integralen rechts zu ergänzen ist. Setzt man im letzten Integral

$$\varphi = 2\pi - \vartheta,$$

so wird dasselbe:

$$\int_0^{\pi} \lg(1-2r\cos\vartheta + r^2)\,d\vartheta,$$

also gleich dem ersten, und

$$\int_0^{2\pi} = 2\int_0^{\pi},$$

also:

$$\int_0^{\pi} \lg(1-2r\cos\varphi + r^2)\,d\varphi = 0$$

$$\text{oder } = 2\pi \lg r, \qquad \text{XXVIIIb}$$

je nachdem $r$ nicht grösser oder grösser als Eins ist.

Sei endlich noch:

$$\psi(z) = e^{az},$$

ein Ausdruck, der für endliches $z$ nicht discontinuirlich wird, so hat man, wenn

$$ar = b$$

gesetzt wird:

$$\int_0^{2\pi} e^{b(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\,d\varphi = 2\pi, \qquad \text{XXIX}$$

also:

$$\int_0^{2\pi} e^{b\cos\varphi}\cos(b\sin\varphi)\,d\varphi = 2\pi, \qquad \text{XXIXa}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{b\cos\varphi}\sin(b\sin\varphi)\,d\varphi = 0. \qquad \text{XXIXb}$$

45) **Sechste Methode.** (Uebergang vom Reellen zum Imaginären.)

Diese Methode, welche ebenfalls eine leichte Anwendung der in Abschnitt 11 und 12 enthaltenen Prinzipien ist, hat folgenden Zweck. Es kommt häufig vor, dass für bestimmte Werthe von Constanten entwickelte Integrale für allgemeinere Werthe dieser Constanten zu bestimmen sind, und oft kann dies leicht durch Transformationen oder Auflösung von Differenzialgleichungen geschehen. So war das im Abschnitt 40 durch beide Methoden abgeleitete Integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2 - \frac{a^2}{x^2}}\,dx$$

zunächst für den Fall bekannt, wo $a = 0$ war. Diese Methoden aber finden zuweilen in der Anwendung Schwierigkeit, wenn man statt einer reellen Constante eine imaginäre einführt; es ändert sich dann nämlich bei der Substitution in der Regel auch der Integrationsweg. Dies war z. B. bei der Entwicklung der Formel III des Abschnitts 38 der Fall, welche mithin eine Untersuchung nöthig machte, ob und welchen Einfluss diese Aenderung auf das Resultat hat.

Statt diese Untersuchung aber in jedem Falle anzustellen, giebt Satz I des Abschnitts 12 ein für allemal eine sehr allgemeine Formel, welche von Cauchy zuerst gebraucht worden ist, und als die eigentliche Methode des Uebergangs vom Reellen zum Imaginären bezeichnet werden kann.

Der bezeichnete Satz sagt, dass:

$$\int [f(x,y)\,dx + f_1(x,y)\,dy],$$

wo $y$ eine beliebig zu bestimmende Function von $x$ ist, immer gleich Null ist für irgend einen geschlossenen Umfang auf dem und innerhalb desselben sich kein mehrfacher oder Discontinuitätspunkt befindet, falls die beiden Functionen $f$ und $f_1$ die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

erfüllen.

Ist nun $z$ eine beliebige Function von $x$ und $y$, so ist offenbar:

$$\partial\frac{\left(\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \partial\frac{\left(\varphi(z)\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x},$$

wie man leicht durch Differenziiren sieht, also was auch $\varphi(z)$ sei, falls nur für das gegebene Flächenstück die Continuitäts- und Eindeutigkeitsbedingung erfüllt wird:

$$\int \varphi(z)\left[\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right] = 0.$$

Der beliebig zu bestimmende Umfang sei nun ein Rechteck, dessen eine Seite $AB$ der Abscissenaxe, die andre $AC$ aber der Ordinatenaxe parallel sei, und wo den Endpunkten der ersten Seite $AB$ (Figur 33) die Werthe

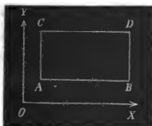
$$x = a \quad y = b,$$
$$x = a_1 \quad y = b,$$

dem Punkte $C$ aber die Werthe:

$$x = a, \quad y = b_1$$

entsprechen.

Fig. 33.




Es zerfällt dann unser Integral in 4 andere, welche sich über die Seiten $AB$, $BD$, $DC$, $CA$ erstrecken.

Im ersten Integrale ist:
$x$ zwischen den Grenzen $a$ und $a_1$ zu nehmen,
$y$ constant gleich $b$.
Im zweiten Integrale ist:
$x$ constant gleich $a_1$,
$y$ in den Grenzen $b$ und $b_1$ zu nehmen.
Im dritten ist:
$x$ zwischen den Grenzen $a_1$ und $a$ zu nehmen,
$y$ constant gleich $b_1$.
Im vierten ist:
$x$ constant gleich $a$,
$y$ zwischen den Grenzen $b_1$ und $b$ zu nehmen.

Man erhält, wenn

$$s = \psi(x, y)$$

gesetzt wird:

$$\int_a^{a_1} \varphi(\psi x, b)\frac{\partial\psi(x, b)}{\partial x}dx + \int_b^{b_1} \varphi(\psi a_1, y)\frac{\partial\psi(a_1, y)}{\partial y}dy$$

$$-\int_a^{a_1} \varphi(\psi x, b_1)\frac{\partial\psi(x, b_1)}{\partial x}dx - \int_b^{b_1} \varphi(\psi a, y)\frac{\partial\psi(a, y)}{\partial y}dy = 0. \quad \text{(A)}$$

Um in diesen Ausdruck das Imaginäre einzuführen, braucht man nur zu setzen:

$$z = \psi(x, y) = u + vi,$$

wo $u$ und $v$ stets reell und Functionen von $x$ und $y$ sein sollen. Es wird dann für jede Wahl der Functionen $u$ und $v$ sich eine Relation zwischen Integralen gleicher Art aber theils mit reellen und theils mit imaginären Constanten ergeben, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

Beispiel 1. Wir setzen

$$\psi(x, y) = x + yi,$$

so wird der Ausdruck $A$ offenbar:

$$\int_a^{a_1}\varphi(x+bi)\,dx - \int_a^{a_1}\varphi(x+b_1i)\,dx = i\int_b^{b_1}\varphi(a+yi)\,dy - i\int_b^{b_1}\varphi(a_1+yi)\,dy$$

oder, wenn man $a = b = 0$ setzt und $a_1$, $b_1$ mit $a$, $b$ vertauscht:

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx - \int_0^a \varphi(x+bi)dx = i\int_0^b \varphi(yi)\,dy - i\int_0^b \varphi(a+yi)\,dy. \quad \text{(B)}$$

Also wenn

$$\varphi(s) = e^{-s^2},$$
$$a_1 = \infty$$

gesetzt wird:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx - \int_0^\infty e^{-(x+bi)^2}dx = i\int_0^b e^{y^2}dy.$$

Nimmt man nur den reellen Theil, so ist, da $\int_0^b e^{y^2}dy$ wesentlich reell ist, und $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ war:

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} = e^{b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx \text{ oder}$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos 2bx\,dx = \frac{e^{-b^2}}{2}\sqrt{\pi},$$

eine Formel, welche mit XIIa des Abschnitts 39 übereinstimmt.

Der Vergleich der imaginären Theile gibt dagegen:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin 2bx dx = e^{-b^2}\int_0^b e^{y^2}dy, \qquad \text{XXX}$$

eine Formel, die freilich nur zu einem durch ein anderes Integral ausgedrücktem Werthe des bezeichneten Integrals führt.

Beispiel 2. Sei jetzt: $u = ax$, $v = xy$, so ergibt sich eine in weit mehr Fällen anwendbare Formel.

Es ist nämlich:

$$\frac{\partial\psi(x,y)}{\partial x} = a + yi,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = xi$$

und die Formel $A$ wird, wenn man wieder

$$a = b = 0$$

setzt:

$$(a+bi)\int_0^a \varphi[x(a+bi)]dx - a\int_0^a \varphi(ax)dx = ia\int_0^b \varphi[a(a+yi)]\,dy. \qquad (C)$$

Wenn die Function $\varphi$ so beschaffen ist, dass für positives unendlich grosses $a$ der Ausdruck $a\varphi[a(a+yi)]$ für jedes $y$ verschwindet, ist noch:

$$(a+bi)\int_0^\infty \varphi[x(a+bi)]dx = a\int_0^\infty \varphi(ax)\,dx \qquad (D)$$

und diese Formel führt ein Integral mit complexer Constante ohne weiteres auf dasselbe Integral für den Fall zurück, wo der imaginäre Theil der Constante Null ist.

Ist z. B.

$$\varphi(x) = x^{n-1}e^{-x},$$

wo $n$ reell ist, so hat man:

$$\int_0^\infty e^{-x(a+bi)}x^{n-1}dx = \frac{a^n}{(a+bi)^n}\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx.$$

Das Integral $\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx$, von dem bald ausführlicher die Rede sein wird, lässt sich im Allgemeinen nicht bestimmen; es ist aber, wenn wir noch

$$a = r\cos\vartheta, \quad b = r\sin\vartheta$$

setzen:

$$\int_0^\infty e^{-xre^{\vartheta i}}x^{n-1}dx = (\cos\vartheta)^n e^{-n\vartheta i}\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx.$$

Dies Resultat nimmt eine noch etwas einfachere Form an, wenn wir den Ausdruck

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = \Gamma(n),$$

mit dem wir uns bald zu beschäftigen haben, einführen. Es ist dann, wenn man $ax = y$ setzt:

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^{n-1}dx = \frac{1}{a^n}\Gamma(n),$$

also:

$$\int_0^\infty e^{-xre^{\vartheta i}} x^{n-1} dx = \frac{e^{-n\vartheta i}}{r^n} \Gamma(n), \qquad \text{XXXI}$$

oder wenn wir das Reelle vom Imaginären trennen:

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-xr\cos\vartheta} \cos(r\sin\vartheta)dx = \frac{\cos(n\vartheta)}{r^n}\Gamma(n), \qquad \text{XXXIa}$$

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-xr\cos\vartheta} \sin(r\sin\vartheta)dx = \frac{\sin(n\vartheta)}{r^n}\Gamma(n). \qquad \text{XXXIb}$$

Besondere Beachtung aber muss der Fall finden, wo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist; man hat dann aus den Formeln XXXI, XXXIa und XXXIb, ihre Gültigkeit für diesen Fall vorausgesetzt,

$$\int_0^\infty e^{-rxi} x^{n-1} dx = \frac{e^{-n\frac{\pi}{2}i}}{r^n}\Gamma(n), \qquad \text{XXXII}$$

ein Resultat, welches gleichbedeutend ist mit:

$$\int_0^\infty e^{rxi} x^{n-1} dx = \frac{e^{n\frac{\pi}{2}i}}{r^n}\Gamma(n), \qquad \text{XXXII}$$

da das Vorzeichen von $i$ auch das negative sein kann. In den beiden Formeln gibt, wenn man Reelles und Imaginäres trennt:

$$\int_0^\infty \cos(rx)x^{n-1}dx = \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{r^n}\Gamma(n), \qquad \text{XXXIIa}$$

$$\int_0^\infty \sin(rx)x^{n-1}dx = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{r^n}\Gamma(n). \qquad \text{XXXIIb}$$

Den Formeln XXXII kommt aber keineswegs die allgemeine Gültigkeit der Formeln XXXI zu.

Bei allen diesen Entwicklungen ist nämlich vorausgesetzt, dass die Function $\varphi(x) = x^{n-1}e^{-x}$ so beschaffen sei, dass der Ausdruck:

$$a\,\varphi[a(\alpha+yi)] = a^n(\alpha+yi)^{n-1}e^{-a(\alpha+yi)}$$

mit wachsendem $a$ für jeden Werth von $y$ verschwindet; dies ist nun offenbar immer der Fall, wenn $\alpha$ positiv ist, und diese Bedingung ist in den Formeln XXXI für $\alpha = r\cos\vartheta$ hinzuzufügen, sie spricht aus, dass der Winkel $\vartheta$ im ersten oder vierten Quadranten liegen soll, da $r$ stets positiv genommen wird. In dem Falle aber, wo $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, also $\alpha = 0$ wird, wie es in den Formeln XXXII der Fall war, erhält man:

$$a\,\varphi(ayi) = a^n(yi)^{n-1}e^{-ayi};$$

hier ist $e^{-ayi}$ für wachsendes $a$ unbestimmt, und der Ausdruck verschwindet nur, wenn $n$ negativ ist.

Wir werden jedoch bald sehen, dass der Ausdruck $\Gamma(n)$ keinen Sinn mehr gibt, wenn $n$ negativ ist, also dieser Fall überhaupt auszuschliessen ist. Uebrigens aber wird das ganze Resultat unsicher, wenn $\alpha$ verschwindet, da dann das Integral

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{n-1}dx = \int_0^\infty x^{n-1}dx$$

wird, und sich hierfür ein unendlich grosser Werth ergibt, die Einführung der Function $\Gamma(n)$ sich also nicht gerechtfertigt. Ob und in welchen Fällen die Formeln XXXII noch Gültigkeit haben,

ist direct zu untersuchen. Wir wenden bei dieser Untersuchung diejenigen Prinzipien an, die uns schon in Abschnitt 38 den Werth von $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin ax}{a}dx$ für den Fall gaben, dass $a$ gleich Null war.

Wir können den Satz, der diesen Betrachtungen zu Grunde liegt, etwas allgemeiner mit den Worten aussprechen:

„Hat der Ausdruck $\int_0^\infty f(x)\,dx$ einen bestimmten und endlichen Werth, so ist dies der Grenzwerth von $\int_0^\infty e^{-ax}f(x)dx$ für den Fall, dass $a$ gleich Null ist."

Die Richtigkeit dieses Satzes zeigt folgende Betrachtung. Sei:

$$\int_0^x f(x)\,dx = \varphi(x),$$

so ist:

$$f(x) = \varphi'(x)$$

und

$$\int_0^\infty e^{-ax}f(x)\,dx = \int_0^\infty e^{-ax}\varphi'(x)\,dx = a\int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)\,dx.$$

Das letzte Glied folgt durch theilweises Integriren, wobei der Theil ausserhalb des Integralzeichens verschwindet. Nun ist

$$\int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)dx = \int_0^c e^{-ax}\varphi(x)dx + \int_c^\infty e^{-ax}\varphi(x)dx.$$

Sei nun $\varrho$ ein mittlerer Werth von $\varphi(x)$ in den Grenzen 0 und $c$, $\sigma$ ein solcher in den Grenzen $c$ und $\infty$, da $\varphi(x)$ für $x=\infty$ nicht discontinuirlich wird, so ist nach einem schon oft angewandten Satze:

$$a\int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)dx = (1-e^{-ac})\varrho + e^{-ac}\sigma.$$

Möge jetzt $c$ ins Unendliche wachsen, während $a$ abnimmt; jedoch sei dies in dem Masse der Fall, dass $ac$ noch immer nach Null hin abnimmt. Es ist dies z. B. der Fall, wenn

$$c = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad ac = \sqrt{a}$$

gesetzt wird, wo dann $ac$ mit $a$ gleichzeitig verschwindet. Man hat dann:

$$\int_0^\infty e^{-ax}f(x)dx = a\int_0^\infty e^{-ax}\varphi(x)\,dx = \sigma.$$

$\sigma$ aber war ein Mittelwerth von $\varphi(0)$ und $\varphi(\infty)$, was mit wachsendem $c$ den Werth $\varphi(\infty)$, also $\int_0^\infty f(x)\,dx$ ergibt.

Dieser allgemeine Satz zeigt für unsern Fall, dass die Ausdrücke XXXII a und b noch Gültigkeit haben, wenn die Integrale links endliche und bestimmte Grössen sind. Es ist:

$$\int_0^\infty \sin rx\, x^{n-1}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{r}} + \int_{\frac{\pi}{r}}^{\frac{2\pi}{r}} + \cdots + \int_{\frac{t\pi}{r}}^{(t+1)\frac{\pi}{r}} + \cdots$$

Da $x^{n-1}$ immer positiv ist, so wird das Vorzeichen von $\sin rx$ das der einzelnen Integrale bestimmen, und das erste Integral rechts ist positiv, das zweite negativ u. s. w. Es ist also:

$$\int_{\frac{s\pi}{r}}^{(s+1)\frac{\pi}{r}} \sin rx\, x^{n-x}dx = \left((s+\vartheta)\frac{\pi}{r}\right)^{n-1}\cdot\frac{2}{r},$$

wo $s$ ein echter positiver Bruch ist; also die Grenzen dieses Ausdrucks ergeben sich, wenn man $s=0$ und $s=1$ setzt:

$$\frac{2}{r}\left(\frac{s\pi}{r}\right)^{n-1} < \int_{\frac{s\pi}{r}}^{\frac{s+1}{r}\pi} \sin rx\, x^{n-1}\, dx < \frac{2}{r}\left(\frac{(s+1)\pi}{r}\right)^{n-1}.$$

Ist nun $n$ ein echter Bruch, so wird offenbar die Reihe der Zahlen: $(s\pi)^{n-1}$, $[(s+1)\pi]^{n-1}\ldots$ immer abnehmen, und da die Zeichen der Integrale wechseln, so bilden dieselben eine Reihe immer abnehmender Glieder mit wechselnden Vorzeichen, eine solche Reihe aber hat nach einem Satze von den Reihen (siehe den Artikel: Reihen) immer eine endliche Summe, also unser Integral dann einen endlichen Werth. Ist $n$ grösser als 1, so findet dies nicht mehr statt. Das Integral XXXII a kann natürlich ganz ähnlichen Betrachtungen unterworfen werden, nur sind, damit in den Theilintegralen die Zeichen des Cosinus sich nicht ändern, statt der Grenzen $\frac{s\pi}{r}$, $\frac{(s+1)\pi}{r}$ zu nehmen $(s+\frac{1}{2})\frac{\pi}{r}$, $(s+\frac{3}{2})\frac{\pi}{r}$.

Die Formeln XXXII sind also dann immer und nur dann gültig, wenn $n$ zwischen Null und Eins liegt. Die hier gegebenen Betrachtungen rühren von Dirichlet her. Uebrigens ist in diesen Formeln immer vorausgesetzt, dass $r$ positiv sei.

Für $n=0$ gibt XXXII b die Formel III des Abschnitts 38

$$\int_0^\infty \frac{\sin rx}{x}dx=\frac{\pi}{2}, \text{ wenn } r \text{ positiv ist,}$$

und

$$\int_0^\infty \frac{\sin rx}{x}dx=-\frac{\pi}{2}, \text{ wenn } r \text{ negativ ist,}$$

Setzen wir noch die zweite Formel XXXII $n=\frac{1}{2}$, $x=(y+\alpha)^2$, so kommt:

$$2\int_{-\alpha}^{+\infty} e^{r(y+\alpha)^2 i}dy=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)\,\Gamma(\tfrac{1}{2}),$$

da

$$e^{\frac{\pi}{4}i}=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

ist. Es ist aber

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx=\sqrt{\pi}$$

(vergleiche Abschnitt 39, Formel Xb).

$$\int_{-\alpha}^{+\infty} e^{ri(y^2+2\alpha y)}dy=e^{-r\alpha^2 i}\,\frac{(1+i)}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \text{XXXIII}$$

hierin noch $-\alpha$ für $\alpha$ gesetzt:

$$\int_{\alpha}^{+\infty} e^{ri(y^2-2\alpha y)}dy=e^{-r\alpha^2 i}\,\frac{(1+i)}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

und indem man im letzten Resultate die Grenzen umkehrt und $-y$ für $y$ setzt:

$$\int_{-\infty}^{-\alpha} e^{ri(y^2+2\alpha y)}\,dy=e^{-r\alpha^2 i}\,\frac{(1+i)}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Dieser Ausdruck zu XXXIII addirt gibt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ri(y^2+2\alpha y)}\,dy=e^{-r\alpha^2 i}\,(1+i)\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad \text{XXXIII a}$$

Wenn wir die Formel XXXI

$$\int_0^\infty e^{-rxe^{\vartheta i}}x^{n-1}dx=\frac{e^{-n\vartheta i}}{r^n}\Gamma(n)$$

mit der zur Entwicklung dieser Formel nöthigen andern hier gegebenen:

$$\int_0^\infty e^{-rx}x^{n-1}dx = \frac{1}{r^n}\Gamma(n)$$

und der Formel XXXII:

$$\int_0^\infty e^{-rxi}x^{n-1}dx = \frac{e^{-n\frac{\pi}{2}i}}{r^n}\Gamma(n)$$

vergleichen, so bemerken wir, dass der Ausdruck:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{n-1}dx$$

in den Fällen einen bestimmten Werth angibt, 1) wo $\alpha$ eine reelle positive Zahl, 2) wo $\alpha$ eine complexe Zahl ist, deren reeller Theil positiv ist, 3) wo $\alpha$ eine rein imaginäre Zahl ist. Während aber in den beiden ersten Fällen die Formeln für jeden positiven Werth von $n$ gelten, ist die dritte nur für positive Werthe von $n$, welche kleiner als 1 sind, gültig.

46) An die letzten Formeln wollen wir jetzt noch einige besonders instructive Entwicklungen knüpfen.

Zunächst schreiben wir die beiden Formeln XXXII unter der Gestalt:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-rxi}}{x^\alpha}dx = -ie^{\alpha\frac{\pi}{2}i}\,\Gamma(1-\alpha)\,r^{\alpha-1}, \tag{1}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{rxi}}{x^\alpha}dx = +ie^{-\alpha\frac{\pi}{2}i}\,\Gamma(1-\alpha)r^{\alpha-1}, \tag{2}$$

wo $1-n$ gleich $\alpha$ gesetzt wurde, also $\alpha$ eine positive zwischen 0 und 1 liegende Zahl ist.

Im Folgenden werden öfter negative und imaginäre Grössen zu einer positiven Potenz $\alpha$ erhoben werden, welche ein Bruch ist. Um Mehrdeutigkeit zu vermeiden, denken wir, dass dem complexen Ausdrucke $u$ jedesmal die Form $\varrho e^{\vartheta i}$ gegeben werde, wo der Modul $\varrho$ also jedenfalls positiv ist. $\vartheta$ kann jeden Werth von $-\pi$ bis $+\pi$ haben, also muss positiv oder negativ, jedenfalls aber kleiner als $\pi$ oder höchstens gleich dieser Grösse sein. Es ist dann:

$$u^\alpha = \varrho^\alpha e^{(2s\pi+\vartheta)\alpha i},$$

wo $s$ jede beliebige ganze Zahl sein kann. Wir aber nehmen ein für allemal an, dass im Exponenten der absolut kleinste Arcus, also der, wo $s=0$ ist, stehe, so dass

$$u^\alpha = \varrho^\alpha e^{\vartheta\alpha i}$$

ist, und $\vartheta$ zwischen $\pi$ und $+\pi$ liegt.

Eine Mehrdeutigkeit könnte hierbei nur in dem ganz bestimmten Falle stattfinden, wo $u$ eine negativ reelle Zahl ist, dann ist nämlich:

$$u = \varrho e^{\pm\pi i},$$

also

$$u^\alpha = \varrho^\alpha e^{\pm\pi\alpha i}$$

und beide Vorzeichen geben einen Arcus, dessen absoluter Werth derselbe ist. In diesem Fall müssten also beide Vorzeichen genommen werden.

Ist jetzt $x$ reell und positiv, so hat man:

$$xi = xe^{\frac{\pi}{2}i},$$

also:

$$(xi)^\alpha = x^\alpha e^{\frac{\pi}{2}\alpha i};$$

somit erhalten wir aus Formel 1) und 2), wenn wir im Nenner $(xi)^\alpha$ für $x^\alpha$ schreiben:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-rxi}}{(xi)^\alpha}dx = -i\,\Gamma(1-\alpha)\,r^{\alpha-1}, \tag{3}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{rxi}}{(xi)^\alpha}dx = ie^{-\alpha\pi i}\,\Gamma(1-\alpha)r^{\alpha-1}. \tag{4}$$

In die Integrale 1), 2), 3), 4) aber setzen wir $x+bi$ statt $x$, Werthe für die natürlich die Ausdrücke rechts zunächst keine Gültigkeit haben. Indess können

wir uns zu ihrer Bestimmung der Formel B des vorigen Abschnittes bedienen. Es ist, wenn wir in dieser Formel $\alpha = \infty$ setzen, und berücksichtigen, dass in dieser $\int_0^b \varphi(a+yi)$ immer verschwindet, wenn $\alpha$ positiv ist:

$$\int_0^\infty \frac{e^{r(x+bi)i}}{(x+bi)^\alpha}dx = \int_0^\infty \frac{e^{rxi}}{x^\alpha}dx - i\int_0^b \frac{e^{-ry}dy}{(yi)^\alpha}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-r(x+bi)i}}{(x+bi)^\alpha}dx = \int_0^\infty \frac{e^{-rxi}}{x^\alpha}dx - i\int_0^b \frac{e^{xy}dy}{(yi)^\alpha}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{r(x+bi)i}}{(xi-b)^\alpha}dx = \int_0^\infty \frac{e^{rxi}}{(xi)^\alpha}dx - i\int_0^b \frac{e^{-ry}dx}{(-y)^\alpha}$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-r(x+bi)i}}{(xi-b)^\alpha}dx = \int_0^b \frac{e^{-rxi}}{(xi)^\alpha}dx - i\int_0^b \frac{e^{ry}dy}{(-y)^\alpha}.$$

Die ganze Entwicklungsweise, der wir die Formel $A$ des vorigen Abschnittes verdanken, setzt voraus, dass die Potenz im Nenner der Integrale links und der zweiten Integrale rechts immer den kleinsten Arcus habe. Denn die vier Seiten des Rechtecks, auf welchen die Integrale genommen wurden, müssen sich derart an einander schliessen, dass die Argumente dieselben bleiben; da nun im ersten Integrale rechts immer der kleinste Arcus genommen ist, so muss dies auch bei den anderen Integralen geschehen. Jedoch enthalten die letzten Integrale der beiden letzten Formeln noch eine Zweideutigkeit in dem Falle, wo $b$ positiv ist. Diese wird aber gehoben, wenn man berücksichtigt, dass

$$xi - b = \varrho e^{\tau i},$$

immer einen Arcus $\tau$ enthält, welcher positiv ist, so lange $x$, wie hier, immer während der Integration positiv bleibt; es ist also auch für $x=0$ der Arcus positiv zu nehmen, und da $y$ im letzten Integrale bis $b$ geht, so ist

$$-y = ye^{\pi i}$$

hier mit dem positiven Werthe des Arcus zu versehen.

Setzt man jetzt in die letzten vier Formeln für die ersten Integrale rechts ihre Werthe ein, so kommt:

$$\int_0^\infty \frac{e^{r(x+bi)i}}{(x+bi)^\alpha}dx + i\int_0^b \frac{e^{-ry}dy}{(yi)^\alpha} = ie^{-\frac{\alpha\pi}{2}i}\, r^{\alpha-1}\, \Gamma(1-\alpha) \qquad 5)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-r(x+bi)i}}{(x+bi)^\alpha}dx + i\int_0^b \frac{e^{ry}dy}{(yi)^\alpha} = -ie^{\frac{\alpha\pi}{2}i}\, r^{\alpha-1}\, \Gamma(1-\alpha) \qquad 6)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{r(x+bi)i}}{(xi-b)^\alpha}dx + i\int_0^b \frac{e^{-ry}dy}{(-y)^\alpha} = ie^{-\alpha\pi i}\, r^{\alpha-1}\, \Gamma(1-\alpha) \qquad 7)$$

$$\int_0^\infty \frac{e^{-r(x+bi)i}}{(xi-b)^\alpha}dx + i\int_0^b \frac{e^{ry}dy}{(-y)^\alpha} = -ir^{\alpha-1}\, \Gamma(1-\alpha) \qquad 8)$$

Wenn man in diese Formeln noch $-b$ für $b$ setzt, so ergibt sich, wenn man noch $x$ mit $-x$, $y$ mit $-y$ vertauscht, die Grenzen der Integration aber umkehrt:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-r(x+bi)i}}{(x+bi)^\alpha} dx - i \int_0^b \frac{e^{ry} dy}{(yi)^\alpha} = ie^{-\frac{\alpha\pi}{2}i} r^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)(-1)^\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{r(x+bi)i}}{(x+bi)^\alpha} dx - i \int_0^b \frac{e^{-ry} dy}{(yi)^\alpha} = -ie^{\frac{\alpha\pi}{2}i} r^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)(-1)^\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{-r(x+bi)i}}{(xi-b)^\alpha} dx - i \int_0^b \frac{e^{ry} dy}{(-y)^\alpha} = ie^{-\alpha\pi i} r^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)(-1)^\alpha$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^{r(x+bi)i}}{(xi-b)^\alpha} dx - i \int_0^b \frac{e^{-ry} dy}{(-y)^\alpha} = -ir^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)(-1)^\alpha$$

Der Factor $(-1)^\alpha$ rechts ist entstanden, indem man den Werth $(-x-bi)^\alpha$ in den beiden ersten Formeln in die Factoren $(-1)^\alpha (x+bi)^\alpha$, sowie $(-xi+b)^\alpha$ zerlegte, ebenso mit $(-yi)^\alpha$ und $(y)^\alpha$ verfährt, und mit dem ersten Factor die entsprechende Gleichung multiplicirt. Die Werthe von $(-1)^\alpha$ sind noch zu bestimmen.

$$x + bi = \varrho e^{\pm(\pi - \vartheta)i},$$

wo $\vartheta$ im ersten Quadranten liegt und das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem $b$ positiv oder negativ ist, denn $x$ ist immer während der ganzen Integration negativ.

$$-x - bi = \varrho e^{\mp \vartheta i},$$

unter denselben Voraussetzungen. Es ist also:

$$\varrho^\alpha e^{\mp \vartheta \alpha i} = (-1)^\alpha \varrho^\alpha e^{\pm(\pi - \vartheta)\alpha i}.$$

Es ist also in die beiden ersten Formeln zu setzen:

$$(-1)^\alpha = e^{\pm \pi\alpha i},$$

wo das obere Zeichen auf positive, das untere auf negative Werthe von $b$ geht.

In den beiden letzten Formeln ist

$$-b + xi = \varrho e^{(\vartheta - \pi)i} \text{ oder } = \varrho e^{-\vartheta i},$$

je nachdem $b$ positiv oder negativ ist, und

$$b - xi = \varrho e^{\vartheta i} \text{ oder } = \varrho e^{(\pi - \vartheta)i}$$

unter denselben Bedingungen. Also:

$$\varrho^\alpha e^{\vartheta \alpha i} = (-1)^\alpha \varrho^\alpha e^{\alpha(\vartheta - \pi)i}$$

im ersten Falle,

$$\varrho^\alpha e^{\alpha(\pi - \vartheta)i} = (-1)^\alpha \varrho^\alpha e^{-\alpha\vartheta i}$$

im zweiten Falle. Für positives oder negatives $b$ ist also in den beiden letzten Formeln:

$$(-1)^\alpha = e^{\pi\alpha i}.$$

Unter diesen Voraussetzungen addire man jetzt die vier letzten Formeln zu den mit 5), 6), 7), 8) bezeichneten, derart, dass die zweite mit 5), die erste mit 6), die vierte mit 7), die dritte mit 8) verbunden wird, wodurch sich ergibt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ri(x+bi)}}{(x+bi)^\alpha} dx = 0 \text{ oder } = ie^{-\frac{\alpha\pi}{2}i} r^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha)(1 - e^{2\alpha\pi i}),$$

je nachdem $b$ positiv oder negativ ist.

Für den letzten Werth kann man auch schreiben:

$$2e^{\frac{\alpha\pi}{2}i} r^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \sin(\alpha\pi).$$

Also wenn man $b$ immer positiv denkt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ri(x\pm bi)}}{(x\pm bi)^\alpha} dx = 0 \quad \text{oder} \quad = 2e^{\frac{\alpha\pi}{2}i} r^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \sin \alpha\pi. \qquad 9)$$

Ebenso erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ri(x\pm bi)}}{(x\pm bi)^\alpha} dx = 2e^{-\frac{\alpha\pi}{2}i} r^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \sin \alpha\pi \quad \text{oder} \quad = 0, \qquad 10)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{+ri(x+bi)}}{(xi-b)^\alpha} dx = 2r^{\alpha-1} \Gamma(1-\alpha) \sin \alpha\pi, \qquad 11)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ri(x+bi)}}{(xi-b)^\alpha} dx = 0. \qquad 12)$$

In den beiden letzten Formeln kann $b$ positiv und negativ sein. In den beiden ersten entspricht der obere Werth dem positiven, der untere dem negativen Zeichen von $b$.

Die Formeln 9 und 12 sind unter der Bedingung entwickelt, dass $\alpha$ ein positiver echter Bruch ist, $r$ kann nicht Null sein. Der Fall, wo $b$ gleich Null ist, macht eine besondere Discussion nöthig. In den Formeln 11 und 12 bleibt für diesen Fall der Ausdruck rechts continuirlich. In dem Ausdrucke links wird die Function $\frac{e^{\pm rxi}}{(xi)^\alpha}$ für $x$ gleich Null unendlich. Indess ist der Ausdruck:

$$\frac{e^{\pm rxi}}{(xi)^\alpha} = \frac{1}{x^\alpha} e^{\vartheta i},$$

wenn $x$ positiv ist, wo $\vartheta$ eine von $x$ abhängige reelle Zahl ist, also der Modul dieses Ausdruckes jedenfalls gleich $\frac{1}{x^\alpha}$, dagegen ist der Modul dieses Ausdruckes für negatives $x$ gleich $\frac{1}{(-x)^\alpha}$.

Es ist also sowohl der reelle als der mit $i$ multiplicirte Theil von

$$\int_{-s}^{-\delta} \frac{e^{\pm rxi} dx}{(xi)^\alpha} < \int_{-s}^{-\delta} \frac{d(-x)}{(-x)^\alpha}$$

abgesehen vom Vorzeichen. Der Ausdruck rechts aber gibt:

$$\frac{\delta^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Eben so ist der reelle und der mit $i$ multiplicirte Theil von

$$\int_{+\varepsilon}^{+t} \frac{e^{\pm rxi} dx}{(xi)^\alpha} < \int_{\varepsilon}^{t} \frac{dx}{x^\alpha}$$

und der Ausdruck rechts gleich

$$\frac{t^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

Setzt man also das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\pm rxi}}{(xi)^\alpha} dx = \int_{-\infty}^{-s} + \int_{-s}^{-\delta} + \int_{+\varepsilon}^{+t} + \int_{+t}^{+\infty},$$

so werden die beiden mittlern Integrale für unendlich kleines $\varepsilon$ und $\delta$ von diesen Grössen unabhängig, und nehmen nach Null hin ab, wenn man auch $s$ und $t$ abnehmen lässt. Es kann also

$$\varepsilon = \delta = 0$$

gesetzt werden, ohne dass das Integral aufhört eine bestimmte Summe zu haben, und somit bleiben für $b=0$ die Formeln 11 und 14 noch richtig. Diese Schlüsse aber würden falsch sein, wenn $\alpha > 1$ wäre, weil dann

$$\varepsilon^{1-\alpha}=\infty,$$

eben so wie $\delta^{1-\alpha}$ würde.

Die Formeln 9 und 10 geben für $b=0$ rechts discontinuirliche Werthe. Für die Ausdrücke links aber gelten die obigen Schlüsse noch. Die Formeln 9 und 10 gelten also für $b=0$ noch, werden aber zweiwerthig. In der That wird im negativen Theile des Integrals

$$x\alpha=\varrho^{\alpha}e^{\pm\pi\alpha i},$$

also zweideutig, ganz wie oben gezeigt wurde.

Je nachdem man nun das obere oder untere Zeichen nimmt, also

$$(-1)^{\alpha}=e^{\pm\pi\alpha i}$$

setzt, wird auch der obere oder untere Werth gelten. Diese Betrachtungen sind zur genauen Ermittelung der Werthe bestimmter Integrale ganz unerlässlich, und ist daher hier etwas ausführlicher auf dieselben eingegangen.

Im Falle, wo $b$ gleich Null ist, ist also die Bedingung, dass $\alpha$ ein echter Bruch sei, für die Gültigkeit unserer Formeln ganz unerlässlich.

In allen andern Fällen aber sind die Resultate 9 bis 12 einer Erweiterung fähig. Es ist nämlich, ob $r$ positiv oder negativ sei,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ri(x+bi)}}{(x+bi)^{\alpha}}dx=\frac{e^{ri(\infty+bi)}}{ri(\infty+bi)^{\alpha}}-\frac{e^{ri(-\infty+bi)}}{ri(-\infty+bi)^{\alpha}}+\frac{(1+\alpha)}{ri}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ri(x+bi)}}{(x+bi)^{\alpha+1}}dx,$$

wie sich durch theilweises Integriren ergibt, und da der ausserhalb des Integralzeichens befindliche Theil verschwindet:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ri(x+bi)}\,dx}{(x+bi)^{\alpha+1}}=\frac{ri}{1+\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ri(x+bi)}\,dx}{(x+bi)^{\alpha}}.$$

Ebenso erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ri(x+bi)}\,dx}{(xi-b)^{\alpha}}=\frac{1+\alpha}{r}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ri(x+bi)}\,dx}{(xi-b)^{\alpha+1}}$$

oder:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ri(x+bi)}\,dx}{(xi-b)^{\alpha+1}}=\frac{r}{1+\alpha}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ri(x+bi)}\,dx}{(xi-b)^{\alpha}}.$$

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens ergibt sich, wenn $s$ eine beliebige ganze positive Zahl ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ri(x+bi)}\,dx}{(x+bi)^{\alpha+s}}=\frac{r^{s}e^{\frac{\pi}{2}si}}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+s)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ri(x+bi)}\,dx}{(x+bi)^{\alpha}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ri(x+bi)}\,dx}{(xi-b)^{\alpha+s}}=\frac{r^{s}}{(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+s)}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{ri(x+bi)}\,dx}{(xi-b)^{\alpha}}.$$

Wir anticipiren jetzt zwei Formeln, die in Abschnitt 49 bewiesen werden sollen. Die erste ist:

$$\Gamma(1-\alpha)\sin\alpha\pi=\frac{\pi}{\Gamma(\alpha)}.$$

Die zweite:

$$\Gamma(\alpha)\cdot(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+s)=\Gamma(\alpha+s).$$

Setzen wir diese Ausdrücke in 9, 10, 11, 12 ein, und dividiren durch

$$e^{\mp rb},$$

so kommt, wenn man $\lambda$ für $\alpha+s$ schreibt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{rix}\,dx}{(x \pm bi)^\lambda} = 0 \text{ oder } = \frac{2\pi e^{\lambda\frac{\pi}{2}i} r^{\lambda-1} e^{-rb}}{\Gamma(\lambda)} \qquad \text{XXXIV}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-rix}\,dx}{(x \pm bi)^\lambda} = \frac{2\pi e^{-\lambda\frac{\pi}{2}i} r^{\lambda-1} e^{-rb}}{\Gamma(\lambda)} \text{ oder } = 0 \qquad \text{XXXIVa}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{rix}}{(xi \pm b)^\lambda} = \frac{2\pi r^{\lambda-1} e^{\mp rb}}{\Gamma(\lambda)} \qquad \text{XXXIVb}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-rix}}{(xi \pm b)^\lambda} = 0. \qquad \text{XXXIVc}$$

Die Formeln gelten für positives $r$, aber nicht für $r=0$, für jedes positive $\lambda$ und $b$, für $b=0$ noch dann, wenn $\lambda$ kleiner als Eins ist.

Durch die Addition und Subtraction dieser Formeln liessen sich hieraus noch mancherlei Resultate herleiten, auch sind in denselben als specielle Fälle eine grosse Anzahl bestimmter Integrale enthalten.

47) Der Formel D des Abschnitts 45 wollen wir noch eine Anwendung entnehmen.

Sei darin

$$\varphi(x) = x^{n-1} e^{-(x+c)^2}$$

eine Grösse, die offenbar der dort ausgesprochenen Bedingung genügt, es ist also:

$$(a+bi)^n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-(c+xa+xbi)^2} dx = a^n \int_0^\infty x^{n-1} e^{-(c+xa)^2} dx$$

oder da

$$\int_0^\infty x^{n-1} e^{-(c+xa)^2} dx = \frac{1}{a^n} \int_0^\infty x^{n-1} e^{-(c+x)^2} dx,$$

wie man ersieht, wenn man $x$ für $ax$ schreibt, so erhält man durch Trennung des Reellen vom Imaginären, wenn man noch:

$$a+bi = re^{\lambda i}$$

setzt:

$$\int_0^\infty e^{b^2x^2-(c+ax)^2} \cos[2bx(ax+c)] x^{n-1} dx =$$

$$\frac{\cos n\lambda}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-(x+c)^2} x^{n-1} dx \qquad \text{XXXV}$$

$$\int_0^\infty e^{b^2x^2-(c+ax)^2} \sin[2bx(ax+c)] x^{n-1} dx =$$

$$\frac{\sin n\lambda}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-(x+c)^2} x^{n-1} dx. \qquad \text{XXXVa}$$

Es ist hierin $r$ wieder gleich $\sqrt{a^2+b^2}$ gesetzt, also

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{b}{a}.$$

Ist noch $c=0$, $n=1$, so wird:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\pi)},$$

$$\cos\lambda = \frac{a}{\sqrt{(a^2+b^2)}},\qquad \sin\lambda = \frac{b}{\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

also

$$\int_0^\infty e^{x^2(b^2-a^2)}\cos(2abx^2)\,dx = \frac{a\sqrt{(\pi)}}{2(a^2+b^2)} \qquad \text{XXXVb}$$

$$\int_0^\infty e^{x^2(b^2-a^2)}\sin(2abx^2)\,dx = \frac{b\sqrt{(\pi)}}{2(a^2+b^2)}. \qquad \text{XXXVc}$$

48) Siebente Methode.

Es darf endlich noch eine Betrachtungsweise nicht übergangen werden, welche die Werthe von vielen bestimmten Integralen gibt, wenn gleich dieselben sich auch anderweitig bestimmen lassen.

Zu dem Ende untersuchen wir den Ausdruck:

$$\int_0^k F(\alpha)\cos\varrho(x-\alpha)\,d\varrho,$$

wo $F(\alpha)$ eine beliebige, aber eindeutig gedachte Function, $k$ eine positive ins Unendliche wachsende Zahl ist. Durch Integration erhält man:

$$F(\alpha)\frac{\sin k(x-\alpha)}{x-\alpha}.$$

Sei jetzt gegeben:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^k F(\alpha)\cos\varrho(x-\alpha)\,d\varrho\,d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\frac{\sin k(x-\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha.$$

Sei jetzt $r$ eine von $x$ um eine endliche Grösse verschiedene Zahl, so wird das Integral:

$$\int_r^{r+\frac{2\pi}{k}} F(\alpha)\frac{\sin k(x-\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha$$

mit wachsendem $k$ eine Gestalt annehmen, in der $\frac{F(\alpha)}{x-\alpha}$ constant bleibt, da $\alpha$ nur um ein unendlich Kleines $\frac{2\pi}{k}$ wachsen kann. Das eben aufgestellte Integral nimmt also den Werth an:

$$\frac{F(r)}{x-r}\int_r^{r+\frac{2\pi}{k}}\sin k(x-\alpha)\,d\alpha = \frac{F(r)}{x-r}\,\frac{[\cos k(r-\alpha)-\cos k(r-\alpha)]}{k} = 0.$$

Da nun sich das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\frac{\sin k(x-\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha$$

in solche von $r$ bis $r+\frac{2\pi}{k}$, $r+\frac{2\pi}{k}$ bis $r+\frac{4\pi}{k}$ u. s. w. gehende Theile zerlegen lässt, so folgt hieraus, dass von diesem Ausdrucke alles verschwindet bis auf den Theil, wo $\alpha$ nur unendlich wenig von $x$ verschieden ist. Man kann also statt dieses Integrals nehmen:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} F(\alpha)\frac{\sin k(x-\alpha)}{x-\alpha}\,d\alpha = F(x)\int_{-\varepsilon'}^{+\varepsilon}\frac{\sin ku}{u}\,du,$$

wo $\varepsilon$ unendlich klein ist, und $u$ für $x-\alpha$ gesetzt wurde; auf diesem Wege ändert sich $F(\alpha)$ nicht, vorausgesetzt, dass $F(u)$ in der Nähe von $u=x$ continuirlich bleibt. Findet dies nicht statt, so muss der Fall besonders untersucht werden.

Statt $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{\sin ku}{u} du$ kann man auch nehmen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ku}{u} du = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin ku}{u} du = \pi.$$

(Siehe Formel III.) Denn ganz wie eben gezeigt wurde, ergibt sich, dass auf der nicht zwischen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ liegenden Strecke unser Integral verschwindet.

Man hat also:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{0}^{\infty} F(\alpha)\cos\varrho(x-\alpha)\,d\varrho\,d\alpha = F(x), \qquad \text{A)}$$

wo $k=\infty$ gesetzt worden ist.

Vertauscht man noch $\varrho$ mit $-\varrho$, so ergibt sich:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+0} \cos\varrho(x-\alpha)\,d\varrho\,d\alpha = F(x)$$

und dies Resultat zu A) addirt gibt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\cos\varrho(x-\alpha)\,d\varrho\,d\alpha = F(x). \qquad \text{B)}$$

Die Formeln A und B heissen nach ihrem Erfinder die Fourrierschen Integrale. $x$ muss natürlich hierbei reell sein.

Springt $F(x)$ für irgend einen Werth von $x$ plötzlich von einem Werth zum andern, ist also $F(x-\varepsilon)$ von $F(x+\varepsilon)$ verschieden, wenn $\varepsilon$ unendlich klein ist, so hat man:

$$\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} \frac{F(\alpha)\sin k(x-\alpha)\,d\alpha}{x-\alpha} = \int_{x-\varepsilon}^{0} + \int_{0}^{x+\varepsilon}$$

oder, indem man wieder $x-\alpha=u$ setzt:

$$\int_{-\varepsilon}^{0} F(x-u)\frac{\sin ku}{u}du + \int_{0}^{\varepsilon} F(x+u)\frac{\sin ku}{u}du.$$

Während der Integration sind wegen des unendlichen kleinen $\varepsilon$, die Grössen $F(x-u)$, $F(x+u)$ als constant zu betrachten, wenn $u$ nur den Werth $\varepsilon$ nicht überschreitet; man erhält also:

$$F(x-\varepsilon)\int_{-\varepsilon}^{0} \frac{\sin ku}{u}du + F(x+\varepsilon)\int_{0}^{\varepsilon} \frac{\sin ku}{u}du = \frac{\pi}{2}[F(x+\varepsilon)+F(x-\varepsilon)].$$

Es stellen also, wenn $x$ discontinuirlich wird, die Formeln A und B nicht mehr $F(x)$, sondern die arithmetische Mitte der beiden Werthe $F(x-\varepsilon)$ und $F(x+\varepsilon)$ dar.

Zum völligen Verständnisse der in der Analysis höchst wichtigen Formeln A und B ist noch die Bemerkung nöthig, dass in dem Ausdruck links nur diejenigen Werthe von $F(\alpha)$ vorkommen, die $x$ unendlich nahe sind, also die Identität ganz abgesehen von dem weitern Verlauf der Function $F(x)$ stattfindet. Man kann derselben also in beliebigen

Strecken, vorausgesetzt, dass in derselben $x$ reell ist, auch beliebige Werthe gehen.

Nimmt man z. B. an, $F(x)$ sei immer gleich Null, wenn $x$ analytisch kleiner als $\mu$ ist, dagegen gleich $\varphi(x)$, wenn $x$ grösser als $\mu$ ist, so verschwindet links im Ausdrucke $B$ der ganze Theil des Integrals nach $\alpha$, der unter $\mu$ liegt, und man hat:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mu}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\varrho(x-\alpha)\,d\varrho\,d\alpha=\varphi(x)\ \text{oder}\ =0, \qquad C)$$

je nachdem $x$ grösser oder kleiner als $\mu$ ist.

Setzt man ferner

$$f(x)=\varphi(x)$$

wenn $x$ positiv ist, und

$$f(x)=\varphi(-x)$$

wenn $x$ negativ ist, so hat man in A links:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\int_{0}^{+\infty}\varphi(-\alpha)\cos\varrho(x-\alpha)\,d\varrho\,d\alpha+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}\varphi(\alpha)\cos\varrho(x-\alpha)\,d\varrho\,d\alpha$$

oder wenn man im ersten Integral $\alpha$ für $-\alpha$ setzt,

$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\varphi(\alpha)\cos x\cos\varrho\alpha\,d\varrho\,d\alpha=\varphi(x)\ \text{oder}\ =\varphi(-x), \qquad D)$$

je nachdem $x$ positiv oder negativ ist.

Soll aber

$$F(x)=-\varphi(-x)$$

für negatives $x$ sein, so erhält man ebenso:

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\varphi(\alpha)\sin\varrho x\sin\varrho\alpha\,d\varrho\,d\alpha=\varphi(x)\ \text{oder}\ =-\varphi(-x). \qquad E)$$

Die Anwendung dieser Ausdrücke in der Theorie der bestimmten Integrale besteht darin, dass man den Functionen $F(\alpha)$, $\varphi(x)$ solche Werthe gibt, das eine der beiden Integrationen ausgeführt werden kann. Man erhält dann links ein einfaches Integral, rechts seinen Werth.

**Beispiel.** Setze man in Formel D:

$$\varphi(\alpha)=e^{-k\alpha},$$

so ist:

$$\int_0^{\infty}\varphi(\alpha)\cos\varrho\alpha\,d\alpha=\frac{k}{k^2+\varrho^2},$$

also:

$$\int_0^{\infty}\frac{d\varrho\cos\varrho x}{k^2+\varrho^2}=\frac{\pi}{2k}e^{-kx},$$

wenn $x$ positiv ist, oder

$$=\frac{\pi}{2k}e^{kx},$$

wenn $x$ negativ ist.

Unter denselben Bedingungen gibt Formel E:

$$\int_0^{\infty}\varrho\frac{d\varrho\sin\varrho x}{k^2+\varrho^2}=\frac{\pi}{2}e^{-kx}$$

oder

$$=-\frac{\pi}{2}e^{kx}.$$

Diese Resultate sind uns schon bekannt. Man sieht leicht, welche grosse Menge von andern Formeln aus den Fourierschen Integralen gefunden werden können. Wir gehen indess nur noch ein Beispiel, welches zeigen soll, wie man der Function beliebig Discontinuitäten geben kann.

Sei in Formel A) $F(x)=0$ für jeden Werth von $x$, der kleiner als $-1$ und grösser als $+1$ ist, dagegen $F(x)=1$, wenn $x$ zwischen $-1$ und $+1$ liegt. Die Formel A) gibt dann:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{\infty}\cos\varrho(x-\alpha)\,d\varrho\,d\alpha.$$

Wir integriren nach $\alpha$ und erhalten:

$$\int_{-1}^{+1}\cos\varrho(x-\alpha)d\alpha=\frac{\sin\varrho(x+1)-\sin\varrho(x-1)}{\varrho}=\frac{2\cos\varrho\, x\sin\varrho}{\varrho},$$

also:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\cos\varrho x\sin\varrho\, d\varrho}{\varrho}=1 \text{ oder } =0,$$

je nachdem $x$ innerhalb oder ausserhalb der Grenzen $+1$ und $-1$ liegt. Auf den Grenzen $x=1$ und $x=-1$ ergibt sich als Werth die arithmetische Mitte von 1 und 0, d. h. $\frac{1}{2}$, weil hier Discontinuität eintritt. Dies Resultat ist bereits in Formel IV enthalten, und daselbst als discontinuirlicher Factor bezeichnet.

49) Theorie der Eulerschen Integrale.

Es gibt aber auch bestimmte Integrale, die, ohne sich immer auf schon bekannte Functionen zurückführen zu lassen, dennoch von grosser Wichtigkeit sind. Dazu gehören namentlich die von Euler zuerst betrachteten, und nach ihm benannten Integrale:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

welches wir als erstes Eulersches Integral bezeichnen, und ihm das Symbol $\left(\frac{p}{q}\right)$ geben. Das zweite Eulersche Integral ist das schon von uns betrachtete:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx=\Gamma(n), \qquad 1)$$

welches wir in den Abschnitten 45) und 46) als Constante einführten, und daraus eine grosse Menge von Resultaten gewannen.

Dem Ausdrucke:

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx=\left(\frac{p}{q}\right) \qquad 2)$$

kann man auch eine andre Form geben, wenn man setzt:

$$x=\frac{y}{1+y},\ 1-x=\frac{1}{1+y},\ dx=\frac{dy}{(1+y)^2};$$

für $x=0$ ist dann $y=0$, für $x=1$ ist $y=\infty$, also:

$$\int_0^\infty\frac{y^{p-1}dy}{(1+y)^{p+q}}=\left(\frac{p}{p}\right). \qquad 3)$$

Vertauscht man in Formel 2) noch $x$ mit $1-z$, so erhält man:

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\int_0^1 z^{q-1}(1-z)^{p-1}dz=\left(\frac{q}{p}\right),$$

also:

$$\left(\frac{p}{q}\right)=\left(\frac{q}{p}\right) \qquad 4)$$

und der Ausdruck ist symmetrisch in Bezug auf diese beiden Grössen.

Die Ausdrücke $\Gamma(n)$ und $\left(\frac{p}{q}\right)$ sind aber noch in Bezug auf die Grenzen ihrer Continuität zu prüfen. Es ist:

$$\Gamma(n)=\int_0^k e^{-x}x^{n-1}dx+\int_k^\infty e^{-x}x^{n-1}dx.$$

Für den ersten Theil kann man setzen $\frac{(\epsilon k)^n}{n}$, wo $\epsilon$ ein echter Bruch ist, vorausgesetzt, dass $n$ positiv ist, und dieser Ausdruck ist endlich. In dem zweiten Theile ist:

$$e^{-x}=\frac{1}{1+x+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots},$$

also

$$e^{-x}<1\cdot2\cdot3\cdots s\, x^{-s},$$

wie gross auch $s$ sei. Aus diesem Grunde ist also:

$$x^{n-1}e^{-x}<1\cdot2\cdots s\, x^{n-s-1}.$$

Man denke sich nun $s$ so gross, dass $n-s-1$ negativ wird, dann ist:

$$\int_k^\infty e^{-x}x^{n-1}dx<n\int_k^\infty x^{n-s-1}dx$$

und da der Ausdruck rechts gleich:

$$-k^{n-s}\frac{n}{n-s}$$

ist, also mit wachsendem $k$ verschwindet, so wird unser Integral eine endliche Summe haben, so lange $n$ positiv ist. Ist $n$ negativ, so setze man in dem Ausdrucke:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{1+n}}dx,$$

$$\frac{1}{y} \text{ für } x,$$

man erhält:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{y}}y^{n-1}dy.$$

Nun hat man:

$$\int_k^t e^{-\frac{1}{y}}y^{n-1}dy = e^{-\frac{1}{k+\iota(t-k)}}\frac{t^n-k^n}{n}$$

ein Ausdruck, der offenbar mit wachsendem $k$ ins Unendliche wächst, da der erste Factor sich der Einheit nähert. Für negatives $n$ gibt also die Function $\Gamma(n)$ keinen Werth mehr.

Was das Integral $\left(\frac{p}{q}\right)$ anbetrifft, so könnte möglicher Weise Discontinnität an der obern Grenze eintreten, wenn $p-1$ positiv ist, an der untern, wenn $p-1$ negativ ist.

Mit wachsendem $y$ kann man nun immer die Grössen $(1+y)^{p+q}$ und $y^{p+q}$ identificiren, und hat also:

$$\int_k^\infty \frac{y^{p-1}}{y^{p+q}}dy = \int_k^\infty \frac{dy}{y^{q+1}} = -\frac{1}{q}[(\infty)^{-q}-k^{-q}]$$

zu untersuchen, ein Ausdruck, der unendlich oder Null wird, je nachdem $q$ positiv oder negativ ist. Statt der Untersuchung der untern Grenzen bedienen wir uns der Eigenschaft, dass die Function in Bezug auf $p$ und $q$ symmetrisch ist, und sehen, dass die Continuität dieses Integrals nur unter der Bedingung stattfindet, dass $p$ und $q$ positiv sind.

Der Werth von $\Gamma(n)$ lässt sich nun immer bestimmen, wenn das positive $n$ eine ganze Zahl ist. Man erhält nämlich durch theilweises Integriren:

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = (n-1)\int_0^\infty e^{-x}x^{n-2}dx = (n-1)\Gamma(n-1).$$

Indem man so fortfährt und berücksichtigt, dass:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

ist, hat man für jedes ganze $n$:

$$\Gamma(n) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1), \qquad 5)$$

für beliebiges $n$ aber:

$$\Gamma(n) = (n-1)\cdots(n-p)\Gamma(n-p), \qquad 6)$$

wo $n-p$ natürlich positiv sein muss.

Die Formel 5) führt den Ausdruck, im Falle $n$ eine ganze Zahl ist, auf die Fakultäten zurück. Es kann also unser Integral als eine Erweiterung dieses Begriffs für gebrochene Zahlen betrachtet werden. Noch in einem andern Falle lässt sich $\Gamma(n)$ bestimmen. Es ist nämlich:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty e^{-x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

und dieser Ausdruck gibt als Werth $\sqrt{\pi}$ (vergleiche Formel Xh), also $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Mithin auch, wenn $n$ eine beliebige ganze Zahl ist, nach Formel 6):

$$\Gamma(n+\tfrac{1}{2}) = (n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})\cdots\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}. \qquad 7)$$

Auch dem Ausdrucke $\left(\frac{p}{q}\right)$ lässt sich in einem bestimmten Falle augenblicklich ein Resultat abgewinnen. Ist nämlich $q=1-p$, also $p$ ein echter Bruch, so gibt Formel XVb) unmittelbar:

$$\left(\frac{1-p}{p}\right) = \left(\frac{p}{1-p}\right) = \frac{\pi}{\sin p\pi}. \qquad 8)$$

Für $q=1$ gibt die Formel 2) unmittelbar:

$$\left(\frac{p}{1}\right) = \left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p}. \qquad 9)$$

Es lässt sich aber auch eine allgemeine Relation zwischen den beiden Eulerschen Integralen gewinnen. Es ist nämlich:

$$\Gamma(s)\,\Gamma(t)=\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx\int_0^\infty e^{-y}y^{t-1}\,dy=$$

$$\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-(x+y)}x^{s-1}y^{t-1}\,dy\,dx.$$

Setzen wir hierin:

$$y=ux,\quad dy=x\,du,$$

so wird $u=0$ für $y=0$, $u=\infty$ für $y=\infty$, also:

$$\Gamma(s)\,\Gamma(t)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-x(1+u)}x^{s+t-1}u^{t-1}\,dx\,du.$$

Schon im Abschnitt 45) haben wir die Formeln entwickelt:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}x^{n-1}dx=\frac{\Gamma(n)}{\alpha^n} \qquad 10)$$

und wenn wir hierin $\alpha=1+u$, $n=s+t$ setzen, so kommt:

$$\Gamma(s)\,\Gamma(t)=\Gamma(s+t)\int_0^\infty\frac{u^{t-1}\,du}{(1+u)^{s+t}},$$

woraus sich mit Berücksichtigung von Formel 3) dieses Abschnittes ergibt:

$$\left(\frac{s}{t}\right)=\frac{\Gamma(s)\,\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}, \qquad 11)$$

ein Ausdruck, der also z. B. $\left(\frac{s}{t}\right)$ immer finden lehrt, wenn $s$ und $t$ ganze Zahlen sind. Ist hierin $t=1-s$ gesetzt, also $t$ und $s$ echte Brüche, so gibt Formel 8) noch:

$$\frac{\pi}{\sin s\pi}=\Gamma(s)\,\Gamma(1-s), \qquad 12)$$

da $\Gamma(1)=1$ ist.

Aus Formel 9) ergibt sich, wenn man $t=1$ setzt:

$$\frac{1}{s}=\frac{\Gamma(s)}{\Gamma(1+s)},$$

eine Formel, die jedoch nur das schon in 6) gegebene Resultat enthält.

Wenn wir die Formel 1 in Bezug auf $n$ differenziiren, so erhalten wir:

$$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}\lg x\,dx=\Gamma'(n). \qquad 13)$$

Setzt man in Formel 10) $n=1$ und integrirt in den Grenzen $\alpha=1$ und $\alpha=p$, so kommt:

$$\int_0^\infty\left(e^{-x}-e^{-px}\right)\frac{dx}{x}=\lg p.$$

Setzt man in 13) $p$ für $x$ und den eben gefundenen Werth von $\lg p$ daselbst ein, so kommt:

$$\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{e^{-p}p^{n-1}}{x}\left(e^{-x}-e^{-px}\right)dp\,dx=\Gamma'(n),$$

d. h. wenn man nach $p$ integrirt und Gleichung 10 berücksichtigt:

$$\Gamma'(n)=\Gamma(n)\int_0^\infty\frac{dx}{x}\left(e^{-x}-\frac{1}{(1+x)^n}\right)$$

oder wenn man

$$y=\frac{1}{1+x}$$

setzt:

$$\frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}=\frac{d\lg\Gamma(n)}{dn}=\int_0^1\left(e^{1-\frac{1}{y}}-y^n\right)\frac{dy}{y(1-y)}.$$

Dieser Ausdruck gibt nach $n$ integrirt mit Berücksichtigung, dass

$$\lg\Gamma(1)=0$$

ist:

$$\lg \Gamma(n) = \int_0^1 \left((n-1)\, e^{1-\frac{1}{y}} - \frac{y^n}{\lg y} + \frac{y}{\lg y}\right) \frac{dy}{y\,(1-y)}, \qquad 14)$$

so dass auch der Logarithmus dieses Integrals die Form eines bestimmten Integrals annimmt.

Setzen wir aber in die Formel für $\frac{d \lg \Gamma(n)}{dn}$, zunächst $n = kn$, so wird dieselbe:

$$\frac{d \lg \Gamma(kn)}{dn} = k \int_0^1 \left(e^{1-\frac{1}{y}} - y^{kn}\right) \frac{dy}{y\,(1-y)}.$$

Setzt man jetzt in der ursprünglichen Formel statt $n$ nach der Reihe $n,\ n+\frac{1}{k},\ n+\frac{2}{k} \cdots n+\frac{k-1}{k}$, wo unter $k$ eine ganze positive Zahl verstanden sein soll, und nimmt die Summe, so wird:

$$\frac{d}{dn} \lg \left[\Gamma(n),\ \Gamma(n+\frac{1}{k}),\ \Gamma(n+\frac{2}{k}) \cdots \Gamma(n+\frac{k-1}{k})\right] = k \int_0^1 \frac{e^{1-\frac{1}{y}}\, dy}{y\,(1-y)}$$

$$- \int_0^1 \frac{y^n}{1-y^{\frac{1}{k}}} \frac{dy}{y}$$

oder wenn man in diese Formel $y^k$ für $y$ setzt, so wird die rechte Seite:

$$k^2 \int_0^1 \frac{e^{1-\frac{1}{y}k}\, dy}{y\,(1-y^{\frac{1}{k}})} - k \int_0^1 \frac{y^{kn}\, dy}{(1-y)\,y}$$

und wenn man den gefundenen Ausdruck für $\frac{d \lg \Gamma(kn)}{dn}$ hiervon abzieht:

$$\frac{d}{dn} \lg \frac{\Gamma(n)\ \Gamma(n+\frac{1}{k})\ \Gamma(n+\frac{2}{k}) \cdots \Gamma(n+\frac{k-1}{k})}{\Gamma(kn)} = P,$$

wo $P$, wie leicht zu sehen, ein von $n$ völlig unabhängiger Ausdruck ist.

Man hat also durch Integration, und indem man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht:

$$\Gamma(n)\ \Gamma(n+\frac{1}{k})\ \Gamma(n+\frac{2}{k}) \cdots \Gamma(n+\frac{k-1}{k}) = CP^n\, \Gamma(kn),$$

wo $C$ und $P$ von $n$ unabhängige Grössen sind, welche wir jetzt bestimmen.

Zunächst erhält man, wenn man $n+\frac{1}{x}$ für $n$ setzt, und die so entstehende Formel durch die letzte dividirt:

$$\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n)} = \frac{\Gamma(kn+1)}{\Gamma(kn)} P^{\frac{1}{k}}$$

und mit Berücksichtigung der Formel

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n),$$

$$1 = kP^{\frac{1}{k}},$$

d. h.

$$P = k^{-k}.$$

Setzt man ferner in unsere Formel $n = \frac{1}{k}$, so kommt mit Berücksichtigung des Werthes von $P$:

$$\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)\Gamma\left(\frac{3}{k}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{k-1}{k}\right)=\frac{C}{k}.$$

Dieses Product noch einmal in umgekehrter Ordnung geschrieben, und mit der letzten Formel multiplicirt, gibt mit Berücksichtigung von Formel 12:

$$\frac{\pi}{\sin\frac{1}{k}\pi}\,\frac{\pi}{\sin\frac{2}{k}\pi}\cdots\frac{\pi}{\sin\frac{k-1}{k}\pi}=\frac{C^2}{k^2}.$$

Eine bekannte trigonometrische Formel, die man erhält, wenn man die Entwicklung von $\sin kx$ nach Potenzen von $\sin x$, und zugleich die Zerlegung von $\sin kx$ in Factoren mit einander vergleicht, gibt:

$$\sin\frac{1}{k}\pi\,\sin\frac{2}{k}\pi\cdots\sin\frac{k-1}{k}\pi=\frac{k}{2^{k-1}}.$$

also:

$$\frac{C^2}{k^2}=\frac{2^{k-1}\pi^{k-1}}{k}.$$

also:

$$C=\sqrt{k}\,(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}$$

$$\Gamma(n)\,\Gamma\left(n+\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(n+\frac{2}{k}\right)\cdots\Gamma\left(n+\frac{k-1}{k}\right)=k^{\frac{1}{2}-kn}(2\pi)^{\frac{k-1}{2}}\,\Gamma(kn). \qquad 15)$$

50) Theorie der analytischen Facultäten.

Der Ausdruck $\Gamma(n)$ fällt mit $1\cdot2\cdot3\cdots n-1$ zusammen, wenn $n$ eine ganze positive Zahl ist. Er kann also nur Definition einer Facultät benutzt werden, selbst für den Fall, dass $n$ ein positiver Bruch ist.

Es fragt sich aber noch, welche Bedeutung man dem $\Gamma(n)$ geben müsse, wenn $n$ negativ wird, da in diesem Falle das Eulersche Integral keinen Sinn mehr gibt. Indess kann man letzteres, eben so wie $\left(\frac{b}{a}\right)$ auf eine Form bringen, welche eine Erweiterung für negative und selbst für complexe Zahlen zulässt. Es ist dies die Form eines unendlichen Products. Diesen Gegenstand, als wesentlich zum Vorhergehenden gehörig, wollen wir hier noch erörtern.

Uebrigens sind alle Schlüsse des vorigen Abschnittes noch vollständig gültig, wenn $n$ eine complexe Zahl ist, deren reeller Theil positiv ist.

Zunächst ist:

$$\left(\frac{b}{a}\right)=\int_0^1(1-x)^{a-1}x^{b-1}dx=\int_0^1(1-x)^{a-1}x^{1-a}x^{b+a-2}dx$$

und wenn man theilweise integrirt:

$$\left(\frac{b}{a}\right)=\int_0^1(1-x)^{a-1}x^{1-a}\,\frac{d(x^{b+a-1})}{b+a-1}=\frac{a-1}{b+a-1}\int_0^1(1-x)^{a-2}x^{b-1}dx,$$

d. h.

$$\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{a-1}{b+a-1}\left(\frac{b}{a-1}\right) \qquad 1)$$

und indem man

$$\left(\frac{b}{a-1}\right)=\frac{a-2}{b+a-2}\left(\frac{b}{a-2}\right)$$

setzt und so fortfährt:

$$\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{(a-1)\,(a-2)\cdots(a-n)}{(a+b-1)\,(a+b-2)\cdots(a+b-n)}\left(\frac{b}{a-n}\right); \qquad 2)$$

hieraus folgt, wenn man $a$ für $a-n$ schreibt:

$$\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{(a+b)\,(a+b+1)\cdots(a+b+n-1)}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}\left(\frac{b}{a+n}\right). \qquad 3)$$

Möge $n$ immer mehr zunehmen, und sei:

$$a+n-1=\varrho,$$

so ergibt sich:

$$\left(\frac{b}{1+\varrho}\right)=\int_0^1(1-x)^{\varrho}x^{b-1}dx,$$

oder wenn man $\frac{y}{\varrho}$ für $x$ setzt:

$$\left(\frac{b}{1+\varrho}\right) = \varrho^{-b} \int_0^{\varrho} \left(1-\frac{y}{\varrho}\right)^{\varrho} y^{b-1} dy.$$

Mit zunehmendem $\varrho$ erhält man bekanntlich:

$$\lim \left(1-\frac{y}{\varrho}\right)^{\varrho} = e^{-y}$$

und da

$$\lim \int_0^{\varrho} e^{-y} y^{b-1} dy = \Gamma(b)$$

ist:

$$\left(\frac{b}{1+\varrho}\right) = \varrho^{-b}\, \Gamma(b)$$

für unendlich grosses $\varrho$, oder auch

$$\left(\frac{b}{\varrho}\right) = \varrho^{-b}\, \Gamma(b), \qquad 4)$$

da, wenn man $\varrho-1$ für $\varrho$ setzt, sich der Ausdruck nur unendlich wenig ändert.

Es gibt also auch Formel 3, wenn man $n=\varrho$ setzt:

$$\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{(a+b)\ (a+b+1) \cdots (a+b+\varrho-1)}{a\,(a+1) \cdots (a+\varrho-1)}\, \varrho^{-b}\, \Gamma(b); \qquad 5)$$

es ist nämlich für $(a+\varrho-1)^{-b}$ bei unendlich grossem $\varrho$ auch $\varrho^{-b}$ zu setzen.

Vertauscht man hierin $b$ mit $a$, so erhält man $\left(\frac{a}{b}\right)$ und da $\left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{b}{a}\right)$ ist, so ergibt sich durch Vergleich beider Ausdrücke:

$$\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)} = \frac{a\,(a+1) \cdots (a+\varrho-1)}{b\,(b+1) \cdots (b+\varrho-1)}\, \varrho^{b-a}; \qquad 6)$$

wenn man $a+b$ für $a$ setzt, so kommt:

$$\frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \frac{(a+b)\ (a+b+1) \cdots (a+b+\varrho-1)}{b\,(b+1) \cdots\cdots (b+\varrho-1)}\, \varrho^{-a}.$$

Der Ausdruck rechts ist wegen 5)

$$\left(\frac{b}{a}\right) : \Gamma(a),$$

es ergibt sich also auf diese Weise die Formel 11 des vorigen Abschnittes.

Diesen Weg hat in der That Euler zur Auffindung dieser Formel eingeschlagen.

Man hat wegen 6) des vorigen Abschnittes:

$$\Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+n)}{a\,(a+1) \cdots (a+n-1)}$$

und ausserdem wegen 11) desselben Abschnittes:

$$\Gamma(a+n) = \frac{\Gamma(a)\ \Gamma(n)}{\left(\frac{n}{a}\right)}.$$

Setzt man $n=\varrho$ und berücksichtigt Formel 4), so kommt:

$$\Gamma(a) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \varrho}{a\,(a+1)\ (a+2) \cdots (a+\varrho-1)}\, \varrho^{a-1}, \qquad 7)$$

wo $\varrho$ als eine unendlich grosse, aber ganze Zahl betrachtet, also

$$\Gamma(\varrho) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \varrho-1$$

gesetzt ist.

Es ist sonach z. B.:

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \varrho}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\ (\frac{1}{2}+2) \cdots (\frac{1}{2}+\varrho-1)}\, \varrho^{-\frac{1}{2}} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2\varrho}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2\varrho-1) \sqrt{\varrho}}.$$

Es war aber

$$\Gamma(\tfrac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

und sonach:

$$\pi=\frac{2^2 4^2 6^2 \cdots 4\varrho^2}{1^2 3^2 5^2 \cdots (2\varrho-1)^2 \varrho}.$$

Es ist dies das sogenannte Wallis'sche Product, welches einen Werth für $\pi$ gibt.

Wegen 7) nimmt Formel 5) die Gestalt an:

$$\left(\frac{b}{a}\right)=\frac{(a+b)\ (a+b+1)\cdots(a+b+\varrho-1)\ 1\cdot 2\cdot 3\cdots(\varrho-1)}{a\,(a+1)\ (a+2)\cdots(a+\varrho-1)\ b\,(b+1)\ (b+2)\cdots(b+\varrho-1)}. \qquad 8)$$

Die Formel 7 ist diejenige, deren wir zu Anfang dieses Abschnitts erwähnten; sie gibt noch einen Sinn, wenn $a$ negativ, jedoch keine ganze Zahl, auch nicht Null (in welchen Fällen ein Factor des Nenners unendlich ist) oder complex ist, und kann daher als Definition der Facultät benutzt werden.

Wenn die Formel 7 auch in dieser Gestalt nicht zur wirklichen Berechnung von $\Gamma(a)$ geeignet ist, so lässt sich mittels derselben doch eine Reihe für $\lg\Gamma(a)$ leicht ableiten.

Es ist nämlich:

$$\lg\Gamma(a)=\lg 1-\lg a+\lg 2-\lg(a+1)+\cdots+\lg(\varrho)-\lg(a+\varrho-1)+(a-1)\lg\varrho.$$

Der unendlich grosse Ausdruck $(a-1)\lg\varrho$ fällt bei zweimaligem Differenziiren weg, und man hat:

$$\frac{d^2\lg\Gamma(a)}{da^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{(a+1)^2}+\frac{1}{(a+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(a+\varrho-1)^2}. \qquad 9)$$

Die Reihe rechts ist immer convergent, wenn $a$ keine ganze negative Zahl und nicht Null ist, mithin findet dies auch bei ihrem ersten und ihrem zweiten Integral statt. Man erhält, wenn man in den Grenzen 1 und $a$ integrirt:

$$\frac{d\lg\Gamma(a)}{da}=\left(1-\frac{1}{a}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{a+1}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{a+2}\right)+\cdots+C, \qquad 10)$$

wo $C$ gleich dem Werthe von $\frac{d\lg\Gamma a}{da}$ für $a=1$ ist.

Integrirt man nochmals in den Grenzen 1 und $a$, so kommt, da

$$\lg\Gamma(1)=0$$

ist:

$$\lg\Gamma(a)=(a-1-\lg a)+\left(\frac{a-1}{2}-\lg\frac{a+1}{2}\right)+\left(\frac{a-1}{3}-\lg\frac{a+2}{3}\right)+\cdots+C(a-1).$$

Um $C$ zu bestimmen, bemerke man, dass

$$\Gamma(2)=1,\ \lg\Gamma(2)=0$$

ist, also indem man $a=2$ setzt:

$$0=1-\lg 2+\tfrac{1}{2}-\lg\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{3}-\lg\tfrac{4}{3}+\cdots+C \qquad 11)$$

und indem man diesen Ausdruck, nachdem man ihn mit $(a-1)$ multiplicirt hat, von dem Vorigen abzieht:

$$\lg\Gamma(a)=[(a-1)\lg 2-\lg a]+\left[(a-1)\lg\tfrac{3}{2}-\lg\frac{a+1}{2}\right]+\left[(a-1)\lg\tfrac{4}{3}-\lg\frac{a+2}{3}\right]+\cdots$$

$$=\sum_{m=1}^{m=\infty}\left[(a-1)\lg\left(1+\frac{1}{m}\right)-\lg\left(1+\frac{a-1}{m}\right)\right]. \qquad 12)$$

Diese Reihe, welche immer, den besprochenen Fall ausgenommen, convergirt, kann also sowohl als Definition, als auch zur Berechnung des Ausdruckes $\Gamma(a)$ selbst für negative Werthe von $a$ benutzt werden.

Es lässt sich aber auch eine Entwicklung von $\lg\Gamma(1+a)$ nach ganzen positiven Potenzen von $a$ gewinnen, die jedoch nur so lange convergirt, als $a$ zwischen $+1$ und $-1$ liegt.

Wenn man nämlich die Formel 9 $(n-2)$mal differenziirt, so erhält man:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\,\frac{d^n\lg\Gamma(1+a)}{da^n}=\frac{(-1)^n}{n}\left[\frac{1}{(a+1)^n}+\frac{1}{(a+2)^n}+\cdots\right]. \qquad 13)$$

Also, wenn man setzt:

$$S_n = \frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \cdots \qquad 13)$$

und den Ausdruck $\lg \Gamma(1+u)$ nach dem Taylorschen Satze entwickelt:

$$\lg \Gamma(1+a) = -Ca + S_2 \frac{a^2}{2} - S_3 \frac{a^3}{3} + S_4 \frac{a^4}{4} - \ldots, \qquad 14)$$

$\lg \Gamma(1+a)$ wird für $a=-1$ discontinuirlich. Die Entwicklung convergirt also nach dem Cauchyschen Satze (siehe den Artikel: Quantität) nur so lange, als der Modul von $a$ kleiner als 1 ist.

Um eine bequemere Formel zur Berechnung von $\lg \Gamma(1+a)$ zu haben, addire man zu 11) den Ausdruck:

$$0 = -\lg(1+a) + a - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} - \ldots$$

Man erhält:

$$\lg \Gamma(1+a) = -\lg(1+a) + (1+C)a + \tfrac{1}{2}(S_2-1)a^2 - \tfrac{1}{3}(S_3-1)a^3 + \ldots \qquad 15)$$

Noch schnellere Convergenz erreicht man, wenn man in der vorigen Formel $-a$ für $a$ setzt, und die so gebildete Formel von 15 abzieht; links erscheint dann das Glied:

$$\lg \Gamma(1+a) - \lg \Gamma(1-a) = 2\lg \Gamma(1+a) - \lg[\Gamma(1+a)\,\Gamma(1-a)] = 2\lg \Gamma(1+a) - \lg a - \lg[\Gamma(a)\,\Gamma(1-a)]$$

und wenn man Formel 12 des vorigen Abschnittes berücksichtigt, wird dieser Ausdruck:

$$2\lg \Gamma(1+a) - \lg a - \lg \frac{\pi a}{\sin \pi a}$$

und wenn man auch den Ausdruck rechts bildet:

$$\lg \Gamma(1+a) = \tfrac{1}{2}\lg \frac{\pi a}{\sin(\pi a)} - \tfrac{1}{2}\lg \frac{1+a}{1-a} + (1+C)a - (S_3-1)\frac{a^3}{3} - (S_5-1)\frac{a^5}{5} - \ldots \qquad 16)$$

Diese Reihe convergirt sehr schnell. Ist $a$ reell und grösser als 1 oder complex und hat sein reeller Theil einen Werth, der grösser als 1 ist, so kann man Formel 16 in Verbindung mit:

$$\Gamma(a+1) = a\,\Gamma(a)$$

oder

$$\lg \Gamma(a+1) = \lg a + \lg \Gamma(a)$$

anwenden.

Diese Formel folgt auch für negatives $a$ aus der Formel 7, die man ja in diesem Falle als Definition benutzt. Es ist nämlich:

$$\Gamma(a+1) = \frac{1.2.3\ldots\varrho.a}{a(a+1)\ldots(a+\varrho-1)(a+\varrho)}\varrho \cdot \varrho^{a-1} = \frac{\varrho \cdot a}{a+\varrho}\Gamma(a).$$

Ein Ausdruck, der für wachsendes $r$ identisch wird mit $a\,\Gamma(a)$.

Ist also $a$ algebraisch kleiner als $-1$, so gibt die Formel:

$$\lg \Gamma(a-1) = \lg \Gamma(a) - \lg(a-1)$$

in Gemeinschaft mit 16) den verlangten Ausdruck.

Setzt man in 16) noch $a = 1-r$, so ergibt sich

$$\lg \frac{\pi a}{\sin \pi a} + \lg(1-a) = \lg\left(\frac{\pi(1-r)}{-r\pi \cos \pi}\right) + \lg r,$$

wenn $r$ nach Null hin abnimmt, ein Ausdruck, welcher offenbar gleich

$$\lg(1-r) = 0$$

wird. Es ergibt sich dann ein Werth für $C$ aus 16, nämlich:

$$C = -1 + \tfrac{1}{2}\lg 2 + \tfrac{1}{3}(S_3-1) + \tfrac{1}{5}(S^5-1) + \ldots$$

Einen andern Ausdruck gibt Formel 16, wenn man darin $x = \frac{1}{2}$ setzt:

$$C = -1 + \lg\tfrac{3}{2} + \frac{1}{3 \cdot 4}(S_3-1) + \frac{1}{5 \cdot 16}(S_5-1) + \cdots$$

Man erhält hieraus:

$$-C = 0{,}5772156649015328 \ldots,$$

$-C$ heisst auch die Eulersche Constante.

Es ist übrigens klar, dass für ganze Werthe von $a$ die Formel 10) die Gestalt einer endlichen Reihe:

$$\frac{d \lg \Gamma(a)}{da} = -C + 1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{a-1}$$

annimmt.

51) **Berechnung des Ausdrucks für $\Gamma(n)$, wenn $n$ sehr gross ist.**

Der Ausdruck $\Gamma(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)$ für ganzes $n$ kommt in verschiedenen Anwendungen der Analysis häufig vor, z. B. in der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und oft ist hier $n$ sehr gross zu nehmen. Aber dann gewähren die Elemente keine Mittel, um $\Gamma(n)$ zu bestimmen. Z. B. für $n-1 = 100000$ ist eine logarithmische Berechnung, d. h. die Addition der ersten 100000 Logarithmen unausführbar, übrigens da sich die Fehler der einzelnen Logarithmen addiren, wäre es auf diesem Wege unmöglich auch nur einige richtige Decimalstellen zu erhalten, wenn man nicht Logarithmentafeln von sehr viel Bruchstellen anwenden wollte.

Es ergiht sich aber aus diesen Betrachtungen ein Werth, dem sich $\Gamma(n)$ mit wachsendem $n$ immer mehr derart nähert, dass der Quotient beider Grössen schliesslich gleich Eins gesetzt werden kann. Derselbe soll hier noch bestimmt werden. Wenn wir $x = n + q$ setzen, so ist:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx = \int_{-n}^{+\infty} e^{-n} e^{-q} (n+q)^n dq.$$

Das Argument $e^{-(n+q)} (n+q)^n$ hat ein Maximum und fällt von demselben nach beiden Seiten ins Unendliche. Denn der Ausdruck:

$$\frac{d e^{-(n+q)} (n+q)^n}{dq} = -e^{-(n+q)} q (n+q)^{n-1}$$

ist so lange negativ, als $q$ positiv ist (vorausgesetzt, dass $n$ wächst) und positiv, wenn $q$ negativ, also wird die Function für negatives $q$ immer wachsen, für positives $q$ immer abnehmen, und es findet für $q = 0$, d. h. für $x = n$ ein Maximum statt, von welchem Werthe aus $e^{-x} x^n$ nach beiden Seiten ins Unendliche fällt. Das Argument aber wird an beiden Grenzen Null.

Bestimmen wir die Grösse $t$ durch die Gleichung:

$$e^{-q} (n+q)^n = e^{-t^2} n^n,$$

so ist:

$$n \lg n - t^2 = -q + n \lg (n+q)$$

oder wenn man für $\lg(n+q)$ seinen Werth:

$$\lg n + \frac{1}{n} q - \frac{q^2}{1 \cdot 2} \frac{1}{(n + \varepsilon q)^2}$$

sitzt, wo $\lg(n+q)$ nach der Taylorschen Reihe entwickelt, aber mit dem dritten Gliede abgebrochen ist, $\varepsilon$ also einen echten Bruch bedeutet (siehe den Artikel Reihen), so ergiht sich:

$$-t^2 = \frac{-n q^2}{2(n + \varepsilon q)^2},$$

d. h.

$$t = \frac{q}{n + \varepsilon q} \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

Während der Integration, wo $q$ von $-n$ bis $+\infty$ geht, wird $t$ von $-\frac{1}{(1-\varepsilon)} \sqrt{\frac{n}{2}}$ bis $+\infty$ gehen. Es ist nun:

$$q = \frac{nt}{\sqrt{\frac{n}{2}} - \varepsilon t},$$

$$n + q = \frac{\sqrt{\frac{n^3}{2}} + nt(1-\varepsilon)}{\sqrt{\frac{n}{2}} - \varepsilon t},$$

$$\frac{dq}{dt} = 2\left(\sqrt{\frac{n}{2}} + (1-\varepsilon) t\right),$$

und das Integral:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} x^n dx$$

verwandelt sich in:

$$e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2} \int_{-\sigma}^{+\infty} dt e^{-t^2} + \sqrt{\frac{2}{n}} \int_{-\sigma}^{+\infty} dt e^{-t^2} (1-\varepsilon)^t,$$

wo $-\sigma$ die untere Grenze $-\frac{1}{1-\varepsilon}\sqrt{\frac{n}{2}}$ anzeigt, die also mit wachsendem $n$ gleich $-\infty$ wird.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, e^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} + \int_{-\infty}^{0} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2};$$

da aber das zweite Integral unserer Formel

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-t^2}(1-\varepsilon)t$$

noch den Bruch $1-\varepsilon$ als Factor enthält, so erhält man: $\frac{\lambda}{2} - \frac{\mu}{2}$ als Werth desselben, wo $\lambda$ und $\mu$ kleiner als Eins sind. Der Werth dieses Integrals ist also kleiner als $\frac{1}{2}$, bezeichnen wir denselben mit $\alpha$. Wegen:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt\, e^{-t^2} = 2\int_0^{\infty} dt\, e^{-t^2} = \sqrt{\pi}$$

hat man dann:

$$\Gamma(1+n) = e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi}\left(1 + \frac{\alpha\sqrt{\frac{2}{n}}}{\sqrt{2\pi}}\right),$$

wofür man mit wachsendem $n$ auch setzen kann:

$$\Gamma(1+n) = e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} \sqrt{2\pi} = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n. \qquad 1)$$

Hiernach nimmt auch die Formel 7) des vorigen Abschnittes die Gestalt an:

$$\Gamma(a) = \frac{\varrho^{\varrho+a-\frac{1}{2}} e^{-\varrho}\sqrt{\pi}}{a(a+1)\cdots(a+n-1)}. \qquad 2)$$

Die Formel 1) wird nach ihrem Erfinder die Stirlingsche genannt.

52) **Mehrfache bestimmte Integrale.**

Die Theorie der mehrfachen bestimmten Integrale ist schon in den Abschnitten 34 bis 36 den Grundzügen nach gegeben.

Bei denselben sind sämmtliche Grenzen entweder Constanten oder die Grenzen des nach der ersten Variable $x$ genommenen Integrals Functionen aller übrigen Variablen $y, z, u \ldots$, die des nach $y$ genommenen Integrals Functionen von $z, u \ldots$ u. s. w., so dass nur bei der letzten Integration constante Grenzen vorkommen. Natürlich ist der erst angegebene Fall der bei weitem einfachste. Im letztern führt Transformation der Variablen nach den Abschnitt 36 gegebenen Regeln oft zu einfacheren, zuweilen zu constanten Grenzen. Letzteres erreicht man auch durch die von Dirichlet herrührende Methode des Discontinuitäts-Factors, von welcher bald die Rede sein wird. Auch die Umkehrung der Grenzen ist oft anzuwenden, wobei die Abschnitt 34 gegebenen Regeln zu befolgen sind, namentlich aber untersucht werden muss, ob das Argument während der Integration discontinuirlich wird, und wenn dies eintritt, ob diese Methode noch gestattet ist — ein Punct, worüber das Nöthige ebenfalls in Abschnitt 34 enthalten ist.

Wir wollen hier noch die gebräuchlichsten Transformationen zusammenstellen.

I) Eine der häufigsten Transformationen ist die in der Geometrie so oft vorkommende Verwandlung der rechtwinkeligen Coordinaten in Polarcoordinaten. Handelt es sich um Curven in der Ebene, so sind die entsprechenden Formeln:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta,$$

wo $x, y$ die rechtwinkligen, $r, \vartheta$ die Polarcoordinaten sind.

Im Raume dagegen hat man:

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta\cos\varphi,$$
$$z = r\sin\vartheta\sin\varphi.$$

Mit Hülfe dieser Formeln fanden wir bereits in Abschnitt 36:

$$\int\!\!\int U\,dx\,dy = \int\!\!\int r\,U\,dr\,d\vartheta,$$

wo die ersten Formeln gelten,

$$\int\!\!\int\!\!\int U\,dx\,dy\,dz = \int\!\!\int\!\!\int r^2\,U \sin\vartheta\,dr\,d\vartheta\,d\varphi,$$

wo die zweiten Formeln gelten.

Die Formeln drücken für den Fall, wo $u=1$ ist, bekanntlich bezüglich den Flächeninhalt der von einer Curve begrenzten Stücke oder Ebene, und der von einer Fläche begrenzten Körper aus. Es war ferner:

$$\int\!\!\int \sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz = \int\!\!\int r\sqrt{r^2 \sin\vartheta^2 + \frac{\partial r^2}{\partial\vartheta^2}\sin\vartheta^2 + \frac{\partial r^2}{\partial\varphi^2}}\,d\vartheta\,d\varphi,$$

mit Anwendung der zweiten Formeln. Dieser Ausdruck gibt den Inhalt eines Stücks einer krummen Oberfläche an.

II) Von grosser Wichtigkeit sind auch die sogenannten elliptischen Coordinaten, welche von Lamé herrühren. Die entsprechenden Transformationen sind gegeben durch die folgenden Formeln, wo $\lambda$, $\mu$, $\nu$ die neuen Variablen, $x$, $y$, $z$ die alten sind:

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,$$

$$\frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1.$$

Die drei Gleichungen haben eine geometrische Bedeutung, welcher die Ausdrücke $\lambda, \mu, \nu$ den Namen elliptische Coordinaten verdanken. Nehmen wir nämlich an, dass $\lambda$ grösser als $c$ und als $b$, $\mu$ grösser als $b$ und kleiner als $c$, $\nu$ kleiner als $b$ und $c$ sei, so ist die erste Gleichung die eines Ellipsoides, die zweite die eines einschaligen, die dritte die eines zweischaligen Hyperboloides. Alle drei haben dieselben Hauptschnitte Lässt man $\lambda, \mu, \nu$ sich ändern, so bleiben die Hauptschnitte dieser Flächen unverändert, sie heissen homofocale Flächen, und haben die Eigenschaft, dass wenn man $\lambda$, $\mu$, $\nu$ irgend wie bestimmt, die dadurch gegebenen drei Flächen sich immer unter einander rechtwinklig schneiden. (Siehe den Artikel: Flächen zweiter Ordnung). Nach dem Dupinschen Satze schneiden sich diese Flächen daher immer in Krümmungslinien. Diese geometrischen Betrachtungen sind jedoch für uns hier weniger wichtig, als die Eigenschaft dieser Ausdrücke, dass man leicht $x$, $y$, $z$ als Functionen von $\lambda, \mu, \nu$ bestimmen kann.

Es ist dies eine Betrachtung, welche auch auf mehr als drei Gleichungen von der hier gegebenen Gestalt Anwendung findet, und die wir daher in ihrer Allgemeinheit nach Binet geben.

Seien $n$ Gleichungen von der Gestalt gegeben:

$$\frac{x}{x_1-\alpha}+\frac{y}{x_1-\beta}+\frac{z}{x_1-\gamma}+\cdots=1$$

$$\frac{x}{x_2-\alpha}+\frac{y}{x_2-\beta}+\frac{z}{x_2-\gamma}+\cdots=1$$

$$\frac{x}{x_3-\alpha}+\frac{y}{x_3-\beta}+\frac{z}{x_3-\gamma}+\cdots=1$$

$$\begin{matrix}\cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\end{matrix}$$

und setze man:

$$F(u)=(u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma)\ldots,$$

$$f(u)=(u-x_1)(u-x_2)(u-x_3)\ldots,$$

so ist $F(u)-f(u)$ vom Grade $n-1$, also im Ausdrucke $\frac{F(u)-f(u)}{F(u)}$ der Zähler um einen Grad niedriger als der Nenner. Die Zerlegung der Partialbrüche gibt dann:

$$\frac{F(u)-f(u)}{F(u)} = \frac{F(\alpha)-f(\alpha)}{F'(\alpha)\;(u-\alpha)}+\frac{F(\beta)-f(\beta)}{F'(\beta)\;(u-\beta)}+\frac{F(\gamma)-f(\gamma)}{F'(\gamma)\;(u-\gamma)}+\cdots$$

Setzt man hierin nach und nach:

$$u=x_1,\; u=x_2,\; u=x_3\;\ldots$$

und berücksichtigt, dass:

$$F(\alpha)=F(\beta)=F(\gamma)=\cdots=0$$

ist, so hat man:

$$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=\cdots=0$$

$$-\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\frac{1}{x_1-\alpha}-\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}\frac{1}{x_1-\beta}-\frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}\frac{1}{x_1-\gamma}-\ldots=1$$

$$-\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)}\frac{1}{x_2-\alpha}-\frac{f(\beta)}{F'(\beta)}\frac{1}{x_2-\beta}-\frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)}\frac{1}{x_2-\gamma}-\ldots=1$$

$$\vdots$$

Diese Gleichungen aber sind den gegebenen identisch, wenn man setzt:

$$x=-\frac{f(\alpha)}{F'(\alpha)},\ y=-\frac{f(\beta)}{F'(\beta)},\ z=-\frac{f(\gamma)}{F'(\gamma)},\ldots$$

und dies sind die Ausdrücke für diese Grössen.

In unserm Falle ist zu vertauschen

$x, y, z$ mit $x^2, y^2, z^2$,

$x_1, x_2, x_3$ mit $\lambda^2, \mu^2, \nu^2$,

$\alpha, \beta, \gamma$ mit $0, b^2, c^2$,

$$f(u)=(u-\lambda^2)(u-\mu^2)(u-\nu^2),$$

$$F(u)=u(u-b^2)(u-c^2),$$

also:

$$F'(u)=(u-b^2)(u-c^2)+u(u-c^2)+u(u-b^2),$$

$$F'(0)=b^2c^2$$

$$F'(b^2)=b^2(b^2-c^2)$$

$$F'(c^2)=c^2(c^2-b^2),$$

also:

$$x^2=\frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{b^2c^2}$$

$$y^2=\frac{(\lambda^2-b^2)(\mu^2-b^2)(b^2-\nu^2)}{b^2(c^2-b^2)}$$

$$z^2=\frac{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{c^2(c^2-b^2)}.$$

III) Bei mehr als dreifachen Integralen kann man zuweilen mit Vortheil ganz ähnliche Transformationen anwenden, wobei natürlich die geometrische Bedeutung der neuen Variablen aufzugeben ist. Man setzt:

$$\frac{x^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-b^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}+\ldots=1$$

$$\frac{x^2}{\mu^2-a^2}+\frac{y^2}{\mu^2-b^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}+\ldots=1$$

$$\frac{x^2}{\nu^2-a^2}+\frac{y^2}{\nu^2-b^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}+\ldots=1$$

$$\vdots$$

Die Binetschen Formeln geben dann:

$$f(u)=(u-\lambda^2)(u-\mu^2)(u-\nu^2)\ldots$$

$$F(u)=(u-a^2)(u-b^2)(u-c^2)\ldots$$

$$F'(a^2)=(a^2-b^2)(a^2-c^2)\ldots$$

$$F'(b^2)=(b^2-a^2)(b^2-c^2)\ldots$$

$$F'(c^2)=(c^2-a^2)(c^2-b^2)\ldots,$$

also:

$$x^2=-\frac{(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(\nu^2-a^2)\ldots}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)\ldots}$$

$$y^2=-\frac{(\lambda^2-b^2)(\mu^2-b^2)(\nu^2-b^2)\ldots}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)\ldots}$$

$$z^2=-\frac{(\lambda^2-c^2)(\mu^2-c^2)(\nu^2-c^2)\ldots}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)\ldots}$$

IV) Ein häufig vorkommender Fall ist der, wo $b$ und $c$ Null werden.

Da aber die positiven Grössen $\mu$ zwischen $b$ und $c$ liegen, $\nu$ kleiner als $b$ und $c$ sein soll, so muss man sich $b$ und $c$ zunächst unendlich klein denken. Sei demnach

$$b=\varepsilon\beta,\quad c=\varepsilon\gamma,$$

wo $\beta$ und $\gamma$ endliche positive Grössen, $\varepsilon$ unendlich klein ist; sei ferner

$\mu=\varepsilon m,\ \nu=\varepsilon n$ und $b<m<c,\ n<b<c$, $\lambda=r$ aber eine endliche Grösse, so ist:

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{m^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-m^2}=\varepsilon^2$$

$$\frac{x^2}{n^2}-\frac{y^2}{b^2-n^2}-\frac{z^2}{c^2-n^2}=\varepsilon^2,$$

also wenn $\varepsilon$ verschwindet:

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{m^2-b^2}-\frac{z^2}{c^2-m^2}=0$$

$$\frac{x^2}{n^2}-\frac{y^2}{b^2-n^2}-\frac{z^2}{c^2-n^2}=0.$$

Die erste Gleichung stellt eine Kugel vor, die zweite und dritte einen Kegel zweiten Grades. Die Ausdrücke für $x^2, y^2, z^2$ aber werden:

$$x^2=\frac{r^2m^2n^2}{b^2c^2}$$

$$y^2=\frac{r^2(m^2-b^2)(b^2-n^2)}{b^2(c^2-b^2)}$$

$$z^2=\frac{r^2(c^2-m^2)(c^2-n^2)}{c^2(c^2-b^2)}.$$

Auch diese Coordinaten führen den Namen elliptische im engern Sinne. Es sind diejenigen der ganzen Gattung, welche am häufigsten angewandt werden.

V) Es lassen sich die eben gebrauchten elliptischen Coordinaten auch unter eine Form bringen, die als besondern Fall die Polarcoordinaten enthält. Zu dem Ende setzen wir in den letzten drei Formeln:

$$n = b \sin\varphi \text{ und } b = ac,$$

wo also $\varphi$ eine neue Variable, $a$ eine neue Constante ist, die kleiner als 1 sein wird.

Unsere drei Gleichungen werden dann:

$$x = \frac{rm \sin\varphi}{c},$$

$$y^2 = \frac{r^2 (m^2 - a^2c^2)\cos\varphi^2}{c^2(1-a^2)},$$

$$z^2 = \frac{r^2 (c^2 - m^2)(1 - a^2 \sin\varphi^2)}{c^2(1-a^2)}.$$

Setzen wir noch:

$$\frac{c^2 - m^2}{c^2(1-a^2)} = \cos\vartheta^2,$$

so wird, da $c^2a^2 = b^2$ kleiner als $m^2$ und $m^2$ kleiner als $c^2$ ist, der Nenner dieses Bruchs grösser als der Zähler sein, und $\vartheta$ sich immer bestimmen lassen.

Auch hat man dann:

$$\sin\vartheta^2 = \frac{m^2 - c^2a^2}{c^2(1-a^2)},$$

$$m^2 = c^2(1-a^2)\sin\vartheta^2 + c^2a^2$$

oder:

$$m^2 = c^2[1-(1-a^2)\cos\vartheta^2].$$

Es ergibt sich dann:

$$x = r \sin\varphi \sqrt{1-(1-a^2)\cos\vartheta^2}$$

$$y = r\cos\varphi \sin\vartheta$$

$$z = r\sqrt{1-a^2\sin\varphi^2}\cos\vartheta.$$

Es ist ersichtlich, dass der besondere Fall, wo $a=0$ ist, die Polarcoordinaten gibt.

53) Transformation mehrfacher Integrale, wenn alle Grenzen constant sind.

Es sei gegeben das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha x + \alpha' y, \beta x + \beta' y)\, dx\, dy = U.$$

Es ist dasselbe durch eine Transformation zu vereinfachen.

Wir setzen:

$$\alpha x + \alpha' y = u, \quad \beta x + \beta' y = v.$$

Es wird dann (Abschnitt 36)

$$\triangle = \alpha\beta' - \beta\alpha'$$

also constant, während $x$ und $y$ von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen, werden in gleicher Weise $u$ und $v$ auch zunehmen. Also:

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v)\, du\, dv.$$

Setzt man dagegen

$$x = r\cos\vartheta, \quad y = r\sin\vartheta,$$

so ist

$$\triangle = r.$$

Während $x$ von $-\infty$ bis $+\infty$ geht, und dasselbe mit $y$ geschieht, wird das stets positive $r$ alle Werthe von 0 bis $+\infty$ annehmen, $\vartheta$ aber alle Werthe von 0 bis $2\pi$ erhalten, also:

$$U = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F[r(\alpha\cos\vartheta + \alpha'\sin\vartheta),\ r(\beta\cos\vartheta + \beta'\sin\vartheta)]\, r dr d\vartheta$$

und setzt man auch $u = r\cos\vartheta$, $v = r\sin\vartheta$:

$$\triangle U = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} F(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) r dr d\vartheta,$$

also:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} F(r\cos\vartheta,\ r\sin\vartheta)\, r dr\, d\vartheta$$

$$= \triangle \int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} F[r(\alpha\cos\vartheta + \alpha'\sin\vartheta),\ r(\beta\cos\vartheta + \beta'\sin\vartheta)]\, r dr\, d\vartheta.$$

Setzen wir z. B.

$$F(x, y) = e^{-r} f\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}\right),$$

wo

$$r^2 = x^2 + y^2$$

ist. Man setzt dann auch:

$$w^2 = (\alpha \cos\vartheta + \alpha' \sin\vartheta)^2 + (\beta \cos\vartheta + \beta' \sin\vartheta)^2$$

und erhält:

$$U = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f\left(\frac{\alpha\cos\vartheta + \alpha'\sin\vartheta}{w}, \frac{\beta\cos\vartheta + \beta'\sin\vartheta}{w}\right) r e^{-rw} dr\, d\vartheta$$

$$= \frac{1}{\triangle}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} f(\cos\vartheta, \sin\vartheta) e^{-r} r dr\, d\vartheta,$$

oder da

$$\int_0^{\infty} re^{-r} dr = 1, \text{ und } \int_0^{\infty} re^{-rw} dr = \frac{1}{w^2},$$

$$U = \int_0^{2\pi} f\left(\frac{\alpha\cos\vartheta + \alpha'\sin\vartheta}{w}, \frac{\beta\cos\vartheta + \beta'\sin\vartheta}{w}\right)\frac{d\vartheta}{w^2} = \frac{1}{\triangle}\int_0^{2\pi} f(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, d\vartheta.$$

Diese Formel wird oft unter der Voraussetzung angewandt, dass

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \alpha'^2 + \beta'^2 = 1, \quad \alpha\alpha' + \beta\beta' = 0$$

ist. Ausdrücke, welche gelten, wenn $x$, $y$ und ebenso wie $u$, $v$ Systeme rechtwinkliger Coordinaten sind.

Es ist dann:

$$\triangle = \alpha\beta' - \beta\alpha' = 1$$
$$w^2 = \sin\vartheta^2 + \cos\vartheta^2 = 1,$$

also:

$$\int_0^{2\pi} f[\alpha\cos\vartheta + \alpha'\sin\vartheta, \beta\cos\vartheta + \beta'\sin\vartheta]\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} f(\cos\vartheta, \sin\vartheta)\, d\vartheta.$$

Diese Betrachtungen lassen sich auch ausdehnen auf das dreifache Integral:

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \beta x + \beta' y + \beta'' z, \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z)\, dx\, dy\, dz.$$

Wir setzen nämlich zunächst:

$$u = \alpha x + \alpha' y + \alpha'' z, \quad v = \beta x + \beta' y + \beta'' z, \quad w = \gamma x + \gamma' y + \gamma'' z,$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} \alpha, & \alpha', & \alpha'' \\ \beta, & \beta', & \beta'' \\ \gamma, & \gamma', & \gamma'' \end{vmatrix}$$

und ganz wie oben hat man:

$$V = \frac{1}{\triangle}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(u, v, w)\, du\, dv\, dw.$$

Wir setzen, indem wir Polarcoordinaten einführen:

$$x = \lambda r, \quad y = \mu r, \quad z = \nu r,$$

wo:

$$\lambda = \cos\vartheta, \quad \mu = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \nu = \sin\vartheta\sin\varphi$$

ist. Es wird dann, während $x$, $y$, $z$ von $-\infty$ bis $+\infty$ gehen, $r$ alle Werthe von $0$ bis $+\infty$ annehmen.

$\lambda = \frac{x}{r}$ wird von $-1$ bis $+1$ gehen, was erreicht wird, wenn man Winkel $\vartheta$ von Null bis $\pi$ nimmt, die Ausdrücke $\mu$ und $r$ gehn ebenfalls beide von $-1$ bis $+1$; da aber $\sin\varphi = \frac{r}{\sin\vartheta}$, und $\sin\vartheta$ stets positiv ist, so muss $\sin\varphi$ auch negativ werden können, und folglich von $0$ bis $2\pi$ gehen. Man hat demnach:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} F[r(\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha''\nu),\ r(\beta\lambda+\beta'\mu+\beta''\nu''),$$

$$r(\gamma\lambda+\gamma'\mu+\gamma''\nu)r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi=\frac{1}{\triangle}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} F(\lambda r,\mu r,\nu r)r^2\sin\vartheta\, dr\, d\vartheta\, d\varphi.$$

Setzt man jetzt:

$$F(x,y,z)=\tfrac{1}{2}e^{-r}f\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)$$

und berücksichtigt die Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} r^2 e^{-r}dr=1,$$

so ergibt sich:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\left[\frac{\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha''\nu}{w},\ \frac{\beta\lambda+\beta'\mu+\beta''\nu}{w},\ \frac{\gamma\lambda+\gamma'\mu+\gamma''\nu}{w}\right]\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{w^3}$$

$$=\frac{1}{\triangle}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\lambda,\mu,\nu)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi,$$

wo der Abkürzung wegen gesetzt wurde:

$$w=(\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha''\nu)^2+(\beta\lambda+\beta'\mu+\beta''\nu)^2+(\gamma\lambda+\gamma'\mu+\gamma''\nu)^2.$$

Führen wir noch diejenigen Relationen zwischen den Constanten ein, deren geometrische Bedeutung ist, dass $x$, $y$, $z$ und $u$, $v$, $w$ Systeme rechtwinkliger Coordinaten vorstellen:

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\quad \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1,$$
$$\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1,\quad \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0,$$
$$\alpha''\alpha+\beta''\beta+\gamma''\gamma=0,\quad \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,$$

aus welchen folgt:

$$\triangle=1,\quad w=1,$$

so hat man:

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f[\alpha\lambda+\alpha'\mu+\alpha''\nu,\ \beta\lambda+\beta'\mu+\beta''\nu,\ \gamma\lambda+\gamma'\mu+\gamma''\nu]\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(\lambda,\mu,\nu)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

54) Es sollen hier noch die Ausdrücke zur Transformation der Integrale

$$V=\iiint U\,dx\,dy\,dz,\quad W=\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz$$

in elliptische Coordineten gebildet werden. Zu dem Ende nehmen wir die am Schlusse von Abschnitt 52) gebildeten einfachern Formeln, in welchen wir noch setzen:

$$\sqrt{(m^2-b^2)}=h,\quad \sqrt{(b^2-n^2)}=k,$$
$$\sqrt{(c^2-m^2)}=l,\quad \sqrt{(c^2-n^2)}=s;$$

die entsprechenden Formeln nehmen dann auch die Gestalt an:

$$x=\frac{rmn}{bc},\quad y=\frac{rhk}{b\sqrt{(c^2-b^2)}},\quad z=\frac{rls}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}$$

und man hat:

$$\frac{\partial x}{\partial m}=\frac{rn+mn\frac{\partial r}{\partial m}}{bc},$$

$$\frac{\partial x}{\partial n}=\frac{mr+mn\frac{\partial r}{\partial n}}{bc},$$

$$\frac{\partial y}{\partial m}=\frac{1}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}\left(\frac{k}{h}rm+hk\frac{\partial r}{\partial m}\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial n}=\frac{1}{b\sqrt{(c^2-b^2)}}\left(hk\frac{\partial r}{\partial n}-\frac{h}{k}rn\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial m} = \frac{1}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}\left(ls\frac{\partial r}{\partial m} - \frac{s}{l}rm\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial n} = \frac{1}{c\sqrt{(c^2-b^2)}}\left(ls\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{l}{s}rn\right).$$

Ausserdem ist:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial y}$$

$$\frac{\partial y}{\partial y} = 1 = \frac{\partial y}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 = \frac{\partial z}{\partial m}\frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial n}\frac{\partial n}{\partial y},$$

woraus sich durch Elimination von $\frac{\partial m}{\partial y}$ und $\frac{\partial n}{\partial y}$ ergibt:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial z}{\partial m}}{\frac{\partial y}{\partial m}\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial z}{\partial m}}$$

und ebenso erhält man:

$$\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial z}{\partial m}}{\frac{\partial y}{\partial m}\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial z}{\partial m}},$$

so dass man hat:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2} = \frac{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}{X},$$

wo

$$X = \frac{\partial y}{\partial m}\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial z}{\partial m}$$

$$Y = \frac{\partial z}{\partial m}\frac{\partial x}{\partial n} - \frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial z}{\partial n}$$

$$Z = \frac{\partial x}{\partial m}\frac{\partial y}{\partial n} - \frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial y}{\partial m}$$

zu setzen ist.

Ausserdem ergibt sich

$$\triangle = X,$$

$$W = \int\int\sqrt{(X^2+Y^2+Z^2)}\,dm\,dn,$$

also wenn man die obigen Werthe einsetzt:

$$W = \int\int r\,dm\,dn\sqrt{\frac{(m^2-n^2)\left[k^2l^2\left(\frac{\partial r}{\partial m}\right)^2 + h^2s^2\left(\frac{\partial r}{\partial n}\right)^2 + (m^2-n^2)r^2\right]}{hkls}};$$

ebenso erhält man:

$$V = \int U \triangle\, dr\,dm\,dn.$$

Mit Hülfe der oben gefundenen Werthe von:

$$\frac{\partial x}{\partial m},\ \frac{\partial x}{\partial n},\ \frac{\partial y}{\partial m},\ \frac{\partial z}{\partial m},\ \frac{\partial y}{\partial n},\ \frac{\partial z}{\partial n}$$

und der Ausdrücke:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{mn}{bc},\ \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{hk}{b\sqrt{(b^2-c^2)}},\ \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{ls}{c\sqrt{(b^2-c^2)}}$$

ergibt sich dann:

$$V = \int\int\int \frac{U(m^2-n^2)\,r^2\,dr\,dm\,dn}{hkls}.$$

Ist $U=1$, ein Fall, der bekanntlich den Inhalt der Körper gibt, welche von krummen Oberflächen eingeschlossen werden, so kann man die Integration nach $r$ ausführen und erhält:

$$V = \tfrac{1}{3}\int\int \frac{(m^2-n^2)\,r^3\,dm\,dn}{hkls}.$$

Mit Benutzung der allgemeinern elliptischen Coordinaten $\lambda$, $\mu$, $\nu$ (Abschnitt 52) erhält man aber ähnlich wie oben:

$$V = \int\int\int \frac{U(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)(\mu^2-\nu^2)\,d\lambda\,d\mu\,d\nu}{ghiklm},$$

wo

$$g=\sqrt{(\lambda^2-b^2)},\quad h=\sqrt{(\lambda^2-c^2)},\quad i=\sqrt{(\mu^2-b^2)},$$
$$k=\sqrt{(c^2-\mu^2)},\quad l=\sqrt{(b^2-\nu^2)},\quad m=\sqrt{(c^2-\nu^2)}$$

zu setzen ist.

Wie oben erhält man:

$$W=\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz=\iint\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}\,d\varphi\,d\vartheta,$$

$$X=\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\frac{\partial z}{\partial\varphi}-\frac{\partial z}{\partial\vartheta}\frac{\partial y}{\partial\varphi},\quad Y=\frac{\partial z}{\partial\vartheta}\frac{\partial x}{\partial\varphi}-\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\frac{\partial z}{\partial\varphi},\quad Z=\frac{\partial x}{\partial\vartheta}\frac{\partial y}{\partial\varphi}-\frac{\partial y}{\partial\vartheta}\frac{\partial z}{\partial\varphi}$$

und die Ausdrücke $\frac{\partial x}{\partial\vartheta}$, $\frac{\partial y}{\partial\vartheta}$, ... lassen sich ganz wie vorhin berechnen. Betrachten wir jedoch nur den Fall, wo $r$ constant ist, also $\frac{\partial r}{\partial\vartheta}=\frac{\partial r}{\partial\varphi}=0$ wird, ein Fall, der bekanntlich der Oberfläche einer Kugel entspricht. Es ergibt sich dann:

$$W=r^2\iint\frac{(1-a^2)\cos\vartheta^2+a^2\sin\varphi^2}{\sqrt{1-(1-a^2)\sin\vartheta^2}\,\sqrt{1-a^2\cos\varphi^2}}\,d\varphi\,d\vartheta.$$

Aus dem letzten Ausdrucke lässt sich eine Beziehung herleiten, welche von Legendre herrührt.

Sei
$$\varphi=\lambda-\frac{\pi}{2}$$

und führen wir beide Integrationen von $W$ in den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ aus:

$$W=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-(1-a^2)\sin\vartheta^2-a^2\sin\lambda^2}{\sqrt{1-(1-a^2)\sin\vartheta^2}\,\sqrt{1-a^2\sin\lambda^2}}\,d\lambda\,d\vartheta,$$

wo $r=1$ gesetzt wurde.

Es war nun ursprünglich

$$W=\iint\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\,dy\,dz,$$

wie man auch $a$ bestimmt. Setzt man

$$y=0 \text{ und } z=0, \text{ so wird } \vartheta=0,\ \lambda=\frac{\pi}{2}$$

für

$$y=0,\qquad z=1,\qquad \vartheta=\frac{\pi}{2},\ \lambda=0$$

für

$$y=1,\qquad z=0,\qquad \vartheta=0,\ \lambda=\frac{\pi}{2}.$$

Da aber

$$r^2=x^2+y^2+z^2=1$$

ist, so sind 1 und 0 bezüglich der grösste und kleinste Werth, den $y$ und $z$ annehmen können. Die Grenzen 0 und 1 entsprechen also den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ für $\vartheta$ und $\lambda$, was auch die beliebige Constante $a$ sei. Aus diesen Betrachtungen folgt, dass unser Integral von $a$ ganz unabhängig ist. Setzt man somit $a=1$, so kommt:

$$W=\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\lambda\,d\lambda\,d\vartheta=\frac{\pi}{2}.$$

(Es ergibt sich dies allerdings schon aus der geometrischen Betrachtung, dass $w$ den achten Theil einer Kugelfläche vorstellt.)

Bezeichnen wir nach Legendre den Ausdruck:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-b^2 \sin\vartheta^2}} \text{ mit } F(b),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta \sqrt{1-b^2 \sin\vartheta^2} \text{ mit } E(b),$$

so ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\lambda\, d\vartheta}{\sqrt{1-(1-a^2)\sin\vartheta^2}\sqrt{1-a^2\sin\lambda^2}} = F(a)\,F(c),$$

wo $c=\sqrt{1-a^2}$ gesetzt wird.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\lambda^2\, d\lambda}{\sqrt{1-a^2\sin\lambda^2}} = \frac{1}{a^2}\,[F(a)-E(a)],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1-a^2)\sin\vartheta^2\, d\vartheta\, d\lambda}{\sqrt{1-(1-a^2)\sin\vartheta^2}\sqrt{1-a^2\sin\lambda^2}} = F(a)\,[F(c)-E(a)],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2\sin\lambda^2\, d\lambda\, d\vartheta}{\sqrt{1-a^2\sin\lambda^2}\sqrt{1-(1-a^2)\sin\vartheta^2}} = F(c)\,[F(a)-E(c)],$$

und hieraus folgt:

$$\frac{\pi}{2} = W = F(c)\,E(c) + F(a)\,E(a) - F(c)\,F(a),$$

eine in der Theorie der elliptischen Functionen vorkommende Relation zwischen den Quadranten der Integrale erster und zweiter Ordnung.

55) Den Ausdruck:

$$V = \iiint \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{ghiklm}\, d\lambda\, d\mu\, d\nu$$

wollen wir benutzen unter der Voraussetzung, dass es sich handelt um eine Oberfläche, die zur Gleichung hat:

$$\frac{x^2}{\varrho^2} + \frac{y^2}{\varrho^2-b^2} + \frac{z^2}{\varrho^2-c^2} = 1.$$

Bekanntlich ist dies die Gleichung des Ellipsoides.

Man hat zur Grenzbestimmung die Formeln:

$$bcx = \lambda\mu r,$$
$$by\sqrt{(c^2-b^2)} = gil,$$
$$cz\sqrt{(c^2-b^2)} = hkm.$$

Will man den achten Theil des Ellipsoides finden, so müssen $x$, $y$, $z$ immer reell sein, also $x$ alle Werthe von 0 bis $\varrho$, $y$ alle Werthe von 0 bis $\sqrt{(\varrho^2-b^2)}$, $z$ alle von 0 bis $\sqrt{(\varrho^2-c^2)}$ annehmen. Offenbar kann dann, damit $i$ reell bleibe, $\mu$ nicht kleiner als $b$, damit $k$ reell bleibe, $\mu$ nicht grösser als $c$ sein. Ebenso muss, damit $l$ reell bleibe, $r$ kleiner als $b$ sein. $\lambda$ aber muss jedenfalls grösser als $c$ sein, damit $h$ reell bleibe.

Wegen der Gleichung des Ellipsoides aber ist $\varrho$ der grösste Werth von $\lambda$. Man hat also für den achten Theil des Ellipsoides:

$$V = \int_0^b \int_b^c \int_c^\varrho \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{ghiklm} d\lambda\, d\mu\, d\nu.$$

Wegen der bekannten Formel für den achten Theil des Ellipsoides ist der Werth dieses dreifachen Integrals gleich:

$$\frac{\pi}{6} \varrho \sqrt{(\varrho^2-b^2)} \sqrt{(\varrho^2-c^2)} = V.$$

56) Von grosser Wichtigkeit für die Berechnung mehrfacher Integrale, deren Grenzen nicht alle constant sind, ist die von Dirichlet herrührende Methode des Discontinuitätsfactors. Der Zweck dieser Methode ist, statt der veränderlichen Grenzen constante einzuführen. Man wird den Sinn und die Tragweite dieser Methode leicht an einigen Beispielen erkennen.

Wir fanden in Abschnitt 38) Formel IVa):

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi \cos\beta\varphi\, d\varphi}{\varphi} = 1 \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $\beta$ abgesehen vom Vorzeichen grösser oder kleiner als Eins war. Wir setzen:

$$A = \iiint \ldots e^{-k(x+y+z+\cdots)} x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots dx\, dy\, dz \ldots,$$

wo $k, a, b, c \ldots$ positiv sind.

Erstrecken wir ferner die Integration über alle Werthe von $x, y, z \ldots$, welche die Bedingung erfüllen, dass

$$\sigma = x+y+z+ \cdots < 1$$

ist und $x, y, z$ immer positiv sein sollen.

Statt nun die Grenzen der Integration aus dieser Bedingung abzuleiten, multipliciren wir das Argument mit dem Factor:

$$U = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi \cos\sigma\varphi\, d\varphi}{\varphi}$$

und da, so lange $\sigma < 1$ ist, also unsere Bedingung erfüllt, $U$ immer gleich 1 ist, ausserhalb der Grenzen der Integration aber Null wird, so ist es gestattet, die Integrale alle in den Grenzen 0 und $+\infty$ zu nehmen, da derjenige Theil, welcher unsrer Bedingung nicht entspricht, von selbst verschwindet.

Es wird also

$$A = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \ldots \int_0^\infty e^{-k\sigma} x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots\ldots\ldots \frac{\sin\varphi}{\varphi} \cos\sigma\varphi\, d\varphi\, dx\, dy\, dz \ldots.$$

Da aber für $\sigma = +1$ und $\sigma = -1$ Discontinuitäten stattfinden, so fragt es sich, ob hier die Umkehrung der Ordnung des Integrirens noch gestattet ist. Diese Frage erledigt sich jedoch, wenn man zunächst statt des Ausdruckes $U$ das Integral:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\varepsilon\varphi} \frac{\sin\varphi \cos\sigma\varphi\, d\varphi}{\varphi}$$

betrachtet, welches nach Formel III des Abschnitts 38 stets gleich:

$$\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1+\sigma}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1-\sigma}{\varepsilon}$$

ist, also so lange $\varepsilon$ nicht Null ist, keine Discontinuität erleidet. Denkt man sich diesen Werth für $U$ in $A$ eingesetzt, so ist also Umkehrung der Ordnung des Integrirens erlaubt.

Mit abnehmendem $\varepsilon$ aber nimmt das Integral, gleich viel nach welcher Grösse man zuerst integrirt, die hier gegebene Form an, und ist somit auch für $\varepsilon = 0$ der Werth von $A$ derselbe, man mag erst nach $\varphi$ oder erst nach $x, y \ldots$ integriren.

Wir schreiben statt $\cos\sigma\varphi$ aber $e^{-\sigma\varphi i}$; es wird dann $A$ der reelle Theil des Integrals:

$$B = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\varphi \sin\varphi}{\varphi} Q,$$

wo

$$Q = \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} \ldots e^{-k\sigma} x^{a-1} y^{b-1} \ldots e^{-\sigma\varphi i} dx\, dy \ldots$$

ist.

Dies Integral $Q$ zerfällt aber in Factoren von der Gestalt:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x(k+qi)} x^{a-1} dx = \frac{\Gamma(a)}{(k+qi)^a},$$

wo die Potenz $(k+qi)^a$, wie in allen den Fällen, welche wir ausführlich erörtert haben, so zu nehmen ist, dass

$$(k+qi)^a = r^a e^{a\lambda i},$$

und $\lambda$ immer zwischen $+\pi$ und $-\pi$ liegt. Diese und die $y, z \dots$ entsprechenden Werthe einsetzend, erhalten wir:

$$B = \frac{2}{\pi} \Gamma(a)\, \Gamma(b)\, \Gamma(c) \cdots \int_0^{\infty} d\varphi \frac{\sin \varphi}{\varphi} \frac{1}{(k+qi)^{a+b+c+\cdots}}.$$

Ist $y = z = \dots = 0$, so wird $A$, wenn man $a+b+c+\dots$ für $a$ setzt:

$$A_1 = \int_0^1 e^{-kx} x^{a+b+c+\dots-1} dx$$

und dies ist gleich dem reellen Theile von:

$$\frac{2}{\pi} \Gamma(a+b+c+\dots) \int_0^{\infty} d\varphi \frac{\sin\varphi}{\varphi} \frac{1}{(k+qi)^{a+b+c+\cdots}}$$

Man kann somit im allgemeinen Falle den reellen Theil von $B$ auch schreiben:

$$A = \frac{\Gamma(a)\, \Gamma(b)\, \Gamma(c) \cdots}{\Gamma(a+b+c+\cdots)} \int_0^1 e^{-kx} x^{a+b+c+\dots-1} dx;$$

für $k = 0$, $c = \partial = \dots = 0$ erhält man hieraus die schon bewiesene Eulersche Formel:

$$\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{\Gamma(a)\, \Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},$$

Auch kann man in dem allgemeinen Ausdrucke von $A$ die Grösse $k = 0$ setzen, und hat:

$$C = \iint \dots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \dots dx\, dy\, dz \dots = \frac{\Gamma(a)\, \Gamma(b) \dots}{\Gamma(a+b\dots)(a+b+\dots)} + \frac{\Gamma(a)\, \Gamma(b) \dots}{\Gamma(a+b+\dots+1)}.$$

Vertauscht man die Veränderlichen $x, y, s \dots$ bezüglich mit:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p, \left(\frac{y}{\beta}\right)^q, \left(\frac{s}{\gamma}\right)^r \dots,$$

so erhält man hieraus

$$\frac{pq}{\alpha\beta} \iint \dots \left(\frac{x}{\alpha}\right)^{ap-1} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{bq-1} \dots dx\, dy \dots = C$$

und wenn man für $a, b \dots$ bezüglich $\frac{a}{p}, \frac{b}{q} \dots$ schreibt:

$$E = \iint \dots x^{a-1} y^{b-1} \dots dx\, dy \dots = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{p}\right) \Gamma\left(\frac{b}{q}\right) \dots}{\Gamma\left(1 + \frac{a}{p} + \frac{b}{q} + \dots\right)},$$

wo $x, y \dots$ auf alle Werthe auszudehnen sind, welche die Bedingung

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{s}{\gamma}\right)^r + \dots < 1$$

erfüllen.

Ist noch

$$a = b = c = 1,$$

so erhält man, wenn 3 Veränderliche genommen werden,

$$\iiint dx\,dy\,dz;$$

und dies ist der von den positiven Coordinatenaxen $x$, $y$, $z$ und der Fläche, die zur Gleichung hat:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^p + \left(\frac{y}{\beta}\right)^q + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^r = 1$$

begrenzte körperliche Raum, für welchen sich ergibt:

$$U = \frac{\alpha\beta\gamma}{p\,q\,r}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\Gamma\left(\frac{1}{r}\right)}{\Gamma\left(1+\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}\right)}.$$

Ist $p = q = r = 2$, so hat man den achten Theil eines Ellipsoides, dessen Halbaxen $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sind, und für dasselbe ist also:

$$U = \frac{\alpha\beta\gamma}{8}\,\frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^3}{\Gamma(\frac{5}{2})}$$

oder da

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}),\quad \Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2})$$

ist:

$$U = \tfrac{1}{6}\pi\alpha\beta\gamma.$$

Ist $p = q = r = 4$, so erhält man den achten Theil des Körpers, dessen Oberfläche die Gleichung hat:

$$\left(\frac{x}{\alpha}\right)^4 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^4 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^4 = 1$$

und dieser ist:

$$U = \frac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{64}\,\frac{\alpha\,\Gamma(\frac{1}{4})^3}{\Gamma(\frac{7}{4})}$$

oder da

$$\Gamma(\tfrac{7}{4}) = \Gamma(1+\tfrac{3}{4}) = \tfrac{3}{4}\Gamma(\tfrac{3}{4}),$$

ist

$$U = \frac{\alpha\cdot\beta\cdot\gamma}{48}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{4})^3}{\Gamma(\frac{3}{4})}.$$

Wir fanden (Abschnitt 45, Formel XXXII):

$$\int_0^\infty e^{\sigma\psi i}\,\psi^{q-1}\,d\psi = \frac{\Gamma(q)}{(\pm\sigma)^q}\,e^{\pm\frac{q\pi}{2}i},$$

wo das obere Vorzeichen gilt, wenn $\sigma$ positiv, das untere, wenn $\sigma$ negativ ist.

Aus dieser Formel ergibt sich auch, indem wir das Vorzeichen auf die eben angezeigte Weise bestimmen:

$$\int_0^\infty \cos(\sigma\psi)\,\psi^{q-1}\,d\psi = \frac{\Gamma(q)\cos\frac{q\pi}{2}}{(\pm\sigma)^q}$$

$$\int_0^\infty \sin(\sigma\psi)\,\psi^{q-1}\,d\psi = \pm\frac{\Gamma(q)\sin\frac{q\pi}{2}}{(\pm\sigma)^q},$$

wenn man die erste dieser Formel mit $\sin\frac{q\pi}{2}$, die zweite mit $\cos\frac{q\pi}{2}$ multiplicirt und addirt, so ergibt sich hieraus:

$$\frac{1}{\Gamma(q)\sin q\pi}\int_0^\infty \sin\left(q\frac{\pi}{2} + \sigma\psi\right)\psi^{q-1}\,d\psi = \frac{1}{\sigma q} \text{ oder } = 0,$$

je nachdem $\sigma$ positiv oder negativ ist. Es ist dies eine andre Form eines Discontinuitätsfactors.

Untersuchen wir jetzt das Integral:

$$W = \int_0^\infty\int_0^\infty \ldots \frac{1}{\varrho^p}\,\frac{1}{(\varepsilon+\sigma i)^q}\,x^{a-1}y^{b-1}\ldots dx\,dy\ldots,$$

wo

$$\varrho = \lambda + \alpha x + \beta y + \ldots,\qquad \sigma = 1 - x - y - \ldots$$

gesetzt wird, $\varepsilon, p, q \ldots a, b \ldots \lambda, \varrho \ldots$ positive Constanten sind, aber immer:

$$p + q + \ldots > a + b + \ldots$$

Die Potenzen von $\varepsilon + \sigma i$ sind dadurch bestimmt, dass der Arcus dieses Ausdruckes immer zwischen $+\pi$ und $-\pi$ liegen soll, und das Integral $W$ soll sich über alle positiven Werthe von $x, y \ldots$ erstrecken; es ist dann $W$ vollständig bestimmt.

In Integral $W$ kann man setzen:

$$\frac{1}{\varrho^p} = \frac{\int_0^\infty e^{-\varrho\varphi} \varphi^{p-1} d\varphi}{\Gamma(p)}$$

(Vergleiche Abschnitt 49, Formel 10), und

$$\frac{1}{(\varepsilon+\sigma i)^q} = \frac{\int_0^\infty e^{-(\varepsilon+\sigma i)\psi} \psi^{q-1}}{\Gamma(q)} d\psi.$$

Setzt man diese Ausdrücke in $W$ ein, und denkt dann die Integration nach $x, y \ldots$ zuerst ausgeführt, so ergibt sich:

$$W = \frac{1}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} \int_0^\infty \int_0^\infty \ldots e^{-\lambda\varphi - (\varepsilon+i)\psi} \varphi^{p-1} \psi^{q-1} Q\, d\varphi\, d\psi.$$

$Q$ ist ein Product einfacher Integrale nach $x, y \ldots$, die alle gleiche Form haben, und wo das nach $x$ genommene die Gestalt hat:

$$\int_0^\infty e^{-(\alpha\varphi - \psi i)x} x^{a-1} dx = \frac{\Gamma(a)}{(\alpha\varphi - \psi i)^a};$$

setzt man dies und die entsprechenden Werthe der übrigen Integrale ein, so hat man für $W$ nur noch ein Doppelintegral:

$$W = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\ldots}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda\varphi - (\varepsilon+i)\psi} \varphi^{p-1} \psi^{q-1} \frac{1}{(\alpha\varphi - \psi i)^a} \frac{1}{(\beta\varphi - \psi i)^b} \ldots d\varphi\, d\psi.$$

Dies Integral aber verwandelt sich in ein einfaches, wenn man setzt:

$$\psi = \varphi s, \qquad d\psi = \varphi\, ds,$$

und nach $\varphi$ integrirt. Es ist dann:

$$W = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)\ldots}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} \int_0^\infty \frac{s^{q-1}}{(\lambda + (\varepsilon+i)s)^m} \frac{1}{(\alpha - si)^a} \frac{1}{(\beta - si)^b} \ldots ds,$$

wo $m = p + q - a - b - \ldots$ gesetzt wurde.

Von besonderm Interesse ist der Fall, wo $\varepsilon = 0$ ist, da hier der Ausdruck

$$\int_0^\infty e^{-(\varepsilon+\sigma i)\psi} \psi^{q-1} d\psi,$$

welcher in der Entwickelung als Factor vorkam, die Gestalt

$$\int_0^\infty e^{-\sigma + i} \psi^{q-1} d\psi$$

annimmt, also, wie oben gezeigt wurde, discontinuirlich ist, wenn $\sigma$, wie es doch während der Integration geschehen muss, vom Positiven zum Negativen übergeht. Lässt man also $\varepsilon$ sich zunächst der Null nähern, so wird der in $W$ vorkommende Ausdruck nach unsrer Annahme

$$\varepsilon + \sigma i = \sigma e^{\frac{\pi}{2}i} \quad \text{oder} \quad -\sigma e^{-q\frac{\pi}{2}i},$$

je nachdem $\sigma$ positiv oder negativ ist. Es ist also auch

$$\frac{1}{(\varepsilon+\sigma i)^q} = \frac{1}{\pm\sigma^q} e^{\mp\frac{\pi}{2}i}$$

zu setzen. Das Argument von:

$$W = \iint \frac{1}{\varrho^p} \frac{1}{(\sigma i)^q} x^{a-1} y^{b-1} \ldots dx\,dy$$

nimmt also verschiedene Formen an, je nachdem:

$$\sigma = 1 - x - y - \ldots < 0 \text{ oder } \sigma > 0,$$

d. h. je nachdem:

$$x + y + s \gtrless 1$$

ist. Es wird also:

$$W = e^{-q\frac{\pi}{2}i} U + e^{q\frac{\pi}{2}i} \cdot V = \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(a)\,\Gamma(b)\ldots}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)} \int_0^\infty \frac{s^{q-1}\,ds}{(\lambda+si)^m} \frac{1}{(\alpha-si)^a} \frac{1}{(\beta-si)^b} \ldots,$$

wo

$$U = \iint \ldots \frac{x^{a-1} y^{b-1} \ldots dx\,dy}{(\lambda+\alpha x+\beta y+\ldots)^p (1-x-y\ldots)^q},$$

und das Integral auf alle Werthe von $x$, $y$ ... anszudehnen ist, welche die Bedingung

$$x + y + z + \cdots < 1$$

erfüllen,

$$V = \iint \ldots \frac{x^{a-1} y^{b-1} \ldots dx\,dy}{(\lambda+\alpha x+\beta y+\ldots)^p (-1+x+y+\ldots)^q}$$

auf alle Werthe von $x$, $y$ ... ausgedehnt, welche die Bedingung:

$$x + y + s + \ldots > 1$$

erfüllen. Der Werth von $W$ erhält die Grösse

$$i = \sqrt{-1}.$$

Setzt man also $-i$ statt $i$, so erhält man eine zweite Gleichung, so dass man mittels beider sowohl $U$ als $V$ bestimmen kann.

56) **Quadratur vollständiger Differenziale mit mehreren Variablen.**

Hat man die Gleichung

$$z = f(x, y),$$

so erhält man durch deren Differenziation:

$$\partial z = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy;$$

soll also ein Ausdruck:

$$dz = \varphi(x, y)\,dx + \psi(x, y)\,dy$$

ein vollständiges Differenzial sein, so müssen die Functionen $\varphi$ und $\psi$ die Gleichungen erfüllen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} = \psi(x, y).$$

Aus diesen erhält man durch nochmaliges Differenziiren:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Es ist also

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

die Bedingung dafür, dass die gegebene Gleichung

$$dz = \varphi\,dx + \psi\,dy$$

durch Differenziiren einer andern

$$s = f(x, y)$$

entstanden ist, und $x$ und $y$ völlig unabhängig von einander sind.

Wir haben diese Bedingung bereits in Abschnitt 11 kennen gelernt, wo es sich aber um Grössen $y$ handelte, die von $x$ abhängig waren.

Diese Bedingung heisst Integrabilitätsbedingung.

Ist sie erfüllt, so lässt sich augenblicklich die Gleichung

$$z = f(x, y)$$

herstellen, d. h. der Ausdruck

$$dz = \varphi\,dx + \psi\,dy$$

integriren. Zu dem Ende bemerken wir, dass für irgend einen Anfangswerth von $x$, etwa $x_0$, $z = f(x_0, y)$ also gleich einer Function von $y$ allein wird, die wir mit $z'$ bezeichnen.

Es ist nun:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(x, y),$$

also

$$z = \int \varphi(x, y)\, dx,$$

wo bei der Integration $y$ als constant zu denken ist. Nimmt man dies Integral, welches noch eine Constante (oder vielmehr eine Function des constant gedachten $y$) enthält in den Grenzen $x$ und $x_0$, so hat man:

$$z - z' = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\, dx$$

und es bleibt nur noch von $y$ die Function $z'$ zu bestimmen. In der gegebenen Gleichung:

$$dz = \varphi(x, y)\, dx + \psi(x, y)\, dy$$

kann man aber

$$x = x_0, \text{ also } dx = 0$$

setzen, da $x_0$ constant war, und erhält:

$$dz' = \psi(x_0, y)\, dy,$$

also

$$z' = \int \psi(x_0, y)\, dy.$$

Sei noch für $y = y_0$, $z' = z''$, d. h. für $x = x_0$ und $y = y_0$, $z = z''$, so ist

$$z' - z'' = \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\, dy,$$

und $z'' = f(x_0, y_0)$ wird eine willkürliche Constante sein; man hat also, wenn man diese Werthe einsetzt:

$$z = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0, y)\, dy + z''.$$

Diese Methode, welche übrigens einfacher als die gewöhnlich in den Lehrbüchern gegebene ist, lässt sich augenblicklich auf beliebig viel Variablen ausdehnen. Es sei:

$$dz = \varphi_1(x_1, x_2 \dots x_n)\, dx_1 + \varphi_2(x_1, x_2 \dots x_n)\, dx_2 + \dots + \varphi_n(x_1, x_2 \dots x_n)\, dx_n$$

entstanden durch Differenziiren der Gleichung

$$z = f(x_1, x_2 \dots x_n),$$

wo $x_1, x_2 \dots x_n$ völlig von einander unabhängige Grössen sein sollen.

Bedingungen hierfür sind, dass man hat:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \varphi_1, \quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = \varphi_2, \dots \frac{\partial z}{\partial x_s} = \varphi_s, \dots \frac{\partial z}{\partial x_n} = \varphi_n$$

oder durch nochmaliges Differenziiren:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_s \partial x_t} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x_t}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_t \partial x_s} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_s}.$$

Es muss also sein

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial x_t} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_s}$$

eine symbolische Gleichung, in welcher für $s$ und $t$ alle Zahlen von 1 bis $n$ gesetzt werden können. Die Anzahl der sich hierdurch ergebenden Bedingungsgleichungen ist: $\frac{n(n-1)}{2}$; sind diese erfüllt, so geschieht die Integration wie oben. Wir setzen:

für $x_1 = x_1^{(0)}$ und $z = z^{(1)}$,

für $x_1 = x_1^{(0)}$ und $x_2 = x_2^{(0)}$, $z = z^{(2)}$,

für $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$ und $x_3 = x_3^{(0)}$, $z = z^{(3)}$,

. . . .

. . . .

für $x_1 = x_1^{(0)}$, $x_2 = x_2^{(0)}$, $x_3 = x_3^{(0)} \dots x_n = x_n^{(0)}$, $z = z^{(n)}$.

Es sind hier $x_1^{(0)}$, $x_2^{(0)}$, $x_3^{(0)}$ . . . Constanten,

$z^{(1)}$ eine Function von $x_2, x_3 \ldots x_n$ aber nicht von $x_1$,

$z^{(2)}$ eine solche von $x_3 \ldots x_n \ldots$,

$z^{(n-1)}$ eine Function von $x_n$ allein, und endlich

$z^{(n)}$ eine Constante; man hat dann zunächst:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n),$$

also, wenn man $x_1^{(0)}$ und $x_1$ als Integrationsgrenzen betrachtet, $x_2 \ldots x_n$ aber als Constante ansieht:

$$z - z' = \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1.$$

Die gegebene Gleichung aber nimmt, wenn man $x_1 = x_1^{(0)}$, $z = z'$ setzt, die Gestalt an:

$$dz' = \varphi_2(x_1^{(0)}, x_2 \ldots x_n)\, dx_2 + \ldots + \varphi_n(x_1^{(0)}, x_2 \ldots x_n)\, dx_n,$$

also:

$$\frac{\partial z^{(1)}}{\partial x_2} = \varphi_2(x_1^{(0)}, x_2 \ldots x_n),$$

und in den Grenzen $x_2^{(0)}$ und $x_2$ integrirend, hat man:

$$z^{(1)} - z^{(2)} = \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \varphi_2(x_1^{(0)}, x_2 \ldots x_n)\, dx_2.$$

In dem Werthe von $dz^{(1)}$ kann man nun $x_2 = x_2^{(0)}$ setzen, und hat:

$$dz^{(2)} = \varphi_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3 \ldots x_n)\, dx_3 + \ldots + \varphi_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3 \ldots x_n)\, dx_n,$$

also:

$$z^{(2)} - z^{(3)} = \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \varphi_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4 \ldots x_n)\, dx_4.$$

Fährt man so fort, so erhält man:

$$z^{(3)} - z^{(4)} = \int_{x_4^{(0)}}^{x_4} \varphi_4(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4 \ldots x_n)\, dx_4$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$z^{(n-1)} - z^{(n)} = \int_{x_n^{(0)}}^{x_n} \varphi_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \ldots x_{n-1}^{(0)}, x_n)\, dx_n.$$

Also durch die Addition aller dieser Gleichungen ergibt sich der vollständige Werth von $z$ folgendermassen:

$$z = \int_{x_1^{(0)}}^{x_1} \varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n)\, dx_1 + \int_{x_2^{(0)}}^{x_2} \varphi_2(x_1^{(0)}, x_2 \ldots x_n)\, dx_2$$
$$+ \int_{x_3^{(0)}}^{x_3} \varphi_3(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3 \ldots x_n)\, dx_3 + \ldots\ldots$$
$$+ \int_{x_n^{(0)}}^{x_n} \varphi_n(x_1^{(0)}, x_2^{(0)} \ldots x_{n-1}^{(0)}, x_n)\, dx_n + z^{(n)},$$

wo $z^{(n)}$ die Integrationsconstante ist.

**Beispiel.** Sei gegeben

$$dz = \frac{ydx - xdy}{y^2 + x^2},$$

so ist

$$\varphi = \frac{y}{y^2+x^2}, \quad \psi = -\frac{x}{y^2+x^2}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{x^2-y^2}{(y^2+x^2)^2};$$

die Integrabilitätsbedingung ist also erfüllt, und es wird

$$z = \int_{x_0}^{x} \frac{ydx}{y^2+x^2} - \int_{y_0}^{y} \frac{x_0 dy}{y^2+x_0^2} + z''.$$

Aber wenn man

$$\frac{x}{y} = u, \quad \frac{y}{x_0} = v$$

setzt, erhält man:

$$\int_{x_0}^{x} \frac{ydx}{y^2+x^2} = \operatorname{arc\,tg} u - \operatorname{arc\,tg} u_0,$$

wo

$$u_0 = \frac{x_0}{y}$$

und:

$$\int_{y_0}^{y} \frac{x_0 dy}{y^2+x_0^2} = \operatorname{arc\,tg} v - \operatorname{arc\,tg} v_0,$$

wo

$$v_0 = \frac{y}{x_0}$$

ist. Also:

$$z = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} - \operatorname{arc\,tg}\frac{x_0}{y} - \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0} + z'',$$

Es ist aber

$$\operatorname{arc\,tg} s = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1}{s}\right),$$

also:

$$z = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + \operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0} - \frac{\pi}{2} + z''$$

oder wenn $x_0 = 0$ genommen werden soll, $y_0$ aber positiv ist, wo dann

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{y_0}{x_0} = \operatorname{arc\,tg}(+\infty) = \frac{\pi}{2} \text{ wird,}$$

$$z = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y} + z''.$$

57) Fasst man, wie es im Anfang dieses Artikels geschehen ist, die Quadraturen als die Grenzen von Summen auf, so wird die Integralrechnung bis zu einem gewissen Grade unabhängig von den Betrachtungen und dem Algorithmus der Differenzialrechnung. Diese Auffassung ist die historische, und lange vor Leibnitz und Newton, den Erfindern der höhern Analysis, hat man diese Methode angewandt, namentlich zur Berechnung von Flächeninhalten, freilich ohne sich eines allgemeinen Algorithmus zu bedienen. Zu bemerken sind hierbei namentlich Descartes, 1596 bis 1650, und sein grosser Zeitgenosse Fermat, der 1590 bis 1665 in seinen Untersuchungen dem Geiste der höhern Analysis bereits sehr nahe gekommen war. Von letzterem rührt auch die Methode her, das Gesetz der Veränderlichkeit angemessen zu bestimmen, um der Summe, deren Grenze man verlangt, eine möglichst einfache Gestalt zu geben.

In Abschnitt 4) haben wir ein Beispiel dieser Methode gegeben. Geschickte und fruchtbare Anwendungen dieser Methode gab auch Wallis, 1616 bis 1703. Von einer allgemeineren Auffassung der Integralrechnung kann aber erst seit Newton, 1642 bis 1727, und Leibnitz, 1646 bis 1716, die Rede sein. Bekanntlich gelangten beide grosse Männer wahrscheinlich gleichzeitig, aber auf verschiedenen Wegen, zur Auffindung der Differenzialrechnung.

Da das Integriren das inverse Verfahren des Differenziirens ist, so konnten nach Bestimmung der Differenzialquotienten der verschiedenen Functionen ebenso viel Integrale bestimmt werden. Die Methode des theilweisen Integrirens und der Substitution rührt von den Erfindern der höhern Analysis her.

Die Auffindung der Integrale gebrochner Functionen verdanken wir Johann Bernoulli, 1667 bis 1748. Die Methode des Rationalmachens der Functionen, welche eine Quadratwurzel eines Ausdruckes zweiten Grades enthalten, rührt von Cotes her (1682 bis 1716). Wesentliche Verdienste um die Förderung der Integralrechnung hat sich Euler erworben (1707 bis 1783), besonders durch sein Werk: „Institutiones calculi integralis."

Die Berechnung der bestimmten Integrale muss wohl ebenfalls auf Euler zurückgeführt werden, hat aber wesentliche Erweiterungen in diesem Jahrhunderte erfahren.

Ein höchst wesentlicher Fortschritt ist die Einführung des Begriffs des Imaginären in die Integralrechnung. Wenn derselbe auch vor Entstehung dieser Wissenschaft öfter gelegentlich angewandt ist, so ist doch die schärfere Begründung dieses Verfahrens, namentlich die Theorie

des Integrirens auf verschiedenen Wegen und der dadurch bedingten Mehrdeutigkeit der Integrale, Cauchy zu zuschreiben. Die Durchführung dieser überaus fruchtbaren Methode hat es nicht allein möglich gemacht, die Integralrechnung von vielen ungenauen oder unklaren Ausführungen zu befreien, sondern dieselbe auch wesentlich gefördert und erweitert. Wie sie denn in der Theorie der Functionen im Allgemeinen, und der mehrfach periodischen im Besondern, der Reihenentwicklung u. s. w., bereits wichtige Resultate gegeben hat, und namentlich in ihrer Ausdehnung auf die Integrale der Differenzialgleichungen, welche namentlich durch Weierstrass und Riemann begonnen ist, noch Bedeutenderes erwarten lässt.

## Quadratur ebener Figuren (Geometrie).

1) Einleitung.

Dem Wortsinne nach versteht man unter der Quadratur irgend einer Figur ihre Verwandlung in ein Quadrat, d. h. die geometrische Construction eines Quadrates, welches mit ihr gleichen Flächeninhalt hat.

Da diese Aufgabe für gradlinige Figuren eine der leichtesten der Elementargeometrie ist (siehe den Artikel: Quadrat), so kommt sie nur für solche Figuren in Erwägung, welche ganz oder zum Theil von krummen Linien begrenzt sind.

Statt eine solche Figur in ein Quadrat, kann man sie nach dem Obigen auch in eine beliebige von graden Linien begrenzte Figur, etwa in ein Dreieck, verwandeln, und die Aufgabe ist dann gelöst, da letzteres sich sogleich in ein Quadrat verwandeln lässt. Bei den meisten Curven ist jedoch eine solche geometrische Construction mittels der Werkzeuge der elementaren Geometrie, dem Kreise und der graden Linie schlechterdings unmöglich, und daher eine solche Quadratur im engsten Sinne nicht zu leisten. Es ist bekannt, wie viel vergebliche Versuche, z. B. der Quadratur des Kreises in diesem Sinne gewidmet worden sind, und wohl von Autodidakten noch gewidmet werden. Jedoch ist hier ein Erfolg aus dem angeführten Grunde unmöglich.

Nicht zu bezweifeln ist es dagegen, dass mit andern mechanischen Hülfsmitteln, als Zirkel und Lineal sind, die Quadratur jeder Figur zu leisten ist. Jedoch wäre ein solches Beginnen nur in wenigen Fällen von einigem wissenschaftlichen Interesse.

Indessen lässt sich dem Worte Quadratur ein andrer aus der Elementargeometrie in die Analysis führender Begriff unterlegen.

Bei der Bestimmung des Flächeninhalts der Figuren legt man bekanntlich als Einheit immer ein Maass unter, welches ein Quadrat ist, dessen Seite die als Längeneinheit gewählte Strecke bildet. (Z. B. Quadratfuss oder Quadratzoll, je nachdem ein Fuss oder Zoll die Einheit des Längenmaasses ist.) Hat man also für den Flächeninhalt einer Figur irgend eine Formel oder Zahl, so stellt dieselbe eine gleiche Anzahl Quadrate vor, deren Seite die Längeneinheit ist, oder einen Theil eines solchen Quadrates, der immer als Rechteck gedacht werden kann. Da nun jede Anzahl von Rechtecken oder Quadraten leicht in ein Quadrat verwandelt werden kann, so ist die Aufgabe der Quadratur als gleichbedeutend mit der Bestimmung des Flächeninhalts einer Figur zu setzen.

Eine solche analytische Bestimmung des Flächeninhalts wird aber nur dann eine geometrische Quadratur im engern Sinne möglich machen, wenn die Zahl oder Formel, welche den Flächeninhalt ausdrückt, rational, oder wenn sie die Wurzel einer quadratischen Gleichung ist, da nur solche Ausdrücke sich geometrisch construiren lassen (vergleiche hierüber den Artikel: quadratische Gleichungen).

Unter Quadratur wird hier, wie allgemein üblich, also nur die Bestimmung der Flächeninhalte zu verstehen sein.

Für diese Aufgabe giebt die Integralrechnung ein allgemeines Mittel, und ist dieselbe gewissermassen die geometrische Deutung des Integrirens im engern Sinne, weshalb dasselbe auch, wie im vorigen Artikel geschehen, als analytische Quadratur bezeichnet wird.

Ehe wir jedoch auf diese allgemeine Aufgabe eingehn, wird es nöthig sein, auf die Quadratur einiger der bekanntesten Figuren, soweit dieselben einer elementaren Behandlung zugänglich sind, hier einzugehen. Wir beginnen dabei mit dem Kreise.

2) Quadratur des Kreises.

Man kann unter dem Ausdruck Quadratur des Kreises sowohl die Berechnung des Flächeninhalts des ganzen Kreises, als einzelner Kreisstücke, z. B. Sectoren oder Segmente verstehen. Die ersteren lassen sich, so wie der ganze Kreis mittels einer einzigen Irrationalzahl, der sogenannten Ludolphschen Zahl oder der Zahl $\pi$ berechnen, welche das

Verhältniss der halben Peripherie zum Radius ausdrückt; hei der Berechnung der Segmente sind ausserdem trigonometrische Betrachtungen nöthig.

Sehr wichtig aber für den Kreis ist es, dass die Aufgabe seiner Rectification, d. h. die Berechnung der Bogenlängen desselben sich auf die Quadratur zurückführen lässt und umgekehrt; zu beiden Aufgaben nämlich ist dieselbe Grösse $\pi$ nöthig. Nur in seltnen Fällen haben Curven diese Eigenschaft.

Wir gehen annächst die Sätze über die Berechnung der einzelnen Flächenstücke des Kreises, womit wir zugleich die Berechnung der Bogenlängen verbinden.

Fig. 34.



Sei (Fig. 34.) $abcde$ ein beliebiger Kreisbogen, $O$ der zugehörige Mittelpunkt, $ab$, $bc$, $cd$, $de$ Sehnen von beliebiger Länge. Verbinden wir die Endpunkte derselben mit dem Mittelpunkte $O$, und fällen von $O$ aus auf die einzelnen Sehnen die Lothe $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$.

Man erhält dann eine Anzahl von Dreiecken (hier 4), und wir bezeichnen die Summe der Flächeninhalte derselben mit $A$, es ist dann:

$$A = \frac{ab \cdot O\alpha}{2} + \frac{bc \cdot O\beta}{2} + \frac{cd \cdot O\gamma}{2} + \frac{de \cdot O\delta}{2}.$$

Nimmt man nun an, die Sehnen würden immer kleiner, mehrten sich aber an Zahl, so dass der Bogen $abcde$ sich nicht ändert, so würden sich offenbar die Höhen alle dem Radius des Kreises nähern, den wir mit $r$ bezeichnen, während jede Sehne sich dem Bogen nähert, welchen sie abschneidet. Es sind dies Betrachtungen, zu deren schärferen Begründung man öfter auf die Eigenschaften des Kreises einzugehen pflegt. Es scheint dies aber um so unnötbiger, als gleiche oder ähnliche Sätze nicht allein für den Kreis, sondern für alle krummen Linien gelten, und die Anwendung der Infinitesimalrechnung auf die Geometrie möglich machen.

Es wird mithin, wenn die Anzahl ins Unendliche wächst:

$$A = \frac{r}{2}(ab + bc + cd + de + \cdots),$$

aber wenn man den Bogen $abcde$ mit $b$ bezeichnet, denselben für die Summe der Sehnen setzt, und berücksichtigt, dass unter der angenommenen Bedingung sich $A$ dem Sector $aOe$ nähert, den wir mit $S$ bezeichnen, so haben wir:

$$S = \frac{br}{2},$$

eine Formel, welche lehrt, einen gegebenen Sector $S$ durch den zugehörigen Bogen $b$ und den Radius $r$ des Kreises auszudrücken. Vergleicht man diese Formel mit der für den Flächeninhalt eines Dreiecks, so hat man auch den Satz:

„Jeder Sector ist gleich einem Dreieck, welches den zugehörigen Bogen zur Seite, den Radius des Kreises aber zur Höhe hat."

Bezeichnen wir die Peripherie des Kreises mit $P$, den Inhalt desselben mit $K$, so ist klar, dass man sich den ganzen Kreis als Sector denken kann, zu dem als Bogen die ganze Peripherie gehört, und die vorige Formel gibt sonach:

$$K = \frac{Pr}{2}.$$

Dieser Ausdruck gibt die Beziehung, welche zwischen Rectification und Quadratur des Kreises stattfindet, welches sonach Operationen sind, deren eine die andere sogleich ergibt.

Wir benutzen diese Formel auch zur Definition der Ludolph'schen Zahl, welche allen übrigen Betrachtungen zu Grunde liegt.

Bezeichnen wir mit $\pi$ die halbe Peripherie eines Kreises, dessen Radius die Einheit ist, so hat man:

$$r = 1, \ K = \frac{P}{2} = \pi,$$

Also $\pi$ stellt auch gleichzeitig den Flächeninhalt desselben Kreises vor.

Bekanntlich verhalten sich zwei Bogen desselben Kreises, wie die zugehörigen Centriwinkel, ein Satz, welcher augenblicklich aus dem folgt, dass zu gleichen Centriwinkel gleiche Bogen gehören. Sei also $\alpha$ der zu Bogen $b$ gehörige Centriwinkel, den wir uns in Graden ausgedrückt denken, und berücksichtigen wir, dass zur ganzen Peripherie ein Centriwinkel von 360 Grad gehört, so haben wir

$$b : \alpha = P : 360$$

oder:

$$b = \frac{\alpha^0 P}{360^0};$$

sollte $\alpha$ dagegen in Secunden ausgedrückt sein, so ist auch der Winkel von 360° in Secunden auszudrücken, und man hat:

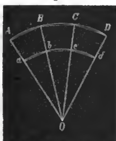
$$360 \cdot 60 \cdot 60 = 1296000,$$

$$b = \frac{\alpha P}{1296000},$$

wo $\alpha$ der in Secunden ausgedrückte Centriwinkel ist.

Es bleibt jetzt noch übrig, eine Beziehung zwischen der Zahl $\pi$ und der Peripherie $P$ eines beliebigen Kreises zu ermitteln.

Fig. 35.




Sei $AD$ (Fig. 35.) ein beliebiger Kreisbogen, in welchen die Sehnen $AB$, $BC$, $CD$ gezeichnet sind; man ziehe die zugehörigen Halbmesser $OA$, $OB$, $OC$, $OD$, und durch einen beliebigen Punkt $a$ von $OA$ lege man einen concentrischen Kreisbogen $a\partial$, der von den übrigen Halbmessern bezüglich in $b$ und $c$ geschnitten wird; zieht man noch die Sehnen $ab$, $bc$, $c\partial$, so sind offenbar die gleichschenkligen Dreiecke:

$OAB$ und $Oab$, $OBC$ und $Obc$,
$OCD$ und $Oc\partial$

entsprechend ähnlich, da sie den Winkel an der Spitze gemein haben, also:

$$ab : AB = aO : AO$$
$$bc : BC = bO : BO = aO : AO$$
$$c\partial : CD = cO : CO = aO : AO$$

und demgemäss:

$$ab + bc + c\partial : AB + BC + CD = aO : AO.$$

Nehmen wir jetzt an $AO$ sei $= r$, $aO$ aber gleich der Einheit, so dass wir dem zweiten Kreise die Einheit als Radius geben, denken wir uns ferner die Sehnen verkleinert und vermehrt, so dass die Summe derselben sich den bezüglichen Bogen nähert. Nehmen wir endlich an, diese Bogen seien die halben Peripherien der bezüglichen Kreise, so wird offenbar nach dem oben Gesagten:

$$ab + bc + c\partial = \pi$$

$$AB + BC + CD = \frac{P}{2}$$

werden, und wir erhalten:

$$\pi : \frac{P}{2} = 1 : r,$$

d. h.

$$1)\quad P = 2\pi r.$$

Diesen Ausdruck von $P$ in die oben gefundenen Formeln einsetzend, erhalten wir:

$$2)\quad K = \pi r^2,$$

$$3)\quad b = \frac{\pi r \alpha}{180} = \frac{\pi r \alpha}{648000}$$

und wenn wir diese Werthe von $b$ noch in die Formel:

$$4)\quad S = \frac{br}{2}$$

einsetzen:

$$5)\quad S = \frac{\pi r^2 \alpha}{360} = \frac{\pi r^2 \alpha}{1296000},$$

wo gesetzt wurde:

der Radius gleich $r$,
die Peripherie gleich $P$,
der Flächeninhalt des Kreises gleich $K$,
ein beliebiger Bogen gleich $b$,
sein zugehöriger Centriwinkel
 in Graden gleich $\alpha$,
 in Secunden gleich $a$

und die constante Zahl $\pi$ den Flächeninhalt eines Kreises mit Radius 1, oder die halbe Peripherie dieses Kreises darstellt.

Man kann aber auch statt den Centriwinkel in Graden auszudrücken, dafür die Länge des zugehörigen Bogens einführen, dessen Radius gleich Eins ist. Sei derselbe gleich $\beta$, so hat man, wenn man in Formel 3) 1 für $r$, $\beta$ für $b$ setzt:

$$3a)\quad \beta = \frac{\pi a}{180},$$

also:

$$3b)\quad b = r\beta.$$

Die Formel 4) aber gibt:

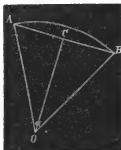
$$4a)\quad S = \tfrac{1}{2} r^2 \beta;$$

jeden gegebenen Winkel $\alpha$ kann man sich so vermöge der Formel 3a) in Bogenmaass $\beta$ darstellen.

Wir wollen mit diesen Formeln noch die für Sehne und Segmente verbinden.

Die erstere bezeichnen wir mit $C$, das letztere mit $A$.

Fig. 36.




Sei $AB$ die Sehne, $\alpha$ der zugehörige Centriwinkel, $OC$ ein Loth vom Mittelpunkt auf die erstere, so wird durch dasselbe Sehne und Centriwinkel halbirt, und es ist:

$$AC = r \sin \frac{\alpha}{2}$$

oder:

$$6)\quad C = 2r \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Das Segment ergibt sich, wenn man von dem Sector $AOB$ das zugehörige Dreieck $AOB$ abzieht. Der Flächeninhalt des letztern aber ist (siehe den Artikel: Trigonometrie) $\frac{1}{2} r^2 \sin \alpha$, so dass man hat:

$$7)\quad A = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi\alpha}{180} - \sin \alpha\right) = \frac{r}{2}\,(b - r \sin \alpha).$$

Diese Formel enthält gleichzeitig den Winkel $\alpha$ und seinen Sinus. Kömmt es also bei irgend einer Aufgabe darauf an, aus den Werthen eines Segments und des zugehörigen Radius den Centriwinkel zu finden, so kann dies nur mittels einer transcendenten Gleichung bewirkt werden. Es bleibt uns jetzt noch übrig die constante Zahl $\pi$ zu ermitteln.

Man hat sich damit schon im Alterthume beschäftigt, und namentlich fand Archimedes durch geometrische Betrachtungen, dass dieselbe etwas kleiner als $\frac{22}{7}$ sein müsse. Andre Mathematiker fanden genanere Werthe. Aber Ludolph van Keulen (1550 bis 1610) berechnete auf eine ähnliche Art diese Zahl bis auf 35 Bruchstellen, weshalb die Zahl $\pi$ nach ihm benannt worden ist. In neuerer Zeit hat man diese Genauigkeit noch weiter getrieben, Lagny hat diese Zahl bis auf 128 Decimalstellen berechnet, Vega dieselbe auf 140 berechnen lassen, Dahse ist bis auf 200 Decimalstellen vorgeschritten, und selbst diese Genauigkeit ist schon überboten. Für fast alle Rechnungen reichen 5 bis höchstens 7 Decimalstellen aus.

Eigentliches Interesse ist mit den Berechnungen auf viele Decimalstellen nur höchstens insofern verbunden, als dabei die Mittel einer sorgfältigen und fehlerfreien Rechnung einer genauen Erwägung unterliegen.

Die ersten 140 Decimalstellen sind:

$\pi$ = 3, 14159 26535 88793 23846 26433
83279 50288 41971 69399 37510 58209
74944 59230 78164 06286 20899 86280
34825 34211 70679 82148 08651 32823
06647 09384 46095 50582 26136 · · ·

Was die Methoden zur Berechnung dieser Zahl anbetrifft, so hat man sich vor Erfindung der Infinitesimalrechnung fast ausschliesslich der Betrachtung und Berechnung der regelmässigen Vielecke bedient, indem man den Flächeninhalt des Kreises mit dem eines solchen von sehr viel Seiten identificirte, oder seine Peripherie dem Umfange eines solchen Vieleckes gleich setzte. Offenbar gelangt man auf diese Weise zu einer beliebigen Annäherung, d. h. auf den Werth von $\pi$ auf beliebig viel Decimalstellen. Will man jedoch sehr viel dergleichen haben, so wird die Berechnung sehr beschwerlich, und Ludolph van Keulen bediente sich selbst nicht einmal der einfachsten Formeln, die hier zum Ziele führen. Wir werden hier zwei solche elementare Methoden zur Berechnung von $\pi$ geben.

3) Berechnung der Zahl $\pi$ auf elementarem Wege.

Fig. 37.



Sei (Fig 37.) $AB$ die Seite eines beliehigen in den Kreis nm $O$ eingeschriebenen regelmässigen Vielecks, $OD$ die Höhe des Dreiecks $AOB$. Hat das Vieleck $n$ Seiten, so ist also $AOB$ der $n$te Theil desselhen, $AOD$ der $2n$te Theil. Verlängert man $OD$ bis zur Peripberie des Kreises nach $C$, nnd zieht $AC$, so ist dies die Seite des Vielecks von $2n$-Seiten, $OE$ möge die Höhe desselhen sein.

Man hat dann:

$$AC^2 = AD^2 + DC^2 = AO^2 - OD^2 + (OC-OD)^2 = OC^2 - OD^2 + (OC-OD)^2 = 2OC^2 - 2OC \cdot OD = 2OC(OC-OD).$$

Also wenn wir die Seite des $n$Ecks mit $s$, die des $2n$Ecks mit $\sigma$, den Radius des beiden umgeschriebenen Kreises mit $R$, den Radius des dem $n$Eck eingeschriebenen Kreises ($OD$) mit $r$ hezeichnen, so ist:

$$\sigma^2 = 2R(R-r).$$

Es ist ferner, wenn wir mit $\varrho$ den Radius des dem $2n$Eck eingeschriebenen Kreises bezeichnen:

$$\varrho^2 = R^2 - \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2$$

oder wegen des ehen gefundenen Ausdrucks für $\sigma$:

$$\varrho^2 = R - \frac{R(R-r)}{2} = \frac{R(R+r)}{2}.$$

Da durch diese Formeln sich Seite und Radius des eingeschriehenen Kreises des $2n$Ecks finden lassen, wenn man die letztere Grösse fürs $n$Eck kennt, so lassen sich dieselben Ausdrücke für $4n$Eck, $8n$Eck u. s. w. nach und nach herechnen.

Die Dreiecke $ADO$ und $ACO$ haben gleiche Höhe $AD$, sie verhalten sich also wie die Grundlinien $OD$ und $OC$, d. b.:

$$\frac{ADO}{ACO} = \frac{r}{R};$$

beide Dreiecke sind aber bezüglich die $2n$ten Theile des $n$Ecks und des $2n$Ecks. Bezeichnet man also den Flächeninhalt des ersteren mit $F$, des letzteren mit $\varphi$, so ist das Verhältniss dieser Grössen dasselbe als der Dreiecke, also

$$\frac{F}{\varphi} = \frac{r}{R}$$

oder

$$\varphi = \frac{RF}{r}.$$

Wir nehmen jetzt an, der Radius $R$ des umgeschriebenen Kreises sei gleich der Einheit, so werden die Formeln für $\varphi$ und $\varrho$ sich verwandeln in:

$$\varrho = \sqrt{\frac{1+r}{2}}, \quad \varphi = \frac{F}{r}$$

oder wenn wir statt $\varrho$ und $\varphi$ in Bezug aufs $2n$Eck $r_1, F_1$, fürs $4n$Eck $r_2, F_2$, fürs $8n$Eck $r_3, F_3$ schreiben, so hahen wir:

$$1)\quad r_1 = \sqrt{\frac{1+r}{2}}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{1+r_1}{2}},$$

$$r_3 = \sqrt{\frac{1+r_2}{2}} \cdots\cdots r_s = \sqrt{\frac{1+r_{s-1}}{2}}$$

nnd nach Bestimmung dieser Grössen: $r_1, r_2 \cdots r_s$ kann man setzen:

$$F_1 = \frac{F}{r}, \quad F_2 = \frac{F_1}{r_1}, \quad F_3 = \frac{F_2}{r_2} \cdots\cdots$$

$$F_s = \frac{F_{s-1}}{r_{s-1}},$$

d. b.

$$2)\quad F_s = \frac{F}{r r_1 r_2 \cdots\cdots r_{s-1}}.$$

Die Ausdrücke $F_s$, $r_s$ bezieben sich auf das Vieleck von $2^s \cdot n$ Seiten.

Was auch $n$ sei, so kann man $s$ so gross nehmen, dass sich $r_s$ auf eine beliebige Anzahl Decimalstellen, etwa auf 7, dem Radius des umgeschriebenen Kreises, d. h. der Einheit nähert, und man sieht dann ein, dass sich in demselben Masse $F_s$ dem Kreise mit Halbmesser 1, d. h. der Zahl $\pi$ nähert.

Man kann also auf eine gleiche Anzahl Decimalstellen $F_s$ mit der Zahl $\pi$ identificiren, da die folgenden $r$ im Nenner, also $r_s, r_{s+1}$ nur in den folgenden Decimalstellen von Eins abweichen. Der Berechnung von $F_s = \pi$ nach Formel 2) muss also die successive Berechnung der $r$ nach Formel 1) vorangehen, und man setzt diese Rechnung so lange fort, bis $r_s$ für die beabsichtigte Anzahl von Bruchstellen nicht mehr von Eins abweicht.

Die Zahl $n$, mit der man beginnt, ist heliebig. Fangen wir z. B. mit dem regelmässigen Viereck an, so ist bekanntlich der Flächeninhalt desselben gleich dem doppelten Quadrat des Radius $R$, also hier gleich 2. Die Seite des Vierecks ist gleich $R\sqrt{2}$, also hier gleich $\sqrt{2}$ und der Radius

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{S^2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Es ist somit:

1a) $r = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad r_1 = \sqrt{\frac{1+r}{2}},$

$r_2 = \sqrt{\frac{1+r_1}{2}} \cdots r_s = \sqrt{\frac{1+r_{s-1}}{2}},$

2a) $F_s = \pi = \frac{2}{r\, r_1\, r_2 \cdots r_{s-1}}.$

Die Formel 2) eignet sich besonders zum logarithmischen Rechnen, die Formel 1) namentlich zur Anwendung der Gaussischen Tafeln, wenn nur 5 Decimalstellen verlangt werden, bei 7 Stellen kann man statt dessen die trigonometrischen Tafeln anwenden.

Es ist nämlich:

$$r = \sqrt{\frac{1}{2}} = \cos 45^\circ,$$

$$r_1 = \sqrt{1 + \frac{r}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \cos\frac{45^\circ}{2},$$

$$r_2 = \cos\frac{45^\circ}{4}$$

$$\cdots\cdots$$

$$r_s = \cos\frac{45^\circ}{2^s},$$

(vergleiche den Artikel: Trigonometrie), also:

$$\text{2b)} \quad \pi = \frac{2}{\cos 45 \cos\frac{45}{2} \cos\frac{45}{2^2} \cdots \cos\frac{45}{2^{s-1}}}$$

$$\text{3)} \quad \lg \pi = \lg 2 - (\lg\cos 45 + \lg\cos\frac{45}{2} + \lg\cos\frac{45}{4} + \cdots \lg\cos\frac{45}{2^{s-1}}).$$

Die Zahl $s$ ist so gross zu nehmen, dass $\lg\cos\frac{45}{2^{s-1}}$ in den ersten 7 Stellen nicht von Null abweicht.

Wir geben hier die so höchst einfache Rechnung:

| | | |
|---|---|---|
| $\lg\cos 45$ | = . . . . . . . . . . . | 9,8494850−10 |
| $\lg\cos\frac{45}{2}$ | = lg cos 22°30′ | = 9,9656153−10 |
| $\lg\cos\frac{45}{4}$ | = lg cos 11°15′ | = 9,9915739−10 |
| $\lg\cos\frac{45}{8}$ | = lg cos 5°37′30″ | = 9,9979037−10 |
| $\lg\cos\frac{45}{16}$ | = lg cos 2°48′45″ | = 9,9994766−10 |
| $\lg\cos\frac{45}{32}$ | = lg cos 1°24′22″5 | = 9,9998692−10 |
| $\lg\cos\frac{45}{64}$ | = lg cos 0°42′11″25 | = 9,9999673−10 |
| $\lg\cos\frac{45}{128}$ | = lg cos 0°21′ 5″62 | = 9,9999918−10 |
| $\lg\cos\frac{45}{256}$ | = lg cos 0°10′32″8 | = 9,9999980−10 |
| $\lg\cos\frac{45}{512}$ | = lg cos 0° 5′16″4 | = 9,9999995−10 |
| $\lg\cos\frac{45}{1024}$ | = lg cos 0° 2′38″2 | = 9,9999999−10 |
| | | 0,8038802−1 |

Da $1024 = 2^{10}$ ist, so ist hier $s = 10$, und die Rechnung ist fortgesetzt bis zum $4 \cdot 1024$ oder 4096 Eck, dessen Flächeninhalt in den ersten 7 Decimalstellen mit dem des Kreises, abgesehen von dem durch die Summation entstandenen Fehler übereinstimmen wird.

Der oben gefundene Werth ist nun abzuziehn von lg 2

lg 2 = 0,3010300
0,8038802−1
lg π = 0,4971498.

Der wahre Werth von $\lg \pi$ ist:

$$\lg \pi = 0{,}4971498726941338543512 7.$$

Es ist also bei dieser Rechnung nur ein Fehler gemacht, welcher weniger als eine Einheit der letzten Stelle beträgt.

Sind mehr als 7 Decimalstellen verlangt, so wird man sich der Formeln 1a und 2a selbst bedienen.

Wir knüpfen hier noch eine zweite Methode an, die auf dieselben Grundlagen sich stützt.

Fig. 38.




Sei (Fig. 38) $\partial b$ die Seite des $2n$Ecks, $\partial o$, $bo$ Halbmesser, $ab$ die Tangente für Punkt $b$, $ogf$ ein Loth auf $\partial b$, $\partial e$ parallel $ob$, und setzen wir:

$$\triangle\, \partial eo = \eta,\ obo = v,\ dbo = \eta',\ fbo = \tfrac{1}{2}v'.$$

Es ist dann:

$\eta$ der $2n$te Theil des eingeschriebenen $n$Ecks,

$\eta'$ der $2n$te Theil des eingeschriebenen $2n$Ecks,

$v$ der $2n$te Theil des umgeschriebenen $n$Ecks,

$v'$ der $2n$te Theil des umgeschriebenen $2n$Ecks.

Die mit $\eta'$ und $\eta$ bezeichneten Dreiecke haben die Höhe $de$ gemein, und verhalten sich wie die Grundlinien $ob$ und $os$.

Die mit $\eta'$ und $v$ bezeichneten Dreiecke haben ebenfalls die von $b$ ausgefällten Höhen gemein, und verhalten sich wie die Grundlinien $o\partial = ob$ und $oa$; man hat also:

$$\eta' : \eta = ob : oe$$

und

$$\eta' : v = ob : oo,$$

also durch Multiplication:

$$\eta'^2 : \eta v = ob^2 : oa \cdot oe.$$

Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke $o\partial e$ und $oba$, ist aber:

$$ob : oe = oa : o\partial$$

oder

$$ob : oe = oa : ob,$$

d. h.

$$ob^2 = oa \cdot oe,$$

also auch:

$$\eta'^2 = \eta v;$$

offenbar aber ist auch:

$$v : \eta = ob^2 : os^2,$$

da sich ähnliche Dreiecke wie die Quadrate gleichliegender Seiten verhalten, und aus demselben Grunde:

$$\tfrac{1}{2}v' : heo = ob^2 : os^2,$$

also:

$$v : \eta = \tfrac{1}{2}v' : heo.$$

Aber es ist:

$$heo = \tfrac{1}{2}v' - fbeh,$$

und man hat:

$$fbeh = fbg + gbeh,\ fbg \cong h\partial g,$$
$$h\partial g + gbeh = \partial be = \eta' - \eta,$$

also:

$$fbeh = \eta' - \eta,\ heo = \tfrac{1}{2}v' + \eta - \eta',$$

und dies in die obige Proportion einsetzend erhalten wir:

$$v : \eta = \tfrac{1}{2}v' : \tfrac{1}{2}v' + \eta - \eta',$$

d. h.

$$v'v - 2v(\eta' - \eta) = \eta v'$$

oder:

$$v'(v - \eta) = 2v(\eta' - \eta).$$

Wenn man links für $v$ noch seinen aus der ersten Relation gezogenen Werth $\frac{\eta'^2}{\eta}$ setzt, so erhält man

$$\frac{v'}{\eta}(\eta'^2 - \eta^2) = 2\iota(\eta' - \eta),$$

d. h. mit Hinweglassung des Factors $\eta' - \eta$:

$$\frac{v'}{\eta}(\eta' + \eta) = 2v$$

oder:

$$v' = \frac{2v\eta}{\eta' + \eta}.$$

Bezeichnet man nun:

den Flächeninhalt des eingeschriebenen $n$Ecks mit $E$,
den des umgeschriebenen $n$Ecks mit $U$,
den des eingeschriebenen $2n$Ecks mit $E'$,
den des umgeschriebenen $2n$Ecks mit $U'$,

so ist:

$$\eta = \frac{E}{2n},\quad v = \frac{U}{2n},\quad \eta' = \frac{E'}{2n},\quad v' = \frac{U'}{2n},$$

also verwandeln sich unsere beiden Gleichungen:

$$\eta'^2 = \eta v \text{ und } v' = \frac{2v\eta}{\eta' + \eta}$$

in:

$$\text{I)} \quad E' = \sqrt{(EU)},$$

$$\text{II)} \quad U' = \frac{2UE}{E + E'}.$$

Von diesen ebenfalls nicht unbequemen Formeln lehrt I zunächst, aus den gegebenen Flächeninhalten eines eingeschriebenen und umgeschriebenen Vielecks von derselben Seitenanzahl den Flächeninhalt des eingeschriebenen Vielecks von der doppelten Seitenanzahl finden. Mittels dieser Grösse gibt dann Formel II den Flächeninhalt des umgeschriebenen Vielecks von der doppelten Seitenanzahl. Man kann dann durch Wiederholung dieses Verfahrens zu Vielecken von der 4, 8 u. s. w. fachen Seitenanzahl, also wenn man den Radius gleich Eins nimmt, schliesslich zur Zahl $\pi$ gelangen. Das Criterium dafür, dass man sich derselben bis auf eine beliebig zu bestimmende Bruchstelle genähert habe, ist, dass die Grössen $E'$ und $U'$ bis auf diese Bruchstelle einander gleich sein müssen. Die Formeln I und II sind indess nicht ganz so bequem, als die beim ersten Verfahren benutzten.

Indess kann man sie noch etwas einfacher machen, wenn man zunächst nicht $\pi$ selbst, sondern seinen reciproken Werth $\frac{1}{\pi}$ sucht.

Sei zu dem Ende:

$$\frac{1}{E} = e,\ \frac{1}{E'} = e',\ \frac{1}{U} = u,\ \frac{1}{U'} = u',$$

so wird die Formel II die Gestalt annehmen:

$$\frac{1}{u'} = \frac{\frac{2}{ue}}{\frac{1}{e} + \frac{1}{e'}},$$

d. h.

$$u' = \frac{u}{2} + \frac{ue}{2e'},$$

während die Formel I ganz ihre Gestalt behält, also

$$\text{Ia)} \quad e' = \sqrt{(eu)}$$

gibt. Hieraus erhält man aber auch:

$$\frac{ue}{e'} = e',$$

und es wird daher die IIte Formel geben:

$$\text{IIa)} \quad u' = \frac{u + e'}{2}.$$

Diese Formel ist viel einfacher, als die mit II bezeichnete.

4) **Berechnung der Zahl $\pi$ durch Reihenentwicklung.**

Die Entwicklung der trigonometrischen Functionen in Reihen gibt aber weit bequemere Methoden zur Berechnung von $\pi$.

Wir werden hier nur einige dieser Formeln geben, deren Anzahl man sich leicht wird vermehren können.

Ist $\alpha$ ein beliebiger Bogen eines Kreises, dessen Radius die Einheit ist, so hat man bekanntlich:

$$\operatorname{arc\,tang} \alpha = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 + \frac{1}{5}\alpha^5 - \frac{1}{7}\alpha^7 + \frac{1}{9}\alpha^9 - \ldots,$$

eine Reihe, welche convergirt, so lange $\alpha$ nicht grösser als Eins ist. (Siehe die Artikel: Reihen und Trigonometrie.)

Für die Grenze Eins selbst convergirt sie noch aus dem Grunde, weil die Zeichen der Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, hat aber dann die Eigenschaft, dass die Summe von der Anordnung der Glieder abhängig wird (vergleiche den Artikel: Reihen). Da nun der zur Tangente Eins gehörige Bogen der 8te Theil des Kreises, also gleich $\frac{\pi}{4}$ ist, so hat man

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

und

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots\right).$$

Diese merkwürdige von Leibnitz herrührende Reihe ist aber von sehr langsamer Convergenz, und daher zur wirklichen Berechnung von $\pi$ ganz ungeeignet. Indess kann man aus der allgemeinen Formel leicht andre Theile von $\pi$ in schneller convergirende Reihen entwickeln.

So z. B. gehört zu einem Winkel von 30° bekanntlich ein Sinus, dessen Werth $\frac{1}{2}$ und ein Cosinus, dessen Werth $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ beträgt. Es wird also die Tangente dieses Winkels gleich $\frac{1}{\sqrt{3}}$ sein.

Der entsprechende Bogen aber ist der 12te Theil der Peripherie oder $\frac{\pi}{6}$ und man hat also, wenn man

$$\operatorname{arc\,tg} \alpha = \frac{\pi}{6}\ \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

setzt:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^2}\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{7}\frac{1}{3^3}\frac{\sqrt{3}}{3} + \ldots$$

oder:

$$\pi = 2\sqrt{3}\,[1 - \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^4} - \ldots],$$

eine schon ziemlich gut convergirende Reihe. Wirklich hat Laguy dieselbe seiner Berechnung zu Grunde gelegt. Viel schnellere Convergenz erreicht man indess, wenn man $\pi$ oder einen Theil davon in zwei andre ungleiche Stücke zerlegt, und beide nach der Formel für $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\alpha$ berechnet.

So setzt Machin:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{5}.$$

Man hat aber:

$$\operatorname{tg}2\vartheta = \frac{2\operatorname{tg}\vartheta}{1-\operatorname{tg}\vartheta^2} = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{5}{12}$$

$$\operatorname{tg}4\vartheta = \frac{2\operatorname{tg}2\vartheta}{1-\operatorname{tg}(2\vartheta)^2} = \frac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119},$$

also:

$$\operatorname{tg}(4\vartheta - \frac{\pi}{4}) = \frac{\operatorname{tg}4\vartheta - 1}{1+\operatorname{tg}4\vartheta} = \frac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}} = \frac{1}{239},$$

da $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) =$ ist.

Offenbar ist nun:

$$\frac{\pi}{4} = 4\vartheta - (4\vartheta - \frac{\pi}{4}),$$

aber nach dem Obigen

$$\vartheta = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{5}\right),\ 4\vartheta - \frac{\pi}{4} = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{239}\right),$$

also:

$$\pi = 4\left[4\operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{5}\right) - \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{239}\right)\right],$$

d. h. wenn man in die Formel für $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\alpha$ zuerst

$$\alpha = \frac{1}{5} \text{ und dann } \alpha = \frac{1}{239}$$

setzt:

$$\pi = 4\left[4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 5^3} + \frac{1}{5\cdot 5^5} - \frac{1}{7\cdot 5^7} + \cdots\right) - \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3\cdot 239^3} + \frac{1}{5\cdot 239^5} - \frac{1}{7\cdot 239^7} + \cdots\right)\right].$$

Diese beiden Reihen, namentlich aber die letztere, convergiren ausserordentlich schnell.

Mit diesen Ausdrücken für $\pi$ verbinden wir noch das Wallis'sche Product:

$$\pi = \frac{2^2\ 4^2\ 6^2\ \ldots\ 4\varrho^2}{1^2\ 3^2\ 5^2\ \ldots\ (2\varrho-1)^2\,\varrho},$$

wo $\varrho$ ins Unendliche wächst. Natürlich ist dieser Ausdruck weniger zur Berechnung von $\pi$ geeignet, als die zuletzt entwickelte Formel. (Entwickelt ist dieses Product hier im Artikel: analytische Quadraturen, Abschnitt 50. Vergleiche auch den Artikel: Trigonometrie.)

Aus der Leibnitzschen Reihe entwickelt Euler noch die Zahl $\pi$ in Form eines Kettenbruchs.

Es ist:

$$\frac{1}{4}\pi = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\cdots}}}}}}$$

Den Beweis dieser Entwicklung enthält der Artikel: Kettenbrüche. Der Ausdruck ist darum wichtig, weil sich aus ihm folgern lässt, dass $\pi$ nicht durch Auflösen einer quadratischen Gleichung zu erhalten sei, was den Beweis für die Unmöglichkeit einer Quadratur des Kreises im engern Sinne gibt.

Man kann aber auch den Ausdruck

$$\pi = 3{,}14159265\ldots$$

in einen Kettenbruch im engern Sinne, d. h. in einen solchen verwandeln, wo alle Theilzähler gleich 1 sind, man erhält dann Näherungsbrüche für $\pi$, und nach den Eigenschaften der Kettenbrüche sind dies immer die genauesten Annäherungen, die sich finden lassen, wenn man nicht gleichzeitig Zähler und Nenner vergrössern will.

Es ist

$$\pi = 3 + \frac{14159265}{100000000},$$

```
14159265|100000000|7
         | 99114855|
            885145
885145|14159265|15
      |  885145|
         5307815
         4425725
          882090
882090|885145|1
      |882090|
         3055
3055|882090|288
    |6110  |
     27109
     24440
      26690
      24440
       2250
2250|3055|1
```

u. s. w., also:

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{288+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$$

Dieser Entwicklung geht allerdings die leicht aufzufindende Regelmässigkeit ab, welche die Eulersche auszeichnet.

Die sich hieraus ergebenden Näherungswerthe sind:

1) $\pi = 3$

2) $\pi = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$

3) $\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15}} = \frac{333}{106}$

4) $\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1}}} = \frac{355}{113}$

5) $\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{288}}}} = \frac{102573}{32877}$

u. s. w.

Die unter 2) angegebene Zahl ist die archimedische. Ein genauerer Werth von $\pi$ ergibt sich mithin erst, wenn man dem Zähler und Nenner 3 Ziffern gibt.

Die vierte Näherung fand Adrian Metius. Sie ist sehr genau, da der nächst genauere Werth schon 6 Bruchstellen im Zähler, 5 im Nenner hat. In der That findet man:

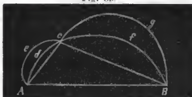
$$\frac{355}{113} = 3{,}1415929\cdots,$$

eine Zahl, die erst in der siebenten Bruchstelle um $2\frac{1}{2}$ Einheiten von dem wahren Werthe von $\pi$ abweicht, und daher wohl in allen practischen Rechnungen als mit $\pi$ identisch gesetzt werden kann.

5) **Geometrische Quadratur gewisser von Kreisen begrenzter Figuren.**

Die folgende geometrische Quadratur einer von Kreisbogen begrenzten Figur gehört dem griechischen Geometer Hip-

Fig. 39.




pokrates (450 v. Chr.) an. Der sie umfassende Satz wird der Gestalt der Figuren wegen gewöhnlich der von den „Möndchen des Hippokrates" (lunulae Hippocratis) genannt.

Errichte man (Fig. 39.) über dem Durchmesser $AB$ eines Halbkreises das rechtwinklige Dreieck $AcB$, und schlage über $Ac$ und $Bc$ als Durchmesser Halbkreise, so entstehen 2 halbmondförmige Figuren $Adce$, $cfBg$, deren Flächeninhalt zusammen gleich dem des Dreiecks $AcB$ ist, sich also augenblicklich in eine gradlinige Figur und mithin in ein Quadrat auf geometrischem Wege verwandeln lässt.

Offenbar nämlich ist:

$$\text{Halbkreis } AdcfB = \pi\, AB^2,$$
$$\text{Halbkreis } Ace = \pi\, Ac^2,$$
$$\text{Halbkreis } cBg = \pi\, cB^2,$$

also:

$$Ace + cBg = \pi\,(Ac^2 + cB^2) = \pi\, AB^2.$$

Da nämlich $ABc$ ein rechtwinkliges Dreieck ist, hat man

$$Ac^2 + cB^2 = AB^2,$$

hieraus folgt:

$$Ace + cBg = AdcfB;$$

zieht man auf beiden Seiten dieser Gleichung die Segmente $Adc$ und $cfB$ ab, so bleibt:

$$Adce + cfBg = AcB.$$

Im Allgemeinen ist es unmöglich, jedes der Möndchen einzeln zu quadriren. In dem Falle gelingt es aber natürlich, wenn $AC = CB$, also auch beide Möndchen gleich sind, wo dann jedes gleich der Hälfte des Dreiecks $ACB$ ist. Unser Satz lautet dann:

„Errichtet man über der Sehne $AB$ eines Quadranten einen Halbkreis $Aeb$, so ist das von diesem und dem Viertelkreise eingeschlossene Möndchen gleich dem Dreiecke $AcB$."

Dies Möndchen ist jedoch nicht das einzige, welches sich quadriren lässt.

Um mehr dergleichen zu finden, stellt Clausen (Crelles Journal 1840) folgende Betrachtung an.

Fig. 40.




Sei (Fig. 40.) $AOBE$ ein beliebiger Kreissector, $ODE$ senkrecht auf Sehne $AB$; in dieser Linie ist Punkt $C$ als Mittelpunkt eines zweiten Kreises angenommen, der dann auch durch $A$ und $B$ geht, und Sector $AE'BC$ bildet.

Wir wollen Punkt $C$ so bestimmen, dass Sector $AE'BC = AEBO$ ist; offenbar ist dann auch das Möndchen $AEBE'$ gleich der gradlinigen Figur $AOBC$, also auf geometrischem Wege quadrirbar.

Sei

$$AO = r,\ \ AC = \varrho,$$

$$\text{Winkel } AOE = \varphi,\ \ \text{Winkel } ACE' = \vartheta,$$

so sind, wenn man sich $\varphi$ und $\vartheta$ in Bogenmass dargestellt denkt, d. h. als Bogen eines Kreises, dessen Radius 1 ist (Abschnitt 2, Formel 4a):

$$\text{Sector } AOBE = r^2\varphi,$$
$$\text{Sector } ACBE' = \varrho^2\vartheta,$$

also vermöge unserer Annahme:

$$r^2\varphi = \varrho^2\vartheta.$$

Ausserdem aber hat man:

$$AD = r\sin\varphi = \varrho\sin\vartheta,$$

also

$$r\sin\varphi = \varrho\sin\vartheta.$$

Nehmen wir jetzt an, $m$ und $n$ seien beliebige ganze Zahlen, und

$$\varphi = m\alpha,\ \vartheta = n\alpha,$$

so ist:

$$r^2 m = \varrho^2 n,$$

$$r\sqrt{(m)} = \varrho\sqrt{(n)}$$

und

$$r \sin m\alpha = \varrho \sin n\alpha,$$

aus welchen beiden Gleichungen sich ergibt:

$$\sqrt{(n)} \sin m\alpha = \sqrt{(m)} \sin n\alpha.$$

Nimmt man $n$ und $m$ irgend wie an, und lässt sich dann $\sin\alpha$ geometrisch construiren, so sind nach den Grundsätzen der Trigonometrie auch $\sin m\alpha$ und $\sin n\alpha$ geometrisch construirbar, also

$$\varrho = \frac{r \sin m\alpha}{\sin n\alpha}$$

ebenfalls; es ist also dann der Punkt $O$ bekannt, und ihm entspricht das quadrirbare Möndchen $AEBE'$. Dies gelingt in folgenden 4 Fällen.

1) Sei

$$n = 2,\ m = 1,$$

also:

$$\sqrt{(2)} \sin\alpha = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$$

d. h.

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Diesem Ausdrucke entspricht Winkel $\alpha = 45^\circ$ und das entsprechende Möndchen ist das des Hippokrates.

2) Sei

$$n = 3,\ m = 1,$$

also:

$$\sqrt{(3)} \sin\alpha = \sin 3\alpha = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha \sin 2\alpha,$$

d. h.

$$\sin\alpha(\sqrt{3} - \cos 2\alpha) = \cos\alpha \sin 2\alpha$$

oder wenn man

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}},\ \cos\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$$

setzt:

$$(1-\cos 2\alpha)(\sqrt{3}-\cos 2\alpha)^2 = (1+\cos 2\alpha)(1-\cos 2\alpha^2),$$

d. h.

$$(\sqrt{3}-\cos 2\alpha)^2 = (1+\cos 2\alpha)^2$$

oder:

$$\sqrt{3} - \cos 2\alpha = \pm(1+\cos 2\alpha).$$

Das untere Zeichen ist natürlich zu verwerfen, und man erhält:

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1).$$

3) Sei

$$n = 3,\ m = 2.$$

$$\sqrt{3}\sin 2\alpha = \sqrt{2}\sin 3\alpha = \sqrt{2}(\sin 2\alpha\cos\alpha + \cos 2\alpha \sin\alpha)$$

oder wenn man $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ setzt:

$$2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha(2\cos\alpha^2 + \cos 2\alpha)$$

$$2\sqrt{3}\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \sqrt{2}(2\cos 2\alpha + 1)$$

$$\sqrt{3}\sqrt{(1+\cos 2\alpha)} = 1 + 2\cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha^2 + \frac{1}{4}\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2\alpha = -\frac{1}{8} \pm \frac{\sqrt{33}}{8}.$$

Das untere Zeichen gibt für $\varphi$ und $\vartheta$ stumpfe, das obere spitze Winkel.

4) Sei

$$n = 5,\ m = 1,$$

also:

$$\frac{\sin 5\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{5}$$

oder

$$\sqrt{5} = \frac{\sin 4\alpha\cos\alpha + \cos 4\alpha \sin\alpha}{\sin\alpha} = 4\cos\alpha^2 \cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha^2 - 1$$

oder:

$$\sqrt{5} + 1 = 4\cos 2\alpha^2 + 2\cos 2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{\pm\sqrt{5+4\sqrt{5}} - 1}{4}.$$

Hier ist jedoch das negative Zeichen der Wurzel zu verwerfen, da ein Werth sich ergeben würde, welcher abgesehn vom Vorzeichen grösser als 1 ist, man hat also:

$$\cos 2\alpha = \frac{+\sqrt{5+4\sqrt{5}} - 1}{4}.$$

Es ergeben sich hieraus die den vier Fällen entsprechenden Winkel $\varphi$ und $\vartheta$.

Fall 1) $\alpha = 45^\circ$, $\varphi = 45^\circ$, $\vartheta = 90^\circ$.

Fall 2) $\cos 2\alpha = 0{,}3660254$.

$2\alpha = 68^\circ 30'$, $\varphi = 34^\circ 15'$, $\vartheta = 102^\circ 45'$.

Fall 3) $\cos 2\alpha = -\frac{1}{8} \pm \frac{5{,}7445626}{8}$.

Also wenn das obere Zeichen gilt:

a) $\cos 2\alpha = \frac{4{,}7445626}{8} = 0{,}5930703$,

$2\alpha = 53^\circ 38'$, $\alpha = 26^\circ 49'$, $\varphi = 53^\circ 38'$, $\vartheta = 80^\circ 27'$.

Gilt dagegen das untere Zeichen, so ist:

b) $\cos 2\alpha = -\frac{6,7445626}{8} = -0,8430703,$

$2\alpha = 147°28',\quad \alpha = 73°44',$
$\varphi = 147°28',\quad \vartheta = 221°12'.$

Da der Centriwinkel $ACB$ aber gleich $2\vartheta$, also gleich $442°24'$ ist, so sieht man, dass in diesem Falle der entsprechende Sector grösser, als der ganze Kreis ist. In diesem Falle ist also das Viereck durchaus keiner mondförmig begrenzten Figur gleich. Wir unterlassen die geometrische Deutung dieses Falles wegen des geringen Interesses, den er gewährt.

Fall 4)

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{13,9442720}-1}{4} = \frac{2,734203}{4} = 0,683551$$

$2\alpha = 46°53',\ \varphi = 23°26\tfrac{1}{2}',\ \vartheta = 117°12'.$

6) Quadratur der von Kegelschnitten begrenzten Flächenstücke.

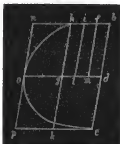
Die Quadratur von Stücken, die von graden Linien und einer Parabel, Ellipse und Hyperbel begrenzt sind, gelingt immer auf elementarem Wege, jedoch ist wohl zu bemerken, dass hier nicht, wie beim Kreise, Rectification und Quadratur von einander abhängen. Bei Ellipse und Hyperbel führt die Rectification sogar zu neuen, in der elementaren Mathematik nicht zu behandelnden Functionen.

Beginnen wir mit der Quadratur der Parabel.

$$y^2 = 2px$$

ist die Gleichung einer solchen. Wir denken uns diese Gleichung im Allgemeinen auf schiefwinklige Coordinaten bezogen, wovon die eine $x$ ein beliebiger Durchmesser, die andre $y$ eine Tangente ist, die durch den Punkt geht, wo dieser die Parabel trifft. Beide mögen Winkel $\chi$ mit einander machen. Möge

Fig. 41.



es sich um die Bestimmung des Flächenstücks $g\partial bh$ (Fig. 41.) handeln, welches von einem Theile der Abscissenaxe, zwei Ordinaten und einem Stücke der Parabel eingeschlossen ist. Es sei

$$gh = y,\quad \partial b = y',$$
$$og = x,\quad o\partial = x'.$$

Wir denken uns $g\partial$ in verschwindend kleine Theile $r_1, r_2, r_3$ u.s.w. getheilt, so dass $gl = r_1$, $lm = r_2$ ... ist, die zu $gl$ ... gehörigen Ordinaten bezeichnen wir mit $y_1, y_2, y_3$ ..., die Abscissen mit $x_1, x_2, x_3$ ... Es werden dann $glih$, $ilmf$ ... sich Rechtecken nähern, deren Seiten bezüglich $r, r_1, r_2, r_3$ ..., $y, y_1, y_2, y_3$ ... sind. Wohl zu merken, brauchen $r, r_1, r_2, r_3$ ... nicht untereinander gleich gedacht zu werden, wenn diese Strecken sich nur der Null nähern. Man hat nun, da Figur:

$$ghil = gl \cdot gh \sin\chi = ry \sin\chi$$

ist und Aehnliches für die andern Figuren gilt:

$$hg\partial b = \sin\chi(ry + r_1y_1 + r_2y_2 + \cdots + r_ny_n).$$

Das Gesetz, nach dem die Grössen $r$ sich auseinander ergeben, ist ganz gleichgültig, jedenfalls aber ist

$$x_1 - x = r,\ x_2 - x_1 = r_1\ \ldots\ x_n - x_{n-1} = r_{n-1}.$$

Nehmen wir an, es sei:

$$x_1 = \lambda x,\ x_2 = \lambda x_1 = \lambda^2 x,\ x_3 = \lambda^3 x\ \ldots,\ x_n = \lambda^n x,$$

also:

$$r = x_1 - x = x(\lambda - 1), r_1 = x_2 - x_1 = \lambda x(\lambda - 1)\ \ldots,\ r_{n-1} = x_n - x_{n-1} = \lambda^{n-1}x(\lambda - 1),$$

so werden die Grössen $r$ in der That verschwindend klein, wenn man $\lambda$ sich der Einheit nähern lässt.

Nach der Gleichung der Parabel aber ist:

$$y_1^2 = 2px_1 = 2p\lambda x,\ y_2^2 = 2px_2 = 2p\lambda^2 x\ \ldots,\ y_n^2 = 2p\lambda^n x;$$

führt man nun $y$ statt $x$ ein, so ergibt sich:

$$x_n = \frac{y_n^2}{2p},$$

also:

$$r = \frac{y^2(\lambda-1)}{2p},\quad r_1 = \frac{\lambda(\lambda-1)y^2}{2p},\quad r_2 = \frac{\lambda^2(\lambda-1)y^2}{2p}\ \ldots, r_{n-1} = \frac{\lambda^{n-1}(\lambda-1)y^2}{2p}$$

$$y_n^2 = 2p\lambda^n x = \lambda^n y^2,$$

also:

$$hg\partial b = \frac{\sin\chi\, y^3}{2p}\ (\lambda-1)\,(1+\lambda^{\frac{3}{2}}+\lambda^{\frac{6}{2}}+\lambda^{\frac{9}{2}}+\ \cdots\ \lambda^{\frac{3s}{2}}).$$

Es ist hierbei vorausgesetzt, dass die $s$te Ordinate $y_s$ diejenige ist, welche $y'$ unmittelbar vorhergeht.

Man hat aber:

$$1+\lambda^{\frac{3}{2}}+\lambda^{\frac{6}{2}}+\ \cdots\ +\lambda^{\frac{3s}{2}} = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}(s+1)}-1}{\lambda^{\frac{3}{2}}-1},$$

also:

$$hg\partial b = \frac{\sin\chi y^3}{2p}\ \frac{(\lambda-1)}{(\lambda^{\frac{3}{2}}-1)}\,(\lambda^{\frac{3}{2}(s+1)}-1).$$

Nun ist:

$$y' = y_{s+1} = \lambda^{\frac{s+1}{2}}\, y,$$

also:

$$\lambda^{\frac{3}{2}(s+1)} = \left(\frac{y'}{y}\right)^3$$

und

$$\frac{\lambda-1}{\lambda^{\frac{3}{2}}-1} = \frac{(\lambda^{\frac{1}{2}}+1)\,(\lambda^{\frac{1}{2}}-1)}{(\lambda^{\frac{1}{2}}-1)(\lambda+\lambda^{\frac{1}{2}}+1)} = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}}+1}{\lambda+\lambda^{\frac{1}{2}}+1}.$$

Dieser Ausdruck aber gibt, wenn man, wie hier angenommen wird, $\lambda$ sich der Einheit nähern lässt:

$$\frac{\lambda-1}{\lambda^{\frac{3}{2}}-1} = \tfrac{2}{3}$$

und somit:

$$hg\partial b = \frac{\sin\chi\, y^3}{3p}\left[\left(\frac{y'}{y}\right)^3 - 1\right)$$

oder

$$hg\partial b = \frac{1}{3p}\ \sin\chi\,(y'^3 - y^3).$$

Wegen

$$y^2 = 2px$$

hat man aber noch

$$y^2 = 2pxy,\ y'^3 = 2px'y',$$

also:

$$hg\partial b = \frac{2}{3}\ \sin\chi\,(x'y' - xy).$$

Für Flächeninhalt $kg\partial c$ ergibt sich offenbar derselbe Werth, da die beiden Werthe von $y$, die demselben $x$ entsprechen, nur in Bezug auf das Zeichen von einander abweichen, also:

$$khbi = \frac{4}{3}\ \sin\chi\,(x'y' - xy).$$

Sucht man das parabolische Segment $kho$, so ist für $x$ und $y$ Null, für $x'y'$ bezüglich $xy$ zu setzen, also:

$$kho = \frac{4}{3}\ \sin\chi xy.$$

Zieht man durch 0 eine Tangente, die also mit $y$ parallel ist, und nimmt $kp$ und $hn$ dem Durchmesser parallel, so ist:

Parallelogramm $kpnh = 2xy\sin\chi$.

Es folgt hieraus der Satz:

„Das parabolische Segment ist gleich $\frac{2}{3}$ des Parallelogramms, welches die Sehne und den aus ihrer Mitte gezogenen conjugirten Durchmesser zu Seiten hat."

Hiernach ist also die Parabel einer rein geometrischen Quadratur zugänglich, eine Eigenschaft, welche bereits Archimedes (287—212 v. Chr.) gefunden hat.

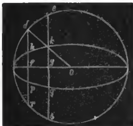
Gehen wir jetzt zur Ellipse über.

Die Quadratur derselben lässt sich leicht auf die des Kreises zurückführen. Sei

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{\varrho^2}=1$$

die Gleichung der Ellipse bezogen auf die Hauptdurchmesser. Denke man sich über dem grössern derselben einen Kreis

Fig. 42.



errichtet (Fig. 42.), dessen Gleichung sein wird

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=1.$$

Zur Abscisse $x$ mögen die Ordinaten $y$ der Ellipse, und $y_1$ des Kreises gehören. Es ist dann:

$$y_1{}^2=r^2\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right),\ y^2=\varrho^2\left(1-\frac{x^2}{r^2}\right),$$

also:

$$y=\varrho\frac{y_1}{r},$$

d. h. jede Ordinate der Ellipse ist $\frac{\varrho}{r}$ mal so gross, als die des Kreises, oder die elliptische Ordinate verhält sich zur Kreisordinate wie die kleine Axe zur grossen.

Denkt man sich nun die grosse Axe in verschwindend kleine Theile $\mu$ getheilt, und durch jeden Theilpunkt eine Ordinate gezogen, so zerfallen Kreis und Ellipse in Figuren, die man sich als verschwindend kleine Rechtecke denken kann, und deren Flächeninhalt für den Kreis $\mu y_1$, für die Ellipse $\mu y=\frac{\mu\varrho}{r}y_1$ beträgt. Da nun die Figuren $defg$, $hkgf$ sich aus solchen Rechtecken zusammensetzen, so ergibt sich, da gleiches auch für die Figuren $fgqp$, $fgsr$ gilt:

„Der Flächeninhalt jeder von 2 Ordinaten und der Ellipse begrenzten Figur $pqed$, ist gleich $\frac{\varrho}{r}$ mal dem Flächeninhalte des von beiden Ordinaten abgeschnittenen Stückes des Kreises, welcher die grosse Axe zum Durchmesser hat."

Es ist also auch die ganze Ellipse gleich $\frac{\varrho}{r}$ mal dem Flächeninhalte des Kreises, und da dieser $=\pi r^2$ ist, so hat man für den der Ellipse:

$$E=\pi\varrho r.$$

Bestimmen wir noch den Flächeninhalt des Stückes $hfgk$. Wir setzen

$$hf=a,\ kg=b,$$

so ist

$$df=\frac{ra}{\varrho},\ eg=\frac{rb}{\varrho}.$$

Sei 0 der Mittelpunkt und

$$of=\alpha,\ og=\beta,$$

dann ist:

$$defg=\text{Sector } deo+\triangle dof-\triangle eog,$$

$$\sin eof=\frac{eg}{r}=\frac{b}{\varrho}$$

$$\sin dof=\frac{df}{r}=\frac{a}{\varrho},$$

also:

$$\text{Winkel } doe=\text{arc}\sin\frac{b}{\varrho}-\text{arc}\sin\frac{a}{\varrho}$$

$$\text{Sector } deo=\frac{r^2}{2}\left(\text{arc}\sin\frac{b}{\varrho}-\text{arc}\sin\frac{a}{\varrho}\right),$$

$$\triangle dof=\frac{ra\alpha}{2\varrho},\ \triangle eog=\frac{rb\beta}{2\varrho},$$

also:

$$defg=\frac{r}{2}\left(r\,\text{arc}\sin\frac{b}{\varrho}-r\,\text{arc}\sin\frac{a}{\varrho}+\frac{a\alpha-b\beta}{\varrho}\right)$$

und

$$hkfg=\frac{r\varrho}{2}\left(\text{arc}\sin\frac{b}{\varrho}-\text{arc}\sin\frac{a}{\varrho}\right)+\frac{a\alpha-b\beta}{2}.$$

Die arc sin sind natürlich in Bogenmass, also für den Radius 1 zu bestimmen.

Soll ein Segment der Ellipse berechnet werden, so ist vom Scheitelpunkt auszugehen, also $a=0$, $\alpha=r$ zu setzen, und der ebengefundene Werth von $hkfg$ zu verdoppeln, da die Sehne zweimal die Ellipse schneidet, man erhält:

$$\text{Segment} = r\varrho \arcsin \frac{b}{\varrho} - b\beta.$$

Soll ein Stück gefunden werden, welches vom kleinen Halbmesser und einer beliebigen Ordinate begrenzt ist, so hat man $b = r$ zu setzen, $\beta = 0$. Man erhält dann, wenn $f$ die entsprechende Figur ist, da

$$\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

ist:

$$f = \frac{r\varrho}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\alpha}{\varrho}\right) + \frac{\alpha\alpha}{2}.$$

Es ist noch die Quadratur der Hyperbel zu vollziehen. Zu dem Ende nehmen wir die Assymptoten dieser Curve als Axen. Die Gleichung derselben ist dann

$$xy = a^2,$$

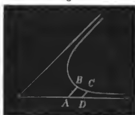
wo

$$a^2 = \frac{r^2 + \varrho^2}{4}$$

die Potenz der Hyperbel vorstellt. Die Quadratur wird ähnlich wie die der Parabel bewerkstelligt.

Sei $\chi$ der Winkel beider Assymptoten, so ist der Flächeninhalt eines Stückes

Fig. 43.




$ABCD$, welches von der Curve einem Stücke $x' - x$ der einen Assymptote, und zweien der andern Assymptote parallelen Linien $y$ und $y'$ begrenzt wird, gleich dem Parallelogramm mit Seiten $AB = y$, $AD = \nu$ zu setzen, wenn $AD$ verschwindend klein wird, und dies Parallelogramm ist gleich $\nu y \sin\chi$. Was also auch $ABCD$ für eine Grösse habe, so kann man immer es einer Summe solcher Parallelogramme identisch nehmen. Man hat also:

$$ABCD = \sin\chi\,(y\nu + y_1\nu_1 + y_2\nu_2 + \cdots + y_s\nu_s),$$

wo $y_s$ die zunächst $y'$ vorhergehende Ordinate ist. Da aber vermöge der Gleichung der Hyperbel $y = \frac{a^2}{x}$ war, so kann man auch setzen:

$$ABCD = a^2 \sin x\left(\frac{\nu}{x} + \frac{\nu_1}{x_1} + \frac{\nu_2}{x^2} + \cdots + \frac{\nu_s}{x_s}\right).$$

Das Gesetz, welchem die $\nu$ folgen, ist beliebig, wenn nur diese Stücke continuirlich aus einander entstehen, und immer ist

$$\nu_n = x_{n+1} - x_n.$$

Wir setzen:

$$x_1 = \alpha x,\ x_2 = \alpha x = \alpha^2 x \cdots,\ x_s = \alpha^s x,$$

wo $\alpha$ eine der Einheit sich nähernde Grösse sein muss, und erhalten:

$$\nu = x(\alpha - 1),\quad \nu_1 = x\alpha(\alpha - 1),$$

$$\nu_2 = x\alpha^2(\alpha - 1) \cdots,\quad \nu_n = x\alpha^n(\alpha - 1),$$

$$ABCD = a^2 \sin\chi(\alpha - 1)(s + 1).$$

Man hat aber

$$x' = \alpha^{s+1} x,$$

d. h.

$$(s+1)\lg\alpha = \lg\frac{x'}{x}.$$

Ferner setzen wir:

$$\alpha = e^{\lg\alpha}$$

oder

$$\alpha = 1 + \lg\alpha + \frac{(\lg\alpha)^2}{1\cdot 2} + \cdots$$

Da sich aber $\alpha$ der Einheit nähert, so kann man die gegen das erste und zweite Glied verschwindenden folgenden Glieder dieser Reihe ganz weglassen, und erhält:

$$\alpha = 1 + \lg\alpha,\quad \alpha - 1 = \lg\alpha,$$

also:

$$(\alpha - 1)(s + 1) = \lg\left(\frac{x'}{x}\right),$$

d. h.:

$$ABCD = a^2 \sin\chi \lg\left(\frac{x'}{x}\right).$$

Die Logarithmen, welche hierin vorkommen, gehören bekanntlich dem natürlichen Systeme an, und man hat dieses System daher auch das der hyperbolischen Logarithmen genannt.

7) Quadratur der Cycloide.

Man sieht, dass die hier angestellten Quadraturen sich alle auf dasselbe Princip der Zerlegung in unendlich kleine

Parallelogramme zurückführen lassen, und ebenso ersichtlich ist es, dass sich mittels der Infinitesimalrechnung, aber nur auf diese Weise, leicht eine algorithmische Darstellung des ganzen Verfahrens wird geben lassen.

Wir wollen daher nur noch die Quadratur der Cycloide auf elementarem Wege darstellen, weil diese Aufgabe von Roberwall bereits 1634 gelöst ist, und eine gewisse Berühmtheit erlangt hat.

Die Cycloide stellt man gewöhnlich dar durch ein System 2er Gleichungen:

$$x = r(v - \sin v),\quad y = r(1 - \cos v),$$

wo $x$ und $y$ rechtwinklige Coordinaten, $r$ der Halbmesser des Erzeugungskreises, $v$ derjenige abgerollte Bogen ist, welcher zu dem durch $x$ und $y$ bestimmten Punkte gehört. Für einen ganzen Zweig der Cycloide ist dann $v = 2\pi$, da hier der ganze Kreis abgerollt sein muss.

Ein beliebiges Flächenstück, welches von den Ordinaten $y$ und $y'$, dem Abscissenstücke $x' - x$ und der Curve begrenzt ist, zerlegt man ganz, wie dies im vorigen Abschnitte geschah, in unendlich kleine Rechtecke. Ist dies Stück $A$, so hat man dann:

$$A = (x_1 - x)y + (x_2 - x_1)y_1 + (x_3 - x_2)y_2 + \\ + \cdots + (x_{s+1} - x_s)y_s$$

und es ist

$$x_{s+1} = x',\ y_{s+1} = y'$$

zu setzen. Führen wir aber für $x$ und $y$ ihre Werthe ein, und entspricht den Grössen $x_n, y_n$ der Bogen $v_n$, $x', y'$ der Bogen $v' = v_{s+1}$, so hat man, wenn man

$$v_1 - v = v_2 - v_1 = v_3 - v_2 = \cdots = \nu$$

setzt, also hier diese Differenzen als gleich betrachtet:

$$A = r^2 \sum_{n=0}^{n=s} [(v_{n+1} - v_n)\ (\sin v_{n+1} - \sin v_n)]\ (1 - \cos v_n).$$

Es ist aber:

$$v_{n+1} - v_n = \nu$$

$$\sin v_{n+1} - \sin v_n = 2 \sin \frac{\nu}{2} \cos \frac{v_{n+1} + v_n}{2};$$

da $v_{n+1}$ sich nur unendlich gering von $v_n$ unterscheidet, kann man setzen:

$$\cos \frac{v_{n+1} + v_n}{2} = \cos v_n,\quad \sin \frac{\nu}{2} = \frac{\nu}{2},$$

also:

$$A = r^2 \sum_{n=0}^{n=s} \nu (1 - \cos v_n)^2,$$

und es ist

$$(1 - \cos v_n)^2 = 1 - 2 \cos v_n + \cos v_n{}^2 = \tfrac{3}{2} - 2 \cos v_n + \tfrac{1}{2} \cos 2v_n.$$

Sei nun:

$$\Sigma \cos v_n = U,$$

so wird:

$$U \sin \nu = \Sigma \cos v_n \sin \nu = \tfrac{1}{2} \Sigma \sin (v_n + \nu) - \tfrac{1}{2} \Sigma \sin (v_n - \nu)$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=s} \sin v_{n+1} - \tfrac{1}{2} \sum_{n=0}^{n=s} \sin v_{n-1}.$$

In diesen Summen heben sich alle Glieder bis auf die beiden letzten der ersten Summe, und bis auf die beiden ersten der letzten Summe, so dass man hat:

$$U \sin \nu = \tfrac{1}{2} (\sin v_{s+1} + \sin v_s - \sin v - \sin v_{-1})$$

$$= \tfrac{1}{2} [\sin v' + \sin (v' - \nu) - \sin v - \sin (v - \nu)].$$

Die Grössen $v'$, $v' - \nu$ einerseits und $v$, $v - \nu$ andrerseits können aber wegen des verschwindend kleinen $\nu$ ohne weiteres identificirt werden, ebenso wie $\sin \nu$ mit $\nu$ selbst; es ist also:

$$U\nu = \sin v' - \sin v,$$

d. h.

$$\Sigma \cos v_n = \frac{\sin v' - \sin v}{\nu}$$

und man erhält ebenso:

$$\Sigma \cos 2v_n = \frac{\sin 2v' - \sin 2v}{2\nu}.$$

Dies in den Werth von $A$ eingesetzt ergibt, mit Berücksichtigung, dass

$$\Sigma (\tfrac{3}{2}) = \tfrac{3}{2} \sum_{n=0}^{n=s} 1 = \tfrac{3}{2}(s+1)$$

ist, und dass die Gleichungen:

$$v_1 - v = \nu,\ v_2 - v_1 = \nu \cdots v_{s+1} - v_s = \nu,$$

sämmtlich addirt geben:

$$v_{s+1} - v = (s+1)\nu,\ s+1 = \frac{v_{s+1} - v}{\nu} = \frac{v' - v}{\nu},$$

$$A = \tfrac{3}{2} r^2 (v' - v) - 2r^2 (\sin v' - \sin v) + \tfrac{1}{4}(\sin 2v' - \sin 2v).$$

Sucht man den Flächeninhalt eines ganzen Zweiges, so ist $v = 0$, $v' = 2\pi$ zu nehmen, und man hat:

$$A = 3\pi r^2.$$

Diese Formel mit der in Abschnitt 2) gegebenen:

$$K = \pi r^2$$

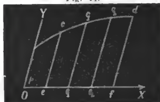
verglichen, sagt:

„Der Flächeninhalt eines Zweiges der Cycloide ist das dreifache des Flächeninhalts des Erzeugungskreises."

8) **Allgemeine Lösung des Problems der Quadraturen mittels der Infinitesimalrechnung.**

Die allgemeinen Quadraturformeln sind eben nur die Ausführung der hier in einzelnen Beispielen gegebenen Methode.

Fig. 44.




Mögen (Fig. 44.) $OY$ und $OX$ zwei Coordinatenaxen sein, die wir uns der Allgemeinheit wegen schiefwinklig auf einander denken, so dass sie den Winkel $\varphi$ mit einander bilden. Seien $ec = y$, $\partial f = y'$ beliebige Ordinaten, $Oe = x$, $Of = x'$ die zugehörigen Abscissen und soll das Flächenstück $ef\partial c$ berechnet werden, so nehme man Punkte $c_1, c_2 \cdots$ beliebig, aber nahe an einander auf der Curve an, ziehe die Sehnen $cc_1, c_1c_2 \cdots c_n d$ und $c_1 e_1 = y_1$, $c_2 e_2 = y_2 \cdots$ parallel der Axe $OY$. Es entstehen dann eine Anzahl Trapeze, deren Summe sich in dem Masse dem Flächeninhalte von $cef\partial$ nähern wird, als die Punkte $c, c_1, c_2 \cdots$ an einander rücken. Es ist nun der Flächeninhalt eines Trapezes $cee_1c_1$ bekanntlich gleich der halben Summe der beiden parallelen Seiten $y + y_1$ mal der dazwischen liegenden Höhe $ee_1 \sin \varphi$.

Es ist nun

$$ee_1 = Oe_1 - Oe = x_1 - x,$$

also:

$$cee_1c_1 = \frac{(y + y_1)(x_1 - x)}{2} \sin \varphi,$$

oder wenn man in gleicher Weise alle Trapeze berechnet:

$$cef\partial = \lim \left[ \frac{(y_1 + y)(x_1 - x)}{2} + \frac{(y_2 + y_1)(x_2 - x_1)}{2} + \frac{(y_3 + y_2)(x_3 - x_2)}{2} + \cdots + \frac{(y' + y_n)(x' - x_n)}{2} \right] \sin \varphi$$

oder, da man $x_s - x_{s+1} = dx$, $y_s + y_{s-1} = 2y_s + dy_s$ setzen kann:

$$ef\beta = \sin\eta \int_x^{x'} \left(ydx + \frac{dydx}{2}\right).$$

Offenbar aber verschwindet das letzte Glied $\frac{dydx}{2}$ gegen $ydx$, und man hat, wenn $F$ das bezeichnete Flächenstück ist:

$$F = \sin\eta \int_x^{x'} ydx.$$

Stehen die Axen auf einander senkrecht, so ist

$$\sin\eta = 1,$$

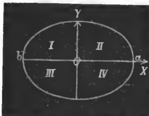
also

$$F = \int_x^{x'} ydx.$$

Bei der Anwendung dieser Formel ist wohl zu beachten, dass jedes Flächenstück als positiv zu denken ist. Wenn also das Zeichen von $ydx$ negativ sein sollte, so ist dasselbe zu verändern. Man denkt sich daher den Werth vom analytisch kleinern zum grössern Werthe, d. h. von $-\infty$ bis $+\infty$ fortschreitend, dann ist $x_1 - x = dx$ immer positiv. Befindet sich dann die Ordinate auf der Seite der Abscissenaxe, wo die Ordinaten negativ sind, welche Seite man gewöhnlich als die untere bezeichnet, so ist also $-y$ für $y$ zu setzen.

Habe man z. B. eine geschlossene Curve (Fig. 45.), in deren Innern sich der Anfangspunkt $O$ der Coordinaten befindet, und die übrigens immer im gleichen Sinne gekrümmt ist. Sei $OX$ die positive Seite der Abscissen, $OY$ die der Ordinaten. Das Flächenstück zerfällt dann in vier Theile, die mit I, II, III, IV bezeichnet sind. Seien noch

Fig. 45.




$a$ und $b$ die Punkte, auf welchen die Abscissenaxe bezüglich auf der positiven und negativen Seite die Curve schneidet, und setzen wir

$$Ob = -\beta,\ Oa = \alpha.$$

Zu jedem Werthe von $x$ werden dann zwei Werthe von $y$ gehören, ein positiver und ein negativer, wovon wir den ersteren mit $y$, den letzteren mit $-y'$ bezeichnen.

Der Flächeninhalt der verschiedenen Stücke ist dann nach dem Obigen:

$$\text{I} \ = \int_{-\beta}^{0} ydx = -\int_0^{-\beta} ydx,$$

$$\text{II} \ = \int_0^{\alpha} ydx,$$

$$\text{III} \ = \int_{-\beta}^{0} y'dx = -\int_0^{-\beta} y'dx,$$

$$\text{IV} \ = \int_0^{\alpha} y'dx;$$

also das ganze von der Curve begrenzte Flächenstück:

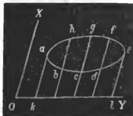
$$F = \int_0^{\alpha} ydx - \int_0^{\alpha} y'dx - \int_0^{-\beta} ydx + \int_0^{-\beta} y'dx$$

$$= \int_{-\beta}^{+\alpha} (y+y')\,dx.$$

Es sind hier rechtwinklige Coordinaten vorausgesetzt. Ist dies nicht der Fall, so ist das Integral nur mit $\sin\eta$ zu multipliciren.

Als zweites Beispiel betrachten wir eine ebenfalls geschlossene Curve, die aber ganz auf einer Seite der Abscissen- und der Coordinatenaxe liegt, etwa da, wo beide positiv sind, ebenfalls ist gleichmässige Krümmung der Curve vorausgesetzt. Sind dann (Fig. 46.) $a$ und $e$ diejenigen Punkte der Curve, wo die

Fig. 46.



 Quadratur ebener Figuren.

Ordinaten zugleich Tangenten sind, so ist der Flächeninhalt, welcher die Curve begrenzt, gleich *kahgfel* — *kabcdel* und wenn man von den beiden Ordinaten, welche zu einem Werth von $x$ gehören, und die sämmtlich positiv sind, die grössere mit $y$, die kleinere mit $y'$ bezeichnet, $Ok = \alpha$, $Ol = \beta$ setzt, so ist:

$$kahgfel = \int_\alpha^\beta y dx,$$

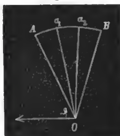
$$kabcdel = \int_\alpha^\beta y' dx,$$

und der ganze Flächeninhalt:

$$F = \int_\alpha^\beta (y - y') dx.$$

Ist die Curve nicht immer in demselben Sinne gekrümmt, oder schneidet ein Theil oder mehrere der Ordinaten dieselbe mehr als zweimal, so wird man aus der jedesmaligen Gestalt der Curve auch Regeln für die Bestimmung des Flächeninhalts ableiten können.

Fig. 47.



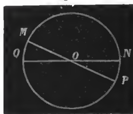

Wählen wir statt der gradlinigen aber jetzt Polarcoordinaten. Sei (Fig. 47.) $O$ ein beliebiger Punkt, $r$ der von $O$ nach einem Punkte der Curve gezogene Radius Vector $OA$, $\vartheta$ der Winkel, den $r$ mit der Abscissenaxe macht, so wird bekanntlich $r$ immer positiv gedacht, indem man $\vartheta$ von $O$ bis $2\pi$ wachsen lässt. Handelt es sich nun um die Bestimmung des Sectors $OAB$, zu dem ein beliebiges Curvenstück $AB$ gehört, so kann man zwischen $A$ und $B$ beliebig viele, einander sehr nahe Punkte $a_1, a_2 \cdots$ annehmen, und die Vectoren $Oa_1 = r_1$, $Oa_2 = r_2 \cdots$ ziehen. Sei ferner $OA = r$, $OB = r'$, $AOX = \vartheta$, $BOX = \vartheta'$. Da $OA$ und $Oa_1$, $Oa_1$ und $Oa_2 \cdots$ einander desto näher kommen, je mehr sich die Punkte $A$, $a_1$, $a_2$ nähern, so kann man schliesslich annehmen, dass zwei auf einander folgende Vectoren $r_s$ und $r_{s+1}$ nur sich um eine verschwindende Grösse von einander unterscheiden. Der mit Radius $r_s$ von $O$ als Mittelpunkt gezogene Bogen wird also jedenfalls durch $a_s$ gehen, und auch dem nächsten Punkt $a_{s+1}$ bis auf eine verschwindende Grösse näher rücken. Es ist dann $a_s O a_{s+1}$ als Kreissector zu betrachten, dessen Centriwinkel $\vartheta_{s+1} - \vartheta_s = d\vartheta$, und dessen Radius $r_s$ ist. Solcher Sector aber hat den Flächeninhalt $\frac{1}{2} r_s^2 (\vartheta_s - \vartheta_{s-1})$, wenn wir uns $\vartheta_s \cdots$ in Bogenmass ausgedrückt denken. Also wenn wir Sector $AOB$ mit $S$ bezeichnen:

$$S = \lim [\tfrac{1}{2} (r^2 (\vartheta_1 - \vartheta) + r_1^2 (\vartheta_2 - \vartheta_1)$$
$$+ r_2^2 (\vartheta_3 - \vartheta_2) + \cdots + r_n^2 (\vartheta' - \vartheta_n)],$$

d. h.

$$S = \tfrac{1}{2} \int_\vartheta^{\vartheta_1} r^2 d\vartheta.$$

Fig. 48.



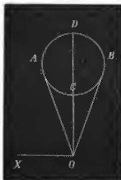

Ist eine geschlossene Curve gegeben (Fig. 48.), wo jeder Radius Vector $OM$, $ON$, $OP$, $OQ$ indess auf derselben Seite immer nur einmal die Curve schneidet, und der Anfangspunkt $O$ sich im Innern der Curve befindet, so ist offenbar $\vartheta$ von $O$ bis $2\pi$ zu nehmen, so dass der immer positive Radius vector einen vollständigen Umlauf macht.

Es ist auch leicht einzusehn, dass man statt dessen die Grenzen $\alpha$ und $2\pi + \alpha$ nehmen kann, wo $\alpha$ ein beliebiger positiver oder negativer Winkel ist, denn auch diese Grenzen bedingen einen völligen Umlauf. Man hat also:

$$S = \tfrac{1}{2} \int_\alpha^{\alpha + 2\pi} r^2 d\vartheta.$$

Schwerer wird die Ausführung der Quadratur des von einer geschlossenen Curve begrenzten Flächenstücks, wenn sich der Anfangspunkt der Coordinaten ausserhalb derselben befindet. Es wird dann, immer gleich gerichtete Krümmung vorausgesetzt, jedem Werth von $\vartheta$ ein doppelter Werth von $r$ entsprechen. Wir bezeichnen den grössern $OD$ (Fig. 49.) mit $r$, den kleinern $OC$ mit $r'$. $r$ und $r'$ fallen zusammen in den Punkten $A$ und $B$, wo die Vectoren $OA$ und $OB$ die Curve berühren. Bezeichnen wir die zugehörigen $\vartheta$ mit $\vartheta_1$ und $\vartheta_2$, so ist offenbar:

Fig. 49.




$$\text{Sector } OADB = \tfrac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 d\vartheta,$$

$$\text{Sector } OACB = \tfrac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r'^2 d\vartheta.$$

und deshalb der ganze Flächeninhalt:

$$S = \tfrac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r^2 d\vartheta - \tfrac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} r'^2 d\vartheta = \tfrac{1}{2}\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} (r^2 - r'^2) d\vartheta.$$

Selbstverständlich werden die Formeln complicirter, wenn die Krümmung der Curve sich ändert.

9) Quadratur verschiedener Flächenstücke.

Wir beginnen hier nochmals mit den von Kegelschnitten begrenzten Figuren, einerseits um die Anwendung der Integralrechnung auch hier zu zeigen, andrerseits um uns von den Beschränkungen frei zu machen, welche sich durch die Auswahl der Axen in Abschnitt 6) ergab.

Die Gleichung eines Kegelschnitts auf zwei conjugirte Durchmesser bezogen ist bekanntlich

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} = 1.$$

Sind $\alpha$ und $\beta$ beide positiv, so ist die Curve eine Ellipse, ist eine dieser Grössen negativ, so hat man eine Hyperbel, und zwar entspricht einerseits positives $\alpha$ und negatives $\beta$, andrerseits negatives $\alpha$ und positives $\beta$ zwei conjugirten Hyperbeln, wenn die absoluten Werthe der $\alpha$ und die der $\beta$ unter einander gleich sind. Die absoluten Werthe von $\alpha$ und $\beta$ stellen übrigens in jedem Falle die Quadrate der Halbaxen vor, welche als Coordinatenaxen gewählt sind. Sei noch $\varphi$ der Winkel, den beide Halbmesser mit einander machen, es ist dann:

$$y = \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\sqrt{(\alpha - x^2)} = \sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\sqrt{(x^2 - \alpha)}.$$

Und das von zwei Ordinaten $x'$ $x$ der Curve und der Abscissenaxe eingeschlossene Flächenstück:

$$F = \sin\varphi\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\int_x^{x'}\sqrt{(\alpha - x^2)}\,dx = \sin\varphi\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}\int_x^{x'}\sqrt{(x^2 - \alpha)}\,dx.$$

Nach Tafel II, 8) der im Artikel analytische Quadratur gegebenen Integraltafeln ist nun:

$$\int dx\sqrt{(a + bx^2)} = \frac{x\sqrt{(a + bx^2)}}{2} + \frac{a}{2}U$$

und nach Tafel II, 21) ist:

$$U = \int\frac{dx}{\sqrt{(a + bx^2)}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\lg\left[x\sqrt{b} + \sqrt{(a + bx^2)}\right],$$

wenn $b$ positiv ist, und:

$$U=\frac{1}{\sqrt{-b}}\arcsin\left(x\sqrt{-\frac{b}{a}}\right),$$

wenn $b$ negativ ist.

Für die Ellipse setzen wir nun: $\alpha=r^2$, $\beta=\varrho^2$, wo $r$ und $\varrho$ die Halbaxen sind; es ist dann in den eben entwickelten Formen zu nehmen:

$$a=\alpha=r^2,\ b=-1,$$

wodurch sich ergibt:

$$\int\sqrt{(r^2-x^2)}\,dx=\frac{x\sqrt{(r^2-x^2)}}{2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}+\text{ const.},$$

oder wenn man die Grenzen $x'$ und $x$ nimmt:

$$\int_x^{x'}\sqrt{(r^2-x^2)}\,dx=\frac{x'\sqrt{(r^2-x'^2)}-x\sqrt{(r^2-x^2)}}{2}+\frac{r^2}{2}\left(\arcsin\frac{x'}{r}-\arcsin\frac{x}{r}\right),$$

$$F=\sin\varphi.\frac{\varrho}{r}\left[\frac{x'\sqrt{(r^2-x'^2)}}{2}-\frac{x\sqrt{(r^2-x^2)}}{2}+\frac{r^2}{2}\left(\arcsin\frac{x'}{r}-\arcsin\frac{x}{r}\right)\right].$$

Geht man vom Anfangspunkt der Coordinaten aus, d. h. setzt man $x=0$ und $x$ für $x'$, so kommt:

$$F=\sin\varphi.\frac{\varrho}{r}\left[\frac{x\sqrt{(r^2-x^2)}}{2}+\frac{r^2}{2}\arcsin\frac{x}{r}\right].$$

Will man das ganze Stück der Ellipse haben, welches auf der positiven Seite der $x$ und $y$ liegt, so ist $x=r$ zu setzen, und es kommt:

$$F=\frac{\pi}{4}\sin\varphi\, r\varrho.$$

Das Stück, welches den positiven $x$ aber den negativen $y$ entspricht, ist offenbar diesem gleich, da die entsprechenden Ordinaten dieselbe Länge haben. Dasselbe ergibt sich auch aus der Formel, da das Vorzeichen von $y$ keinen Einfluss ausübt, und Gleiches lässt sich, wie leicht zu sehen ist, auch von den beiden übrigen Theilen der Ellipse sagen, so dass man für die ganze von ihr eingeschlossene Figur hat:

$$F=\pi\sin\varphi\, r\varrho.$$

Ist $\varphi$ ein rechter Winkel, $a$ und $b$ die beiden halben Hauptdurchmesser, so ergibt sich

$$F=\pi ab$$

und da dieser Ausdruck mit dem Obigen identisch sein muss, ist

$$ab=r\varrho\sin\varphi,$$

d. h. „das Rechteck unter zwei conjugirten Halbmessern ist stets constant."

Setzen wir jetzt für die Hyperbel

$$\alpha=r^2,\quad\beta=-\varrho^2,$$

so ist in unserer Formel zu nehmen:

$$a=-\alpha=-r^2,\ b=1,\text{ und }\sqrt{\frac{-\beta}{\alpha}}=\frac{\varrho}{r}$$

also:

$$\int dx\sqrt{(x^2-\alpha)}=\frac{x\sqrt{(x^2-r^2)}}{2}+\lg[x+\sqrt{(x^2-r^2)}],$$

woraus sich ergibt:

$$F=\sin\varphi.\frac{\varrho}{r}\left[\frac{x'\sqrt{(x'^2-r^2)}-x\sqrt{(x^2-r^2)}}{2}+\lg\frac{x'+\sqrt{(x'^2-r^2)}}{x+\sqrt{(x^2-r^2)}}\right].$$

Nimmt man den Flächeninhalt von dem Punkte an, wo die Curve die Axe schneidet, so ist zu setzen: $x=r$, also wenn man $x$ für $x'$ schreibt:

$$F=\sin\varphi.\frac{\varrho}{r}\left[\frac{x\sqrt{(x^2-r^2)}}{2}+\lg\left(\frac{x}{r}+\sqrt{\left(\frac{x^2}{r^2}-1\right)}\right)\right].$$

Der Fall, wo die beiden Axen die Assymptoten sind, ist hier ausgeschlossen.

Erwägt man ihn besonders, so gibt die Gleichung

$$xy=a^2$$

sogleich:

$$F = \sin\varphi \int_x^{x'} \frac{a^2}{x} dx = a^2 \sin\varphi \lg\left(\frac{x'}{x}\right)$$

ganz wie oben.

Für die Parabel ist die Gleichung der Curve:

$$y^2 = 2px,$$

also:

$$F = \sin\varphi \sqrt{(2p)} \int_x^{x'} \sqrt{(x)}\, dx = \tfrac{2}{3} \sin\varphi \sqrt{(2p)}\, (x'^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}),$$

welche Formel, wie leicht zu sehen, sich auf die in Abschnitt 7) gegebene Gestalt bringen lässt.

Bei den folgenden Curven setzen wir rechtwinklige Coordinaten voraus.

Für die Cycloide war:

$$x = r(v - \sin v), \quad y = r(1 - \cos v), \quad dx = r(1 - \cos v)\, dv,$$

also:

$$F = r^2 \int_x^{x'} y\, dx = r^2 \int_v^{v'} (1 - \cos v)^2\, dv$$

oder wenn man

$$(1 - \cos v)^2 = \tfrac{3}{2} - 2\cos v + \tfrac{1}{2}\cos 2v$$

setzt:

$$F = r^2 \int_v^{v'} (\tfrac{3}{2} - 2\cos v + \tfrac{1}{2}\cos 2v)\, dv = \tfrac{3}{2} r^2 (v' - v) - 2r^2 (\sin v' - \sin v)$$
$$+ \frac{r^2}{4} (\sin 2v' - \sin 2v)$$

oder wenn man

$$v = 0, \quad v' = 2\pi$$

setzt, so ergibt sich für den ganzen Zweig der Cycloide:

$$F = 3\pi r^2.$$

Die Kettenlinie hat zur Gleichung:

$$y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}});$$

wir setzen $x = 0$ und $x$ für $x'$, so dass sich ergibt:

$$F = \frac{a}{2} \int_0^x (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})\, dx = \frac{a^2}{2} (e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}).$$

Die Curven, welche zur Gleichung haben:

$$y^n = p^{n-m} x^m,$$

wo $m$ und $n$ beliebige positive Zahlen sind, nennt man Parabeln höherer Ordnung. Man hat für sie allgemein, wenn man mit dem Punkte anfängt, wo $y = x = 0$ ist, also die Curve die Axe schneidet:

$$F = p^{1 - \frac{m}{n}} \int_0^x x^{\frac{m}{n}}\, dx = \frac{p^{1 - \frac{m}{n}}}{1 + \frac{m}{n}} x^{\frac{m}{n} + 1}.$$

Hyperbeln höherer Ordnung nennt man diejenigen Curven, deren Gleichung die Gestalt hat:

$$x^m y^n = p^{m+n};$$

man erhält:

$$F=p^{\frac{m}{n}+1}\int_x^{x'} x^{\frac{m}{n}}dx=\frac{p^{\frac{m}{n}+1}}{1-\frac{m}{n}}(x'^{1-\frac{m}{n}}-x^{1-\frac{m}{n}}).$$

Nur der Fall, wo $m=n$ ist, macht eine Ausnahme. Es kommt dann:

$$F=p^2\int_x^{x'} x^{-1}dx=p^2\lg\left(\frac{x'}{x}\right).$$

Die logarithmische Linie hat zur Gleichung

$$y=a\lg x.$$

Man erhält:

$$F=a\int_x^{x'} \lg x\,dx=a\,[x'\lg x'-x\lg x-x'+x]=a\lg\left(\frac{x'^{x'}}{x^x}\right)-a(x'-x).$$

Die Curve, welche zur Gleichung hat:

$$y=\frac{(b+x)\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}$$

heisst Conchoide oder Muschellinie. Also ist für sie:

$$F=\int_x^{x'}\frac{(b+x)\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}dx=\int_x^{x'}dx\sqrt{(a^2-x^2)}+b\int_x^{x'}\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}}{x}dx.$$

Wir haben bereits gefunden:

$$\int dx\sqrt{(a^2-x^2)}=\frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\text{const.}$$

und nach Tafel II, 29) unserer Integraltafeln:

$$\int\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}\,dx}{x}=\sqrt{(a^2-x^2)}+aV,$$

wo

$$V=\int\frac{dx}{x\sqrt{(X)}}=\frac{1}{2a}\lg\frac{\sqrt{(a^2-x^2)}-a}{\sqrt{(a^2-x^2)}+a}$$

ist, also:

$$F=\frac{x'}{2}\sqrt{(a^2-x'^2)}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x'}{a}+b\sqrt{(a^2-x'^2)}+\frac{b}{2}\lg\frac{\sqrt{(a^2-x'^2)}-a}{\sqrt{(a^2-x'^2)}+a}-\text{const.}$$

Die Constante ist gleich dem nebenstehenden, $x'$ enthaltenden Ausdruck, wenn man $x$ für $x'$ setzt.

Für die Kreisevolvente hat man die Gleichungen:

$$x=r\cos\varphi+r\varphi\sin\varphi,\quad y=r\sin\varphi-r\varphi\cos\varphi,$$

wo $\varphi$ der entsprechende Centriwinkel des Kreises ist, also:

$$dx=r\varphi\cos\varphi\,d\varphi,$$

$$F=r^2\int_\varphi^{\varphi'}(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\,\varphi\cos\varphi\,d\varphi$$

$$=r^2\int_\varphi^{\varphi'}(\varphi\sin\varphi\cos\varphi-\varphi^2\cos\varphi^2)\,d\varphi$$

$$=\frac{r^2}{2}\int_\varphi^{\varphi'}[\varphi\sin2\varphi-\varphi^2(\cos2\varphi+1)]\,d\varphi.$$

Nach Tafel III, 17) und 18) der Integraltafeln ist:

$$\int \varphi \sin \varphi \, d\varphi = -\varphi \cos \varphi + \sin \varphi,$$

$$\int \varphi^2 \cos \varphi \, d\varphi = \varphi^2 \sin \varphi + 2\varphi \cos \varphi - 2 \sin \varphi,$$

woraus sich leicht ergibt:

$$\int \varphi \sin 2\varphi \, d\varphi = \tfrac{1}{4} (\sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\varphi),$$

$$\int \varphi^2 \cos 2\varphi \, d\varphi = \tfrac{1}{4} (2\varphi^2 \sin 2\varphi + 2\varphi \cos 2\varphi - \sin 2\varphi),$$

$$\int [\varphi \sin 2\varphi - \varphi^2 (\cos 2\varphi + 1)] \, d\varphi = \tfrac{1}{2} (\sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\varphi - \varphi^2 \sin 2\varphi) - \frac{\varphi^3}{3}.$$

Es ist aber

$$\sin 2\varphi - 2\varphi \cos 2\varphi - \varphi^2 \sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi \, (1 - \varphi^2) - 2\varphi \, (2 \cos \varphi^2 - 1) =$$
$$2 \cos \varphi \, (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) + 2\varphi \sin \varphi \, (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi) = \frac{2xy}{r^2}$$

$$F = \int_x^{x'} y dx = \frac{x'y'}{2} - \frac{r^2 \varphi'^3}{6} - \frac{xy}{2} + \frac{r^2 \varphi^3}{6},$$

oder wenn man die Quadratur mit $\varphi = 0$ beginnt, d. h. die Evolvente von dem Pnnkte ans nimmt, wo sie den Kreis berührt, wo dann $x = r$, $y = 0$ wird:

$$F = \frac{xy}{2} - \frac{r^2 \varphi^3}{6}.$$

Ausser der oben behandelten Cycloide betrachte man noch die **verlängerte und verkürzte Cycloide**. Die erstere wird von einem Pnnkte beschrieben, der mit einem anf einer graden Linie rollenden Kreise fest verbnnden ist, und sich ausserhalb desselhen befindet, die letztere von einem Pnnkte, der sich innerhalh des rollenden Kreises hefindet.

Die Gleichnng beider ist gegeben durch die Formeln:

$$y = r - a \cos v, \quad x = rv - a \sin v,$$

wo $v$, wie bei der gewöhnlichen Cycloide, den abgerollten Bogen bedentet, $a$ die Entfernung des Pnnktes, welcher die Cycloide erzeugt vom Mittelpnnkt des rollenden Kreises. Im Falle der verlängerten Cycloide ist also $a$ grösser als $r$.

Man hat: $dx = (r - a \cos v) \, dv$, d. h.

$$F = \int_0^v (r - a \cos v)^2 \, dv = \int_0^v dv \left[ r^2 - 2ar \cos v + \frac{a^2}{2} (\cos 2v + 1) \right]$$

$$= vr^2 - 2ar \sin v + \frac{a^2}{4} \sin 2v + \frac{a^2}{2} v.$$

Es ist hier die Integration mit $v = 0$, d. h. mit dem Pnnkte, wo $x = 0$, $y = r - a$ ist, begonnen. Setzt man noch $v = 2\pi$, so hat man den ganzen Zweig, nämlich:

$$F = 2\pi r^2 + \pi a^2,$$

d. h.

„der Flächeninhalt ist gleich der Summe 3er Kreise, von denen 2 den Radins $r$ haben, der dritte den Radins $a$ bat.“

Die **Epicycloide** wird bekanntlich von einem Punkte eines Kreises beschrieben, der anf einem gegebenen Kreise, und die **Hypocycloide** von einem Pnnkte eines Kreises, der innerhalb eines gegebenen sich bewegt.

Man kann auch hier verlängerte und verkürzte Epicycloiden und Hypocycloiden nnterscbeiden. In jedem Falle aber bat man die Gleichnngen:

$$bz = rv$$
$$y = (b + r) \cos z + a \cos (z + v),$$
$$x = (b + r) \sin z + a \sin (z + v),$$

wo $z$ mittels der ersten Gleichnng zu eliminiren ist. $r$, $a$ nnd $v$ haben die ohige Bedeutung, $b$ ist der Radins des Kreises, anf welchem der erzengende rollt. Bei der Epicycloide ist $b$ positiv, bei der Hypocycloide $b$ negativ zu denken. In jedem Falle können wir setzen:

$$y = (b + r) \cos z + a \cos \lambda z,$$
$$x = (b + r) \sin z + a \sin \lambda z,$$

wo $\lambda = 1 + \frac{b}{r}$ ist.

Man hat:

$$dx = [(b+r)\cos z + a\,\lambda \cos \lambda z]\,dz$$

$$F = \int_0^z [(b+r)\cos z + a \cos \lambda z]\;[(b+r)\cos z + a\lambda \cos \lambda z]\,dz,$$

wo die Quadratur mit $z=0$ begonnen ist, einem Werthe, welchem

$$x=0, \qquad y=a+b+r$$

entspricht. Setzeu wir noch

$$b+r=\varrho$$

so kommt:

$$F = \int_0^z [\varrho^2 \cos z^2 + \varrho a\,(1+\lambda)\cos z \cos \lambda z + a^2\lambda \cos(\lambda z)^2]\,dz = \int_0^z \Big[\frac{\varrho^2}{2}\cos 2z$$
$$+ \frac{a^2\lambda}{2}\cos 2\lambda z\,\frac{\varrho a(1+\lambda)}{2}\cos(1+\lambda)z + \frac{\varrho a(1+\lambda)}{2}\cos(1-\lambda)z + \frac{\varrho^2+a^2\lambda}{2}\Big]dz,$$

woraus sich sogleich ergibt:

$$F = \frac{\varrho^2}{4}\sin 2z + \frac{a^2}{4}\sin 2\lambda z + \frac{\varrho a}{2}\sin(1+\lambda)z + \frac{\varrho a}{2}\frac{(1+\lambda)}{(1-\lambda)}\sin(1-\lambda)z + \frac{\varrho^2+a^2\lambda}{2}z.$$

Die Quadratrix hatte zur Gleichung:

$$y = (a-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2a};$$

es ist also:

$$F = \int_0^x (a-x)\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2a}\,dx.$$

Setzt man $\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2a} = u$, so ist aber:

$$\int x\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2a}\,dx = \frac{4a^2}{\pi^2}\int \frac{u \,\mathrm{arc\,tg}\, u}{1+u^2}\,du.$$

Nach III 19) der Integraltafeln aber ist:

$$\int \frac{u \,\mathrm{arctg}\, u}{1+u^2}\,du = \mathrm{arctg}\, u \int \frac{u}{1+u^2}\,du - \int\Big(\frac{du}{1+u^2}\int\frac{u}{1+u^2}\,du\Big),$$

und da

$$\int \frac{u\,du}{1+u^2} = \tfrac{1}{2}\lg(1+u^2),$$

so ist:

$$\int \frac{u \,\mathrm{arctg}\, u}{1+u^2}\,du = \tfrac{1}{2}\mathrm{arctg}\, u\;\lg(1+u^2) - \tfrac{1}{2}\int\frac{\lg(1+u^2)}{1+u^2}\,du.$$

Es ist ferner:

$$\int a\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi x}{2a}\,dx = \frac{2a}{\pi}\int\frac{au\,du}{1+u^2} = \frac{a^2}{\pi}\lg(1+u^2.$$

Man erhält schliesslich:

$$F = \frac{a^2}{\pi}\lg(1+u^2) - \frac{2a^2}{\pi^2}\mathrm{arctg}\, u \lg(1+u^2) + \frac{2a^2}{\pi}\int_0^u \frac{\lg(1+u^2)}{1+u^2}\,du.$$

Eine weitere Reduction gelingt jedoch nicht.

Die Cissoide hat zur Gleichung:

$$y^2(a+x) = (a-x)^3$$

also:

$$F = \int_0^x (a-x)\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,dx = \int_0^x \frac{(a-x)^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\,dx = \int_0^x \frac{a^2-2ax+x^2}{\sqrt{(a^2-x^2)}}\,dx,$$

wenn man mit $x=0$, $y=a$ beginnt.

Nach II 22) der Integraltafeln hat man:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = U, \int \frac{x dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = -\sqrt{(a^2-x^2)}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = -\frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)} + \frac{a^2}{2}U,$$

wo

$$U = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right).$$

Es ist also:

$$F = \frac{3}{2}a^2 \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + 2a\sqrt{(a^2-x^2)} - \frac{x}{2}\sqrt{(a^2-x^2)} - 2a^2.$$

Setzt man hierin $x=a$, einen Werth, welchem $y=0$ entspricht, setzt also die Integration vom Anfangspunkte bis zum Schnittpunkte der Curve mit der Axe der $x$ fort, so kommt:

$$F = a^2\left(\tfrac{3}{4}\pi - 2\right).$$

Wir geben hier noch die Quadratur einiger Figuren, deren Begränzungscurve sich leicht in Polarcoordinaten ausdrückt, mittels der Formel:

$$S = \tfrac{1}{2}\int_{\vartheta}^{\vartheta'} r^2 d\vartheta.$$

Stehen der Radiusvector $r$ und der Centriwinkel $\vartheta$ in einer linearen Beziehung:

$$r = a + \frac{b\vartheta}{\pi}$$

so heisst die entsprechende Curve **Neoide**. Man hat:

$$S = \tfrac{1}{2}\int_0^{\vartheta}\left(a + \frac{b\vartheta}{\pi}\right)^2 d\vartheta = \left[\left(a + \frac{b\vartheta}{\pi}\right)^2 - a^2\right]\frac{\pi}{6b} = (r^2 - a^2)\frac{\pi}{6b},$$

wo die Integration mit

$$\vartheta = 0, \quad r = a$$

begonnen ist.

Für $\vartheta = 2\pi$ ergiebt sich offenbar:

$$S = (a^2 + 2ab + \tfrac{4}{3}b^2)\pi = [(a+b)^2 + \tfrac{1}{3}b^2]\pi.$$

Für $\vartheta = \pi$, d. h. für den Theil der Fläche, welcher auf einer Seite der Axe liegt, ist:

$$S = \frac{\pi}{6}(2a^2 + 3ab + b^2).$$

Die **archimedische Spirale** hat zur Gleichung:

$$r = a\vartheta,$$

also ist:

$$S = a^2\int_0^{\vartheta}\vartheta^2 d\vartheta = \frac{a^2}{2}\vartheta^2.$$

Die Gleichung der **logarithmischen Spirale** ist:

$$\vartheta = a\lg r, \quad r = e^{\frac{\vartheta}{a}}$$

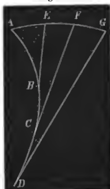
$$S = \int_0^{\vartheta} e^{\frac{2\vartheta}{a}} d\vartheta = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{2\vartheta}{a}} - 1\right) = \frac{a}{2}(r^2 - 1).$$

10) **Ueber die Quadratur von Flächenstücken, die durch andre Coordinaten gegeben sind.**

Aus dem Obigen ersieht man, dass die Flächenstücke, welche die Quadraturformel zunächst ergibt, in genauem Zusammanhange mit dem gewählten Coordinatensystem stehn. So gaben rechtwinklige Coordinaten ein Trapez-artiges von 3 graden Linien, deren 2 parallel sind, und einer Curve begrenztes Stück, Polarcoordinaten Sectoren. Durch andre Wahl der Coordinaten erreicht man es auch, Stücke zu quadriren, die von 2 Seiten aus oder von mehreren eine krummlinige Begränzuug haben. Wir wollen auch dies an einigen Beispielen darthun.

Sei *ABCD* eine beliebige Curve, *EFG* ihre Evolvente, so hat die letztere die Eigenschaft (siehe den Artikel: Trajectorien), dass die Normale derselben

Fig. 50.




immer Tangente der ersteren, und die Länge dieser Normale $EB$ bis zum Berührungspunkte $B$ mit der Evolute gleich dem Bogen dieser, von einem beliebigen Punkte $A$ gezählt, sein muss.

Wir denken uns jetzt 2 nächste Normalen, $EB$ und $CF$, an die Evolvente gezogen, so ist $EB=AB=s$, $FC=AC=s+ds$, wenn wir unter $s$ den Bogen der Evolute verstehen. Es ist dann $ECF$ als ein unendlich kleiner Kreissector zu denken, dessen Radius gleich $s$ ist, und dessen Centriwinkel gleich dem Winkel $dl$ ist, den 2 nächste Tangenten an $ABC$ mit einander machen. $l$ ist dann offenbar der Winkel, den die Tangente mit irgend einer beliebig zu wählenden Linie macht. Es wird dann der Flächeninhalt des bezeichneten Sectors sein:

$$\tfrac{1}{2}s^2\,dl.$$

Sucht man also den Flächeninhalt $BEGD$, welcher von einer beliebigen Curve, ihrer Evolvente und 2 Tangenten derselben begränzt ist, so hat man dafür die Formel:

$$q=\tfrac{1}{2}\int_{l}^{l'} s^2 dl,$$

wo $l$, $l'$ die Winkel der Tangenten $EB$ und $DG$ mit der beliebig zu wählenden Linie, $s$ der Bogen der Curve ist, von dem Punkte $A$ an gezählt, wo die Evolvente die Curve trifft. Für jede Evolvente ist Punkt $A$ anders zu bestimmen. Um mittels dieser Formel bequem rechnen zu können, ist es nöthig, eine Relation zwischen den Bogenlängen $s$ und den Tangentenwinkeln $l$ zu haben, also gewissermaassen diese Grössen als Coordinaten zu betrachten. (Ueber diese in mancher Beziehung wichtigen Coordinaten vergleiche man den Artikel: Transformation.)

Wir gehen hier die Gleichungen einiger Curven in solchen Coordinaten.

Es ist für den Kreis

$$s=rl$$

wo $r$ der Radius ist.

Für die Hypocycloide, Epicycloide oder Cycloide

$$s=A\cos\alpha l,$$

wo die Grössen $A$ und $\alpha$ folgende Bedeutung haben: Sei $r$ der Radius des rollenden Kreises, $R$ der desjenigen, auf dem das Abrollen stattfindet, und nimmt man $r$ negativ für die Epicycloide, positiv für die Hypocycloide, so ist:

$$A=\frac{4r}{R}(R+r),\quad \alpha=\frac{R}{R+2r}.$$

Für die gemeine Cycloide ergibt sich:

$$A=4r,\qquad \alpha=l.$$

Für die logarithmische Spirale hat man:

$$s=Ae^{\alpha l}$$

und für die Kettenlinie

$$s=A\operatorname{tg} l.$$

Es ist zu bemerken, dass, da der Punkt $A$, von dem aus man die Bogen zählt, beliebig ist, zu dem Ausdruck für jeden Bogen eine willkürliche Constante hinzugefügt werden kann, es wird jedoch hierbei die Evolvente sich ändern.

Wenden wir auf diese Curven unsere Formel an, wobei wir mit $l=0$ die Quadratur beginnen wollen.

Für den Kreis ist:

$$q=\tfrac{1}{2}\int_0^l (rl+a)^2 dl=\frac{1}{6r}\left[(rl+a)^3-a^3\right].$$

Dies ist also das vom Kreise und seiner Evolvente, so wie von einer Kreistangente begränzte Flächenstück.

Für die Cycloiden ist:

$$q=\frac{A^2}{2}\int_0^l(\cos\alpha l+a)^2 dl=\frac{A^2}{2}\int_0^l\left(a^2+\tfrac{1}{2}+2a\cos\alpha l+\frac{\cos 2\alpha l}{2}\right)dl=l\,(a^2+\tfrac{1}{2})\,\frac{A^2}{2}$$
$$+\frac{aA^2}{\alpha}\sin\alpha l+\frac{A^2}{8\alpha}\sin 2\alpha l.$$

Für die gemeine Cycloide, wo $\alpha = 1$ ist, ergibt sich:

$$q = l(\alpha^2 + \tfrac{1}{2})\frac{A^2}{2} + \alpha A^2 \sin l + \frac{A^2}{8}\sin 2l.$$

Eine der Evolventen der Cycloide ist wieder eine solche, und diese entspricht dem Werthe von $\alpha = 0$ (siehe den Artikel: Trajectorien); für diese also ist:

$$q = \frac{A^2 l}{4} + \frac{A^2}{8\alpha}\sin 2\alpha l.$$

Nimmt man die Grösse $l = \frac{\pi}{2\alpha}$, so kommt:

$$q = \frac{A^2\pi}{8\alpha}$$

und für die gemeine Cycloide:

$$q = \frac{A^2\pi}{8}.$$

Es ist dies das von 2 Zweigen der entsprechenden Cycloiden begrenzte Stück.

Die logarithmische Spirale gibt:

$$q = A\int_0^l (e^{\alpha l} + \alpha)^2\, M = A\left(\frac{e^{2\alpha l}}{2\alpha} + \frac{2\alpha e^{\alpha l}}{\alpha} + \alpha^2 l - \frac{1+4\alpha}{2\alpha}\right),$$

und für $l = 0$, in welchem Falle die Evolvente wieder eine logarithmische Spirale ist:

$$q = \frac{A}{2\alpha}(e^{2\alpha l} + 4\alpha e^{\alpha l} - 1 - 4\alpha).$$

Nehmen wir schliesslich noch die Kettenlinie.
Es ist:

$$q = A\int_0^l (\mathrm{tg}\, l + \alpha)^2\, dl = A\int_0^l (\mathrm{tg}\, l^2 + 2\alpha\,\mathrm{tg}\, l + \alpha^2)\, dl.$$

Nach III 8) der Integraltafeln war:

$$\int \mathrm{tg}\, l^2\, dl = \mathrm{tg}\, l - l,$$

und nach III 6):

$$\int \mathrm{tg}\, l\, dl = -\lg\cos l,$$

also:

$$q = A(\mathrm{tg}\, l - 2\alpha\lg\cos l + (\alpha^2 - 1)\, l);$$

für $\alpha = \pm 1$ ergibt sich hieraus:

$$q = A(\mathrm{tg}\, l \mp 2\lg\cos l).$$

Der Ausdruck $q$ wird hier schon unendlich, wenn $l = \frac{\pi}{2}$ ist.

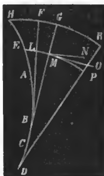
Für $l = \frac{\pi}{4}$ ist $q = A(1 \pm \lg 2)$.

Diese Betrachtungen sind aber einer bemerkenswerthen Erweiterung fähig.

Seien in der Ebene (Fig. 51) nach einem beliebigen Gesetze grade Linien gezogen, wo die Entfernung einer jeden von der nächsten als verschwindend klein betrachtet wird. Sämmtliche Linien kann man dann als eine Schaar von Tangenten irgend einer Curve betrachten, $ABCD$, welche wir ihre Charakteristik nennen, und die durch sie vollständig bestimmt ist; andrerseits sind aber auch, wenn letztere gegeben ist, die graden Linien vollständig bestimmt.

Man kann nun durch irgend einen Punkt $E$ einer der graden eine Curve legen, welche mit $FA$ einen gegebenen Winkel $\alpha$ bildet, der Art, dass diese Curve mit jeder der übrigen Graden $BF$, $CG$ denselben Winkel $\alpha$ macht. Diese Curve heisst Trajectorie der gegebenen Schaar grader Linien, sie ist durch Punkt $E$ und Winkel $\alpha$ vollständig bestimmt. Auch die Charakteristik ist eine Trajectorie, die dem Werthe $\alpha = 0$ entspricht. Die Evolvente irgend einer Curve ist also ebenfalls als Trajectorie aufzufassen, welche dem Werthe $\alpha = \frac{\pi}{2}$ entspricht.

Fig. 51.



Ist andrerseits die Trajectorie $ELM$ und Winkel $\alpha$ bekannt, so ist sowohl die Schaar von graden Linien, als deren Charakteristik gegeben.

Legen wir jetzt durch Punkt $H$ einer der Linien eine zweite Trajectorie $HFG$, deren Schnittwinkel $\beta$ ist, und beschäftigen wir uns damit, den von beiden Trajectorien und zweien der Graden begränzten Raum zu quadriren. Es wird zu dem Ende zunächst nöthig sein, die Relationen, welche zwischen den Curven $ELM$ und $HFG$ stattfinden, zu bestimmen.

Sei das Bogenelement $LM = ds$, das Bogenelement $FG = d\sigma$, dann ist:

Winkel $BLM = \alpha$, Winkel $BFG = \beta$.

Sei noch $dl$ der Winkel zweier nächsten Tangenten $LMN$ und $MQ$, wo $LMN$ als die Verlängerung von $LM$ zu denken ist. Es wird dann $l$ der Winkel der Tangente an die erste Curve mit einer beliebigen Linie sein, und Winkel $QMC = \alpha$, also Winkel $NMC = \alpha + dl$. Man erhält also Winkel

$$LMC = \pi - \alpha - dl,$$

und da $LCM$ der dritte Winkel des Dreieckes $LMC$ ist:

$$LCM = dl.$$

Bezeichnen wir den Winkel zweier nächster Tangenten an die Curve $HFG$ mit $d\lambda$, so ist:

Winkel $BFG = \beta$, Winkel $CGF = \pi - \beta - d\lambda$, $FCG = d\lambda$,

woraus dann folgt:

$$d\lambda = dl \text{ d. h. } \lambda = l + C,$$

wo $C$ eine beliebige Constante ist. Diese Constante lässt sich leicht bestimmen.

Fig. 52.




Sei (Fig. 52) $OK$ derjenigen Linie parallel, mit welcher $FG$ den Winkel $\lambda$, mit $LM$ den Winkel $l$ macht, so ist offenbar:

$$\text{Winkel } MOG = \lambda - l,$$

aber:

Winkel $OLF = \alpha$, Winkel $OFL = \pi - \beta$,

also:

$$MOG = \beta - \alpha = \lambda - l = C,$$

so dass man hat:

$$\lambda - \beta = l - \alpha.$$

Betrachten wir nun das unendlich kleine Viereck $FLMG$, und setzen darin:

$$FL = \varrho, \text{ also } GM = \varrho + d\varrho.$$

Sei ferner der unendlich kleine Winkel $LFM = d\varepsilon$ und die Diagonale $FM = U$.

Man hat dann in Dreieck $FLM$:

$$\varrho : ds = \sin(\alpha - d\varepsilon) : \sin d\varepsilon,$$

und in Dreieck $FGM$:

$$\varrho + d\varrho : d\sigma = \sin(\beta - d\varepsilon) : \sin(dl + d\varepsilon).$$

Es ist nämlich:

Winkel $LMG = \alpha + dl$, Winkel $FML = \alpha - d\varepsilon$, also Winkel $FMG = dl + d\varepsilon$.

Die erste Bezeichnung giebt:

$$\varrho \sin d\varepsilon = ds \sin(\alpha - d\varepsilon),$$

oder da man $\sin d\varepsilon$ mit $d\varepsilon$ vertauschen, und $d\varepsilon$ gegen $\alpha$ vernachlässigen kann:

$$\varrho d\varepsilon = \sin \alpha \, ds.$$

Die zweite giebt, unter ähnlichem Bestimmen der unendlich kleinen Grössen:

$$\varrho(dl + d\varepsilon) = \sin\beta \, d\sigma.$$

d. h. mit Berücksichtigung der eben gefundenen Gleichung:

$$1) \quad \varrho \, dl = \sin\beta \, d\sigma - \sin\alpha \, ds.$$

Findet man noch $U$ aus beiden Dreiecken $FLM$ und $FGM$, so kommt:

$$U^2 = \varrho^2 + ds^2 + 2\varrho \, ds \cos\alpha = (\varrho + d\varrho)^2 + d\sigma^2 + 2(\varrho + d\varrho) \, d\sigma \cos(\beta + dl).$$

Also indem man die unendlich kleinen Grössen von der zweiten Ordnung vernachlässigt:

$$\varrho ds \cos\alpha = \varrho d\varrho + \varrho \cos\beta d\sigma,$$

d. h.

2) $$d\varrho = ds\cos\alpha - d\sigma\cos\beta,$$

also da $\alpha$ und $\beta$ constant sind:

$$\varrho = s\cos\alpha - \sigma\cos\beta + \text{const.}$$

Um die Constante zu bestimmen, seien die Bogen so genommen, dass für $s=0$ auch $\sigma=0$ sei, und möge der Linie $HE$, wo $s=\sigma=0$ ist, der Werth $HE=\varrho_0$ entsprechen, dann ist

$$\text{const.} = \varrho_0,$$

also:

3) $$\varrho - \varrho_0 = s\cos\alpha - \sigma\cos\beta.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) lässt sich, wenn eine Beziehung zwischen $s$ und $l$ gegeben ist, wie wir dies im Vorigen annahmen, auch die Beziehung zwischen $\sigma$ und $l$ oder $\sigma$ und $\lambda$ und $\varrho$ bestimmen. Es ist nämlich, wenn man aus den Gleichungen 1) und 2) $d\sigma$ eliminirt:

$$\varrho\, dl\cos\beta + d\varrho\sin\beta = \sin(\beta-\alpha)\, ds.$$

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn man setzt:

$$\varrho = Ue^{al},$$

wo $U$ eine zu bestimmende Function, $a$ eine Constante ist. Setzt man diesen Werth nämlich in unsere Gleichung, so kommt:

$$Ue^{al}\cos\beta\, dl + Ua\sin\beta\, e^{al}\, dl + e^{al}\sin\beta\, dU = \sin(\beta-\alpha)\, ds.$$

Und wenn man $U$ so bestimmt, dass:

$$e^{al}\sin\beta\, dU = \sin(\beta-\alpha)\, ds,$$

also auch:

$$\cos\beta = a\sin\beta$$

ist, so ergibt sich:

$$a = \cot\beta, \quad dU = e^{-l\cot\beta}\,\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\, ds, \quad U = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\int e^{-l\cot\beta}\, ds,$$

$$\varrho = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\, e^{l\cot\beta}\int e^{-l\cot\beta}\, ds,$$

wo das unbestimmt genommene Integral noch eine Constante enthält.

Beginnen wir die Integration mit $s=0$, so wird $\varrho=\varrho_0$, also:

4) $$\varrho = \varrho_0 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\, e^{l\cot\beta}\int_0^s e^{-l\cot\beta}\, ds.$$

Setzt man den so gefundenen Werth von $\varrho$ in Formel $s$ ein, so erhält man auch $\sigma$, nämlich:

$$\sigma = \frac{s\cos\alpha}{\cos\beta} - \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta\cos\beta}\, e^{l\cot\beta}\int_0^s e^{l\cot\beta}\, ds.$$

Diese Formel wird illusorisch, wenn $\beta = \frac{\pi}{2}$ ist, in diesem Falle aber ergibt sich direct:

$$\varrho - \varrho_0 = s\cos\alpha,$$

$$d\sigma = \varrho\, dl + \sin\alpha\, ds = \varrho_0\, dl + s\cos\alpha\, dl + \sin\alpha\, ds,$$

also:

$$\sigma = \cos\alpha\int_{l_0}^{l} s\, dl + s\sin\alpha + \varrho_0\,(l-l_0),$$

wo $l_0$ der Werth von $l$ ist, dem $s=0$ entspricht.

Es war hier unser Zweck, das Flächenstück $FLRP$ (Fig. 51) zu quadriren. Offenbar besteht dies aus Elementen wie $FLMG$, und es ist der Flächeninhalt des letzteren leicht zu bestimmen. Nämlich:

$$FLMG = FLM + LMG = \tfrac{1}{2}\varrho\, ds\sin\alpha + \tfrac{1}{2}\varrho\, d\sigma\sin\beta,$$

oder wegen Formel 2):

$$FLMG = \tfrac{1}{2}\,\varrho\left(ds \sin\alpha + ds\,\frac{\cos\alpha \sin\beta}{\cos\beta} - d\varrho\,\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) = \tfrac{1}{2}\,\varrho\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\,ds - d(\varrho^2)\,\frac{\sin\beta}{\cos\beta}.$$

Also wenn wir das gesuchte Flächenstück mit $s$ bezeichnen, so kommt:

$$s = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\int_s^{s'} \varrho\, ds - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\varrho'^2 - \varrho^2),$$

wo $\varrho$ dem Anfangswerth, $\varrho'$ dem Endwerthe von $\varrho$ entspricht.

Beginnt man mit $s=0$, so ist:

$$s = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\int_0^{s} \varrho\, ds - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\varrho^2 - \varrho_0^2).$$

$\varrho$ ist durch Formel 4) gegeben.

Ein Beispiel wird diese Formel erläutern

Betrachten wir die logarithmische Spirale, als diejenige Curve, der die Grössen $s$ und $l$ angehören, so ist:

$$s = Ae^{ml},$$

$$\varrho = \varrho_0 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\,e^{l\cot\beta}\,Am\int_{l_0}^{l} e^{-l\cot\beta}\,e^{ml}\,dl,$$

$$\varrho = \varrho_0 + \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\beta}\,\frac{Am}{m-\cot\beta}\,e^{ml},$$

wo der Einfachheit wegen $l_0 = 0$ gesetzt ist. Es kommt dann:

$$s = \tfrac{1}{2}\,\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}\,\varrho_0 s - \frac{\sin\beta}{\cos\beta}(\varrho^2 - \varrho_0^2) + \frac{A^2 m e^{2ml}\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}{4\sin\beta\cos\beta(m-\cot\beta)}.$$

## Quadratur krummer Oberflächen.

1) Man kann die Berechnung irgend einer geschlossenen oder beliebig begränzten krummen Oberfläche ebenfalls als eine Verwandlung in eine Summe von Quadraten betrachten, und daher wird diese Operation ebenfalls mit dem Namen Quadratur bezeichnet. Der Name Complanation, der hierfür in neuerer Zeit häufig gebraucht wird, ist ziemlich unglücklich gewählt, da die Verwandlung einer solchen Fläche in eine Ebene durchaus Nichts mit dem in Rede stehenden Probleme zu thun hat, wenigstens dasselbe nicht löst. — Die Formeln für diese Operation ergeben sich in der Gestalt von Doppelintegralen, und richten sich natürlich nach dem dafür gewählten Coordinatensystem. Wir werden hier rechtwinklige oder Polarcoordinaten voraussetzen.

Betrachten wir zunächst die rechtwinkligen Coordinaten $x$, $y$, $z$. Wir denken uns die Ebene der $xy$ in Rechtecke mit verschwindend kleinen Seiten $dx$ und $dy$, bezüglich parallel den Axen der $x$ und $y$ getheilt, durch jede Seite eines solchen Rechtecks eine Ebene senkrecht auf der der $xy$ gelegt, so werden die 4 entsprechenden Ebenen auf der Oberfläche ein verschwindend kleines Viereck abschneiden, welches man als eben betrachten kann. Sei $dV$ der Inhalt desselben, so ist $dx\ dy$ seine Projection auf die $xy$ Ebene, und macht also $dV$ mit der $xy$ Ebene den Winkel $\varepsilon$, so hat man:

$$dx\ dy = \cos\varepsilon\, dV,$$

$$dV = \frac{dx\ dy}{\cos\varepsilon}.$$

Es ist aber $\varepsilon$ auch der Winkel, welchen die Normale in $dV$ mit der Axe der $z$ macht, und für diesen ist bekanntlich:

$$\cos\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

oder wenn die Gleichung der Oberfläche in der Form $f(x, y, z) = 0$ gegeben ist:

$$\cos\varepsilon = \frac{\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}},$$

oder:

$$dV=\sqrt{1+\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial s}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial s}}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Was die Grenzen der Integration anbetrifft, so kann man sich ein beliebig grosses Rechteck in der $xy$-Ebene denken, dessen Seiten bezüglich den Axen der $x$ und der $y$ parallel sind, und durch dieselben Ebenen senkrecht auf die $xy$-Ebene legen. Sind dann $y, y'$ die Werthe, welche den Ordinaten der Eckpunkte, $x, x'$ die, welche den Abscissen derselben entsprechen, so sind $y, y', x, x'$ constant, und:

$$V=\int_x^{x'}\int_y^{y'}\sqrt{1+\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy=\int_x^{x'}\int_y^{y'}\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial s}}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2}\,dx\,dy$$

das von allen vier Ebenen abgeschnittene Stück der Oberfläche. Man kann auch statt des Rechtecks auf der Ebene der $xy$ sich eine beliebige geschlossene Curve oder ein beliebiges Curvensystem denken, und durch dasselbe rechtwinklig auf der $xy$-Ebene einen Cylinder legen; dann werden aber $y$ und $y'$ die durch die Gleichungen dieses Systems gegebenen Functionen von $x$ sein. Sollen dann die Grenzen etwa umgekehrt werden, so ist nach den im Artikel „analytische Quadratur" (Abschnitt 35) gegebenen Regeln an verfahren. Seien z. B. in der $xy$ Ebene 2 Grade, parallel der Axe der $x$ von 2 beliebigen Curven, deren Gleichungen $y=\varphi(x)$, $y=\varphi_1(x)$ geschnitten, so entsteht eine Figur, durch die man senkrecht auf der $xy$-Ebene 2 Ebenen und 2 Cylinderflächen legt, welche von der Oberfläche ein Stück abschneiden, dessen Werth ist:

$$V=\int_x^{x'}\int_{\varphi(x)}^{\varphi_1(x)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy.$$

Aus dem Ausdruck für das Oberflächenelement in rechtwinkligen Coordinaten lässt sich der Ausdruck dafür in Polarcoordinaten durch Transformation herleiten. Es ist dies in dem Abschnitt 36 des Artikels „analytische Quadratur" geschehen. Indess geben wir hier eine zweite directe Methode für die Berechnung dieses Ausdruckes, da die Transformation eine keineswegs einfache Rechnung bedingt.

Es sei, um die Polarcoordinaten zu bestimmen, eine feste Ebene $yz$, in dieser eine feste Linie $OY$, und in letzterer der feste Punkt $O$ (der Pol) gegeben. Wir bestimmen dann die Polarcoordinaten folgendermaassen.

$r$ ist die Entfernung eines gegebenen Punktes vom Pole $O$. Dieselbe wird immer als positiv betrachtet.

$\vartheta$ ist der Winkel von $r$ mit der Normale auf Ebene $yz$, also mit Axe $OX$.

$\varphi$ ist der Winkel, welchen die Projection von $r$ auf Ebene $yz$ mit Axe $OY$ macht.

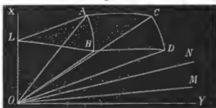
Offenbar erhält man alle Punkte des Raumes, wenn man der Grösse $r$ alle Werthe von 0 bis $+\infty$ gibt, den Winkel $\varphi$ eine volle Drehung um Axe $OY$ machen lässt, ihn also von 0 bis $2\pi$ nimmt. Der Winkel $\vartheta$ ist dann für alle Punkte auf der Seite von $yz$, auf welcher Axe $OX$ liegt, von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, auf der andern Seite von $\frac{\pi}{2}$ bis $\pi$, also im Ganzen von 0 bis $\pi$ zu nehmen.

Alle Punkte, wo $r$ einen gewissen constanten Werth hat, bilden eine Kugelfläche, alle wo $\vartheta$ constant ist, eine Rotationskegelfläche, deren Axe die der $OX$ ist, endlich alle wo $\varphi$ constant ist, eine Ebene, welche durch $OX$ geht, und es ist augenblicklich zu sehen, dass diese 3 Flächen normal oder orthogonal auf einander stehn.

Denkt man sich nun die $r, \vartheta, \varphi$ geändert, so werden also 3 Systeme orthogonaler Flächen entstehen. Betrachten wir jedoch (Fig. 53) nur das Stück $ABDC$, welches auf der Oberfläche der Kugel mit Radius $AO=r$ liegt, und welches von zwei nächsten Kugelflächen, $AOB$ und $COD$, die den Werthen $AOX=\vartheta$ und $COX=\vartheta+d\vartheta$ entsprechen, sowie durch 2 Ebenen, $XOAC$ und $XOBD$, für welche die Werthe $MOY=\varphi$ und $NOY=\varphi+d\varphi$ gelten, begrenzt ist. Es wird durch sie auf der Kugelfläche ein unendlich kleines, also als eben zu betrachtendes Rechteck abgeschnitten, dessen Seiten $AB$ und $AC$ sind. Offenbar aber ist:

$$AOC=d\vartheta, \quad \text{also:} \quad AC=rd\vartheta,$$

Fig. 53.




nnd wenn $AL$, $BL$ senkrecht nnf Linie $OX$ gezogen sind:

$LB = r \sin \vartheta$, Winkel $ALB$ = Winkel $NOM = d\varphi$,

also:

$$AB = r \sin \vartheta d\varphi.$$

Es ist also der Flächeninhalt nnseres Rechtecks gleich:

$$AB \cdot AC = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Offenbar aber ist, wenn $r$ sich auf einen beliebigen Punkt $A$ der gegebenen Oberfläche bezieht, dieses Rechteck die Projection desjenigen Elements der Oberfläche, welches durch Pnnkt $A$ geht, nnd von beiden Kegelflächen nnd beiden Ebenen abgeschnitten wird, auf die Kugelfläche, welche $r$ znm Radius hat, also durch Punkt $A$ geht. Ist also $dS$ dies Element nnd $\varepsilon$ der Winkel seiner Normale mit Radius $r$ der Kugel, so ist:

$$dS \cos \varepsilon = r^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Man kann aber die Seiten $AC = r d\vartheta$ und $AB = r \sin \vartheta d\varphi$ als rechtwinklige Coordinaten betrachten, $x$ und $y$, deren Anfangspunkt $A$ ist. Die dritte Coordinate wird dann $z = dr$ sein. Da alle drei mit $x = y = z$ für Punkt $A$ beginnen, so entspricht dem Zuwachse $dx = r d\vartheta$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx = \frac{\partial r}{\partial \vartheta} d\vartheta,$$

nnd dem Zuwachse $dy = r \sin \vartheta d\varphi$:

$$\frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{\partial r}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Es wird also auch sein:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \frac{d\vartheta}{dx} = \frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial \vartheta},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial r}{\partial \varphi},$$

nnd wenn man diese Ausdrücke in den eben gewonnenen Werth von $\cos \varepsilon$:

$$\cos \varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$$

einsetzt:

$$\cos \varepsilon = \frac{r \sin \vartheta}{\sqrt{\left(r^2 + \frac{\partial r^2}{\partial \vartheta^2}\right) \sin \vartheta^2 + \frac{\partial r^2}{\partial \varphi^2}}},$$

also:

$$dS = r d\vartheta d\varphi \sqrt{\left(r^2 + \frac{\partial r^2}{\partial \vartheta^2}\right) \sin \vartheta^2 + \frac{\partial r^2}{\partial \varphi^2}}.$$

Als Begrenzung wird am bequemsten der Durchschnitt der Oberfläche mit zweien nnserer Kegelflächen, die den constanten Werthen $\vartheta$ und $\vartheta'$ entsprechen, so wie mit 2 durch $OX$ gehenden Ebenen, für die $\varphi$ und $\varphi'$ die entsprechenden constanten Winkel sind, genommen, nnd man hat:

$$S = \int_{\varphi}^{\varphi'} \int_{\vartheta}^{\vartheta'} r d\vartheta d\varphi \sqrt{\left(r^2 + \frac{\partial r^2}{\partial \vartheta^2}\right) \sin \vartheta^2 + \frac{\partial r^2}{\partial \varphi^2}}.$$

Für eine ganze geschlossene Oberfläche ist zu setzen:

$$\varphi = 0, \quad \varphi' = 2\pi, \quad \vartheta = 0, \quad \vartheta' = \pi,$$

wohl zu merken aber nur dann, wenn der Pol sich innerhalb dieser Oberfläche befindet, nnd dieselbe jeden Radinsvector $r$ nur einmal schneidet. In solchen Fällen ist die Formel für $S$ sehr vortheilhaft, da der Ausdruck für $V$ in rechtwinkligen Coordinaten für diesen Fall in Theile zerlegt werden muss, die den Richtungen beider Axen entsprechen. Bedeutend grössere Schwierigkeiten macht aber die Quadratur in Polarcoordinaten, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist.

2) Quadratur der Rotationsflächen.

Viel einfacher ist die Formel

für die Quadratur der Rotationsflächen.

Habe die ebene Curve, aus deren Rotation die Oberfläche entsteht, die Gleichung:

$$f(x, y) = 0,$$

wo man als Axe der X immer die Rotationsaxe betrachten kann, so wird bei der Drehung jeder Punkt $B$ die zugehörige Abscisse $x$ behalten. Die Linie $AB$ aber (Fig. 54), die in der ebenen Curve die Ordinate vorstellte, ist jetzt die Entfernung des Punktes $A$ von der Axe der $x$. Bezeichnen wir dieselbe mit $\varrho$, so ist also die Gleichung der Oberfläche

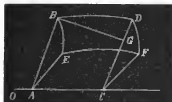
$$f(x, \varrho) = 0,$$

und wie wir auch die auf $OX$ senkrechten Axen $OY$ und $OZ$ im Uebrigen für die Oberfläche annehmen, es wird immer sein:

$$\varrho^2 = y^2 + z^2.$$

Denken wir uns jetzt ein Stück der Oberfläche, abgeschnitten von 2 unendlich nahen, durch $OX$ gehenden Ebenen,

Fig. 54.




$ACD\vartheta$ und $ACFE$, ferner durch 2 auf $OX$ senkrechte, ebenfalls einander unendlich nahen Ebenen, $BAE$ und $DEF$.

Sei

$$\text{Winkel } BAE = d\vartheta,$$

so ist $\vartheta$ offenbar der Rotationswinkel, d. h. diejenige Drehung, welche gemacht wird, damit die Curve von ihrer anfänglichen in die augenblickliche Lage kommt, ferner:

$$BA = AE = \varrho,$$

$$BE = \varrho d\vartheta,$$

$$BD^2 = ds^2 = \sqrt{(dx^2 + d\varrho^2)}.$$

Offenbar nämlich ist $BD$ das Element der erzeugenden Curve, welches bekanntlich (siehe den Artikel: Rectification) als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks zu denken ist, dessen Catheten die Werthe: $BG = dx$, $DG = d\varrho$ haben. Es ist also das Rechteck

$$dV = BE \cdot BD,$$

oder:

$$dV = \varrho d\vartheta dx \sqrt{1 + \frac{d\varrho^2}{dx^2}}.$$

Die Integration erstreckt man auf das von zwei beliebigen, durch $OX$ gehende Ebenen, welche die Winkel $\vartheta$ und $\vartheta'$ mit Ebene $xy$ machten, und von zwei auf $OX$ senkrechten Ebenen, welche die Abscissen $x$ und $x'$ haben, abgeschnittene Stück. Man hat dann:

$$V = \int_{\vartheta}^{\vartheta'} d\vartheta \int_{x}^{x'} \varrho \sqrt{1 + \left(\frac{d\varrho}{dx}\right)^2} dx,$$

oder da die Integration nach $\vartheta$ sich vollziehen lässt:

$$V = (\vartheta' - \vartheta) \int_{x}^{x'} \varrho \sqrt{1 + \left(\frac{d\varrho}{dx}\right)^2} dx.$$

Diese Formel führt also zu einem einfachen Integral.

Soll ein Stück berechnet werden, welches zwischen zweien während der Rotation beschriebenen vollen Kreisen liegt, so ist zu setzen:

$$\vartheta = 0, \quad \vartheta' = 2\pi.$$

3) **Beispiele für die Rotationsflächen.**

Wir geben zunächst Beispiele zur letzteren einfachen Formel.

Für einen Rotationskegel ist die Erzeugungslinie eine grade, die wir durch den Anfangspunkt 0 gehen lassen. Es ist dann:

$$\varrho = x \operatorname{tg} \alpha,$$

wo $\alpha$ der halbe Scheitelwinkel des Kegels ist, und:

$$V = (\vartheta' - \vartheta) \int_{x}^{x'} x \operatorname{tg} \alpha \sec \alpha \, dx = \frac{(\vartheta' - \vartheta)}{2} \operatorname{tg} \alpha \sec \alpha (x'^2 - x^2).$$

Für den Cylinder ist die Erzeugungslinie der Rotations-Axe parallel, also $\varrho$ constant zu nehmen. Es ergibt sich:

$$V = (\vartheta' - \vartheta)(x' - x)\varrho.$$

Das Rotationsellipsoid, dessen Rotations-Axe die grosse Axe $X$ ist, hat zur Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\varrho^2}{b^2}=1;$$

es ist:

$$\varrho=\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)},$$

$$\frac{xdx}{a^2}+\frac{\varrho d\varrho}{b^2}=0,$$

also:

$$\frac{d\varrho}{dx}=-\frac{xb^2}{\varrho a^2},$$

$$\sqrt{1+\frac{d\varrho^2}{dx^2}}=\frac{\sqrt{\varrho^2a^4+x^2b^4}}{\varrho a^2}$$

d. h.

$$\varrho\sqrt{1+\frac{d\varrho^2}{dx^2}}=\frac{b}{a^2}\sqrt{a^4-x^2(a^2-b^2)},$$

$$V=\frac{(\vartheta'-\vartheta)\,b}{a^2}\int_x^{x'}\sqrt{a^4-x^2(a^2-b^2)}\,dx.$$

Es ergibt sich nach II 28) der Integraltafeln hieraus:

$$V=(\vartheta'-\vartheta)\,b\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-\frac{x^2(a^2-b^2)}{a^4}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\left(\frac{x\sqrt{a^2-b^2}}{a^2}\right)\right],$$

wo die untere Grenze gleich Null genommen ist, also die Integration vom Mittelpunkte aus begonnen ist. Setzt man:

$$\vartheta'=2\pi,\quad \vartheta=0,\quad x=a,$$

so erhält man das halbe Ellipsoid, nämlich:

$$V=2\pi b\left[\frac{b^2}{2}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)\right].$$

Für die Kugel ist $b=a$. Lässt man für dieselbe zunächst $\sqrt{(a^2-b^2)}$ unendlich klein werden, wo dann:

$$\arcsin\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

wird, so hat man:

$$V=2\pi a^2,$$

als Flächeninhalt der Halbkugel.

Das abgeplattete Ellipsoid ergibt sich aus demselben Integral, wenn man $b$ grösser als $a$ annimmt. Die Integration führt dann aber auf einen andern Ausdruck. Es ist dann nämlich zu setzen:

$$V=(\vartheta'-\vartheta)\,b\left[\frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{x^2(b^2-a^2)}{a^4}}+\frac{a^2}{2\sqrt{b^2-a^2}}\lg\left(\frac{x\sqrt{b^2-a^2}}{a^2}+\sqrt{1+\frac{x^2(b^2-a^2)}{a^4}}\right)\right],$$

und für das halbe Ellipsoid:

$$V=2\pi b\left[\frac{b}{2}+\frac{a^2}{2\sqrt{b^2-a^2}}\lg\left[\frac{\sqrt{b^2-a^2}+b}{a}\right]\right],$$

Das Rotations-Hyperboloid, welches durch Drehung um die reelle Axe entstanden ist, hat zur Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{\varrho^2}{b^2}=1.$$

Die Formel für $V$ ergibt sich aus dem Integral fürs Ellipsoid, wenn man darin überall $-b^2$ für $b^2$ schreibt. Man erhält:

$$V=(\vartheta'-\vartheta)\frac{b}{a^2}\int_x^{x'}\sqrt{x^2(a^2+b^2)-a^4}\;dx.$$

Aus den Integraltafeln II 28 ergibt sich:

$$\int\sqrt{x^2(a^2+b^2)-a^4}\;dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2(a^2+b^2)-a^4}$$

$$-\frac{a^4}{2\sqrt{a^2+b^2}}\lg\left(x\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{x^2(a^2+b^2)-a^4}\right),$$

also:

 Quadratur krummer Oberflächen.

$$V=(\vartheta'-\vartheta)b\left[\frac{x}{2a^2}\sqrt{x^2(a^2+b^2)-a^4}-\frac{a^3}{2\sqrt{a^2+b^2}}\lg\left(x\sqrt{a^2+b^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sqrt{x^2(a^2+b^2)-a^4}\right)\right]-(\vartheta'-\vartheta)\,b\left[\frac{b}{2}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}\lg\left(a\sqrt{a^2+b^2}-ab\right)\right],$$

wo die Integration in den Grenzen $x=a$, $x'=x$ vollzogen ist.

Das Hyperboloid, welches durch Drehung einer Hyperbel um die imaginäre Axe entstanden ist, hat zur Gleichung:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{\varrho^2}{b^2}=1.$$

Es ergibt sich:

$$V=(\vartheta'-\vartheta)\frac{b}{a^2}\int_x^{x'}\sqrt{x^2(a^2+b^2)+a^4}\,dx,$$

d. h. wenn man die Integration mit $\varrho=b$, also mit $x=0$ beginnt:

$$V=(\vartheta'-\vartheta)b\left[\frac{x}{2a^2}\sqrt{x^2(a^2+b^2)+a^4}+\frac{a^3}{2\sqrt{a^2+b^2}}\lg\left(x\sqrt{a^2+b^2}\right.\right.$$
$$\left.\left.+\sqrt{x^2(a^2+b^2)+a^4}\right)\right]-(\vartheta'-\vartheta)b\frac{a^3}{\sqrt{a^2+b^2}}\lg a.$$

Die Annahme der untern Grenze der Integration für beide Hyperboloide beruht darauf, dass in den entsprechenden Punkten, wie leicht zu sehen, die reellen Punkte der Flächen beginnen.

Beschäftigen wir uns jetzt noch mit dem Paraboloid, welches durch Drehung einer Parabel um ihre Hauptaxe entstanden ist, und dessen Gleichung sein wird:

$$\varrho^2=2px,$$
$$\frac{d\varrho}{dx}=\frac{p}{\varrho},$$

also:

$$\varrho\sqrt{1+\frac{d\varrho^2}{dx^2}}=\sqrt{\varrho^2+p^2}=\sqrt{p(2x+p)},$$
$$V=(\vartheta'-\vartheta)\int_x^{x'}\sqrt{p(2x+p)}\,dx,$$

also, wenn man mit $x=0$ beginnt:

$$V=\frac{\vartheta'-\vartheta}{3}\sqrt{p(2x+p)^3}.$$

Entsteht dagegen das Paraboloid durch Drehung um eine auf der Hauptaxe senkrechte Linie, welche durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, so ist die Gleichung zu nehmen:

$$2p\varrho=x^2.$$

Es ist also:

$$\frac{d\varrho}{dx}=\frac{x}{p},\quad \varrho\sqrt{1+\frac{d\varrho^2}{dx^2}}=\frac{x^2\sqrt{p^2+x^2}}{2p^2},$$
$$V=\frac{\vartheta'-\vartheta}{2p^2}\int_x^{x'}x^2\sqrt{p^2+x^2}\,dx.$$

Nach II 28) der Integraltafeln folgt hieraus, wenn man mit $x=0$ beginnt:

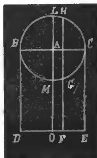
$$V=\frac{\vartheta'-\vartheta}{2p^2}\left[\frac{x}{4}\sqrt{(p^2+x^2)^3}-\frac{p^2x}{8}\sqrt{p^2+x^2}-\frac{p^4}{8}\lg\left(x+\sqrt{p^2+x^2}\right)\right]+\frac{(\vartheta'-\vartheta)p^2}{16}\lg p.$$

Als letztes Beispiel betrachten wir die ringförmige Oberfläche, welche entsteht, wenn ein Kreis um eine grade Linie rotirt, die nicht mit seinem Durch-

messer zusammenfällt. Die Gestalt der entstehenden Oberfläche wird wesentlich verschieden sein, je nachdem diese Linien ausserhalb oder innerhalb des Kreises liegt. In jedem Falle aber gehören hier zu jedem $x$ 2 Werthe von $\varrho$, und kommt es darauf an, einen Theil der Ringoberfläche zu finden, der vom ganzen Kreis gebildet wird, so sind die beiden $\varrho$ entsprechenden Stücke ihrem absoluten Werthe nach zu addiren.

In jedem Falle kann man die Axen so legen, dass die senkrechte Linie vom Mittelpunkt $A$ (Fig. 55) des Erzeugungs-

Fig. 55.




kreises auf die Axe der $x$ durch den Anfangspunkt $O$ geht. Sei

$AO = e$ und $r$ der Radius des Kreises, so wird jede Linie $HGF$, welche senkrecht auf der Axe $OX$ steht, den Kreis zweimal oder gar nicht schneiden, mit Ausnahme der beiden Tangenten $BD$ und $EC$. Wir setzen den grössern der beiden Werthe von $\varrho$ gleich $\varrho_1$, den kleinern gleich $\varrho_2$, so dass:

$$HF = \varrho_1, \quad GF = \varrho_2$$

ist. Die Tangenten

$$BD = CE = s$$

geben die Punkte an, wo:

$$\varrho_1 = \varrho_2$$

ist, und diese Werthe $s$ bezeichnen also das Minimum von $\varrho_1$ und das Maximum von $\varrho_2$.

Die Gleichung der Rotationsfläche ist:

$$x^2 + (\varrho - e)^2 = r^2,$$

also:

$$(\varrho - e) = \sqrt{(r^2 - x^2)}.$$

Hieraus folgt:

$$\varrho_1 = e + \sqrt{(r^2 - x^2)},$$

und:

$$\varrho_2 = s - \sqrt{(r^2 - x^2)}.$$

Dem Werthe:

$$\varrho_1 = \varrho_2 = e$$

entspricht:

$$x = \pm r.$$

Man erhält:

$$\frac{d\varrho}{dx} = \pm \frac{x}{\sqrt{(r^2 - x^2)}},$$

$$\varrho_1 \sqrt{1 + \frac{d\varrho_1{}^2}{dx^2}} = \frac{rs}{\sqrt{r^2 - x^2}} + r,$$

$$\varrho_2 \sqrt{1 + \frac{d\varrho_2{}^2}{dx^2}} = \frac{re}{\sqrt{r^2 - x^2}} - r,$$

$$V = (\vartheta' - \vartheta) \int_x^{x'} \left( \frac{re}{\sqrt{r^2 - x^2}} \pm r \right) dx,$$

also wenn man mit $x = 0$ beginnt:

$$V = (\vartheta' - \vartheta) \left( er \arcsin \left( \frac{x}{r} \right) \pm xr \right).$$

Das von 2 einander entsprechenden Werthen von $\varrho$ gebildete Ringstück erhält man, wenn man beide Werthe von $V$ addirt:

$$V = 2(\vartheta' - \vartheta) er \arcsin \left( \frac{x}{r} \right)$$

Setzt man $x = r$, so hat man das dem Halbkreise $LHCM$ entsprechende Stück:

$$V = \pi (\vartheta' - \vartheta) er,$$

und das vom ganzen Kreise gebildete Stück:

$$V = 2\pi (\vartheta' - \vartheta) er.$$

Soll der ganze Ring gefunden werden, so ist $\vartheta' = 2\pi$, $\vartheta = 0$ zu nehmen, also:

$$V = 4\pi^2 er.$$

„Der Ring ist gleich einem Rechteck, das zu einer Seite die Peripherie des gegebenen Kreises, zur andern die desjenigen Kreises hat, der während der Rotation vom Mittelpunkte $A$ beschrieben wird."

Der letztere Radius ist nämlich offenbar gleich $s$.

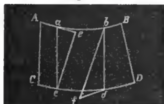
4) Quadratur von Oberflächen, die nicht durch Rotation entstanden sind.

Wir bemerken hierbei zunächst, dass man sehr oft aus der Entstehungsweise der in Rede stehenden Oberfläche für den Zweck der Quadratur bequemere Formeln ableiten wird, als sich unmittelbar aus den oben gegebenen bilden lassen.

Wir nehmen z. B. an, dass die Ober-

fläche von einer graden Linie erzeugt sei, welche sich zwischen zwei beliebigen Curven $AB$ und $CD$ (Fig. 56), die nicht

Fig. 56.




in einer Ebene liegen, derart hewegt, dass sie immer heide herührt. Bezeichnen wir mit:

$$ab = ds, \quad cd = d\sigma$$

die Bogenelemente beider Curven, welche die gegebene Grade gleichzeitig zurücklegt. Fällt man von $c$ aus Loth $ce = h$ auf die Tangente, welche durch $a$ gezogen ist, und von $b$ aus Loth $bf = k$ auf die durch $\partial$ gezogene Tangente, so ist, da man die Richtung der Tangenten mit der der Bogenelemente identificiren kann, die Figur $bac\partial$ als aus zwei Dreiecken hestehend zu betrachten, deren eins, $cab$, die Höhe $h$ und die Grundlinie $ds$, das andere $bc\partial$ die Höhe $k$ und die Grundlinie $d\sigma$ hat, so dass sich ergiht:

$$bac\partial = \frac{h ds + k d\sigma}{2}.$$

Es ist also, wenn man den Bogen $s$ als unabhängige Variable betrachtet, ihm den Anfangswerth $s$ und den Endwerth $s'$ giht, mit $F$ das entsprechende Stück der Oberfläche bezeichnet, welches zwischen zwei graden Erzeugungslinien $AC$ und $BD$ und den heiden Leitlinien $AB$ und $CD$ liegt, wo:

$$AB = s' - s$$

ist:

$$F = \tfrac{1}{2}\int_s^{s'} \left(h + k\frac{d\sigma}{ds}\right) ds.$$

Die Beziehung zwischen $h$, $k$, $\sigma$, $s$ muss durch die Gestalt der Leitlinien und die Bewegung der Erzeugungslinie bestimmt sein.

Seien die Winkel, welche die letztere mit den Tangenten der Leitlinien $s$ und $\sigma$ in den augenblicklichen Berührungspunkten macht, bezüglich $\alpha$ und $\beta$, und $l$ die Länge des Stückes der Grade $ac$, welches zwischen beiden Leitlinien liegt, so ist:

$$h = l \sin\alpha, \quad k = l \sin\beta,$$

wo $l$ natürlich eine veränderliche Grösse ist. Also:

$$F = \tfrac{1}{2}\int_s^{s'} l\left(\sin\alpha + \sin\beta\frac{d\sigma}{ds}\right) ds.$$

Für einen Cylinder z. B. kann man die beiden Leitlinien immer so wählen, dass

$$l \text{ constant}, \ \sigma = s, \ \text{und } \alpha = \beta$$

ist. Denn die Erzeugungslinie bleibt sich immer parallel, und man kann die Leitlinien in einander parallelen Ebenen nehmen.

Es ist also in diesem Falle:

$$F = l\int_s^{s'} \sin\alpha\, ds.$$

Beim Rotationscylinder steht die Erzeugungslinie auf der Leitlinie senkrecht, man hat $\sin\alpha = 1$,

$$F = l(s' - s).$$

Diese Formel gilt aher offenhar nicht allein für den Rotationscylinder, sondern für jeden, wo die Erzeugungslinie auf der Ebene der Leitlinie senkrecht steht.

Für die Kegelflächen kann man statt der einen Leitlinie einen Punkt, den Scheitelpunkt nehmen. Es ist also:

$$d\sigma = 0,$$

$$F = \tfrac{1}{2}\int l \sin\alpha\, ds.$$

Für einen Rotationskegel ist $l$ constant, und der Winkel $\alpha$ ist gleich $\frac{\pi}{2}$, da die Seite des Kegels auf dem Grundkreise senkrecht steht, also:

$$F = \frac{ls}{2},$$

$$s = r\lambda,$$

wenn $\lambda$ der zu $s$ gehörige Centriwinkel ist, also für den ganzen Kegel, wo $\lambda = 2\pi$ ist,

$$F = \pi r l.$$

Wir kehren aher zum allgemeinen Falle zurück, und wollen noch die Beziehungen der Grössen $l$, $\alpha$, $\beta$ zu einander hestimmen.

Seien zu dem Ende $x$, $y$, $z$ die Coordinaten der Leitlinien vom Bogen $s$, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ die derjenigen, deren Bogen $\sigma$ ist, und mache die Erzeugungslinie Winkel mit den Axen, deren Cosinus $\lambda$, $\mu$, $\nu$ sind, so ist hekanntlich in jeder Lage derselben:

$$(x - \xi) = l\lambda, \quad (y - \eta) = l\mu, \quad (z - \zeta) = l\nu.$$

Es sind ferner:

$$\frac{dx}{ds},\ \frac{dy}{ds},\ \frac{dz}{ds}$$

die Cosinus der Winkel, welche die erste Leitlinie, und

$$\frac{d\xi}{d\sigma},\ \frac{d\eta}{d\sigma},\ \frac{d\zeta}{d\sigma}$$

die derjenigen, welche die zweite Leitlinie mit den Coordinaten-Axen macht. Man hat dann nach bekannten Sätzen der analytischen Geometrie:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}\,\frac{x-\xi}{l} + \frac{dy}{ds}\,\frac{y-\eta}{l} + \frac{dz}{ds}\,\frac{z-\zeta}{l},$$

$$\cos\beta = \frac{d\xi}{d\sigma}\,\frac{x-\xi}{l} + \frac{d\eta}{d\sigma}\,\frac{y-\eta}{l} + \frac{d\zeta}{d\sigma}\,\frac{z-\zeta}{l},$$

$$l^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Wenn die Gleichungen beider Curven, und ausserdem eine Beziehung etwa zwischen den Grössen $l$, $s$ und $\sigma$ gegeben ist, so ist dann der Ausdruck für $F$ völlig bestimmt, und derselbe wird durch nur ein einfaches Integral gegeben sein.

Uebrigens kann man beide Leitlinien als ebene Curven bestimmen, deren Ebenen einander parallel sind. Ist diejenige Ebene, in welcher sich die mit $s$ bezeichneten Bogen befinden, dann Ebene der $xy$, so ist:

$$z = 0,\ \zeta = \text{const.},\ \frac{dz}{ds} = 0,\ \frac{d\zeta}{d\sigma} = 0,$$

also:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}\,\frac{x-\xi}{l} + \frac{dy}{ds}\,\frac{y-\eta}{l},$$

$$\cos\beta = \frac{d\xi}{d\sigma}\,\frac{x-\xi}{l} + \frac{d\eta}{d\sigma}\,\frac{y-\eta}{l},$$

$$l^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2.$$

Für den Cylinder sind z. B. beide Leitlinien congruent, und wenn man die Projection der Erzeugungslinien auf die Ebene der $xy$ als Axe der $x$ nimmt, so werden sich die Grössen $x$ und $y$ und $\eta$ nur um Constanten unterscheiden; es ist also auch $l$ constant. Und wenn man: $x-\xi = a$, $y-\eta = b$ setzt:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}\,\frac{a}{l} + \frac{dy}{ds}\,\frac{b}{l},$$

$$\cos\beta = \frac{dx}{ds}\,\frac{a}{l} + \frac{dy}{ds}\,\frac{b}{l}.$$

Die Gleichheit der Winkel $\alpha$ und $\beta$ folgt nämlich unmittelbar aus der Entstehungsart des Cylinders, oder auch durch die Betrachtung, dass:

$$d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 = dx^2 + dy^2 = ds^2$$

ist. Es ist mithin für den Cylinder:

$$l^2 = a^2 + b^2 + \zeta^2,$$

$$\sin\alpha = \sin\beta = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{l^2\,ds^2 - (a\,dx + b\,dy)^2}{ds^2}}$$

$$F = \int_s^{s'} \sqrt{l^2\,ds^2 - (a\,dx + b\,dy)^2}$$

Ist die Leitlinie ein Kreis, so hat man, wenn $r$ der Radius desselben, $A$, $B$ die mit $x$ und $y$ parallelen Coordinaten seines Mittelpunkts sind:

$$x - A = r\sin\frac{s}{r},\ y - B = r\cos\frac{s}{r},$$

$$dx = \cos\frac{s}{r}\,ds,\ dy = -\sin\frac{s}{r}\,ds,$$

$$F = \int_s^{s'} ds\sqrt{l^2 - \left(a\cos\frac{s}{r} - b\sin\frac{s}{r}\right)}$$

$$= \int_s^{s'} ds\sqrt{l^2 - \frac{a^2+b^2}{2} + ab\sin\frac{2s}{r} + \frac{b^2-a^2}{2}\cos\frac{2\cdot s}{r}}.$$

Einen noch einfacheren Ausdruck erhält man, wenn man setzt:

$$\frac{2s}{r} = t,\ \frac{ab}{l^2} = h\sin\vartheta,\ \frac{b^2-a^2}{2l^2} = h\cos\vartheta,$$

$$F = \frac{r}{2}\int_t^{t'} dt\sqrt{l^2 - \frac{a^2+b^2}{2} + l^2 h\cos(t-\vartheta)},$$

oder wenn man

$$\frac{t-\vartheta}{2} = u,\quad \frac{a^2+b^2}{2} - l^2(h-1) = g$$

setzt:

$$F = r\int_u^{u'} du\sqrt{2l^2 h\cos u^2 - g}.$$

Eine weitere Reduction gelingt jedoch nicht. Das Integral ist ein elliptisches zweiter Gattung (siehe den Artikel: elliptische Transcendenten).

Für den allgemeinen Kegel ist zu setzen:

$\xi$, $\eta$, $\zeta$ gleich Constanten,

da ein Punkt die zweite Curve vertritt. Setzt man unmittelbar in die Formel

$$F = \tfrac{1}{2}\int_s^{s'} l\sin\alpha\, ds$$

ein, indem man der Einfachheit wegen die Projection der Spitze des Kegels auf die Ebene der $xy$ als Anfangspunkt der Coordinaten nimmt, wo dann:

$$\xi = \eta = 0,$$
$$l^2 = x^2 + y^2 + \zeta^2$$

wird:

$$F = \tfrac{1}{2}\int_s^{s'}\sqrt{l^2\, ds^2 - (x dx + y dy)^2}.$$

Ist die Basis ein Kreis, also gelten die oben beim Cylinder gegebenen Relationen zwischen $x$ und $s$, $y$ und $s$ wieder, so hat man:

$$x dx = \left[A + r\sin\frac{s}{r}\right]\cos\frac{s}{r}\, ds,$$

$$y dy = \left[B + r\cos\frac{s}{r}\right]\sin\frac{s}{r}\, ds,$$

$$x dx + y dy = \left(A\cos\frac{s}{r} - B\sin\frac{s}{r}\right) ds,$$

$$l^2 = x^2 + y^2 + \zeta^2 = A^2 + B^2 + 2r A\sin\frac{s}{r} + 2r B\cos\frac{s}{r} + r^2,$$

$$F = \tfrac{1}{2}\int_s^{s'} ds\sqrt{A^2\sin\frac{s}{r}^2 + B^2\cos\frac{s}{r}^2 + 2AB\sin\frac{s}{r}\cos\frac{s}{r} + 2rA\sin\frac{s}{r} + 2rB\cos\frac{s}{r} + r^2 + \zeta^2},$$

oder:

$$F = \tfrac{1}{2}\int_s^{s'} ds\sqrt{r^2 + \zeta^2 + \left(A\sin\frac{s}{r} + B\cos\frac{s}{r}\right)^2 + 2r\left(A\sin\frac{s}{r} + B\cos\frac{s}{r}\right)}.$$

Setzt man hierin noch:

$$A\sin\frac{s}{r} + B\cos\frac{s}{r} = U,$$

so ist auch:

$$A\cos\frac{s}{r} - B\sin\frac{s}{r} = r\frac{dU}{ds},$$

und indem man beide Gleichungen quadrirt und addirt erhält man:

$$A^2 + B^2 = U^2 + r^2\frac{dU^2}{ds^2},$$

woraus sich ergibt:

$$ds = \frac{r dU}{\sqrt{(A^2 + B^2 - U^2)}}.$$

Diese Werthe in den von $F$ einsetzend, erhält man:

$$F = \frac{r}{2}\int_u^{u'}\frac{dU\sqrt{(r^2 + \zeta^2 + U^2 + 2rU)}}{\sqrt{(A^2 + B^2 - U^2)}},$$

offenbar wieder ein elliptisches Integral.

Ist die Fläche eine windschiefe, d. h. ist eine der Leitlinien eine grade Linie, und macht dieselbe Winkel mit den Axen, deren Cosinus $a$, $b$, $c$ sind, so ist, wenn wir unter $A, B, C$, die Coordinaten desjenigen Punktes dieser Graden verstehen, von welchem aus die Längen $s$ gezählt werden:

$$x - A = sa,\quad y - B = sb,\quad z - C = sc,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1,$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{l}(x - \xi) + \frac{b}{l}(y - \eta) + \frac{c}{l}(z - \zeta),$$

d. h. wegen der Werthe von $x$, $y$, $z$:

$$\cos\alpha = \frac{s + a(A - \xi) + b(B - \eta) + c(C - \zeta)}{l}.$$

Nehmen wir dagegen an, die Erzeugungslinie bleibe stets einer gegebenen Ebene parallel, so kann man diese als Ebene der $xy$ betrachten. Es wird dann der Winkel der Erzeugungslinie mit der Axe der $z$ stets ein rechter, und sein Cosinus $\nu = 0$ sein, woraus sich

$$z = \zeta,\quad dz = d\zeta$$

ergibt. Es ist dann:

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds}\,\frac{x-\xi}{l} + \frac{dy}{ds}\,\frac{y-\eta}{l},$$

$$\cos\beta = \frac{d\xi}{d\sigma}\,\frac{x-\xi}{l} + \frac{d\eta}{d\sigma}\,\frac{y-\eta}{l},$$

$$l^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2.$$

Vereinigen wir beide Bedingungen, dass also die Leitlinie eine grade, und die Erzeugungslinie einer Ebene parallel ist, so hat man also:

$$\cos\alpha = \frac{a}{l}(x-\xi) + \frac{b}{l}(y-\eta)$$

$$= \frac{aA + bB + s(a^2+b^2) - a\xi - b\eta}{l},$$

$$\cos\beta = \frac{d\xi}{d\sigma}\cdot\frac{A + sa - \xi}{l} + \frac{d\eta}{d\sigma}\cdot\frac{B + sb - \eta}{l}$$

$$l^2 = (A + sa - \xi)^2 + (B + sb - \eta)^2.$$

Wir können aber auch annehmen, dass sich der Anfangspunkt der Coordinaten in der Graden $s$ befindet, wo dann $A = B = C = 0$ zu setzen ist. Unsere Gleichungen werden dann:

$$\cos\alpha = \frac{s(a^2+b^2) - a\xi - b\eta}{l},$$

$$\cos\beta = \frac{d\xi}{d\sigma}\,\frac{sa - \xi}{l} + \frac{d\eta}{d\sigma}\,\frac{sb - \eta}{l},$$

$$l^2 = (sa - \xi)^2 + (sb - \eta)^2.$$

Ist die zweite Leitlinie auch grade, so entsteht eine windschiefe Ebene. Es ist dann, wenn $a_1$, $b_1$, $c_1$ die Cosinus der Winkel sind, welche diese zweite Leitlinie mit den Axen macht:

$$\xi - A_1 = \sigma a_1,\quad \eta - B_1 = \sigma b_1,\quad \zeta - C_1 = \sigma c_1.$$

$A_1$, $B_1$, $C_1$ sind die Coordinaten desjenigen Punktes, von dem die $\sigma$ gezählt werden. Man kann aber die Grade, welche diesen Punkt mit dem Anfangspunkt der Coordinaten verbindet, als Axe der $x$ nehmen, denn diese Grade ist offenbar eine Erzeugungslinie, und also der Ebene $xy$ parallel. In diesem Falle ist

$$B_1 = 0,\qquad C_1 = 0,$$

und da man

$$\frac{d\xi}{d\sigma} = a_1,\quad \frac{d\eta}{d\sigma} = b_1,$$

hat, ausserdem aber:

$$z = \zeta,$$

also mit Berücksichtigung der Werthe

$$C = C_1 = 0,$$

$$sc = \sigma c_1$$

ist, so werden unsere 3 Gleichungen:

$$\cos\alpha = \frac{s(a^2+b^2) - aA_1 - \frac{sc}{c_1}(a a_1 + b b_1)}{l},$$

$$\cos\beta = \frac{a_1 s(a c_1 - a_1 c) + b_1 s(b c_1 - b_1 c) - a_1 A_1 c_1}{c_1 l},$$

$$c_1^2 l^2 = [s(a c_1 - a_1 c) - A_1 c_1]^2 + s^2 (b c_1 - b_1 c)^2,$$

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{c}{c_1}.$$

Das Einsetzen dieser Werthe in die Formel:

$$F = \tfrac{1}{2}\int_s^{s'} l\left(\sin\alpha + \sin\beta\,\frac{d\sigma}{ds}\right) ds$$

gibt indess wieder ein elliptisches Integral.

Nehmen wir nun an, die Leitlinie $s$ stände auf der Richtungsebene senkrecht, so wird:

$$a = b = 0,\quad c = 1,\quad \alpha = \frac{\pi}{2},$$

$$\cos\beta = \frac{c_1 a_1 A_1 + s(a_1^2 + b_1^2)}{c_1 l},$$

$$c_1^2 l^2 = (A_1 c_1 + a_1 s)^2 + s^2 b_1^2,$$

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{c_1}.$$

Hieraus ergibt sich:

$$\sin\beta = \frac{\sqrt{c_1^2 l^2 - [a_1 c_1 A_1 + s(a_1^2 + b_1^2)]^2}}{c_1 l},$$

—

$$l \sin\beta \frac{d\sigma}{ds} = \frac{1}{c_1^2} \sqrt{(A_1 c_1 + a_1 s)^2 + s^2 b_1^2 - [a_1 c_1 A_1 + s(a_1^2 + b_1^2]^2}$$

$$l = l \sin\alpha = \frac{1}{c_1} \sqrt{(A_1 c_1 + a_1 s)^2 + s^2 b_1^2}.$$

Die Grösse $F$ aher setzt sich ans der Summe der Integrale heider vorstehenden Ausdrücke susammen. Diese Integration ist stets ausführbar, und führt wie ersichtlich anf Logarithmen oder Bogen zurück.

Um jedoch noch ein wichtiges Beispiel anderer Art zu nehmen, wollen wir nns mit der Quadratnr des Ellipsoids mit 3 verschiedenen Axen heschäftigen. Dasselhe hat die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Sei jetzt $u$ der Cosinus desjenigen Winkels, welchen die Tangentialebene eines heliebigen Punktes $x$, $y$, $z$ der Oberfläche mit der Ebene der $xy$ macht, so erhält man, wenn man diesen Cosinus nach den gewöhnlichen Regeln bestimmt:

$$u = \frac{\frac{z}{c^2}}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

d. h.

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} - \left(\frac{1}{u^2} - 1\right) \frac{z^2}{c^4} = 0.$$

Denkt man sich in dieser Gleichung $u$ constant, nnd verhindet man sie mit der Gleichnng des Ellipsoids, so erhält man die Curve, welche von allen Punkten des Ellipsoids gebildet wird, deren Tangentialebene mit der Ebene der $xy$ gleiche Winkel hilden. Die Projection dieser Curve auf der Ebene der $xy$ wird gefunden, wenn man aus beiden Gleichnngen $z$ eliminirt. Es ergibt sich:

$$\frac{a^2 - (a^2 - c^2) u^2}{a^4 (1 - u^2)} x^2 + \frac{b^2 - (b^2 - c^2) u^2}{b^4 (1 - u^2)} y^2 = 1.$$

Diese Projection ist also eine Ellipse, deren halbe Hauptaxen die Werthe hahen:

$$\frac{a^2 \sqrt{(1-u^2)}}{\sqrt{a^2 - (a^2 - c^2) u^2}}, \quad \frac{b^2 \sqrt{(1-u^2)}}{\sqrt{b^2 - (b^2 - c^2) u^2}}.$$

Bezeichnen wir daher mit $\epsilon$ ihren Flächeninhalt, so ergibt sich:

$$\epsilon = \frac{\pi a^2 b^2 (1 - u^2)}{\sqrt{[a^2 - (a^2 - c^2) u^2] [b^2 - (b^2 - c^2) u^2]}}.$$

Diese Grösse $\epsilon$ ist mit $U$ veränderlich. Lassen wir nun $\epsilon$ um $d\epsilon$ wachsen, so ist $d\epsilon$ die Projection des ringförmigen Theiles des Ellipsoids, welcher zwischen zwei Curven liegt, die den Werthen $u$ nnd $du$ entsprechen, und wegen der Bedeutung von $U$ ist, wenn wir diesen Ring mit $dS$ hezeichnen:

$$U dS = d\epsilon, \quad dS = \frac{d\epsilon}{U}.$$

Um diejenige Hälfte des Ellipsoids zu hahen, welche anf einer Seite der Ebene $xy$ liegt, muss man nun $dS$ nach $U$ integriren, indem man $u$ von 1 nach 0 ahnehmen lässt, und das ganze Ellipsoid $S$ ist das Doppelte dieses Ausdruckes. Man hat also:

$$S = -2 \int_0^l \frac{d\epsilon}{du} \frac{du}{U}.$$

Ehe wir den Werth von $\epsilon$ hier einsetzen, machen wir noch einige Transformationen.

Wir nehmen an, dass die Grössen der Halbaxen des gegehenen Ellipsoids in der Ordnnng $a, b, c$ ahnehmen (Gleichheit nicht ansgeschlossen) nnd setzen:

$$\frac{a^2 (b^2 - c^2)}{b^2 (a^2 - c^2)} = k^2, \quad c = a \cos\mu,$$

$$\sqrt{(a^2 - c)} = a \sin\mu, \quad c = b \sqrt{(1 - k^2 \sin\mu^2)},$$

wo $\mu$ ein Winkel zwischen 0 nnd $\frac{\pi}{2}$ ist. Ferner wird gesetat:

$$u = \frac{a}{\sqrt{(a^2 - c^2)}} \sin\varphi = \frac{\sin\varphi}{\sin\mu};$$

es wird dann der Winkel $\varphi$ in den Grenzen 0 nnd $\mu$ variiren.

Man erhält hieraus:

$$\epsilon = \frac{\pi ab \left(1 - \frac{a^2}{a^2 - c^2} \sin\varphi^2\right)}{\cos\varphi \sqrt{(1 - k^2 \sin\varphi^2)}},$$

$$S = \frac{-2\sqrt{(a^2 - c^2)}}{a} \int_0^\mu \frac{d\epsilon}{d\varphi} \frac{1}{\sin\varphi} d\varphi,$$

Aber wenn man die vorletzte Gleichung differenziirt, erhält man:

$$\frac{ds}{\sin\varphi}=d\frac{s}{\sin\varphi}+\frac{s\cos\varphi}{\sin\varphi^2}d\varphi=d\frac{s}{\sin\varphi}+\pi ab\frac{d\varphi}{\sin\varphi^2\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}}$$
$$-\frac{\pi ab}{a^2-c^2}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}},$$

und ausserdem ergibt sich durch Differentiiren:

$$d\frac{\cos\varphi\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}}{\sin\varphi}=-\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}\,d\varphi+\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}}$$
$$-\frac{d\varphi}{\sin\varphi^2\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}}.$$

Mit Berücksichtigung des Werthes von $s$ aber erhält man noch:

$$\frac{-2\sqrt{(a^2-c^2)}}{a}\frac{ds}{d\varphi}\frac{d\varphi}{\sin\varphi}=2\pi c^2 d\left[\frac{\operatorname{tg}\varphi\sqrt{(1-k^2\sin\mu^2)}}{\operatorname{tg}\mu\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}}\right.$$
$$\left.\left[1+\frac{a^2(b^2-c^2)}{c^4}(\sin\varphi^2-\sin\mu^2)\right]\right]$$
$$+\frac{2\pi b}{\sqrt{(a^2-c^2)}}\left[(a^2-c^2)\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}\,d\varphi+\frac{c^2\,d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}}\right].$$

Setzt man diese Werthe in den von $S$ ein, so ergibt sich durch Integration:

$$S=2\pi c^2+\frac{2\pi b}{\sqrt{(a^2-c^2)}}\left[(a^2-c^2)\int_0^\mu\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}\,d\varphi\right.$$
$$\left.+c^2\int_0^\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}}\right].$$

Nach der Legendre'schen Bezeichnung (siehe den Artikel: Elliptische Transcendenten) setzt man:

$$F(\mu,k)=\int_0^\mu\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}},$$

$$E(\mu,k)=\int_0^\mu d\varphi\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)},$$

und dann ist:

$$S=2\pi c^2+\frac{2\pi b}{\sqrt{(a^2-c^2)}}\left[(a^2-c^2)\,E(\mu,k)+c^2\,F(\mu,k)\right].$$

Der Ausdruck $S$ setzt sich also aus einer Constante, einem elliptischen Integral erster und einem zweiter Gattung zusammen.

Ist das Ellipsoid ein Rotationsellipsoid, das durch Rotation um die grosse Axe entstanden ist, so hat man:

$$b=c,\quad k=0,\quad \mu=\operatorname{arc}\cos\left(\frac{b}{a}\right),$$

$$S=2\pi b^2+2\pi\frac{a^2 b}{\sqrt{(a^2-b^2)}}\operatorname{arc}\cos\left(\frac{b}{a}\right).$$

Ist es aber durch Rotation um die kleine Axe entstanden, so ist:

$$a=b,\quad k=1,$$

$$S=2\pi b^2+\frac{\pi b c^2}{\sqrt{(b^2-c^2)}}\lg\frac{b+\sqrt{(b^2-c^2)}}{b-\sqrt{(b^2-c^2)}}.$$

Die Uebereinstimmung dieser Formeln mit den oben entwickelten ist leicht ersichtlich.

Der hier gegebene Ausdruck für die Oberfläche des allgemeinen Ellipsoids kann auf verschiedene Arten entwickelt werden. Die hier angewandte rührt von J. A. Serret her.

**Quadraturen, Zurückführung der Differenzialgleichungen auf (Analysis).**

1) Einleitung. Die Zurückführung auf Quadraturen enthält das bis jetzt am meisten angewandte Mittel zur Auflösung oder vielmehr zur Reduction der Differenzialgleichungen. — Die Worte: „Auflösung einer analytischen Aufgabe" werden in sehr verschiedenem Sinne gebraucht. Man sagt z. B., dass die algebraischen Gleichungen bis einschliesslich zum vierten Grade auflösbar seien, womit eben nur gemeint ist, dass diese Auflösungen sich auf ein bereits zuvor behandeltes Problem der Ausziehung von Wurzeln im gewöhnlichen Sinne, d. h. auf die Wurzeln solcher Gleichungen, deren erstes Glied ein Binom ist, zurückführen lasse. Man spricht aber auch von der allgemeinen Auflösung der algebraischen Gleichungen, und versteht darunter, da eine allgemeine Zurückführung dieses Problems etwa auch auf Wurzeln binomischer Gleichungen un möglich ist, irgend eine Methode, welche geeignet ist, in jedem gegebenen Falle zur Kenntniss der Wurzeln der Gleichung zu verhelfen. Der Unterschied zwischen beiden Arten der Auflösung ist also der, dass im ersteren Falle eine Reduction auf ein anderes einfacheres Problem eintritt, im zweiten, das Problem, welches ursprünglich vorliegt, direct angegriffen wird, und dazu dient, die Wurzeln zugleich zu definiren und Ausdrücke dafür zu finden.

Ganz Aehnliches findet bei den Differenzialgleichungen statt. Auch eine Gleichung von der Gestalt

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

definirt völlig die Function von $x$, welche hier mit $y$ bezeichnet ist, und nur in besondern Fällen kann es gelingen, diesen Ausdruck auf eine schon vorher bekannte Form, also z. B. auf eine Auflösung einer andern Differenzialgleichung von der Gestalt

$$\frac{du}{dx}=q\,(x)$$

zurückzuführen, welche letztere in der That mit

$$u=\int q\,(x)\,dx,$$

also mit einer Quadratur identisch ist. Im Allgemeinen dagegen giebt jede Differenzialgleichung oder jedes System von Differenzialgleichungen eine neue Art, eben durch dieselben definirter Transcendenten. Es kann sich also nur darum handeln, Methoden für die Gewinnung dieser Transcendenten und zur Ermittlung ihrer Eigenschaften aufzufinden.

Dies geschieht entweder durch unendliche Reihen, oder durch algebraische Gleichungen, deren Coefficienten dergleichen Reihen sind, oder auch durch Angabe von Methoden, welche geeignet sind, bei numerischen Werthen von $x$ das zugehörige $y$ bis zu einer beliebigen Annäherung zu ermitteln. Eben so wichtig aber ist es, an die Differenzialgleichungen selbst eine Untersuchung der Eigenschaften derjenigen Transcendenten zu knüpfen, welche sie definiren. So z. B. weiss man immer, wenn diese Transcendenten doppelt periodisch sind, dass sie sich auf elliptische Funktionen zurückführen lassen, dass sie, wenn sie immer eindeutig und continuirlich bleiben, sich in die Form von nach ganzen positiven Potenzen geordneten, immer convergirenden Reihen bringen lassen u. s. w. Indess zu einer solchen Auffassung des Problems, welche allerdings als die eigentliche und allgemeine Auflösung zu betrachten ist, hat man eben in neuester Zeit erst den Grund gelegt, und im Uebrigen muss man sich daher begnügen, die Fälle zu ermitteln, wo die Differenzialgleichungen complicirterer Art sich auf einfachere (z. B. partielle Differenzialgleichungen auf totale, und die einfacheren totalen auf Quadraturen) zurückführen lassen. — Dies letztere Problem wird uns hier also hauptsächlich beschäftigen. Es ist jedoch nöthig, auf die Classificirung, Entstehung und Auflösung der Differenzialgleichungen hierbei etwas näher einzugehen.

2) Eintheilung der Differenzialgleichungen.

Man kann jeder Differenzialgleichung eine doppelte Gestalt geben, je nachdem man die Differenziale selbst, oder die entsprechenden Differenzialquotienten einführt. Gehen wir zunächst von der letzteren Gestalt aus.

I. Eine Differenzialgleichung oder ein System solcher Gleichungen wird total oder partiell genannt, je nachdem alle darin vorkommenden Differenzialquotienten nach derselben unabhängigen Variablen genommen sind, oder mehrere von einander unabhängige Variablen und die nach ihnen genommenen Differenzialquotienten darin vorkommen. Die allgemeine Form einer totalen Differenzialgleichung ist also:

$$1)\ f\left(x,\ y_1,\ y_2 \cdots y_n,\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{dy_2}{dx}, \ldots \frac{dy_n}{dx},\ \frac{d^2y_1}{dx^2}, \ldots \frac{d^2y_n}{dx^2}, \ldots \frac{d^py_1}{dx^p}, \ldots \frac{d^py_n}{dx^p}\right)=0.$$

Die allgemeine Form einer partiellen Differenzialgleichung dagegen:

$$2)\ f\left(x_1,\ x_2, \cdots x_s,\ y_1 \cdots y_n,\ \frac{\partial y_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_1}{\partial x_s},\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_2}{\partial x_s},\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_s},\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_1 \partial x_2} \cdots \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_s^2} \cdots \frac{\partial^2 y_n}{\partial x_s^2} \cdots \frac{\partial^p y_n}{\partial x_1^p} \cdots \frac{\partial^p y_n}{\partial x_s^p}\right)=0.$$

Eine partielle Differenzialgleichung kann 1, 2, 3 ⋯ unabhängige Variablen haben; die Gleichung 2) hat $s$ unabhängige Variablen.

II) Eine Differenzialgleichung heisst 1ter, 2ter ⋯ u. s. w. $n$ter Ordnung, wenn der höchste darin vorkommende Differenzialquotient von der 1ten, 2ten ⋯ $n$ten Ordnung ist. Die hier gegebene Gleichung 1) ist von der $p$ten Ordnung. — Man kann aber auch von der Ordnung $p$ einer Differenzialgleichung in Bezug auf eine bestimmte Variable $y_n$ sprechen.

III) Auch werden die Differenzialgleichungen nach der Anzahl der in ihnen enthaltenen Variablen eingetheilt. Die Gleichung 1) enthält $n+1$ Variablen. Bei partiellen Differenzialgleichungen muss hinzugefügt werden, wie viel unabhängige Variablen darunter sind. Gleichung 2) hat $n+s$ Variablen, worunter $s$ unabhängige.

Wir werden uns jetzt zunächst mit den totalen Differenzialgleichungen beschäftigen.

Für dieselben gilt folgender wichtiger Lehrsatz:

A) „Sei

$$\varphi=0$$

eine Differenzialgleichung, welche die unabhängige Variable $x$, die abhängigen $y_1,\ y_2 \cdots y_n$ und $z$ enthält, die in Bezug auf $y_1,\ y_2 \cdots y_n$ von einer beliebigen, in Bezug auf $z$ von der $p$ten Ordnung ist, so ist diese Gleichung gleichbedeutend mit einem System von $p$-Differenzialgleichungen, die statt $z$ die Variablen $z_1,\ z_2 \cdots z_p$ enthalten, und in Bezug auf alle diese von der ersten Ordnung sind."

Man kann nämlich statt der Gleichung

$$\varphi\left(z,\ \frac{dz}{dx},\ \frac{d^2z}{dx^2} \cdots \frac{d^pz}{dx^p}\right)=0,$$

welche natürlich ausser $z$ noch die Grössen $x,\ y_1 \cdots y_n$ und ihre Differenzialquotienten enthält, schreiben:

$$\frac{dz}{dx}=z_2,\ \frac{dz_2}{dx}=z_3,\ \frac{dz_3}{dx}=z_4 \cdots \frac{dz_{p-1}}{dx}=z_p,$$

und die gegebene Gleichung nimmt dann die Gestalt an:

$$\varphi\left(z,\ z_2,\ z_3, \cdots z_p,\ \frac{dz_p}{dx}\right)=0.$$

Es sind dies in der That $p$ Gleichungen, welche nur die ersten Differenzialquotienten der $z$ enthalten.

Hieraus folgt unmittelbar:

B) „Jede Differenzialgleichung mit 2 Variablen $x$ und $z$, welche von der $p$ten Ordnung ist, ist gleichbedeutend mit $p$ Differenzialgleichungen, welche $p+1$ Variablen $x,\ z_1 \cdots z_p$ enthalten, und alle von der ersten Ordnung sind."

Dieser Satz lässt sich aber auch umkehren.

C) „Ein System von $p$ Differenzialgleichungen mit $p+1$ Variablen $x,\ z_1,\ z_2 \ldots z_p$ ist zurückzuführen auf eine Gleichung mit 2 Variablen, welche aber von der $p$ten Ordnung ist."

Um dies zu beweisen, nehmen wir an, das gegebene System sei:

$$\varphi_1\left(x,\ z_1,\ z_2 \cdots z_p,\ \frac{dz_1}{dx},\ \frac{dz_2}{dx} \cdots \frac{dz_p}{dx}\right)=0,$$

$$\varphi_2\left(x,\ z_1,\ z_2 \cdots z_p,\ \frac{dz_1}{dx},\ \frac{dz_2}{dx} \cdots \frac{dz_p}{dx}\right)=0,$$

. . . .

. . . .

$$\varphi_p\left(x,\ z_1,\ z_2 \cdots z_p,\ \frac{dz_1}{dx},\ \frac{dz_2}{dx} \cdots \frac{dz_p}{dx}\right)=0.$$

Aus diesen $p$ Gleichungen kann man die $p$ Differenzialquozienten $\frac{dz_1}{dx}$, $\frac{dz_2}{dx}$ . . . $\frac{dz_p}{dx}$ entwickeln, und dieselben nehmen dann die Gestalt an:

$$\frac{dz_1}{dx}=f_1(x,\ z_1,\ z_2 \cdots z_p),$$

$$\frac{dz_2}{dx}=f_2(x,\ z_1,\ z_2 \cdots z_p),$$

. . .

$$\frac{dz_p}{dx}=f_p(x,\ z_1,\ z_2 \cdots z_p).$$

Wir differensiiren nun eine dieser Gleichungen, etwa die erste, $p-1$ mal; es werden dann in den zweiten Gliedern der entsprechenden Gleichungen, die Differenzialquotienten der Grössen $z_2 \cdots z_p$ vorkommen, diese aber eliminiren wir mit Hülfe der übrigen Gleichungen:

$$\frac{dz_2}{dx}=f_2,\ \frac{dz_3}{dx}=f_3 \cdots$$

so dass man hat:

$$\frac{dz_1}{dx}=f_1(x,\ z_1,\ z_2 \cdots z_p).$$

3) $$\frac{d^2z_1}{dx^2}=f'(x,\ z_1, z_2 \cdots z_p),$$

$$\frac{d^3z_1}{dx^3}=f''(x,\ z_1, z_2 \cdots z_p),$$

. . .

. . .

$$\frac{d^pz_1}{dx^p}=f^{(p)}(x,\ z_1,\ z_2 \cdots z_p),$$

wo die Zeichen $f'$, $f''$, $f^{(p)}$ neue Functionen bedenten. Offenbar kann man nun aus diesen $p$ Gleichungen die Grössen $z_2$, $z_3 \cdots z_p$ eliminiren, und erhält also schliesslich eine Gleichung von der Form:

$$\psi\left(x,\ z_1,\ \frac{dz_1}{dx},\ \frac{d^2z_1}{dx^2} \cdots \frac{d^pz_1}{dx^p}\right)=0,$$

also eine Gleichung $p$ ter Ordnung mit 2 Variablen. Ist diese aufgelöst, so sind auch die Grössen $z_2$, $z_3 \cdots z_p$ ohne weitere Auflösung von Differenzialgleichungen bekannt. Man setzt nämlich dann für $z_1$, $\frac{dz_1}{dx}$, $\frac{d^2z_1}{dx^2} \cdots \frac{d^pz_1}{dx^p}$ in die mit 3) bezeichneten Gleichungen die so gewonnenen Werthe ein, und da die Anzahl derselben $p$ ist, so reichen $p-1$ davon hin, um die Grössen $z_2$, $z_3 \cdots z_p$ durch blosse Elimination als Functionen von $x$ zu bestimmen.

Es lässt sich aber auch eine Gleichung oder ein System von Gleichungen von der allgemeinen Form 1) leicht in ein System verwandeln, welches in Bezug auf jede der Variablen erster Ordnung ist. Zu dem Ende braucht man nur das Verfahren in A. wiederholt anzuwenden. Sei das gegebene System in Bezug auf $y_1$, $y_2 \cdots y_n$ bezüglich von der Ordnung $p_1$, $p_2 \cdots p_n$, so setzt man:

$$\frac{dy_1}{dx}=z_1',\ \frac{d^2y_1}{dx^2}=z_2' \cdots \frac{d^{p_1-1}y_1}{dx^{p_1-1}}=z'_{p_1-1},$$

$$\frac{dy_2}{dx}=z_1^{(2)}\ \frac{d^2y_2}{dx^2}=z_2^{(2)} \cdots \frac{d^{p_2-1}y_2}{dx^{p_2-1}}=z^{(2)}_{p_2-1},$$

. . . .

. . . .

. . . .

$$\frac{dy_n}{dx} = z_1^{(n)}, \quad \frac{d^2 y_n}{dx^2} = z_2^{(n)} \ldots \frac{d^{p_n - 1} y_n}{dx^{p_n - 1}} = z^{(n)}_{p_n - 1}.$$

Es verwandelt sich dann die Gleichung:

$$\varphi\left(x,\ y_1,\ y_2 \cdots y_n,\ \frac{dy_1}{dx} \cdots \frac{d^{p_1} y_1}{dx^{p_1}},\ \frac{dy_2}{dx} \cdots \frac{d^{p_2} y_2}{dx^{p_2}} \cdots \frac{dy_n}{dx} \cdots \frac{d^{p_n} y_n}{dx^{p_n}}\right) = 0,$$

in:

$$\varphi\Big(x,\ y_1,\ y_2 \cdots y_n,\ z_1',\ z_1^{(1)} \ldots z_1^{(n)},\ z_2^{(1)} \ldots z_2^{(n)},\ z_3^{(1)} \ldots z_3^{(n)} \ldots$$

$$\cdots z^{(n)}_{p_n - 1},\ \frac{dz'_{p_1 - 1}}{dx},\ \frac{dz^{(1)}_{p_2 - 1}}{dx} \cdots \frac{dz^{(n)}_{p_n - 1}}{dx}\Big) = 0.$$

Die Anzahl der oben gebildeten Hülfsgleichungen ist:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n.$$

Sei $s$ die Anzahl der gegebenen Gleichungen von der Form $\varphi = 0$, so hat man also:

$$s + p_1 + p_2 + \cdots + p_n - n$$

Gleichungen; die Anzahl der Variablen in denselben:

$$x,\ y_1,\ y_2 \cdots y_n,\ z_1',\ z_2' \cdots z'_{p_1 - 1},\ z_1^{(1)} \cdots z^{(n)}_{p_n - 1}$$

ist:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n + 1,$$

während bei den ursprünglichen Gleichungen dieselbe $n+1$ war. Der hauptsächlichste Fall, welcher hier in Betracht kommt, ist, wie wir bald sehen werden, der, wo $s = n$, also die Anzahl der Gleichungen gleich der der abhängigen Variablen ist. In diesem Falle ist die Anzahl der neuen Gleichungen:

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n,$$

also um eins kleiner als die der Variablen, oder ebenfalls gleich der Anzahl der abhängigen Variablen. Hieraus folgt der wichtige Satz:

D) „Jedes System von totalen Differentialgleichungen von beliebigen Ordnungen, wo die Anzahl der abhängigen Variablen gleich dem der Gleichungen ist, kann verwandelt werden in ein anderes ähnliches System, worin alle Gleichungen von der ersten Ordnung sind, jedoch die Anzahl der Gleichungen und Variablen sich entsprechend vermehrt."

Nach dem Satze C) übrigens ist das letztere System gleichbedeutend mit einer Gleichung, die eine abhängige Variable enthält und von der Ordnung $p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ ist.

E) „Im Allgemeinen kann nach dem Obigen jedes System von totalen Differenzialgleichungen auf ein anderes erster Ordnung reducirt werden."

Aus diesem Satze ergibt sich auch leicht die Art und Weise, wie sich jedes System von totalen Differenzialgleichungen auf eine Form bringen lässt, welche statt der Differenzialquotienten die Differenziale selbst enthält. Es ist diese Form so wichtig, dass wir bei derselben noch einen Augenblick verweilen.

Ist zunächst die Anzahl $n$ der abhängigen Variablen gleich der der Gleichungen, so hat man, wenn diese auf Gleichungen erster Ordnung reducirt sind, und man die $n$ Differenzialquotienten aus ihnen ermittelt, folgende Ausdrücke:

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1,\ \frac{dy_2}{dx} = f_2 \cdots \frac{dy_n}{dx} = f_n,$$

wo die Grössen $f$ Funktionen von $x, y_1, y_2 \cdots y_n$ sind. Also ergibt sich auch:

$$dy_1 = f_1\,dx,\ dy_2 = f_2\,dx \cdots dy_n = f_n\,dx,$$

und dies ist die verlangte Form, für die man auch schreiben kann:

$$\lambda dx + \lambda_1 dy_1 + \lambda_2 dy_2 + \cdots + \lambda_n dy_n = 0,$$

eine allgemeinere Form, die man erhält, wenn man jede der obigen Gleichungen mit einer beliebigen Grösse multiplicirt und alle addirt. Das erstere System lässt sich dann leicht durch $n$ Gleichungen von der letzteren allgemeineren Form ersetzen.

Ist aber die Anzahl der abhängigen Variablen grösser als die der Gleichungen, so kann man dennoch dem System eine ähnliche Gestalt geben.

Ist nämlich die auf Gleichungen erster Ordnung reducirte Gestalt des Systems die folgende:

$$f_1\left(x,\ y_1,\ y_2\ \cdots\ y_n,\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{dy_2}{dx}\cdots\frac{dy_n}{dx}\right)=0,$$

$$f_2\left(x,\ y_1,\ y_2\ \cdots\ y_n,\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{dy_2}{dx}\cdots\frac{dy_n}{dx}\right)=0,$$

$$\vdots$$

$$f_s\left(x,\ y_1,\ y_2\ \cdots\ y_n,\ \frac{dy_1}{dx},\ \frac{dy_2}{dx}\cdots\frac{dy_n}{dx}\right)=0,$$

wo also $s$ kleiner als $n$ ist, so kann man setzen:

$$4)\qquad dy_1=p_1\,dx,\quad dy_2=p_2\,dx\ \cdots\ dy_n=p_n\,dx,$$

wodurch dann unsere Gleichungen die Gestalt annehmen:

$$f_1(x,\ y_1,\ y_2\ \cdots\ y_n,\ p_1,\ p_2\ \cdots\ p_n)=0,$$

$$f_2(x,\ y_1,\ y_2\ \cdots\ y_n,\ p_1,\ p_2\ \cdots\ p_n)=0,$$

$$\vdots$$

$$f_s(x,\ y_1,\ y_2\ \cdots\ y_n,\ p_1,\ p_2\ \cdots\ p_n)=0.$$

Mit Hülfe dieser $s$ Gleichungen kann man $s$ der Grössen $p_1, p_2 \cdots p_n$ bestimmen und in die Gleichungen 4) einsetzen, die übrigen $p$, an Anzahl $n-s$, sind als neue Variablen zu betrachten. Man hat also wieder $n$ Gleichungen von der Form 4) oder von der allgemeinen:

$$\lambda\,dx+\lambda_1 dy_1+\lambda_2 dy_2+\ \cdots\ +\lambda_n dy_n=0,$$

welche jedoch ausser den $n+1$ Variablen $x, y_1, y_2 \cdots y_n$ noch $n-s$ neue, also im Ganzen $2n+1-s$ enthalten.

Es ist aber wohl zu merken, dass eine ähnliche Form auch die partiellen Differenzialgleichungen annehmen, dieselbe also als die allgemeinste der Differenzialgleichung zu betrachten ist, bei welcher selbst der Unterschied zwischen totalen und partiellen Differenzialgleichungen wegfällt. Um dies zu zeigen, wird es genügen, wenn wir nur eine partielle Differenzialgleichung 2ter Ordnung betrachten, da sich die Allgemeingültigkeit dieser Betrachtung leicht zeigt. Sei die gegebene Gleichung:

$$\varphi\left(x_1,\ x_2,\ y,\ \frac{\partial y}{\partial x_1},\ \frac{\partial y}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^{\,2}},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^{\,2}}\right)=0.$$

Wir setzen:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=p,\quad \frac{\partial y}{\partial x_2}=q,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^{\,2}}=r,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2}=s,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^{\,2}}=t,$$

so ist:

$$\varphi(x_1,\ x_2,\ y,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t)=0,$$

und:

$$dy=p\,dx_1+q\,dx_2,$$

$$dp=r\,dx_1+s\,dx_2,\quad dq=s\,dx_1+t\,dx_2.$$

Die letzten drei Gleichungen sind von der vorgeschriebenen Form und enthalten ausser den drei gegebenen Variablen $x_1, x_2, y$ noch die neuen $p, q, r, s, t$, also im Ganzen 8, von denen jedoch eine, z. B. $t$, durch die Gleichung $\varphi=0$ eliminirt wird, so dass 3 Gleichungen mit 7 Variablen übrig bleiben. Wie leicht zu sehen, tritt dasselbe ein, wenn ausser $y$ noch andere abhängige Variablen gegeben sind.

3) Ueber eine Gleichung erster Ordnung mit 2 Variablen.

Lehrsatz. Jede Differenzialgleichung von der Gestalt

1) $dy = f(x, y)\, dx$

lässt sich auflösen durch einen Ausdruck von der Gestalt

$$\varphi(x, y, \alpha) = 0, \quad \text{oder:} \quad y = \psi(x, \alpha)$$
$$\text{oder:} \quad \chi(x, y) = \alpha.$$

Offenbar lässt sich nämlich jeder dieser 3 Ausdrücke auf die Form der beiden andern bringen.

$\alpha$ ist eine willkürliche Constante, die man der Art bestimmen kann, dass man $y$ für einen gegebenen Zahlenwerth von $x$ einen beliebigen Werth annehmen lässt.

Die so gefundene Gleichung heisst Integralgleichung. Im engern Sinne aber wird der Ausdruck $\chi(x, y)$ selbst, welcher in der letzten der 3 Formen gleich einer Constante $\alpha$ war, Integral genannt. Es lässt sich also ein Integral der Gleichung 1) auch definiren als eine Function von $x$ und $y$, welche durch die Gleichung 1) einer Constante gleich wird.

Wir beweisen den obigen wichtigen Satz, indem wir die gegebene Differenzialgleichung einer ähnlichen Betrachtung wie der, welche die allgemeinen Eigenschaften der Quadraturen ergeben, unterziehen.

Seien $x_0, x_1, x_2 \ldots x_s$ solche im Uebrigen beliebige Werthe von $x$, von denen jeder sich nur unendlich wenig von dem vorhergehenden unterscheidet, sind ferner $y_0, y_1, y_2 \ldots y_s$ die zugehörigen Werthe von $y$, welche entstehen, wenn man $y$ als Function von $x$ betrachtet, so hat man bekanntlich:

$$\frac{dy}{dx} = \lim. \frac{y_{s+1} - y_s}{x_{s+1} - x_s}$$

und es führt demnach die Gleichung 1), wenn man nach und nach für $x$ die Werthe $x_1, x_2 \ldots x_s$ setzt, zu folgendem Resultate:

2)
$$y_1 = y_0 + (x_1 - x_0) f(x_0, y_0),$$
$$y_2 = y_1 + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1),$$
$$y_3 = y_2 + (x_3 - x_2) f(x_2, y_2),$$
$$\vdots$$
$$y_s = y_{s-1} + (x_s - x_{s-1}) f(x_{s-1}, y_{s-1}).$$

Man kann diese Gleichungen als ein System recurrenter Beziehungen betrachten, demzufolge für gegebenes $x_0$ sich $y_0$ ganz willkürlich bestimmen lässt; nach dieser Bestimmung werden sich durch allmäliges Einsetzen die Grössen $y_1, y_2 \ldots y_s$ völlig eindeutig ergeben, so lange $f(x, y)$ eindeutig bleibt und nicht discontinuirlich wird. Im letztern Falle würde nämlich ein Fortschreiten von einem Werthe von $y$: $y_t$ zu einem nächstfolgenden $y_{t+1}$ nach den Regeln der Differenzialrechnung nicht mehr möglich sein. Die Gleichungen 2 geben also für jeden Werth von $y_s$, den wir jetzt mit $y$ bezeichnen wollen, einen entsprechenden Ausdruck, der eine willkürliche Constante $\alpha = y_0$ enthält; es ist also das Vorhandensein eines Integrals erwiesen, und selbst im Allgemeinen ein Verfahren, ähnlich dem der mechanischen Quadratur, gegeben, durch welches man bei gegebenem Zahlenwerthe von $y$ dies Integral näherungsweise erhalten kann. Desto genauer wird diese Näherung sein, je mehr Zwischenwerthe $x_1, x_2 \ldots x_{s-1}$ man zwischen $x_0$ und $x_s$ einschiebt. Addirt man alle Gleichungen 2, so erhält man noch:

$$y_s = y_0 + \lim [(x_1 - x_0) f(x_0, y_0) + (x_2 - x_1) f(x_1, y_1) + \ldots + (x_s - x_{s-1}) f(x_{s-1}, y_{s-1})],$$

oder gemäss der bekannten Bezeichnung der Quadraturen:

3) $$y_s = y_0 + \int_{x_0}^{x_s} f(x, y)\, dx,$$

oder:

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx;$$

$y$ nimmt also die Form einer wirklichen Quadratur an.

Es ist eben hierbei nur zu bemerken, dass $y$ in $f(x, y)$ als Function von $x$ betrachtet werden muss, die aber durch keinen allgemeinen Ausdruck, sondern durch die Beziehungen 2) für jedes Glied unter dem Integralzeichen bestimmt ist. Auf diese Weise ist auch $f(x, y)$ als eine Function von $x$ allein zu betrachten.

Ist übrigens $f(x, y)$ eine monogene Function von $x$ und $y$, d. h. eine solche, wo die Art des Zuwachses von $x$ und $y$ (ob derselbe reell oder imaginär

sei) auf den Werth der Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ keinen Einfluss ausübt (vergleiche den Artikel: Quantität), so sind die Grössen $y_1, y_2 \cdots y_s$ als Summen von solchen Functionen zu betrachten, und theilen also diese Eigenschaft. Es ist also $f(x, y)$ eine monogene Function von $x$, wenn man $y$ als Function von $x$ betrachtet. Hieraus und aus der Form der Quadratur, welche wir in 3) der Grösse $y$ gegeben haben, folgt dann die Allgemeingültigkeit des in dem Artikel: analytische Quadraturen bewiesenen Satzes, dass der Werth von $y_s$ auf ganz dieselbe Weise erhalten wird, welches auch die Zwischenwerthe $x_1, x_2 \cdots x_{s-1}$ seien, d. h. für jede zwei Integrationswege, wenn nur Anfangs- und Endpunkt $x_0$ und $x_s$ sind, und sich in dem von beiden Wegen begrenzten Theile der Ebene kein vielfacher und kein Discontinuitätspunkt der Function $f(x, y)$ befindet. (S. den Artikel: analytische Quadraturen, Abschnitt 8 bis 15.)

4) Theorie des Eulerschen Multiplicators.

Sei gegeben die Differensialgleichung

1) $$Pdx + Qdy = 0,$$

wo $P$ und $Q$ Functionen von $x$ und $y$ sind, und das Integral derselben, dessen Existenz nach dem Obigen feststeht, sei unter der Gestalt gegeben:

2) $$f(x, y) = \alpha,$$

wo $\alpha$ die willkürliche Constante ist.

Durch Differenziiren der Gleichung 2) ergibt sich dann:

3) $$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = 0,$$

eine Gleichung, die mit 1) verglichen zeigt, dass

$$P : Q = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y},$$

oder wenn man unter $M$ eine unbestimmte Funktion von $x$ und $y$ versteht:

4) $$MP = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad MQ = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Verstehen wir unter $\delta x$, $\delta y$ willkürliche Aenderungen von $x$ und $y$, bei welchen also nicht vorausgesetzt ist, dass die durch Gleichung 1) gegebene Relation zwischen denselben stattfindet, und nehmen wir die Zeichen $dy$, $dx$ nur dann, wenn letzteres stattfindet, so dass also:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q},$$

dagegen $\frac{\delta y}{\delta x}$ vollständig willkürlich ist; setzen wir ferner immer:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy,$$

und:

$$\delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y,$$

so ist wegen der Gleichungen 4)

5) $$M(P\delta x + MQ\delta y) = \delta f,$$

d. h.: „Es lässt sich zu jeder Differensialgleichung von der Gestalt 1) ein Faktor $M$ bestimmen, derart, dass dann das erste Glied der bezüglichen Gleichung ganz abgesehen von der durch dieselbe gegebenen Relation ein vollständiges Differensial einer Function von 2 Variablen wird." Dieser Factor $M$ wird Eulerscher Multiplicator oder integrirender Faktor genannt.

Ist der Multiplicator bekannt, so lässt sich das Integral augenblicklich finden. Es ist nämlich, wenn man in Gleichung 5) $y$ constant denkt, was geschehen kann, da $x$ und $y$ hier als völlig willkürlich zu betrachten sind:

$$f = \int_{x_0}^{x} MPdx + f_0,$$

wo $x_0$ eine beliebige Zahl, und $f_0$ der $x_0$ entsprechende Werth von $f$ ist, welcher also noch eine Funktion von $y$ sein wird.

Setzt man $x_0$ für $x$ in Gleichung 5), so wird $\delta x_0 = 0$, und mögen $M, Q$ unter dieser Voraussetzung die Werthe $M_0, Q_0$ annehmen, so ist:

$$df_0 = M_0 \; Q_0 \; dy,$$

$$f_0 = \int_{y_0}^{y} M_0 \; Q_0 \; dy,$$

wo $y_0$ ebenfalls eine beliebige Zahl ist, also das Integral der Gleichung:

$$Pdx + Qdy$$

wird sein:

6) $$f(x, y) = \int_{x_0}^{x} MP\,dx + \int_{y_0}^{y} M_0 \, Q_0 \, dy = \alpha.$$

(Vergleiche den Artikel: analytische Quadraturen, Abschnitt 56.)

Nach Auffindung des Multiplicators wird also die Auflösung der Differenzialgleichung auf eine blosse Quadratur zurückgeführt.

„Ist umgekehrt das Integral der Gleichung 1) in irgend einer Form gegeben, so kann man sogleich den Multiplicator finden."

Die Gleichung 5) folgt nämlich unmittelbar, wenn das Integral die Form $f(x, y) = \alpha$ hat:

$$7) \qquad M = \frac{\partial f}{P\partial x} = \frac{\partial f}{Q\partial y}.$$

Ist

$$f(x, y) = \alpha$$

ein Integral, so ist auch

$$\varphi\,\{f(x, y)\} = \beta$$

ein solches, denn es ist dann $\beta = \varphi(\alpha)$, also gleich einer Constanten, die ganz willkürlich ist, wenn dies bei $\alpha$ stattfindet. Setzt man $\varphi(f)$ statt $f$ aber in die Gleichung 7), so erhält man einen andern Multiplicator:

$$M' = \frac{\partial \varphi(f)}{P\partial x} = \frac{d\varphi(f)}{df}\,\frac{\partial f}{P\partial x} = \frac{d\varphi(f)}{df}M.$$

„Es gibt also, da $\varphi$ eine willkürliche Function ist, unendlich viel Multiplicatoren."

Setzen wir noch $\frac{d\varphi(f)}{df} = \psi(f)$, so ist:

$$8) \qquad \frac{M'}{M} = \psi(f),$$

$\psi(f) = \psi(\alpha)$ ist aber einer Constanten gleich und mithin ein Integral.

„Alle Integrale lassen sich nun auf die Form $\psi(f) = \gamma$ bringen, wo $\gamma$ eine Constante ist, und $f = \alpha$ irgend ein Integral."

Denn sei

$$\chi(x, y) = \delta$$

ein anderes Integral, von dem wir annehmen, es habe diese Form nicht, so liesse sich mittels dieser Gleichung und $f(x, y) = \alpha$ etwa $y$ eliminiren, und man erhielte

$$\vartheta(x) = \psi(\alpha, \delta),$$

also gleich einer Constanten; es müsste also auch $x$ constant sein, eine Bedingung, welche der Differenzialgleichung 1) widerspricht.

Aus diesem Satze und der Gleichung 8) folgt nun:

„Jedes Integral ist gleich dem Verhältniss zweier Multiplicatoren."

Dieser Satz lässt sich auch umkehren, d. h. „Das Verhältniss jeder beliebigen zwei Multiplicatoren ist immer ein Integral."

Denn sind $M$ und $M'$ Multiplicatoren, so ist nach Gleichung 5):

$$MP\partial x + MQ\partial y = \partial f,$$
$$M'P\partial x + M'P\partial y = \partial f',$$

wo $f$ und $f'$ der Definition zufolge Integrale sind. Man hat aber nach dem Obigen:

$$f' = \varphi(f),$$
$$\partial f' = \frac{d\varphi(f)}{df}\partial f,$$

also, wenn man die zweite Gleichung durch die erste dividirt:

$$\frac{M'}{M} = \frac{d\varphi(f)}{df} = \psi(f),$$

also ist dieser Quotient in der That ein Integral. Also:

„Sind 2 Multiplicatoren bekannt, so führt einfache Division statt der Quadratur zur Bestimmung des Integrals."

Im Allgemeinen hat man jedoch kein Mittel, auch nur einen Multiplicator einer gegebenen Differenzialgleichung von vorn herein aufzufinden, und ist es daher unmöglich, dieselben immer auf Quadraturen zurückzuführen. Nur in einem allgemeineren Falle gelingt die Auffindung des Multiplicators. Um diesen Fall zu ermitteln, setzen wir wieder:

$$MP\partial x + MQ\partial y = \partial f,$$
$$Pdx + Qdy = 0.$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = MP, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = MQ,$$

und wenn man die erste von diesen Gleichungen nach $y$, die zweite aber nach $x$ differenziirt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = M\frac{\partial P}{\partial y} + P\frac{\partial M}{\partial y} = M\frac{\partial Q}{\partial x} + Q\frac{\partial M}{\partial x},$$

d. h. wenn man beide Seiten mit

$$dx = -\frac{Q}{P}dy$$

multiplicirt:

$$M\frac{\partial P}{\partial y}dx - Q\frac{\partial M}{\partial y}dy = M\frac{\partial Q}{\partial x}dx + Q\frac{\partial M}{\partial x}dx,$$

oder:

$$\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial x}dx + \frac{\partial M}{\partial y}\right)dy.$$

Die Seite rechts gibt ein vollständiges

Differenzial $\frac{dM}{M}$; die Seite links ist also dann integrirbar, wenn der Ausdruck $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ nur $x$ enthält, und unter dieser Bedingung ist:

$$\log M = \int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx,$$

$$M = e^{\int \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right) dx}.$$

Um die Gestalt der Differenzialgleichungen, für welche diese Bestimmung des Multiplicator statt hat, zu ermitteln, bemerken wir, dass sich die Gleichung:

$$Pdx + Qdy = 0$$

immer auf die Form bringen lässt:

$$dy + Pdx = 0,$$

indem wir nämlich $P$ für $\frac{P}{Q}$ setzen. Es kann also auch, unbeschadet der Allgemeinheit, $Q=1$ gesetzt werden. Es ist dann:

$$M = e^{\int \frac{\partial P}{\partial y} dx},$$

unter der Bedingung, dass der Ausdruck $\frac{\partial P}{\partial x}$ nur $x$ enthalte, also dass

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \varphi(x)$$

ist. Hieraus ergibt sich aber, wenn man integrirt:

$$P = y\varphi(x) + \psi(x).$$

Die Integrations-Constante kann nämlich eine beliebige Function von $x$ sein, da nur nach $y$ integrirt wird. Unsere Differenzialgleichung hat also die Gestalt:

9) $$dy + y\varphi(x)dx + \psi(x)dx = 0,$$

d. h. sie enthält $y$ nur in der ersten Potenz. Man nennt sie eine lineare Differenzialgleichung. Es ergibt sich dann:

$$M = e^{\int \varphi(x)\,dx}.$$

Um das Integral zu bestimmen, wenden wir Formel 6) an. Es ist offenbar, wenn wir die Integration im Exponenten von $M$ mit $x_0$ beginnen:

$$M = e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx}, \quad M_0 = 1,$$

$$Q_0 = Q = 1,$$

$$f(x, y) = y\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx} \varphi(x)dx + \int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx} \psi(x)\,dx + y = a.$$

Offenbar aber lässt sich die erste Quadratur ausführen. Es ist nämlich, wenn man:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = u$$

setzt:

$$du = \varphi(x)\,dx,$$

also:

$$\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx} \varphi(x)dx = \int_0^u e^u du = e^u - 1,$$

also das Integral hat die Form:

$$\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x)dx} \psi(x)\,dx + y e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx} = a.$$

$x_0$ ist ganz beliebig zu nehmen.

Ist z. B. gegeben die Gleichung:

$$dy + ydx + \psi(x)dx = 0,$$

wo also

$$\varphi(x) = 1$$

zu setzen ist, und nimmt man

$$x_0 = 0,$$

so kommt:

$$ye^x + \int_0^x \psi(x)e^x dx = a.$$

Es gelingt indess die Zurückführung der Gleichung 9) auf Quadraturen auch in

anderer Weise, ohne die Theorie des Multiplicators anzuwenden.

Setzen wir nämlich

$$y = u\,v,$$

und wird hierbei vorbehalten, eine der Functionen $u$ und $v$ in irgend einer Weise zu bestimmen, wo dann die andere immer noch unbestimmt bleibt, also so genommen werden kann, dass sie der Gleichung 9) gemäss wird, so verwandelt sich diese Gleichung in:

10) $u\,dv + v\,du + uv\varphi(x)\,dx + \psi(x)\,dx = 0.$

Die Grösse $v$ bestimmen wir nun durch die Gleichung:

$$dv + v\varphi(x)\,dx = 0,$$

d. h.

$$\frac{dv}{v} + \varphi(x)\,dx = 0,$$

oder da beide Glieder berechnet werden können:

$$\lg v + \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx = 0,$$

$$v = e^{-\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx},$$

die Gleichung 10) aber wird jetzt:

$$v\,du = -\psi(x)\,dx,$$

oder wegen des Werthes von $v$:

$$du = -e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx}\,\psi(x)\,dx,$$

$$u = -\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx}\,\psi(x)\,dx - a,$$

wo $a$ eine Constante ist, und da $y = uv$ war:

$$-y = e^{-\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx}\left[\int_{x_0}^{x} e^{\int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx}\,\psi(x)\,dx + a.\right]$$

Dies ist, wie leicht zu sehen, das oben gefundene Integral.

5) Singuläre Integrale.

Es waren die Gleichungen:

1) $\qquad M(P\delta x + Q\delta y) = \delta f,$

und

2) $\qquad Pdx + Qdy = 0$

gegeben. Wenn man

$$f = a,$$

also gleich einer Constante setzt, so wird

$$\delta f = 0$$

sein, und die erste Gleichung mit Hinweghebung des Faktors $M$ der andern identisch werden. Die Gleichung $f = a$ ist also das allgemeine Integral von $Pdx + Qdy = 0$. Specialisirt man die Constante $a$ indem man ihr einen beliebigen Zahlenwerth gibt, so hat man ein partikuläres Integral, d, h. ein solches, welches keine willkürliche Constante mehr enthält, aber in dem allgemeinen eingeschlossen ist. Indessen kann es auch Gleichungen geben, die ohne eine willkürliche Constante zu enthalten, die Gleichung 2 erfüllen und nicht in dem allgemeinen Integral enthalten sind. Dieselben heissen singuläre Integrale. Um dieselben zu ermitteln, bemerke man, dass man hat:

$$P\delta x + Q\delta y = \frac{1}{M}\delta f,$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich auch noch die Gleichung 2), wenn man setzt:

$$\frac{1}{M} = 0, \text{ d. h. } M = \infty.$$

Ist diese Gleichung, wie es doch im Allgemeinen der Fall sein wird, nicht in $f = a$ eingeschlossen, so stellt dieselbe also das singuläre Integral dar; d. h. „Man erhält das singuläre Integral, wenn man den Multiplicator unendlich setzt."

Sei jetzt das allgemeine Integral unter der Form

$$\varphi(x, y, a) = 0,$$

die Differenzialgleichung unter der Form

$$\frac{dy}{dx} = \psi(x, y),$$

oder

$$dy - \psi(x, y)\,dx = 0$$

gegeben. Es soll untersucht werden, ob und welche singuläre Integrale vorkommen.

Man hat offenbar, wenn man sich $a$ als variabel denkt, also $a$ durch die Gleichung

$$\varphi(x, y, a) = 0,$$

woraus sich

$$a = f(x, y)$$

ergibt, bestimmt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\delta\alpha=0,$$

also:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y=-\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\delta\alpha,$$

und wenn man $\alpha$ constant setzt, was wir dadurch andeuten, dass wir das Zeichen $\delta$ mit $d$ vertauschen:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy=0.$$

Vergleicht man aber diese Gleichung mit

$$dy-\psi(x,\ y)\ dx=0,$$

so erhält man:

$$\psi(x,\ y)=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

woraus sich dann ergibt:

$$\delta y-\psi(x,\ y)\ \delta x=\delta y+\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}\delta x=\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\delta y\right),$$

d. h.

$$\delta y-\psi(x,\ y)\ \delta x=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\delta\alpha.}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}$$

Diese Gleichung führt auf $dy-\psi(x,y)dx=0$ zurück, wenn $\alpha=$ Const. Dies ist das allgemeine Integral; dies ist also:

$$\varphi(x,\ y,\ \alpha)=0.$$

Die Differenzialgleichung ist aber auch erfüllt, wenn

$$\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}}=0,$$

d. h.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\infty.$$

Jede dieser beiden Gleichungen kann singuläre Integrale geben, wenn man $\alpha$ mittels der Gleichung $\varphi=0$ eliminirt. Es ist jedoch dazu nöthig, dass dieselben nicht in der Gleichung $f=\alpha$ enthalten sind, und dass der Werth $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=0$ nicht zugleich $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=0$ mache, oder $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\infty$, nicht $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}=\infty$ mache, da sonst der oben gegebene Factor nicht Null zu werden braucht. Die singulären Integrale sind von der willkürlichen Form, welcher man der Gleichung $Pdx+Qdy=0$ gibt, abhängig. Multiplicirt man nämlich diese Gleichung mit einem beliebigen Faktor $\vartheta(x,y)$, so gibt dieser, gleich Null gesetzt, offenbar ein singuläres Integral der Gleichung:

$$\vartheta\cdot Pdx+\vartheta\cdot Qdy=0.$$

Umgekehrt kann man der Gleichung eine Form geben, wo sie kein singuläres Integral mehr hat, und zwar geschieht dies durch Multiplication mit dem Multiplicator $M$; denn die Gleichung:

$$MP\delta x+MQ\delta y=\delta f$$

wird nur mit $MPdx+MQdy=0$ identisch, wenn man

$$f=\alpha$$

setzt. — Es gibt gewisse Regeln, welche lehren, das singuläre Integral selbst dann noch zu finden, wenn man das allgemeine nicht hat. Indessen entbehren dieselben in der gewöhnlich ihnen gegebenen Form der Schärfe, insofern dabei genauer auf die Arten der Functionen eingegangen werden müsste.

Beispiele zur Bestimmung singulärer Integrale sind in dem Folgenden enthalten.

6) Methode der Trennung der Variablen.

Um eine Differenzialgleichung auf Quadraturen zurückzuführen, ist die Auffindung des Multiplicators nicht immer die bequemste Methode. — Eine andere, welche oft diesen Zweck erreichen lässt, ist die Trennung der Variablen, verbunden mit der Transformation derselben. Kann man nämlich der Gleichung

$$Pdx+Qdy=0$$

durch Transformation eine Form

$$\varphi(u)\,du+\psi(v)\,dv=0$$

geben, wo $u$ und $v$ Functionen von $x$ und $y$ sind, jedes Glied aber nur eine Variable enthält, so ist offenbar das Integral:

$$\int \varphi(u)\,du + \int \psi(v)\,dv = \alpha$$

auf Quadraturen zurückgeführt.

Ein Beispiel dieser Methode war bereits die zweite Art, welche wir Abschnitt 4) anwandten, um diejenige Gleichung zu integriren, welche eine der Variablen $y$ nur in der ersten Potenz enthielt.

Ein anderes allgemeineres Beispiel geben die sogenannten homogenen Gleichungen.

Man nennt eine ganze Function $P$ bekanntlich eine homogene Function $m$ter Ordnung von $x$ und $y$, wenn in jedem Gliede die Exponenten von $x$ und $y$ zusammen $m$ betragen, also $P$ die Form hat:

$$P = Ax^m + Bx^{m-\alpha}y^\alpha + Cx^{m-\beta}y^\beta + \cdots$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich leicht:

$$P = x^m\left(A + B\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha + C\left(\frac{y}{x}\right)^\beta + \cdots\right)$$

$$= y^m\left(A\left(\frac{x}{y}\right)^m + B\left(\frac{x}{y}\right)^{m-\alpha} + C\left(\frac{x}{y}\right)^{m-\beta} + \cdots\right)$$

Die homogene Function $m$ter Ordnung hat also die Eigenschaft: dass sie gleich der $m$ten Potenz einer Variablen, multiplicirt mit einer Function von $\frac{x}{y}$ oder, was dasselbe ist, von $\left(\frac{y}{x}\right)$ betrachtet werden kann. Dieselbe Eigenschaft haben offenbar gebrochene Functionen, deren Zähler und Nenner homogen, und wo die Ordnung des Zählers um $m$ die des Nenners übertrifft. Wir nehmen diese Eigenschaft als Definition der homogenen Function, und nennen also $P$ eine solche von der $m$ten Ordnung, wenn es die Form hat:

$$P = x^m\varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

welche Function (ob algebraisch oder transcendent) auch $\varphi$ sein möge und wo $m$ selbst keine ganze Zahl zu sein braucht.

Man kann die Grundeigenschaft der homogenen Functionen auch, beiläufig bemerkt, durch eine Differenzialgleichung angeben, die jedoch partiell ist. Differenziirt man nämlich $P$ nach $x$ und $y$, so ergibt sich:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = mx^{m-1}\varphi\left(\frac{y}{x}\right) - x \cdot y^{m-2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right),$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x^{m-1}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right).$$

Aus diesen beiden Gleichungen in Verbindung mit $P$ lassen sich die Ausdrücke $\varphi$ und $\varphi'$ eliminiren. Es ergibt sich:

$$mP = x\frac{\partial P}{\partial x} + y\frac{\partial P}{\partial y}.$$

Dies ist die in Rede stehende Differenzialgleichung.

Seien jetzt $P$ und $Q$ beliebige homogene Functionen von gleicher Ordnung $m$, und die Gleichung

1) $$Pdx + Qdy = 0$$

zu integriren. Es ist dann:

$$P = x^m\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad Q = x^m\psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

also:

2) $$\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0.$$

Wir setzen

$$\frac{y}{x} = u,$$

wo also $u$ eine neue Variable ist, also:

$$dy = udx + xdu,$$

und erhalten:

$$\varphi(u)\,dx + \psi(u)(udx + xdu) = 0.$$

In dieser Gleichung aber lassen sich die Variablen trennen. Denn man hat:

$$[\varphi(u) + u\psi(u)]\,dx + x\psi(u)\,du = 0,$$

oder:

$$\frac{\psi(u)\,du}{\varphi(u) + u\psi(u)} + \frac{dx}{x} = 0,$$

$$\log x + \int\frac{\psi(u)\,du}{\varphi(u) + u\psi(u)} = \alpha,$$

$$x = e^{\alpha - \int\frac{\psi(u)\,du}{\varphi(u) + u\psi(u)}},$$

wo für $u$ wieder $\frac{y}{x}$ gesetzt werden kann.

Die Gleichung 2) wurde auf die Form eines vollständigen Integrals gebracht, indem man mit $\frac{1}{x[\varphi(u) + u\psi(u)]}$ multiplicirte. Dieser Ausdruck ist also ein Multiplicator der Gleichung 2) Es ist aber:

$$\varphi(u) = \frac{P}{x^m}, \quad \psi(u) = \frac{Q}{x^m}, \quad u = \frac{y}{x},$$

also der Multiplicator von der Form:

$$M = \frac{x^m}{Px + Qy}.$$

Die Gleichung 2) aber entstand aus 1) durch Multiplication mit $\frac{1}{x^m}$; es ist also:

$$\frac{1}{Px + Qy}$$

ein Multiplicator der vorgelegten Gleichung:

$$Pdx + Qdy = 0,$$

und

$$Px + Qy = 0$$

eine singuläre Auflösung derselben.

Die eben gegebene Methode der Integration ist noch anwendbar bei folgender Gleichung:

$$Pdx + Qdy + R(ydx - xdy) = 0,$$

wo $P$ und $Q$ homogene Functionen $m$ter Ordnung, $R$ aber eine solche $p$ter Ordnung ist. Wir setzen dann wieder:

$$\frac{y}{x} = u, \quad P = x^m \varphi(u),$$

$$Q = x^m \psi(u), \quad R = x^p f(u),$$

und erhalten, wenn

$$p = m + s$$

gesetzt wird:

$$\varphi(u)\,dx + \psi(u)(udx + xdu) + x^{s+2} f(u)\,du = 0,$$

also:

$$[\varphi(u) + u\psi(u)]\frac{dx}{x^{s+2}} + \frac{\psi(u)\,du}{x^{s+1}} + f(u)\,du = 0.$$

Ist nun noch:

$$z = x^{-(s+1)}, \quad \text{also} \quad dz = -(s+1)\frac{dx}{x^{s+2}},$$

so kommt:

$$-[\varphi(u) + u\psi(u)]\frac{dz}{s+1} + z\psi(u)\,du + f(u)\,du = 0.$$

Diese Gleichung ist aber offenbar eine lineare, d. h. sie enthält $z$ nur in der ersten Potenz, ist also nach dem in 4) gegebenen Verfahren zu integriren.

**Beispiele.** Sei die Gleichung:

$$(ax + by)\,dx + (\alpha x + \beta y)\,dy = 0$$

gegeben, wo $a$, $b$, $\alpha$, $\beta$ Constanten sind, so hat man:

$$m = 1, \quad \varphi(u) = a + bu, \quad \psi(u) = \alpha + \beta u,$$

$$\lg x + \int \frac{\alpha + \beta u\,du}{a + (b + \alpha)u + \beta u^2} = \alpha.$$

Das Integral ist bekanntlich leicht zu berechnen.

Sei ferner gegeben:

$$xdy - ydx - dx\sqrt{(x^2 + y^2)} = 0,$$

so hat man:

$$m = 1, \quad \varphi(u) = -u - \sqrt{(1 + u^2)}, \quad \psi(u) = 1,$$

also:

$$\lg x = \int \frac{du}{\sqrt{(1 + u^2)}} + \alpha,$$

d. h.

$$\lg x = \lg(u + \sqrt{1 + u^2}) + \lg c,$$

wenn man $\alpha = \lg c$ setzt, also:

$$x = c(u + \sqrt{1 + u^2}) = c\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right),$$

woraus sich ergibt:

$$x^2 - 2yc - c^2 = 0.$$

Differenziirt man den Ausdruck links nach $c$, so kommt:

$$y = -c,$$

und hieraus und aus der Gleichung $x^2 - 2cy - c^2 = 0$ die Grösse $c$ eliminirend, erhält man:

$$x^2 + y^2 = 0;$$

es ist dies ein singuläres Integral, da es im allgemeinen Integrale nicht enthalten ist.

Die Gleichung $Px + Qy = 0$, welche wir oben, als die singuläre Auflösung enthaltend, hinstellten, gibt dasselbe Resultat.

7) **Transformation der Variablen.**

In den Abschnitten 4 und 6 sind die beiden Hauptfälle enthalten, in denen es gelingt, eine Gleichung von der Form $Pdx$ und $Qdy$ zu integriren. Es kann aber oft eine andere gegebene Gleichung

entweder auf die Form der linearen oder der homogenen Gleichungen zurückgeführt werden.

A) Sei z. B. gegeben:

$$(ax+by+c)\,dx=(\alpha x+\beta y+\gamma)\,dy,$$

so setzt man:

$$ax+by+c=t, \qquad \alpha x+\beta y+\gamma=u,$$

und erhält:

$$adx+bdy=dt, \qquad \alpha dx+\beta dy=du,$$

$$dx=\frac{\beta dt-bdu}{a\beta-b\alpha}, \quad dy=\frac{-\alpha dt+adu}{a\beta-b\alpha},$$

und unsere Gleichung nimmt die Gestalt an:

$$(\alpha u+\beta t)\,dt=(au+bt)\,du,$$

welche offenbar linear ist.

B) Sei ferner gegeben:

$$y^{m-1}dy+y^m f(x)\,dx=q(x)\,dx;$$

setzen wir hierin:

$$y^m=u,$$

so wird:

$$y^{m-1}dy=\frac{u}{m},$$

also:

$$\frac{u}{m}+uf(x)\,dx=q(x)\,dx.$$

Es ist dies aber offenbar eine lineare Gleichung.

C) Auf gleiche Weise kann man die Gleichung

$$dy+yf(x)\,dx+y^n q(x)\,dx=0,$$

welche die Bernoullische Gleichung genannt wird, der Substitution

$$u=y^{-n+1}$$

unterziehn, und erhält:

$$du=-(n-1)\,y^{-n}dy,$$

d. h.

$$-\frac{du}{n-1}+uf(x)\,dx+q(x)\,dx,$$

abermals eine lineare Gleichung.

In Abschnitt 6) betrachteten wir bereits eine Gleichung, deren Integration durch diese Substitution gelang, und welche von noch complicirterer Gestalt war.

D) Die allgemeine Gleichung:

$$Ax^m y^p dx+Bx^{m_1}y^{p_1}dy=Cx^{m_2}y^{p_2}dy,$$

die also aus drei Theilsätzen von rationaler Form besteht, lässt sich durch Transformation immer auf eine einfachere Form bringen. Setzen wir zu dem Ende:

$$x=z^h, \qquad y=u^k,$$

indem wir uns die Bestimmung der Exponenten $h$ und $k$ vorbehalten, so kommt:

$$Ahz^{(m+1)h-1}u^{pk}dz+ Bkz^{m_1h}u^{(p_1+1)k-1}du= Ckz^{m_2h}u^{(p_2+1)k-1}du.$$

Setzt man hierin:

$$(m+1)\,h-1+m_2 h=0,$$

$$(m_1-m_2)\,h=\alpha,$$

$$(p_1+1)\,k-1-pk=0,$$

$$(p_2+1)\,k-1-pk=\beta,$$

$$hA=a, \quad kB=b, \quad kC=c,$$

so nimmt die Gleichung die Form an:

$$adz+bz^\alpha du=cu^\beta du,$$

und es ist zu setzen:

$$h=\frac{1}{m+1-m_2}, \quad k=\frac{1}{p_1+1-p},$$

also:

$$x=z^{\frac{1}{m+1-m_2}}, \quad y=u^{\frac{1}{p_1+1-p}}.$$

Die resultirende Gleichung ist linear, wenn

$$\alpha=\frac{m_1-m_2}{m-m_2+1}=1$$

ist.

Unter den übrigen Fällen ist namentlich der, wo $\alpha=2$ ist, betrachtet worden; die Gleichung heisst in diesem Falle die **Riccatische**, nach demjenigen Mathematiker, der sich zuerst mit ihr beschäftigt hat.

(Vincent Riccati, 1707—1775.)

8) **Die Riccatische Gleichung.**

Die Riccatische Gleichung:

1) $$dy+ay^2dx=bx^m dx,$$

ist in dem Falle augenblicklich zu integriren, wo $m=0$ ist. Man erhält dann:

$$dy=(b-ay^2)\,dx,$$

$$x=\int\frac{dy}{b-ay^2}.$$

Um andere Fälle zu ermitteln, setzen wir:

$$y=z^\alpha, \quad dy=\alpha z^{\alpha-1}dz,$$

und erhalten:

2) $\alpha z^{\alpha-1} dz + a z^{2\alpha} dx = b x^m dx$.

Wenn

$$\alpha - 1 = 2\alpha = m$$

ist, so hat man eine homogene Gleichung. Es ist dies also der Fall, wenn

$$\alpha = -1, \quad m = -2.$$

Die Gleichung nimmt dann die Form an:

$$x^2 dz + (bz^2 - ax^2)\, dx = 0.$$

Andere Fälle ergeben sich, wenn man setzt:

$$y = Ax^p + zx^q,$$

$$dy = (Apx^{p-1} + qx^{q-1}z)\, dx + x^q dz.$$

Dies in die ursprüngliche Gleichung einsetzend, erhält man nämlich:

$$x^q dz + (Apx^{p-1} + qx^{q-1}z)\, dx + a(A^2x^{2p} + 2Ax^{p+q}z + x^{2q}z^2)\, dx = bx^m dx.$$

Diese Gleichung besteht dann nur wieder aus 3 Theilsätzen, wenn man annimmt, dass:

$$p - 1 = 2p, \quad Ap + aA = 0,$$

$$q - 1 = p + q, \quad q + 2aA = 0$$

ist.

Hieraus folgt:

$$p = -1, \quad A = \frac{1}{a}, \quad q = -2,$$

also:

$$y = \frac{1}{ax} + \frac{z}{x^2},$$

und:

3) $x^{-2} dz + ax^{-4} z^2 dx = bx^m dx$

ist die transformirte Gleichung. Sie ist homogen, wenn

$$m = -2$$

ist.

Die Gleichung ist aber auch zu integriren, wenn

$$m = -4$$

ist. Dann hat man nämlich:

$$x^2 dz + a z^2 dx = b dx,$$

d. h.

$$\int \frac{dz}{b - az^2} = \int \frac{dx}{x^2} = \frac{-1}{x}.$$

Die allgemeine transformirte Gleichung 3) wird nun nochmals transformirt, indem man

$$z = \frac{1}{u}$$

setzt. Es kommt dann:

$$-du + \frac{adx}{x^2} = bx^{m+2}u^2 dx,$$

und wenn man:

$$v = x^{m+3}, \quad dx = \frac{dv}{(m+3)x^{m+2}} = \frac{dv}{m+3}\, v^{-\frac{m+2}{m+3}}$$

setzt:

4) $du + \frac{bu^2 dv}{m+3} = \frac{a}{m+3}\, v^{-\frac{m+4}{m+3}} dv.$

Die Gleichung 4) hat offenbar ganz die Form der ursprünglichen Riccatischen Gleichung 1). Sie ist also zu integriren, wenn man

$$m' = -\frac{m+4}{m+3} = -4$$

setzt und die Substitutionen

$$u = \frac{1}{a'v} + \frac{z'}{v^2}$$

ganz wie vorhin macht.

Ist $m'$ aber nicht gleich $-4$, so kann man setzen:

$$u = \frac{1}{u'}, \quad v' = v^{m'+3},$$

Die so entstehende Gleichung wird dann, im Falle

$$m'' = -\frac{m'+4}{m'+3} = -4$$

ist, der Substitution:

$$u' = \frac{1}{a''v'} + \frac{z''}{v'^2}$$

unterworfen und dadurch wie vorhin auf eine integrirbare Gestalt gebracht. Es ist dies also möglich, wenn:

$$m = -4, \quad m' = -\frac{m+4}{m+3} = -4,$$

$$m'' = -\frac{m'+4}{m'+3} = -4 \ldots,$$

d. h. wenn $m$ einen der Werthe hat:

$$-4, \; -\frac{8}{3}, \; -\frac{12}{5}, \; -\frac{16}{7} \ldots,$$

oder, was dasselbe ist, wenn:

$$m = -\frac{4r}{2r-1}$$

wo $r$ eine beliebige positive ganze Zahl vorstellt.

Man kann aber auch in die ursprüngliche Gleichung 1) setzen:

$$y=\frac{1}{y'},$$

woraus sich dann ergibt:

$$dy'+by'^2x^m dx=adx,$$

oder wenn man

$$x^{m+1}=x', \quad \frac{b}{m+1}=a',$$

$$\frac{a}{m+1}=b', \quad -\frac{m}{m+1}=m'$$

setzt:

5) $$dy'+a'y'^2dx=b'x'^{m'}dx'.$$

Dies ist wieder die ursprüngliche Form. Die Integration gelingt also, wenn:

$$m'=-\frac{m}{m+1}=-\frac{4r}{2r-1}$$

ist, d. h. wenn

$$m=\frac{-4r}{2r+1}=\frac{-4\cdot(-r)}{2\cdot(-r)-1}$$

ist.

Es kann also immer die Integration ausgeführt werden, wenn $m=-\frac{4r}{2r-1}$ und $r$ eine ganze positive oder negative Zahl, auch gleich Null ist, ausserdem wenn $m=-2$ ist.

Die Riccatische Gleichung lässt sich noch unter eine andere Form bringen, in welcher ihre Behandlung einfacher wird. Wir kommen nachher auf dieselbe zurück.

9) Differenzialgleichungen von höheren Graden.

Ist die Gleichung in Bezug auf den Differenzialquotienten von höheren als vom ersten Grade, also von der Form:

1) $$\left(\frac{dy}{dx}\right)^n+\alpha\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1}+\beta\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-2}+\cdots+\vartheta\left(\frac{dy}{dx}\right)=\eta.$$

wo $\alpha, \beta \cdots \vartheta, \eta$ im Allgemeinen Functionen von $x$ und $y$ sind, so ist es nicht immer angemessen, die Gleichung vor der Integration auf die Form

$$\frac{dy}{dx}=U$$

zu bringen, also die algebraische Gleichung in Bezug auf $\frac{dy}{dx}$ aufzulösen. Oft ist es besser, eine Beziehung zwischen $x$ und $y$ und einer Constante auf directem Wege aus der gegebenen Gleichung abzuleiten.

Namentlich sind hier folgende Fälle bemerkenswerth.

I) Sind in der Gleichung 1) $\alpha, \beta \cdots \vartheta, \eta$ sämmtlich Constanten, so ist offenbar auch $\frac{dy}{dx}$ eine solche; man setzt also:

$$\frac{dy}{dx}=c,$$

woraus sich ergibt:

$$y=cx+e;$$

$e$ ist eine willkürliche Constante. Um $c$ zu eliminiren, setzt man den Ausdruck:

$$c=\frac{y-e}{x}=\frac{dy}{dx}$$

in Gleichung 1) ein, und erhält:

2) $$\left(\frac{y-e}{x}\right)^n+\alpha\left(\frac{y-e}{x}\right)^{n-1}+\beta\left(\frac{y-e}{x}\right)^{n-2}+\cdots+\vartheta\left(\frac{y-e}{x}\right)=\eta.$$

Dies ist also die Integralgleichung, $e$ ihre willkürliche Constante.

Beispiel.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-a^2=0$$

sei die Differenzialgleichung. Das Integral also:

$$\left(\frac{y-e}{x}\right)^2=a^2,$$

oder:

$$(y-e)^2-a^2x^2=0.$$

II) Es ist oft gerathen, die Gleichung nicht nach $\frac{dy}{dx}$, sondern nach $y$ oder $x$ aufzulösen. Man hat dann die Gleichung

$$y=F(x, p),$$

oder bezüglich

$$x=F(y, p),$$

wo

$$p=\frac{dy}{dx}$$

ist, zu behandeln. Man differenziirt dann die erste Gleichung nochmals, und hat nun, wenn man von $y=F(x, p)$ ausgeht:

$$pdx=\frac{\partial F(x, p)}{\partial x}dx+\frac{\partial F(x, p)}{\partial p}dp,$$

also eine Differenzialgleichung zwischen $x$ und $p$. Gelingt deren Integration, so kann man $p$ aus dem erhaltenen Inte-

gral und der gegebenen Gleichung eliminiren, so dass man das Integral der vorgelegten Gleichung erhält, d. h. eine solche, die nur $x$, $y$ und eine willkürliche Constante einschliesst.

Beispiel. Sei gegeben:

$$\frac{(y-px)^2-c^2p^2}{1+p^2}=b^2,\quad p=\frac{dy}{dx};$$

durch Auflösen nach $y$ erhält man:

$$y=px+\sqrt{(c^2+b^2)p^2+b^2}.$$

Differenzlirt man, so ergibt sich:

$$dy=pdx+xdp+\frac{dp\cdot p\,(c^2+b^2)}{\sqrt{(c^2+b^2)(p^2+b^2)}}=0,$$

oder, da

$$dy=pdx$$

ist:

$$dp\left(x+\frac{p\,(c^2+b^2)}{\sqrt{(c^2+b^2)\,(p^2+b^2)}}\right)=0,$$

Diese Gleichung hat 2 Auflösungen:

$$p=e$$

und

$$x+\frac{p\,(c^2+b^2)}{\sqrt{(c^2+b^2)\,(p^2+b^2)}}=0.$$

Eliminirt man aber aus der letzteren und der gegebenen Gleichung $p$, so hat man keine willkürliche Constante, man wird also auf diese Weise im Allgemeinen ein singuläres Integral bekommen, wenn es nicht in bestimmten Fällen ein particuläres ist.

Der Werth $p=e$, in die gegebene Gleichung eingesetzt, gibt dagegen:

$$(y-ex)^2-c^2e^2=b^2(1+e^2),$$

und dies ist das allgemeine Integral, dessen willkürliche Constante $e$ ist.

Differenziiren wir, um das singuläre Integral zu ermitteln, nach $e$, so kommt:

$$x(y-ex)+c^2e+b^2e=0,$$

d. h. wenn man $e$ aus dieser Gleichung und dem allgemeinen Integral eliminirt:

$$(b^2+c^2)y^2+b^2x^2=(c^2+b^2)\,b^2.$$

Diese Gleichung, als die einer Curve betrachtet, stellt offenbar eine Ellipse vor.

Denselben Ausdruck hätte man erhalten, wenn man $p$ aus der Gleichung:

$$x+\frac{p(c^2+b^2)}{\sqrt{(c^2+b^2)\,(p^2+b^2)}}=0$$

und der gegebenen eliminirt hätte. Sie stellt in der That ein singuläres Integral vor, da sie in dem allgemeinen nicht enthalten ist.

III) Die eben als Beispiel behandelte Gleichung ist nur ein besonderer Fall der folgenden:

$$y=px+f(p),$$

wo $f$ eine beliebige Function vorstellt. Dieselbe ist durch die eben gegebene Analysis immer zu integriren. Man erhält nämlich durch Differenziiren:

$$xdp+f'(p)\,dp=0,$$

und immer gibt

$$p=e$$

das allgemeine Integral, welches also heisst:

$$y=ex+f(e).$$

Differenziirt man nach $e$, so kommt:

$$x+f'(e)=0.$$

Es ist aber ganz dasselbe, ob man $e$ aus der Gleichung:

$$y=ex+f(e),$$
$$x+f'(e)=0,$$

oder $p$ aus den Gleichungen:

$$y=px+f(p),$$
$$x+f'(p)=0$$

eliminirt, woraus sich ergibt, dass beide Methoden zu demselben singulären Integral führen müssen.

IV) Die eben gefundene Integrationsmethode ist auch auf den allgemeineren Fall anwendbar, wo die Gleichung in Bezug auf $x$ und $y$ linear ist, dieselbe also die Gestalt hat:

$$y=xf(p)+F(p),$$

wo $f$ und $F$ ganz beliebige Funktionen sind. Man erhält nämlich durch Differenziiren:

$$dy=xf'(p)\,dp+f(p)\,dx+F'(p)\,dp,$$

oder wegen

$$dy=pdx$$
$$[p-f(p)]\,dx=xf'(p)\,dp+F'(p)\,dp,$$

eine Gleichung, die offenbar in Bezug auf $x$ linear ist, also immer auf Quadraturen zurückgeführt werden kann.

Aus dem Integral und der gegebenen Gleichung ist dann $p$ zu eliminiren.

Beispiel.

$$y=x(1+p^2).$$

Durch Differenziiren erhält man:

$$(p-1-p^2)\,dx=2p\,x\,dp.$$

Das Integral ist:

$$\frac{dx}{x}=-\int\frac{2p\,dx}{1-p+p^2},$$

d. h.

$$\lg x = c - \tfrac{1}{2}\lg(p^2 - p + 1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2p-1}{\sqrt{3}},$$

wo zu setzen ist:

$$p = \sqrt{\frac{y-x}{x}},$$

vermöge der gegebenen Gleichung.

V) Auch dann gelingt die Reduction auf Quadraturen immer, wenn die gegebene Gleichung von der Gestalt:

$$F(x,\ y,\ p) = 0$$

und die Function $F$ in Bezug auf $x$ und $y$ homogen ist. Sie lässt sich dann nämlich immer auf die Form:

$$x^s \varphi\left(\frac{y}{x},\ p\right) = 0,$$

d. h.

$$\varphi\left(\frac{y}{x},\ p\right) = 0$$

bringen. (Vergleiche Abschnitt 6.) Setzt man also:

$$y = u x,$$

so erhält man:

$$\varphi(u,\ p) = 0,$$

und vermöge dieser Gleichung kann $u$ als gegebene Funktion von $p$ betrachtet werden.

Nun ist aber:

$$dy = p dx = u dx + x du,$$

also:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{p-u},$$

d. h.

$$\lg x = \int \frac{du}{p-u},$$

$$x = e^{\int \frac{du}{p-u}},$$

$$y = u x = u\, e^{\int \frac{du}{p-u}}.$$

Diese beiden Gleichungen in Verbindung mit

$$y = \varphi(u,\ p)$$

dienen, um $u$ und $p$ zu eliminiren, wodurch man das Integral erhält.

Will man lieber die Quadraturen nach $p$ ausführen, so setze man:

$$\int \frac{du}{p-u} = -\int \frac{dp - du}{p-u} + \int \frac{dp}{p-u} = -\lg(p-u) + \int \frac{dp}{p-u},$$

also:

$$x = \frac{1}{p-u} e^{\int \frac{dp}{p-u}},\quad y = \frac{u}{p-u} e^{\int \frac{dp}{p-u}}.$$

Beispiel.

$$y dx - x dy = n x \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$$

Wir setzen:

$$\frac{dy}{dx} = p,\ y = u,$$

und erhalten:

$$u - p = n\sqrt{(1+p^2)},$$

$$x = \frac{1}{p-u} e^{-\int \frac{dp}{n\sqrt{(1+p^2)}}},$$

$$y = \frac{u}{p-u} e^{-\int \frac{dp}{n\sqrt{(1+p^2)}}}.$$

Man hat aber:

$$\int \frac{dp}{\sqrt{(1+p^2)}} = \lg\,(p + \sqrt{1+p^2}) + \lg c,$$

wo $c$ die willkürliche Constante ist. Also:

$$x = \frac{c\,(p + \sqrt{1+p^2})^{\frac{1}{n}}}{n\sqrt{(1+p^2)}},$$

$$y = \frac{c\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)^{\frac{1}{n}}}{n\sqrt{(1+p^2)}}\left(p+n\sqrt{1+p^2}\right).$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist $p$ zu eliminiren.

VI) Noch einfacher ist die Integration, wenn die Gleichung die Form hat:

$$y = F(p).$$

oder:

$$x = F(p).$$

Im ersten Falle ist:

$$dx = \frac{1}{p}\,dy,$$

also, indem man theilweise integrirt:

$$x = \frac{F(p)}{p} + \int \frac{F(p)\,dp}{p^2}.$$

Aus dieser und der gegebenen Gleichung wird $p$ eliminirt.

Im letztern Falle, wo $x = F(p)$ die gegebene Gleichung ist, setzt man:

$$dy = p\,dx,$$

also:

$$y = px - \int x\,dp,$$

d. h.

$$y = pF(p) - \int F(p)\,dp,$$

und die Elimination geschieht wie oben.

Beispiel.

$$x\sqrt{(1+p^2)} = ap;$$

hieraus folgt:

$$x = \frac{ap}{\sqrt{(1+p^2)}},$$

$$y = px - \int \frac{ap\,dp}{\sqrt{(a^2-a^2)}},$$

d. h.

$$y = px - a\sqrt{(1+p^2)} + c,$$

oder wenn man aus der gegebenen Gleichung:

$$p = \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$$

findet:

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} - a\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}} + c,$$

d. h.

$$(y-c)^2 = a^2 - x^2.$$

10) **Behandlung derjenigen Systeme von Differenzialgleichungen mit beliebig viel Variablen, wo die Anzahl der Gleichungen um eins kleiner ist als die der Variablen.**

Wie auch die Ordnung einer jeden Gleichung eines Systems von Differenzialgleichungen beschaffen sei, wenn nur die Anzahl der Variablen die der Gleichungen um 1 übertrifft, in jedem Falle lässt dasselbe sich auf ein anderes System zurückführen, welches derselben Bedingung genügt, und wo sämmtliche Gleichungen erster Ordnung sind. Es ist dies der in 2 D) bewiesene Satz.

Sind $x, x_1, x_2 \ldots x_n$ die Variablen, so kann man also als allgemeinste Form des Systems der hier zu betrachtenden Gleichungen annehmen:

1) $$\alpha\,dx + \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 \ldots \alpha_n dx_n = 0,$$

$$\alpha' dx + \alpha_1' dx_1 + \alpha_2' dx_2 \ldots \alpha_n' dx_n = 0,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\alpha^{(n-1)} dx + \alpha_1^{(n-1)} dx_1 + \alpha_2^{(n-1)} dx_2 + \ldots \alpha_n^{(n-1)} dx_n = 0.$$

Aus diesen $n$ Gleichungen aber können immer $(n-1)$ Differenziale eliminirt, und das System auf eine Gestalt gebracht werden:

2) $$\frac{dx_1}{dx} = U_1,\ \frac{dx_2}{dx} = U_2 \ldots \frac{dx_n}{dx} = U_n.$$

Die Grössen $U_1, U_2 \ldots U_n$ sind Functionen von $x, x_1, x_2 \ldots x_n$. Der Symmetrie wegen aber setzen wir noch:

$$U_1 = \frac{X_1}{X},\ U_2 = \frac{X_2}{X},\ U_n = \frac{X_n}{X}$$

und bestimmen die Variable $u$ durch die Gleichung:

$$\frac{dx}{du} = X.$$

Es verwandelt sich das System 2) dann in das folgende:

3) $$\frac{dx}{du} = X,\ \frac{dx_1}{du} = X_1,\ \frac{dx_2}{du} = X_2 \ldots \frac{dx_n}{du} = X_n.$$

Die neu eingeführte Variable $u$ hat die Eigenschaft, dass nicht sie selbst, sondern nur ihr Differenzial $du$ in dem System 3) vorkommt. Eine solche Variable bezeichnen wir als „**Index des Systemes 3.**“

Das letztere System soll den folgenden Betrachtungen zu Grunde gelegt werden.

„Integral des Systems 3) heisst jede Function von $x, x_1 \ldots x_n$, welche gleich einer Constante gesetzt die Gleichungen 3) erfüllt." — Sei also $f(x, x_1, x_2 \ldots x_n)$ ein solches Integral, so muss die Gleichung:

4) $$f(x, x_1, x_2 \ldots x_n) = \alpha$$

durch die Gleichungen 3) identisch werden. Diese letzte Gleichung nennen wir Integralgleichung, und können dieselbe auch auf die Form bringen:

$$\varphi(x, x_1, x_2 \ldots x_n, \alpha) = 0;$$

den Ausdruck Integral aber wollen wir stets nur für das erste Glied einer in der Form 4) geschriebenen Integralgleichung gebrauchen.

Differenziirt man nun die Gleichung 4) nach $u$, so erhält man, wenn $x, x_1, x_2 \ldots x_n$ als Functionen von $u$ betrachtet werden:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{du} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{dx_2}{du} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{du} = 0,$$

oder da diese Gleichung durch die Gleichungen 3) verificirt werden soll, mit Benutzung der letztern:

5) $$\frac{\partial f}{\partial x}X + \frac{\partial f}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}X_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}X_n = 0.$$

Diese Gleichung definirt das Integral völlig, d. h. jede Function, welche sie erfüllt, ist ein Integral. Setzt man nämlich für $X, X_1, X_2 \ldots X_n$ wieder die Werthe $\frac{dx}{du}, \frac{dx_1}{du}, \ldots$, so erhält man:

$$\frac{df}{du} = 0, \quad \text{also } f = a.$$

Satz A. „Hat man $n$ Integrale des Systems derart, dass keins eine Funktion der übrigen, also alle $n$ von einander unabhängig sind, so kann kein neues Integral gefunden werden, welches nicht eine Function derselben sei. Es hat also das System 3) nur $n$ von einander unabhängige Integrale."

Hätte man nämlich $n+1$ von einander unabhängige Integralgleichungen:

$$f = \alpha, \; f_1 = \alpha_1, \; f_2 = \alpha_2 \ldots f_n = \alpha_n,$$

so könnte man aus denselben die Grössen $x, x_1, x_2 \ldots x_n$ berechnen, und dieselben wären sämmtlich Constanten gleich, also:

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx_1}{du} = \ldots = \frac{dx_n}{du} = 0,$$

was den Gleichungen 3) widerspricht.

„Sind also $n$ von einander unabhängige Integrale gegeben, $f, f_1 \ldots f_{n-1}$, so kann jedes andere $f_n$ nur die Form haben:

$$f_n = \varphi(f, f_1, f_2 \ldots f_{n-1})."$$

„Umgekehrt ist jeder Ausdruck von dieser Form ein Integral." Es ist nämlich vermöge der entsprechenden Integralgleichungen:

$$f_n = \varphi(\alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_n) = \beta,$$

wo also $\beta$ eine Constante ist.

Satz B. „Das System 3) hat immer $n$ von einander unabhängige Integrale."

Um dies nachzuweisen, gehen wir von der Form 2) aus, und bedienen uns des schon bei den Gleichungen mit 2 Variablen angewandten Verfahrens.

Zunächst schreiben wir diese Gleichungen in folgender Weise:

$$dx_1 = \varphi_1(x, x_1 \ldots x_n)\,dx,$$
$$dx_2 = \varphi_2(x, x_1 \ldots x_n)\,dx,$$
$$dx_3 = \varphi_3(x, x_1 \ldots x_n)\,dx,$$
$$\vdots$$
$$dx_n = \varphi_n(x, x_1 \ldots x_n)\,dx,$$

oder wenn wir einer jeden dieser Grössen $x_s$ nach und nach die Werthe:

$$x_s^0, \; x_s^{(1)} \ldots x_s^{(t)}$$

geben, welche continuirlich aus einander entstehen, immer unter der Voraussetzung, dass auch die Functionen $\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n$ continuirlich bleiben, mit Berücksichtigung, dass

$$\lim (x_s^{(r)} - x_s^{(r-1)}) = dx_s^{(r)}$$

ist:

$$x_s^1 = x_s^0 + \varphi_1(x^0, x_1^0 \ldots x_n^0)(x^{(1)} - x^0)$$

Giebt man hierin dem Index $s$ alle Werthe von 1 bis $n$, so hat man $n$ Gleichungen, welche die Grössen $x'_1, x'_2 \ldots x'_n$

gehen, wenn man die Anfangswerthe $x^0$, $x_1^0$ ... $x_n^0$ und ausserdem $x^{(1)}$ hat. Es ist ferner:

$$x_s^{(2)} = x_s^{(1)} + \varphi_1(x^{(1)}, x_1^{(1)} \dots x_n^{(1)})(x^{(2)} - x^{(1)}),$$

$n$ Gleichungen, welche die Werthe von $x_1^{(2)}, x_2^{(2)} \dots x_n^{(2)}$ geben, wenn man für $x^{(1)}$, $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)} \dots x_n^{(1)}$, die aus den vorigen Gleichungen gefundenen Ausdrücke substituirt; fährt man so fort, bildet also die Gleichungen:

$$x_s^{(r)} = x_s^{(r-1)} + \varphi_1(x^{(r-1)}, x_1^{(r-1)} \dots x_n^{(r-1)})(x^{(r)} - x^{(r-1)}),$$

so findet man schliesslich:

$$x_1^{(t)}, x_2^{(t)} \dots x_n^{(t)},$$

oder $x_1$, $x_2$ ... $x_n$ selbst als Functionen der Anfangswerthe $x^0$, $x_1^0$ ... $x_n^0$, und von $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ ... $x^{(t)}$. Diese Grössen sind also Functionen von $x$, da sie sich mit der Zunahme von $x$ continuirlich ändern. $x$ kann also als unabhängige Variable betrachtet werden. Der Anfangswerth von $x$, $x^0$ kann eine beliebige Zahl sein, etwa Null. Die entsprechenden Anfangswerthe $x_1^0$, $x_2^0$ ... $x_n^0$ sind dann durch unsere Gleichungen nicht bestimmt, also willkürliche Constanten.

Man hat also $n$ Gleichungen von der Form:

6) $$x_1 = \psi_1(x, x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)$$
$$x_2 = \psi_2(x, x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)$$
$$\vdots$$
$$x_n = \psi_n(x, x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0).$$

Entwickelt man aus diesen Gleichungen die Constanten, so erhält man Gleichungen von der Form:

7) $$x_1^0 = f_1(x, x_1, x_2 \dots x_n),$$
$$x_2^0 = f_2(x, x_1, x_2 \dots x_n)$$
$$\vdots$$
$$x_n^0 = f_n(x, x_1, x_2 \dots x_n),$$

und dies sind offenbar die Integrale unsers Systems.

Wir nennen diese $n$ Integrale Hauptintegrale zum Unterschiede von anderen, wo die Constanten nicht die ihnen hier gegebene Bedeutung haben, die Anfangswerthe der abhängigen Variablen zu sein.

Ein System von Gleichungen wie 6) kann man auch als System von Integralgleichungen betrachten. Sie unterscheiden sich von der in 7) gegebenen Form dadurch, dass jede Gleichung $n$ Constanten aber ausser der unabhängigen Variablen nur noch eine zweite Variable enthält.

Diese Formen aber haben wesentlich andere Eigenschaften, als die bis jetzt betrachteten Integralgleichungen. Nach Analogie des im Abschnitt 3) Gesagten kann man diese Gleichungen 6) auch schreiben:

$$x_1 = x_1^0 + \int_{x^0}^{x} \varphi_1(x, x_1 \dots x_n)\,dx,$$

$$x_2 = x_2^0 + \int_{x^0}^{x} \varphi_2(x, x_1 \dots x_n)\,dx$$

$$\vdots$$

$$x_n = x_n^0 + \int_{x^0}^{x} \varphi_n(x, x_1 \dots x_n)\,dx,$$

und aus dieser Form lassen sich in Bezug auf die Werthe der Variablen ganz ähnliche Schlüsse, wie am angeführten Orte ziehen. Offenbar ist auch das hier gegebene Verfahren eine Methode zur wirklichen annäherungsweisen Integration der gegebenen Gleichungen.

Das System von Integralen, welches wir als Hauptintegrale bezeichnet haben, ist von grosser Wichtigkeit für verschiedene Fragen der Analysis. Dasselbe lässt sich, wie auch die Integrationsmethode sei, immer wieder finden, wenn man $n$ beliebige, von einander unabhängige Integrale hat. Sei nämlich:

8) $$\alpha_1 = \varphi_1(x, x_2 \dots x_n),$$
$$\alpha_2 = \varphi_2(x, x_1 \dots x_n)$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n = \varphi_n(x, x_1 \dots x_n)$$

ein solches System. Um aus demselben die Hauptintegrale zu ermitteln, geben wir $x$ eine beliebige Zahl $x^0$, etwa 0 als Anfangswerth, und mögen dieser die Werthe $x_1{}^0, x_2{}^0 \ldots x_n{}^0$ für die andern Variablen entsprechen, so ist auch

$$\alpha_1 = \varphi_1(x^0, x_1{}^0 \ldots x_n{}^0),$$
$$\alpha_2 = \varphi_2(x^0, x_1{}^0 \ldots x_n{}^0)$$
$$\vdots$$
$$\alpha_n = \varphi_n(x^0, x_1{}^0 \ldots x_n{}^0).$$

Aus diesen Gleichungen kann man $x_1{}^0, x_2{}^0 \ldots x_n{}^0$ entwickeln und erhält:

$$x_1{}^0 = \psi_1(x^0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n),$$
$$x_2{}^0 = \psi_2(x^0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$$
$$\vdots$$
$$x_n{}^0 = \psi_n(x^0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n).$$

Setzt man hierin für $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ wieder die Werthe aus 8) ein, so hat man ein System ganz von der Form 7); $x^0$ ist nämlich eine Zahl, von deren Auswahl allein die Gestalt der Hauptintegrale noch abhängig ist.

11) Theorie des Jakobi'schen Multiplicators.

Es ist Jakobi gelungen, die Theorie des Multiplicators, welche Euler für eine Gleichung mit 2 Variablen angewandt hat, auf ein System wie das hier betrachtete, von $n-1$ Gleichungen mit $n$ Variablen zu erweitern.

Wir geben diese wichtige Theorie hier in aller Kürze. — Zu dem Ende sei:

$$1) \quad \frac{dx_1}{du} = X_1, \frac{dx_2}{du} = X_2 \ldots \frac{dx_n}{du} = X_n$$

das gegebene System, wo wir $x_1, x_2 \ldots x_n$ als Variable annehmen. Nehmen wir an, es sei

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

ein Integral, also:

$$2) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}X_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}X_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}X_n = 0$$

eine Gleichung, welche wir auch schreiben können:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial f}{\partial x_p}X_p = 0$$

Es möge nun sein:

$$f = \frac{M'}{M},$$

wo also eine der Grössen $M'$ und $M$ vor der Hand noch ganz willkürlich ist.

Man hat dann offenbar:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial\left(\frac{M'}{M}\right)}{\partial x_p} X_p = 0,$$

d. h.:

$$\sum_{p=1}^{p=n} M\frac{\partial M'}{\partial x_p}X_p = \sum_{p=1}^{p=n} M'\frac{\partial M}{\partial x_p}X_p.$$

Offenbar aber ist:

$$\frac{\partial M}{\partial x_p}X_p = \frac{\partial(M X_p)}{\partial x_p} - \frac{M \partial X_p}{\partial x_p},$$

also:

$$\sum_{p=1}^{p=n} M\frac{\partial(M'X_p)}{\partial x_p} - \sum_{p=1}^{p=n} MM'\frac{\partial X_p}{\partial x_p} =$$
$$\sum_{p=1}^{p=n} M'\frac{\partial(MX_p)}{\partial x_p} - \sum_{p=1}^{p=n} MM'\frac{\partial X_p}{\partial x_p},$$

d. h.

$$M\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial(M'X_p)}{\partial x_p} = M'\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial(MX_p)}{\partial x_p}.$$

Die bisher willkürliche Grösse $M$ bestimmen wir jetzt so, dass:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial(MX_p)}{\partial x_p} = 0$$

ist, und jeder Ausdruck $M$, welcher diese Gleichung erfüllt, soll jetzt ein Multiplicator des Systems 1) genannt werden. Es ist offenbar also auch $M'$ ein Multiplicator, da vermöge der letzten Gleichung auch:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial M'X_p}{\partial x_p} = 0$$

ist, und wir haben den Satz:

„Jedes Integral ist der Quotient zweier Multiplicatoren."

Dieser Satz lässt sich auch umkehren:

„Der Quotient jeder zwei Multiplicatoren ist ein Integral."

Denn sind gegeben die Gleichungen:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial (M' X_p)}{\partial x_p} = 0, \qquad \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial (M X_p)}{\partial x_p} = 0,$$

welche die Multiplicatoren definiren, so hat man:

$$\frac{\partial (M X_p)}{\partial x_p} = M \frac{\partial X_p}{\partial x_p} + X_p \frac{\partial M}{\partial x_p},$$

also:

$$M \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial X_p}{\partial x_p} + \sum_{p=1}^{p=n} X_p \frac{\partial M}{\partial x_p} = 0,$$

oder wenn man mit $M$ dividirt:

3) $$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial X_p}{\partial x_p} + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial \lg M}{\partial x_p} X_p = 0,$$

Es ist leicht zu sehen, dass auch diese Gleichung den Multiplicator vollständig definirt. Wenn man von der dem andern Multiplicator entsprechenden Gleichung:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial X_p}{\partial x_p} + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial \lg M'}{\partial x_p} X_p = 0$$

die vorletzte abzieht, so ergibt sich:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial \lg \frac{M'}{M}}{\partial x_p} X_p = 0.$$

Diese Gleichung mit 2) verglichen, zeigt, dass $\lg \frac{M'}{M} = A$ eine Integralgleichung, also auch

$$\frac{M'}{M} = e^A$$

eine solche, folglich $\frac{M'}{M}$ ein Integral ist.

Hat man also zu einem System von $n$ Gleichungen $n+1$ von einander unabhängige Multiplicatoren, so lässt sich durch Division von je zweien ein System von $n$ Integralen ermitteln, also die Gleichungen vollständig integriren.

12) Wechselbeziehung zwischen Integralen und Multiplicatoren.

Auf den folgenden Betrachtungen beruht die eigentliche Anwendung der Multiplicatorentheorie.

Ist wieder ein System von der Form 1) des vorigen Abschnittes, und eine Integralgleichung:

$$f = \alpha$$

gegeben, so hat man eine Gleichung, aus der eine der Variablen, z. B. $x_n$ berechnet und in die Gleichungen 1) eingesetzt werden kann. Dieselben enthalten dann nur noch $n-1$ Variablen, ausserdem aber die Constante $\alpha$. Eine der Gleichungen des Systems 1) wird dagegen eine identische Folge der übrigen, da man hat:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

woraus $dx_n$ berechnet werden kann. Man hat also durch die Anwendung des Integrals das System von $n-1$ Gleichungen mit $n$ Variablen ($n-1$ Gleichungen sind es nämlich nach Elimination des willkürlich eingeführten $du$) auf $n-2$ Gleichungen mit $n-1$ Variablen reducirt. Ein zweites Integral würde das System auf $(n-3)$ Gleichungen mit $(n-2)$ Variablen reduciren und so fort, so dass jedes Integral eine wesentliche Vereinfachung der noch übrigen Aufgabe bedingt.

„Ist von einem System aber ausser einem Integral auch ein Multiplicator bekannt, so kann man immer den Multiplicator desjenigen Systems ermitteln, welches entsteht, wenn man durch Einsetzen des Integrals das gegebene reducirt."

Um dies zu zeigen, sei $f$ das Integral, $M$ der Multiplicator des gegebenen Systems, $M_1$ der gesuchte Multiplicator des reducirten Systems. Wir nehmen an, dass bei letzterem die Variable $x_n$ weggeschafft worden ist. Man hat nun:

$$\sum_{p=1}^{p=n} X_p \frac{\partial f}{\partial x_p} = 0,$$

oder, wenn man diese Gleichung nach $x_n$ differenzirt:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial X_p}{\partial x_n} \frac{\partial f}{\partial x_p} + \sum_{p=1}^{p=n} X_p \frac{\partial u}{\partial x_p} = 0, \tag{4}$$

wo der Abkürzung wegen gesetzt ist:

$$u = \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

In den Grössen $X_1, X_2 \cdots X_n$ denken wir uns jetzt $x_n$ durch die Gleichung:

$$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = f$$

eliminirt; nach dieser Elimination enthalten sie also noch $x_1, x_2 \cdots x_{n-1}$ und $f$. Nimmt man $f = \alpha$ als constant an, so hat man das reducirte System; ist dagegen unter $f$ der Ausdruck $f(x_1, x_2 \cdots x_n)$ verstanden, so ist die Eliminationsgleichung wesentlich identisch, es findet also keine Reduction statt. Wir bezeichnen nun die Differenzialquotienten von $X_s$ mit:

$$\left(\frac{\partial X_s}{\partial x_1}\right), \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_2}\right), \left(\frac{\partial X_s}{\partial x_{n-1}}\right), \left(\frac{\partial X_s}{\partial f}\right),$$

wenn wir diejenigen darunter verstehen, welche nach der Elimination von $x_n$ sich ergehen. Das Fehlen der Klammern deutet darauf hin, dass das Differenziiren in dem alten Sinne nach $x_1, x_2 \cdots x_n$ stattfindet. Es ist also offenbar:

$$\frac{\partial X_s}{\partial x_n} = \left(\frac{\partial X_s}{\partial f}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} = u \left(\frac{\partial X_s}{\partial f}\right),$$

da nur die Grösse $f$ nach der Elimination noch $x_n$ enthält.

Die Gleichung 4) nimmt also die Gestalt an:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \left(\frac{\partial X_p}{\partial f}\right) \frac{\partial f}{\partial x_p} + \sum_{p=1}^{p=n} X_p \frac{\partial \lg u}{\partial x_p} = 0. \tag{5}$$

Es ist aber:

$$\frac{\partial X_p}{\partial x_s} = \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_s}\right) + \left(\frac{\partial X_p}{\partial f}\right) \frac{\partial f}{\partial x_s}.$$

Setzt man dies in die Gleichung 3) des vorigen Abschnittes ein, indem man $s = p$ setzt, so kommt:

$$\sum_{p=1}^{p=n} X_p \frac{\partial \lg M}{\partial x_p} + \sum_{p=1}^{p=n} \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_p}\right) + \sum_{p=1}^{p=n} \left(\frac{\partial X_p}{\partial f}\right) \frac{\partial f}{\partial x_p} = 0,$$

und indem man hiervon die Gleichung 5) abzieht:

$$\sum_{p=1}^{p=n} X_p \frac{\partial \lg \frac{M}{u}}{\partial x_p} + \sum_{p=1}^{p=n-1} \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_p}\right) = 0;$$

im letzten Gliede ist die Summe nur bis $n-1$ genommen, da $x_n$ als eliminirt zu betrachten ist. Was das erste Glied anbetrifft, so ist:

$$\frac{\partial \lg \frac{M}{u}}{\partial x_p} = \left(\frac{\partial \lg \frac{M}{u}}{\partial x_p}\right) + \left(\frac{\partial \lg \frac{M}{u}}{\partial f}\right) \frac{\partial f}{\partial x_p},$$

$$\sum_{p=1}^{p=n} X_p \frac{\partial \lg \frac{M}{u}}{\partial x_p} = \sum_{p=1}^{p=n-1} X_p \left(\frac{\partial \lg \frac{M}{u}}{\partial x_p}\right) + \frac{\partial \lg \frac{M}{u}}{\partial f} \sum_{p=1}^{p=n} X_p \frac{\partial f}{\partial x_p},$$

wovon das letzte Glied verschwindet vermöge der Gleichung:

$$\sum_{p=1}^{p=n} X_p \frac{\partial f}{\partial x_p} = 0,$$

welche das Integral definirt. Man hat also:

$$6) \qquad \sum_{p=1}^{p=n-1} X_p \left( \frac{\partial \lg \frac{M}{u}}{\partial x_p} \right) + \sum_{p=1}^{p=n-1} \left( \frac{\partial X_p}{\partial x_p} \right) = 0.$$

Da Differenziation nach $f$ nicht stattfindet, so kann man $f = \alpha$ setzen, und hat dann das reducirte System. Vergleicht man aber diese Gleichung mit Gleichung 3) des vorigen Abschnittes, so sieht man, dass dieselben völlig übereinstimmen, wenn man $M$ mit $\frac{M}{u}$ und das ursprüngliche mit dem reducirten System vertauscht.

„Ist also $M$ ein Multiplicator des ursprünglichen Systems, so ist:

$$M_1 = \frac{M}{u} = \frac{M}{\frac{\partial f}{\partial x_n}}$$

der des reducirten Systems, welches entsteht, wenn man $x_n$ eliminirt."

Natürlich muss diese Elimination auch in dem Ausdrucke von $M_1$ stattfinden, so dass $M_1$ die Constante $\alpha$ enthält.

Es sei nun ein zweites Integral

$$f_1 = \alpha_1$$

gegeben, so lässt sich dasselbe mittelst der Gleichung:

$$f = \alpha$$

immer durch Elimination von $x_n$ auf die Gestalt bringen:

$$f'(x_1, x_2 \cdots x_{n-1}, \alpha) = \alpha_1,$$

wo $f'$ eine andere Function ist. Ueberhaupt nehmen die Integrale durch successive Elimination die Gestalt an:

$$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \alpha,$$
$$f'(x_1, x_2 \cdots x_{n-1}, \alpha) = \alpha_1,$$
$$f''(x_1, x_2 \cdots x_{n-2}, \alpha, \alpha_1) = \alpha_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$f^{(p)}(x_1, x_2 \cdots x_{n-p}, \alpha, \alpha_1 \cdots \alpha_{p-1}) = \alpha_p.$$

Unter dieser Form ergeben sie sich auch offenbar, wenn man ein Integral $f'$ zunächst des reducirten Systems sucht, dasselbe durch Elimination von $x_{n-1}$ abermals reducirt, von diesem System ein Integral $f''$ sucht u. s. w.

Indem man die Systeme aber in dieser Weise fortgesetzt reducirt, erhält man auch durch Wiederholung des oben gegebenen Verfahrens die Multiplicatoren der entsprechenden Systeme, nämlich:

$$M_2 = \frac{M_1}{\frac{\partial f'}{\partial x_{n-1}}} = \frac{M}{\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f'}{\partial x_{n-1}}},$$

$$M_3 = \frac{M_2}{\frac{\partial f''}{\partial x_{n-2}}} = \frac{M}{\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f'}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial f''}{\partial x_{n-2}}}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Hat man $n-2$ Integrale des Systems, so wird dasselbe schliesslich auf eine Gleichung mit 2 Variablen reducirt, und der Multiplicator dieser Gleichung ist:

$$M_{n-2} = \frac{M}{\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f'}{\partial x_{n-1}} \frac{\partial f''}{\partial x_{n-2}} \cdots \frac{\partial f^{n-3}}{\partial x_3}},$$

Dieser Ausdruck $M_{n-2}$, der immer einer Gleichung mit 2 Variablen angehört, wird von Jakobi der letzte Multiplicator genannt. Er gehört zu einem Systeme von der Gestalt:

$$\frac{dx}{du} = \xi, \quad \frac{dx_1}{du} = \xi_1,$$

wo $\xi$, $\xi_1$ Functionen von $x$, $x_1$ und von Constanten sind, d. h. wenn man $du$ eliminirt, zu der Gleichung:

$$7) \qquad \xi_1 dx - \xi dx_1 = 0.$$

Er ist definirt durch die Gleichung:

$$8) \qquad \frac{\partial (M_{n-1} \xi)}{\partial x} + \frac{\partial (M_{n-1} \xi_1)}{\partial x_1} = 0.$$

Bestimmen wir aber den Euler'schen Multiplicator $A$ der Gleichung 7), so muss sein:

$$A \xi_1 dx - A \xi dx_1 = \partial f,$$

d. h.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = A\xi_1, \; \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -A\xi,$$

oder wenn man die erste Gleichung nach $x_1$, die zweite nach $x$ differenziirt:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial x_1} = \frac{\partial (A\xi_1)}{\partial x_1} = -\frac{\partial (A\xi)}{\partial x},$$

d. h.:

$$\frac{\partial (A\xi)}{\partial x} + \frac{\partial (A\xi_1)}{\partial x_1} = 0,$$

eine Gleichung, die offenbar den Euler'schen Multiplicator definirt. Sie stimmt aber völlig überein mit der Gleichung 8), wenn man

$$A = M_{n-1}$$

setzt.

„Der letzte Multiplicator ist also mit dem Euler'schen Multiplicator des auf eine Gleichung mit 2 Variablen reducirten Systems identisch."

Da nun die Kenntniss des Euler'schen Multiplicators die Integration der Differenzialgleichung auf Quadraturen zurückführt, und der letzte Multiplicator aus einem des ursprünglichen Systems und $n-2$ Integralen desselben ermittelt werden kann, so ergibt sich folgender Satz.

„Ist in einem System von $n-1$ Differenzialgleichungen mit $n$ Variablen ein Multiplicator, ausserdem aber $n-2$ Integrale bekannt, so wird das letzte Integral durch blosse Quadratur gefunden."

Dieser Satz verbunden mit dem oben gegebenen, dass der Quotient zweier Multiplicatoren immer ein Integral ist, gibt noch folgenden Zusatz:

„Sind $s$ Integrale und $n-1-s$ Multiplicatoren bekannt, wo $s$ jede ganz positive Zahl, auch Null sein kann, so macht die vollständige Integration nur noch eine Quadratur nöthig."

Durch Division je zweier der $n-1-s$ Multiplicatoren erhält man nämlich $n-2-s$ neue Integrale, so dass man deren jetzt $n-2$ hat, die man mit einem beliebigen Multiplicator verbindet.

13) **Bestimmung eines Multiplicators.**

Der Multiplicator eines gegebenen Systems kann unter Umständen constant sein, und dieser Fall setzt eine Bedingungsgleichung voraus, der das gegebene System genügen muss. Setzt man nämlich in die Gleichung:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial (M X_p)}{\partial x_p} = 0$$

$M$ constant, so erhält man:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial X_p}{\partial x_p} = 0.$$

Da, im Falle diese Gleichung erfüllt wird, jede Constante die bezügliche Definitionsgleichung des Multiplicators erfüllt, so kann man auch $M=1$ setzen. Es ist dann der letzte Multiplicator:

$$M_{n-2} = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial f'}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial f^{n-3}}{\partial x_3}}.$$

**Beispiel.** Jede Aufgabe, welche aus der Variationsrechnung entspringt, und ausdrückt, dass ein einfaches Integral ein Maximum oder Minimum sei, führt zu einem Systeme von Differenzialgleichungen von der Form:

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \; \frac{dq_2}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \cdots \frac{dq_n}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n},$$

$$\frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \; \frac{dp_2}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \cdots$$

$$\frac{dp_n}{dt} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_n},$$

wo $\varphi$ eine Function der mit $p$ und $q$ bezeichneten Grössen ist. Die Anzahl der Gleichungen ist also nach Elimination des Index $t$ $2n-1$. — Gleiche Form nehmen auch, wie Hamilton gezeigt hat, die mechanischen Gleichungen an, falls für die Aufgabe, die man betrachtet, das Prinzip der lebendigen Kräfte stattfindet, und dies ist an sich ersichtlich. Da aus diesem Prinzip das der kleinsten Actionen folgt, also die fraglichen Gleichungen der Mechanik als einer Minimumsaufgabe entspringend betrachtet werden können. (Vergleiche den Artikel: Variationsrechnung.)

Setzt man nun:

$$X_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}, \; X_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \cdots X_n = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n},$$

$$X_{n+1} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_1}, \; X_{n+2} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_2} \cdots$$

$$X_{2n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial q_n},$$

$$x_1 = q_1, \; x_2 = q_2 \cdots x_n = q_n, \; x_{n+1} = p_1,$$

$$x_{n+2} = p_2 \cdots x_{2n} = p_n,$$

so ergibt sich, wenn $s$ kleiner als 1, oder gleich $n$ ist:

$$\frac{\partial X_s}{\partial x_s} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_s \partial q_s},$$

$$\frac{\partial X_{n+s}}{\partial x_{n+s}} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_s \partial q_s},$$

also:

$$\frac{\partial X}{\partial x_s} + \frac{\partial X_{n+s}}{\partial x_{n+s}} = 0,$$

woraus folgt:

$$\sum_{p=1}^{p=2n} \frac{\partial X_p}{\partial x_p} = 0,$$

Der Multiplicator des in Rede stehenden Systems ist also gleich 1, d. h.:

„Hat man die Integrale einer der Mechanik oder der Variationsrechnung entsprechenden Differenzialgleichung bis auf eins ermittelt, so ist dieses letztere immer durch blosse Quadratur zu finden."

Ein Multiplicator lässt sich aber auch in einem allgemeinern Falle ermitteln, der genau dem entsprechenden Falle in der Theorie des Euler'schen Multiplicators entspricht.

Es war:

$$\sum_{p=1}^{p=n} X_p \frac{\partial \lg M}{\partial x_p} + \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial X_p}{\partial x_p} = 0,$$

und wegen des gegebenen Systems:

$$\frac{dx_1}{du} = X_1, \; \frac{dx_2}{du} = X_2 \; \cdots \; \frac{dx_n}{du} = X_n$$

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{dx_p}{dx_s} \frac{\partial \lg M}{\partial x_p} = -\frac{1}{X_s} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial X_p}{\partial x_p},$$

wo $x_s$ eine beliebige der Grössen $x_1$, $x_2 \cdots x_n$ sein kann. Betrachtet man also $x_s$ als unabhängige Variable, und bezeichnet das vollständige Differenzial von $\lg M$, nach $x_s$ genommen, wenn alle Grössen $x$ als von $x_s$ abhängig gedacht werden, mit $d \lg M$, so hat man:

$$\sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial \lg M}{\partial x_p} \frac{dx_p}{dx_s} = \frac{d \lg M}{dx_s},$$

also: $$d \lg M = -\frac{dx_s}{X_s} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial X_p}{\partial x_p}.$$

Ist also der Ausdruck

$$\frac{1}{X_s} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial X_p}{\partial x_p}$$

nur von $x_s$ abhängig, so kann man integriren, und erhält:

$$\lg M = -\int \frac{dx_s}{X_s} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial X_p}{\partial x_p},$$

oder:

$$M = e^{-\int \frac{dx_s}{X_s} \sum_{p=1}^{p=n} \frac{\partial X_p}{\partial x_p}}.$$

Es ist dies jedoch der einzige allgemeinere Fall, wo der Multiplicator von vorn herein und ohne Integration des Systems gegeben ist.

14) **Eigenschaften der Integrale.**

Sei wieder das gegebene System:

1) $$\frac{dx_1}{du} = X_1, \; \frac{dx_2}{du} \cdots \frac{dx_n}{du} = X_n,$$

wo die Grössen $X_1, X_2 \cdots X_n$ von $x_1, x_2 \cdots x_n$, nicht aber von $u$ unabhängig sind. Sei ferner:

$$f_1, f_2 \cdots f_{n-1}$$

ein System von Integralen, die von einander unabhängig sein sollen, so ist:

2) $$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} X_2 + \cdots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} X_n = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} X_2 + \cdots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} X_n = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} X_2 + \cdots + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0.$$

Diese $n-1$ Gleichungen können dazu dienen, $n-2$ der Grössen $X_1, X_2 \cdots X_n$ zu eliminiren. — Bekanntlich lässt sich diese Elimination so anstellen, dass man die erste Gleichung mit einer noch zu bestimmenden Function $\lambda_1$, die zweite mit einer andern $\lambda_2$ u. s. w., die letzte mit $\lambda_{n-1}$ multiplicirt, und die Producte

sämmtlich addirt; da $n-2$ Gleichungen zwischen den $\lambda$ willkürlich zur Bestimmung derselben verwendet werden können, so kann man setzen:

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} + \cdots + \lambda_{n-1} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} = 0,$$

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \cdots + \lambda_{n-1} \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} = 0,$$

$$\vdots$$

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_{n-2}} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_{n-2}} + \cdots + \lambda_{n-1} \frac{\partial f_{n-2}}{\partial x_{n-2}} = 0,$$

oder abgekürzt:

3) $$\Sigma \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_1} = 0, \quad \Sigma \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_2} = 0 \cdots \Sigma \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_{n-2}} = 0,$$

wo alle Summen sich auf die Werthe von $p$, von $p=1$ bis $p=n-1$ erstrecken.

Es folgt dann aus den Gleichungen 2) noch:

$$X_{n-1} \Sigma \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_{n-1}} + X_n \Sigma \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_n} = 0,$$

oder, was dasselbe ist, wenn wir unter $U$ eine neue Function verstehen:

4) $$\Sigma \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_{n-1}} = \frac{X_n}{U}, \quad \Sigma \lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial x_n} = -\frac{X_{n-1}}{U}.$$

Die Gleichungen 3) und 4) multipliciren wir nach der Reihe bezüglich mit:

$$\delta x_1,\ \delta x_2 \cdots \delta x_n,$$

wo das Zeichen $\delta$ nach der vorhin schon eingeführten Bezeichnung eine beliebige unendlich kleine Aenderung der Grössen $x_1, x_2 \cdots x_n$, die von den Relationen, welche die Gleichungen 1) ergeben, also ganz unabhängig ist, andeutet. Addirt man dann alle Producte, so erhält man mittels der Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\delta x_n = \delta f:$$

$$U \Sigma \lambda_p \delta f_p = X_n \delta x_{n-1} - X_{n-1} \delta x_n,$$

oder, wenn man

$$U\lambda_p = A_p$$

setzt:

$$X_n \delta x_{n-1} - X_{n-1} \delta x_n = A_1 \delta f_1 + A_2 \delta f_2 + \cdots + A_{n-1} \delta f_{n-1}.$$

Hätte man statt der Grössen $X_1, X_2 \cdots X_{n-2}$ $n-2$ beliebig andere eliminirt, so wäre man auf ähnliche Ausdrücke gekommen; man hat also, wenn $f_1, f_2 \cdots f_{n-1}$ Integrale sind, folgende identische Beziehung:

5) $$X_n \delta x_1 - X_1 \delta x_n = k_1 \delta f_1 + k_2 \delta f_2 + \cdots + k_{n-1} \delta f_{n-1},$$

$$X_n \delta x_2 - X_2 \delta x_n = k_1' \delta f_1 + k_2' \delta f_2 + \cdots + k'_{n-1} \delta f_{n-1},$$

$$X_n \delta x_3 - X_3 \delta x_n = k_1'' \delta f_1 + k_2'' \delta f_2 + \cdots + k''_{n-1} \delta f_{n-1},$$

$$\vdots$$

$$X_n dx_{n-1} - X_{n-1} dx_n = k_1^{(n-2)} \partial f_1 + k_2^{(n-2)} \partial f_2 + \cdots + k_{n-1}^{(n-2)} \partial f_{n-1},$$

wo die Grössen $k_1, k_2 \cdots k_1^{(n-2)} \cdots k_{n-1}^{(n-2)}$ Functionen von $x_1, x_2 \cdots x_n$ sind.

Auch diese Gleichungen können zur Definition der Integrale $f_1, f_2 \cdots f_{n-1}$ dienen. Setzt man nämlich $f_1, f_2 \cdots f_{n-1}$ gleich Constanten, so wird:

$$\partial f_1 = \partial f_2 = \cdots \partial f_{n-1} = 0,$$

also:

$$X_n dx_1 - X_1 dx_n = 0, \quad X_n dx_2 - X_2 dx_n = 0 \cdots X_n dx_{n-1} - X_{n-1} dx_n = 0.$$

Dies System aber stimmt offenbar mit dem gegebenen System 1) überein, wenn man aus letzterem $du$ eliminirt.

Die Aufgabe, ein System von Differenzialgleichungen zu integriren, wird durch die Gleichungen 5) also auf die andere Aufgabe der Transformation eines Systems von Ausdrücken, wie die auf der linken Seite in 5) befindlichen auf die rechts stehende Form reducirt.

Es ist übrigens leicht einzusehen, dass, wenn man die beiden Seiten der Gleichung 5) mit beliebigen Grössen $U_1, U_2 \cdots$ multiplicirt, man auf Ausdrücke kommt von der Gestalt:

6) $$V_1 \partial x_1 + V_2 \partial x_2 + \cdots + V_n \partial x_n = P_1 \partial f_1 + P_2 \partial f_2 + \cdots + P_{n-1} \partial f_{n-1},$$

wo die Grössen $V$ von der Form sind:

$$V_p = U_p X_n,$$

wenn $p$ kleiner als $n$ ist, und:

$$V_n = -(U_1 X_1 + U_2 X_2 + \cdots + U_{n-1} X_{n-1}).$$

Multiplicirt man aber mit den Grössen $V_1, V_2 \cdots V_n$ die Gleichungen 1) und addirt sie, so ergibt sich:

7) $$V_1 \frac{dx_1}{du} + V_2 \frac{dx_2}{du} + \cdots + V_n \frac{dx_n}{du} = 0,$$

oder:

$$V_1 dx_1 + V_2 dx_2 + \cdots + V_n dx_n = 0,$$

Diese Gleichung ist also eine Folge der Gleichungen 1), und zwar eine ganz beliebige, so lange die Grössen $V$ nicht weiter bestimmt sind. Bildet man $n$ solcher Gleichungen, die von einander unabhängig sind, so hat man ein System von Differenzialgleichungen, welches mit dem System 1) ganz identisch ist, und die Integration dieses Systems kommt also darauf hinaus, den Ausdruck links in Gleichung 6) auf die Form, welche rechts steht, zu bringen. Wie auch also die Form der gegebenen Differenzialgleichungen sei, immer lassen sich mit Hülfe der Integrale Ausdrücke bilden, welche aus $n-1$ Gliedern, ganz ähnlich wie in den Gleichungen 5) bestehen, und die Aufgabe, ein System von $n-1$ Gleichungen von der Form 7) zu integriren, ist wesentlich identisch mit der Bildung von $n-1$ Gleichungen von der Form 6), d. h. mit der Transformation von $n$ Systemen von $n$ Gliedern $V_1 \partial x_1, V_2 \partial x_2 \cdots V_n \partial x_n$ auf $n-1$ $P_1 \partial f_1, P_2 \partial f_2 \cdots P_{n-1} \partial f_{n-1}$.

Die Integralgleichungen lassen sich aber auch, wie wir gesehen haben, unter noch einer andern Form ausdrücken.

8) $$f(x_1, x_2 \cdots x_n) = \alpha,$$

$$f'(x_2, x_3 \cdots x_n, \alpha) = \alpha_1,$$

$$f''(x_3, x_4 \cdots x_n, \alpha, \alpha_1) = \alpha_2$$

$$\vdots$$

$$f^{(n-2)}(x_{n-1}, x_n, \alpha, \alpha_1 \cdots \alpha_{n-3}) = \alpha_{n-2},$$

welche entstehen, wenn man successive aus 2 der Integralgleichungen $x_1, x_2 \cdots x_{n-2}$ eliminirt, oder wenn man durch successives Einsetzen der nach einander

gefundenen Integrale das gegebene System reducirt.

Wir nennen den Ausdruck links in der ersten Gleichung, welche nur eine Constante aber $n$ Variablen enthält, jetzt erstes Integral, den in der zweiten mit 2 Constanten und $n-1$ Variablen zweites Integral u. s. w. Die vorhin betrachtete Art der Integrale besteht also aus $n-1$ ersten Integralen.

Kennt man nur ein $n-1$tes Integral, also eine Gleichung, welche $n-1$ Constanten und eine Variable enthält, so ist nichts desto weniger die Aufgabe gelöst. Es lassen sich nämlich augenblicklich noch $n-2$ andere Integrale bilden, welche keine neuen Constanten enthält. Sei nämlich:

$$\varphi(x_1, x_2, \alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_{n-3}) = \alpha_{n-2}$$

das gegebene Integral. (Offenbar kommt es auf die Auswahl der Variablen $x_1$, $x_2$ unter den $n$ gegebenen $x_1, x_2 \ldots x_n$ nicht an.

Man muss dann die Gleichung

$$\varphi = \alpha_{n-2}$$

nach $u$ differenziiren, statt der Grössen $\frac{dx_1}{du}$, $\frac{dx_2}{du}$ aber deren Werthe, die sich aus den Gleichungen 1) ergeben, einsetzen, und man hat eine zweite Gleichung, die wir mit

$$\psi = 0$$

bezeichnen wollen.

Differenziirt man auch diese nach $u$ und ersetzt die darin vorkommenden Differenzialquotienten $\frac{dx_1}{du}$, $\frac{dx_2}{du}$ .... $\frac{dx_n}{du}$ durch ihre Werthe, so ergibt sich eine dritte u. s. w., so dass man auf dieselbe Weise durch fortgesetztes Differenziiren $n-1$ erhalten kann. Aus denselben kann man dann immer $n-2$ Constanten eliminiren und sich so Integrale von der Form

$$f_1 = \alpha_1,\ f_2 = \alpha_2 \ldots$$

bilden.

Selbstverständlich lässt sich auch das System 8) auf die Form bringen:

$$9) \quad \varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, \alpha) = 0,$$
$$\varphi'(x_2, x_3 \ldots x_n, \alpha, \alpha_1) = 0,$$
$$\varphi''(x_3, x_4 \ldots x_n, \alpha, \alpha_1, \alpha_2) = 0,$$
$$\vdots$$
$$\varphi^{(n-2)}(x_{n-1}, x_n, \alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}) = 0.$$

Die Ausdrücke in 8) geben ähnliche Beziehungen, wie die in den Gleichungen 5) enthaltenen. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_{n-1}} X_{n-1} + \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_n} X_n = 0.$$

Diese Gleichung findet identisch statt, wenn man nach dem Differenziiren die Constanten $\alpha$, $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-3}$ durch ihre aus den übrigen Integralen gezogenen Werthe ersetzt.

Man kann die eben gefundene Gleichung auch schreiben:

$$\frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_{n-1}} = \frac{X_n}{U},\quad \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_n} = -\frac{X_{n-1}}{U},$$

wo $U$ eine neue Unbekannte ist; also wenn man beide Gleichungen bezüglich mit $\partial x_{n-1}$ und $\partial x_n$ multiplicirt und addirt:

$$X_n \partial x_{n-1} - X_{n-1} \partial x_n = U \partial f^{(n-2)}.$$

Nimmt man jetzt die beiden Gleichungen:

$$\frac{\partial f^{(n-3)}}{\partial x_{n-2}} X_{n-2} + \frac{\partial f^{(n-3)}}{\partial x_{n-1}} X_{n-1} + \frac{\partial f^{(n-3)}}{\partial x_n} X_n = 0,$$

$$\frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_{n-1}} X_{n-1} + \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_n} X_n = 0,$$

multiplicirt die erste mit $\lambda$, die zweite mit $\mu$, und addirt, indem man setzt:

$$0 = \lambda \frac{\partial f^{(n-3)}}{\partial x_{n-1}} + \mu \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_{n-1}},$$

welche Gleichung zur Bestimmung von $\mu$ dienen soll, so hat man:

$$0 = \lambda \frac{\partial f^{(n-3)}}{\partial x_{n-2}} X_{n-2} + \left(\lambda \frac{\partial f^{(n-3)}}{\partial x_n} + \mu \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_n}\right) X_n,$$

oder:

$$\lambda \frac{\partial f^{(n-3)}}{\partial x_{n-2}} = \frac{X_n}{V}, \quad \lambda \frac{\partial f^{(n-3)}}{\partial x_n} + \mu \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_n} = -\frac{X_{n-2}}{V};$$

indem man diese Gleichungen bezüglich mit $\partial x_{n-2}$ und $\partial x_n$ multiplicirt, und zu der mit $\partial x_{n-1}$ multiplicirten Gleichung

$$0 = \lambda \frac{\partial f^{(n-3)}}{\partial x_{n-1}} + \mu \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_{n-1}}$$

addirt, erhält man:

$$X_n \partial x_{n-2} - X_{n-2} \partial x_n = U_1 \partial f^{(n-3)} + U_2 \partial f^{(n-2)},$$

und indem man in dieser Weise fortfährt, ergibt sich ein den Gleichungen 5) ähnliches System, in welchem jedoch die Gleichungen einfacher sind. Nämlich:

$$\begin{aligned}
10) \quad X_n \partial x_1 - X_1 \partial x_n &= a\partial f + a_1 \partial f^{(1)} + a_2 \partial f^{(2)} + \ldots + a_{n-2} \partial f^{(n-2)} \\
X_n \partial x_2 - X_2 \partial x_n &= \qquad a_1' \partial f^{(1)} + a_2' \partial f^{(2)} + \ldots + a'_{n-2} \partial f^{(n-2)} \\
X_n \partial x_3 - X_3 \partial x_n &= \qquad\qquad a_2'' \partial f^{(2)} + \ldots + a''_{n-2} \partial f^{(n-2)} \\
&\vdots \\
X_n \partial x_{n-1} - X_{n-1} \partial x_n &= \qquad\qquad\qquad a_{n-2}^{(n-2)} \partial f^{(n-2)}.
\end{aligned}$$

Es ist hier $f$ ein erstes Integral, $f'$ ein zweites u. s. w.

Das erste Integral $f$ kommt also hier nur bei der Transformation des ersten Ausdruckes vor.

Auch diese Gleichungen dienen zur Definition des ersten, zweiten u. s. w. $n-1$ ten Integrals.

Gibt man in irgend einem Integral den Constanten irgend welche Zahlenwerthe, so hat man ein partikuläres Integral. Es gibt aber wie in den Gleichungen mit einer abhängigen Variablen auch singuläre Integrale.

Setzt man nämlich die Functionen $f, f^{(1)} \ldots f^{(n-2)}$ Constanten gleich, so verschwinden die Ausdrücke rechts, und man erhält:

$$X_n dx_1 - X_1 dx_n = 0, \quad X_n dx_2 - X_2 dx_n = 0 \; \ldots,$$

Gleichungen, welche mit den gegebenen 1) identisch sind. Dasselbe tritt aber auch ein, wenn man das 2 te, 3 te . . . $n-1$ te Integral gleich Constanten setzt, damit aber statt der Gleichung $f = \alpha$ die andere $a = 0$ verbindet.

Die Gleichung

$$a = 0$$

stellt also ein singuläres erstes Integral dar, wenn dieselbe keine Folge der Gleichung $f = \alpha$ in Verbindung mit den übrigen Integralgleichungen ist.

Für $a$ aber lässt sich leicht der Werth ermitteln. Da nämlich $f^{(1)}, f^{(2)} \ldots .$

$f^{(n-2)}$ die Grösse $x_1$ nicht enthalten, so ist, wenn man $x_1$ differenziirt:

$$X_n = a \frac{\partial f}{\partial x_1}, \text{ also } a = \frac{X_n}{\frac{\partial f}{\partial x_1}};$$

es muss also, da $X_n$ nicht gleich Null sein kann:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \infty$$

sein, und diese Gleichung definirt das singuläre Integral. Es ist also gegeben, wenn ein erstes allgemeines Integral $f$ bekannt ist.

Sei aber das erste Integral unter der Form gegeben:

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, \alpha) = 0,$$

so ist die Gleichung

$$\alpha = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

eine Folge derselben, und denkt man sich in $\varphi$ für $\alpha$ diesen Werth eingesetzt, so wird die erste Gleichung identisch. Man hat also, wenn man nach $x_1$ differenziirt, unter dieser Voraussetzung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}},$$

und im Falle des singulären Integrals, wo also $\frac{\partial f}{\partial x_p} = \infty$ ist:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = 0, \quad \text{oder} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_p} = \infty.$$

Eliminirt man aus einer dieser beiden Gleichungen und aus $\varphi = 0$ die Constante $\alpha$, so hat man also singuläre Integrale, falls man nicht auf particuläre Integrale hierbei gelangt.

Die Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \infty$$

rührt von der hier gewählten Form der Differenzialgleichungen her, wonach allein

$$X_n \partial x_1 - X_1 \partial x_n$$

derart transformirt wurde, dass alle Integrale rechts erschienen. Bei anderer Auswahl würde man auf Gleichungen, wie:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \infty, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} = \infty \ldots,$$

kommen.

Es gibt aber auch singuläre Integrale höherer Ordnung. Ist ein erstes Integral $f = \alpha$ nämlich bekannt, so kann man mit dessen Hülfe eine der Variablen $x_1$ eliminiren. Von den Gleichungen 10) fällt dann die erste weg, und die übrigen werden erfüllt, wenn man $f', f'' \ldots f^{(n-2)}$ alle gleich Constanten setzt, oder wenn man nur $f'', f''' \ldots f^{(n-2)}$ gleich Constanten, und ausserdem

$$\alpha_1' = 0$$

setzt. Die letztere Gleichung vertritt also das zweite allgemeine Integral, und ist daher als singuläres Integral zweiter Ordnung zu betrachten. Nimmt man

$$f = \alpha, \quad f' = \alpha_1$$

an, so fallen die beiden ersten Gleichungen fort, und man sieht, dass

$$\alpha_2'' = 0$$

ein singuläres drittes Integral u. s. w. $\alpha_{n-2}^{(n-2)}$ ein solches $n$ter Ordnung ist. — Hat man die entsprechenden vollständigen Integrale, so lassen sich leicht die singulären daraus ableiten. Offenbar ist nämlich:

$$\alpha_1' = \frac{X_n}{\frac{\partial f'}{\partial x_2}}, \quad \alpha_2'' = \frac{X_n}{\frac{\partial f''}{\partial x_3}} \ldots,$$

also:

$$\frac{\partial f'}{\partial x_2} = \infty, \quad \frac{\partial f''}{\partial x_3} = \infty \ldots \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_{n-1}} = \infty,$$

die entsprechenden Gleichungen.

Ist die entsprechende Gleichung nicht unter der Form

$$f^{(p)}(x_{p+1}, x_{p+2} \ldots x_n, \alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_{p-1}) = \alpha_p,$$

sondern unter der allgemeinern:

$$\varphi(x_{p+1}, x_{p+2} \ldots x_n, \alpha, \alpha_1 \ldots \alpha_p) = 0$$

gegeben, so hat man, wenn man für $\alpha_p$ den Werth $f^{(p)}$ gesetzt denkt, eine identische Gleichung, und folglich, wenn man nach $x_{p+1}$ differenziirt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_{p+1}}+\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_p}\frac{\partial\alpha_p}{\partial x_{p+1}}=0,$$

also:

$$\frac{\partial\alpha_p}{\partial x_{p+1}}=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_{p+1}}}{\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_p}}.$$

Da also im Falle des singulären Integrals

$$\frac{\partial\alpha_p}{\partial x_{p+1}}=\frac{\partial f^{(p)}}{\partial x_{p+1}}=\infty$$

sein soll, so ist entweder:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_p}=0,\quad\text{oder}\quad\frac{\partial\varphi}{\partial x_{p+1}}=\infty$$

zu setzen. Aus einer dieser Gleichungen und aus

$$\varphi=0$$

aber wird dann $\alpha_p$ eliminirt. — Diese Regel gilt für die singulären Integrale aller Ordnungen. Wären $p$ vollständige Integrale durch $p$ Gleichungen von der Form:

$$\psi(x_1,\ x_2\ \dots\ x_n,\ \alpha,\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_{p-1})=0,$$

welche die allgemeinste Relation ist, gegeben, so würden sich leicht die Ausdrücke von combinatorischer Form für die singulären Integrale ableiten lassen.

Man kann aber den letzteren auch eine Form geben, die für alle gemeinschaftlich ist.

Es ist nämlich offenbar:

$$\frac{1}{a_{n-2}{}^{(n-2)}}(X_n\,\partial x_{n-1}-X_{n-1}\,\partial x_n)=\partial f^{(n-2)},$$

und folglich ist die Grösse $\frac{1}{a_{n-2}{}^{(n-2)}}$ der Euler'sche oder letzte Multiplicator.

Man hat aber:

$$a_{n-2}{}^{(n-2)}=\frac{X_n}{\frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_{n-1}}},$$

wie man erhält, wenn man das Differenzial nach $x_{n-1}$ nimmt. Es ist ferner:

$$a_{n-3}{}^{(n-3)}=\frac{X_n}{\frac{\partial f^{(n-3)}}{\partial x_{n-2}}},\quad a_{n-4}{}^{(n-4)}=\frac{X_n}{\frac{\partial f^{(n-4)}}{\partial x_{n-3}}},$$

$$a_2{}^{(2)}=\frac{X_n}{\frac{\partial f^{(2)}}{\partial x_3}},\quad a_1{}^{(1)}=\frac{X_n}{\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_2}},\quad a=\frac{X_n}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}.$$

Ist aber $M$ der Multiplicator des gegebenen Systems, und $N$ der letzte Multiplicator, so war:

$$N=\frac{M}{\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f^{(n-3)}}{\partial x_{n-2}}}$$

also

$$M=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial f^{(n-3)}}{\partial x_{n-2}}N,$$

und, da:

$$N = \frac{1}{a_{n-2}^{(n-2)}} = \frac{\frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_{n-1}}}{X_n}$$

war:

$$M = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_{n-1}}}{X_n}.$$

Wenn man aber die Werthe von $a_{n-2}^{(n-2)}, a_{n-3}^{(n-3)} \ldots a$ mit einander multiplicirt, ergibt sich:

$$a\; a_1^{(1)}\; a_2^{(2)} \ldots a_{n-2}^{(n-2)} = \frac{(X_n)^{n-1}}{\frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial f^{(n-2)}}{\partial x_{n-2}}},$$

eine Gleichung, aus der sich folgende Relation zwischen den Coefficienten $a$ und dem Multiplicator ergibt, und die eine Definition des letztern enthält:

$$M = \frac{(X_n)^{n-2}}{a,\; a_1^{(1)},\; a_2^{(2)} \ldots a_{n-2}^{(n-2)}}.$$

Da die Gleichung:

$$a = 0, \quad a_1^{(1)} = 0, \quad a_2^{(2)} = 0 \ldots$$

die singulären Integrale der verschiedenen Ordnungen ergeben und die linken Seiten dieser Gleichungen im Nenner des Multiplicators als Factoren erscheinen, so ergibt sich hieraus auch:

„Die singulären Integrale aller Ordnungen werden gefunden, wenn man den Multiplicator gleich unendlich setzt."

15) Anwendung auf eine Gleichung höherer Ordnung mit 2 Variablen.

Die Gleichung $n$ter Ordnung mit 2 Variablen hat die Gestalt:

1) $$F\left(x,\; x_1,\; \frac{dx_1}{dx},\; \frac{d^2x_1}{dx^2} \ldots \frac{d^nx_1}{dx^n}\right) = 0,$$

oder wenn man $\frac{d^nx_1}{dx^n}$ hieraus entwickelt:

2) $$\frac{d^nx_1}{dx_n} = \varphi\left(x,\; x_1,\; \frac{dx_1}{dx},\; \frac{d^2x_1}{dx^2} \ldots \frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right),$$

für welche man nach dem Obigen auch das System von $n$ Gleichungen nehmen kann:

3) $$\frac{dx_1}{dx} = x_2,\; \frac{dx_2}{dx} = x_3 \ldots \frac{dx_{n-1}}{dx} = x_n,\; \frac{dx_n}{dx} = \varphi(x_1,\; x_2 \ldots x_n),$$

oder, wenn man die Gleichung:

$$\frac{dx}{du} = \psi(x,\; x_1,\; x_2 \ldots x_n)$$

hinzufügt, worin $\psi$ eine ganz beliebige Function ist, welche zur Bestimmung von $u$ dient, also z. B. $\frac{dx}{du} = 1$ setzt:

$$4)\qquad \frac{dx}{du}=1,\ \frac{dx_1}{du}=x_2,\ \frac{dx_2}{du}=x_3\ \ldots\ \frac{dx_{n-1}}{du}=x_n,\ \frac{dx_n}{du}=q.$$

Dies System von $n$ oder $n+1$ Gleichungen, je nachdem man $u$ vorhanden oder eliminirt denkt, ist ganz nach den obigen Regeln zu behandeln. Hat man ein erstes Integral von der Form:

$$5)\qquad f(x,\ x_1,\ x_2\ \ldots\ x_n)=\alpha,$$

so geben die Gleichungen 3) ohne Weiteres:

$$6)\qquad f\left(x,\ x_1,\ \frac{dx_1}{dx},\ \frac{d^2x_1}{dx^2}\ldots\frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}\right)=\alpha,$$

d. h. eine Gleichung, die ganz ähnlich der gegebenen Gleichung 1) ist, nur um eine Ordnung niedriger, und die Constante $\alpha$ enthält. Die Gleichung 6) kann also wie 1) behandelt werden. Findet man ein Integral von ihr, so hat man ein zweites Integral der Gleichung 1), welches 2 Constanten enthält und eine Differenzialgleichung $n-2$ter Ordnung vorstellt. Durch successives Auffinden der Integrale kommt man auf das $n-1$ter Ordnung, von der Gestalt:

$$7)\qquad \varphi(x,\ x_1,\ \alpha,\ \alpha_1\ \ldots\ \alpha_{n-2})=\alpha_{n-1},$$

also eine Gleichung zwischen den beiden Variablen $x$, $x_1$, welche n Constanten enthält. Mit dem Auffinden dieser Gleichung ist die Aufgabe gelöst, da man eine Relation zwischen $x$ und $x_1$ hat. Dieser Ausdruck heisst daher auch allgemeines Integral der Gleichung $n$ter Ordnung. Es enthält $n$ Constanten. Jede Gleichung $n$ter Ordnung mit 2 Variablen hat also nur ein allgemeines Integral, da sich nur eine Gleichung wie 7) aus einem System von $n$ Integralen erster Ordnung ergibt, dagegen 2 Integrale $n-1$ter Ordnung, 3 $n-2$ter . . . $n$ Integrale erster Ordnung.

Hat man ein Integral $p$ter Ordnung, so ergibt sich durch Differenziiren desselben nach $u$, und indem man für die Differenzialquotienten die aus den Gleichungen 4) gezogenen Werthe setzt, sogleich ein Integral $p-1$ter Ordnung, eins $p-2$ter Ordnung u. s. f., so dass die Kenntniss eines Integrals schon alle von niederer Ordnung ergibt.

Um den Multiplicator des Systems 3) oder 4) zu finden, hat man die Gleichung:

$$\sum_{p=0}^{p=n}\frac{\partial(MX_p)}{\partial x_p}=0,$$

(wegen $\frac{dx}{du}=1$ ist nämlich hier mit $x_0=x$ zu beginnen), wo zu setzen ist: $X_0=1,\ X_1=x_2,\ X_2=x_3\ \ldots\ X_{n-1}=x_n,\ X_n=\varphi(x,\ x_1\ \ldots\ x_n)$. Die Gleichung verwandelt sich deshalb in:

$$\frac{\partial M}{\partial x}+x_2\frac{\partial M}{\partial x_1}+x_3\frac{\partial M}{\partial x_2}+\ \ldots\ +x_n\frac{\partial M}{\partial x_{n-1}}+\varphi\frac{\partial M}{\partial x_n}+M\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0.$$

Die Gleichung zur Bestimmung des Multiplicators (vergleiche Abschnitt 12) war:

$$M=e^{-\int\frac{dx_s}{X_s}\sum_{p=0}^{p=n}\frac{\partial X_p}{\partial x_p}},$$

aber:

$$\sum\frac{\partial X_p}{\partial x_p}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_n},$$

also:

$$M=e^{-\int dx\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}},$$

wenn man $s=0$ setzt; und die Möglichkeit, den Multiplicator zu bestimmen, setzt also voraus, dass der Ausdruck $\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$ nur eine Variable $x$ enthalte.

Es muss sonach sein:

$$\frac{\partial q}{\partial x_n} = \psi(x),$$

d. h.:

$$q = x_n \psi(x) + \chi(x, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}),$$

wo $\chi$ und $\psi$ beliebige Functionen sind.

Der Multiplicator lässt sich also immer bestimmen bei einer Differenzialgleichung $n$ter Ordnung von der Gestalt:

$$\frac{d^n x_1}{dx^n} = \psi(x) \frac{d^{n-1} x_1}{dx^{n-1}} + \chi\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \frac{d^2 x_1}{dx^2} \ldots \frac{d^{n-2} x_1}{dx^{n-2}}\right).$$

Also hat man von dieser Gleichung $n-1$ Integrale erster Ordnung, oder was dasselbe ist, ein Integral $n-1$ter Ordnung, so führt die Bestimmung des Integrals $n$ter Ordnung, also des allgemeineren Integrals, nur auf Quadraturen zurück.

16) Lineare Differenzialgleichungen.

Ein System linearer Differenzialgleichungen hat folgende Gestalt:

1)
$$\frac{dx_1}{dx} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n + A_{n+1},$$

$$\frac{dx_2}{dx} = A_1' x_1 + A_2' x_2 + \ldots + A_n' x_n + A'_{n+1},$$

$$\frac{dx_3}{dx} = A_1'' x_1 + A_2'' x_2 + \ldots + A_n'' x_n + A''_{n+1},$$

$$\vdots$$

$$\frac{dx_n}{dx} = A_1^{(n-1)} x_1 + A_2^{(n-1)} x_2 + \ldots + A_n^{(n-1)} x_n + A_{n+1}^{(n-1)},$$

wo die Grössen $A_1, A_1' \ldots A_1 \ldots A_{n+1}^{(n-1)}$ sämmtlich Functionen von $x$ allein sind.

Um dies System auf die einmal von uns angenommene Form zu bringen, verbinden wir damit die Gleichung:

$$\frac{dx}{du} = 1,$$

und schreiben in sämmtlichen Nennern den sich hieraus ergebenden Ausdruck $du$ statt $dx$.

Offenbar hat man nun, wenn man dem Ausdruck $X_p$ wieder die oben eingeführte Bedeutung giebt:

$$X = 1, \quad X_p = A_1^{(p-1)} x_1 + A_2^{(p-1)} x_2 \ldots + A_n^{(p-1)} x_n + A_{n+1}^{(p-1)},$$

wenn $p$ grösser als Null ist, also:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial X_p}{\partial x_p} = A_p^{(p-1)},$$

also:

$$M = e^{-\int dx \sum_{p=1}^{p=n} A_p^{(p-1)}},$$

und der Exponent enthält in der That nur die Veränderliche $x$.

Man hat also auch hier den Satz:

„Dass man in jedem System von $n$ linearen Differenzialgleichungen nur $n-1$ Integrale zu bestimmen braucht, da das letzte durch blosse Quadratur gefunden werden kann.“

Die Integration der linearen Differenzialgleichungen gewährt aber noch andere Vortheile, von denen der wichtigste der ist, dass die Kenntniss einer Anzahl von particulären Integralen auf die des allgemeinen Integrals führt. Um dies zu zeigen, nehmen wir zunächst an, dass die von $x_1, x_2 \ldots x_n$ freien Glieder $A_{n+1}, A'_{n+1} \ldots A_{n+1}^{(n-1)}$ sämmtlich gleich Null seien. Man hat dann zu integriren das System:

2)
$$\frac{dx_1}{dx}=A_1\,x_1+A_2\,x_2+\;\dots\;+A_n\,x_n,$$
$$\frac{dx_2}{dx}=A_1'\,x_1+A_2'\,x_2\;\dots\;+A_n'\,x_n,$$
$$\frac{dx_n}{dx}=A_1^{(n-1)}\,x_1+A_2^{(n-1)}\,x_2+\;\dots\;+A_n^{(n-1)}x_n.$$

Nehmen wir nun an, es sei ein particuläres Integral von der Form

$$\varphi(x,x_1)=0 \quad \text{oder} \quad x_1=f_1(x)$$

also ein particuläres Integral $n$ter Ordnung gegeben, so erhält man durch Differenziiren desselben:

$$\frac{dx_1}{dx}=f_1'(x),$$

also mittels der ersten Gleichung des Systems 2) ein anderes Integral; dies ist jedoch erster Ordnung.

Durch fortgesetztes Differenziiren und Benutzung der übrigen Gleichungen des Systems 2) kann man dann im Allgemeinen $n$ particuläre Integrale gewinnen, vorausgesetzt, dass keine der entstehenden Gleichungen identisch wird, wie dies in Ausnahmefällen stattfinden kann. Ist dies jedoch nicht der Fall, so kann man diese Gleichungen auf die Form bringen:

$$x_1=f_1(x),\; x_2=f_2(x),\; x_3=f_3(x)\;\dots\; x_n=f_n(x).$$

Dies ist ein System particulärer Integrale. Setzen wir voraus, es sei ein zweites gegeben:

$$x_1=f_1'(x),\; x_2=f_2'(x),\; x_3=f_3'(x)\;\dots\; x_n=f_n'(x),$$

so lässt sich leicht zeigen, dass auch die Ausdrücke:

$$x_1=\alpha f_1(x)+\beta f_1'(x),\; x_2=\alpha f_2(x)+\beta f_2'(x)\;\dots\; x_n=\alpha f_n(x)+\beta f_n'(x)$$

den vorgelegten Differenzialgleichungen genügen, also Integralgleichungen sind, wo unter $\alpha$ und $\beta$ willkürliche Constanten verstanden werden. Es ist nämlich, wenn man das erste System in die Gleichungen 2) einsetzt:

$$\frac{df_1}{dx}=A_1 f_1+A_2 f_2+\;\dots\;+A_n f_n,$$
$$\frac{df_2}{dx}=A_1' f_1+A_2' f_2+\;\dots\;+A_n f_n,$$

u. s. w.

und wenn man das zweite System einsetzt:

$$\frac{df_1'}{dx}=A_1 f_1'+A_2 f_2'\;\dots\;+A_n f_n',$$
$$\frac{df_2'}{dx}=A_1' f_1'+A_2' f_2'\;\dots\;+A_n' f_n',$$

u. s. w.

Multiplicirt man sämmtliche Gleichungen des ersten Systems mit $\alpha$ und die des zweiten mit $\beta$, und addirt, so erhält man also:

$$\frac{d(\alpha f_1+\beta f_1')}{dx}=A_1(\alpha f_1+\beta f_1')+A_2(\alpha f_2+\beta f_2')+\;\dots\;+A_n(\alpha f_n+\beta f_n'),$$
$$\frac{d(\alpha f_2+\beta f_2')}{dx}=A_1'(\alpha f_1+\beta f_1')+A_2'(\alpha f_2+\beta f_2')+\;\dots\;+A_n'(\alpha f_n+\beta f_n'),$$

u. s. w.

Dies letzte System stimmt aber mit den Gleichungen 2) völlig überein, wenn man setzt:

$$x_1=\alpha f_1+\beta f_1',\; x_2=\alpha f_2+\beta f_2'\;\dots,$$

so dass diese Werthe in der That dem System 2) genügen, also als Integrale zu betrachten sind.

Durch Wiederholung dieser Schlüsse gelangt man zu folgendem Satze: „Hat man $n$ particuläre Integrale von der Form:

$$x_1=f_1(x),\ x_1=f_1'(x),\ x_1=f_1''(x)\ \ldots\ x_1=f_1^{(n-1)}(x)$$

und bildet man aus diesen durch successives Differenziiren die entsprechenden Ausdrücke:

$$x_2=f_2(x),\ x_2=f_2'(x),\ x_2=f_2''(x)\ \ldots\ x_2=f_n^{(n-1)}(x),$$

$$x_3=f_3(x),\ x_3=f_3'(x),\ x_3=f_3''(x)\ \ldots\ x_3=f_n^{(n-1)}(x),$$

$$\vdots$$

$$x_n=f_n(x),\ x_n=f_n'(x),\ x_n=f_n''(x)\ \ldots\ x_n=f_n^{(n-1)}(x),$$

so sind die allgemeinen Integralgleichungen:

$$x_1=\alpha f_1(x)+\beta f_1'(x)+\gamma f_1''(x)+\ldots+\vartheta f_1^{(n-1)}(x),$$

$$x_2=\alpha f_2(x)+\beta f_2'(x)+\gamma f_2''(x)+\ldots+\vartheta f_2^{(n-1)}(x),$$

$$\vdots$$

$$x_n=\alpha f_n(x)+\beta f_n'(x)+\gamma f_n''(x)+\ldots+\vartheta f_n^{(n-1)}(x).$$

Diese Gleichungen sind in der That die allgemeinsten, da sie $n$ Constanten, $\alpha, \beta \ldots \vartheta$ enthalten.

Es reichen also $n$ particuläre Integrale, von denen jedes 2 Variable aber keine Constanten enthält, aus, um das System vollständig zu integriren.

17) Variation der Constanten.

Betrachten wir jetzt den Fall, wo die von $x_1, x_2 \ldots x_n$ freien Glieder $A_{n+1}, A'_{n+1} \ldots A_{n+1}^{(n-1)}$ in den Gleichungen I) nicht sämmtlich Null sind, so lassen sich die allgemeinen Integrale der Gleichung 1) des vorigen Abschnitts immer schon dann durch Quadraturen herstellen, wenn man $n$ particuläre Integrale der Gleichungen 2) hat, in welchen also die letzten Glieder Null sind.

Denn seien diese Integrale, bezüglich die aus ihnen und den Gleichungen 2) gebildeten Werthe für $x_1, x_2 \ldots x_n$ wieder:

$$x_1=f_1(x),\ x_1=f_1'(x),\ x_1=f_1''(x)\ \ldots\ x_1=f_1^{(n-1)}(x),$$

$$x_2=f_2(x),\ x_2=f_2'(x),\ x_2=f_2''(x)\ \ldots\ x_2=f_2^{(n-1)}(x),$$

$$\vdots$$

$$x_n=f_n(x),\ x_n=f_n'(x),\ x_n=f_n''(x)\ \ldots\ x_n=f_n^{(n-1)}(x).$$

Setzt man nun, um die allgemeinen Werthe der Integrale von den Gleichungen 1) zu ermitteln:

3)
$$x_1=\alpha_1 f_1(x)+\alpha_2 f_1'(x)+\alpha_3 f_1''(x)+\ldots+\alpha_n f_1^{(n-1)}(x),$$

$$x_2=\alpha_1 f_2(x)+\alpha_2 f_2'(x)+\alpha_3 f_2''(x)+\ldots+\alpha_n f_2^{(n-1)}(x)$$

$$\vdots$$

$$x_n=\alpha_1 f_n(x)+\alpha_2 f_n'(x)+\alpha_3 f_n''(x)+\ldots+\alpha_n f_n^{(n-1)}(x),$$

wo indess die Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ keine Constanten, sondern Functionen von $x$ sein sollen. Es ist zu untersuchen, ob und unter welchen Bedingungen diese Werthe von $x_1, x_2 \ldots x_n$ die Gleichungen 1) erfüllen können. Differenziirt man die erste der Gleichungen 3), so kommt:

$$\frac{dx_1}{dx}=\alpha_1\frac{df_1(x)}{dx}+\alpha_2\frac{df_1'(x)}{dx}+\ldots+\alpha_n\frac{df_1^{(n-1)}(x)}{dx}+f_1(x)\frac{d\alpha_1}{dx}+f_1'(x)\frac{d\alpha_2}{dx}$$
$$+\ldots+f_1^{(n-1)}(x)\frac{d\alpha_n}{dx},$$

und dies muss wegen der ersten der Gleichungen 1) sein gleich:

$$A_1x_1+A_2x_2+\ldots+A_nx_n+A_{n+1},$$

welcher Ausdruck wegen der Gleichungen 3) zu setzen ist gleich:

$$\alpha_1[A_1f_1(x)+A_2f_2(x)+\ldots+A_nf_n(x)]$$
$$+\alpha_2[A_1f_1'(x)+A_2f_2'(x)+\ldots+A_nf_n'(x)]$$
$$\vdots$$
$$+\alpha_n[A_1f_1^{(n-1)}(x)+A_2f_2^{(n-1)}(x)+\ldots+A_nf_n^{(n-1)}(x)]+A_{n-1}.$$

Da aber die Ausdrücke:

$$x_1=f_1(x),\ x_1=f_1'(x)\ \ldots\ x_1=f^{(n-1)}(x)$$

particuläre Integrale der Gleichungen 2) sind, so müssen sie für $x_1$ in die Gleichungen 2) gesetzt, dieselben befriedigen, und man erhält:

$$\frac{df_1(x)}{dx}=A_1f_1(x)+A_2f_2(x)+\ldots+A_nf_n(x),$$
$$\frac{df_1(x)}{dx}=A_1f_1'(x)+A_2f_2'(x)+\ldots+A_nf_n'(x)$$
$$\vdots$$
$$\frac{df_1^{(n-1)}(x)}{dx}=A_1f_1^{(n-1)}(x)+A_2f_2^{(n-1)}(x)+\ldots+A_nf_n^{(n-1)}(x),$$

so dass man hat:

$$f_1(x)\frac{d\alpha_1}{dx}+f_1'(x)\frac{d\alpha_2}{dx}+\ldots+f_1^{(n-1)}(x)\frac{d\alpha_n}{dx}=A_{n+1}.$$

In gleicher Weise behandelt man die übrigen Gleichungen 3) und zieht aus ihnen folgendes System von Gleichungen:

4)
$$f_1(x)\frac{d\alpha_1}{dx}+f_1'(x)\frac{d\alpha_2}{dx}+\ldots+f_1^{(n-1)}(x)\frac{d\alpha_n}{dx}=A_{n+1},$$
$$f_2(x)\frac{d\alpha_1}{dx}+f_2'(x)\frac{d\alpha_2}{dx}+\ldots+f_2^{(n-1)}(x)\frac{d\alpha_n}{dx}=A'_{n+1}$$
$$\vdots$$
$$f_n(x)\frac{d\alpha_1}{dx}+f_n'(x)\frac{d\alpha_2}{dx}+\ldots+f_n^{(n-1)}(x)\frac{d\alpha_n}{dx}=A_{n+1}^{(n-1)}.$$

Lassen sich diese Gleichungen erfüllen, so ist also das System 1) integrirt.

Diese Gleichungen 4) sind aber in Bezug auf die Differenzialquotienten $\frac{d\alpha_1}{dx}$, $\frac{d\alpha_2}{dx}$ . . . linear, man erhält also aus ihnen, wenn man sie nach diesen Grössen auflöst:

5) $$\frac{d\alpha_1}{dx} = B_1 A_{n+1} + B_2 A'_{n+1} + \ldots + B_n A_{n+1}^{(n-1)},$$
$$\frac{d\alpha_2}{dx} = B_1' A_{n+1} + B_2' A'_{n+1} + \ldots + B_n' A_{n+1}^{(n-1)}$$
$$\vdots$$
$$\frac{d\alpha_n}{dx} = B_1^{(n-1)} A_{n+1} + B_2^{(n-1)} A'_{n+1} + \ldots + B_n^{(n-1)} A_{n+1}^{(n-1)},$$

wo die Grössen

$$B_1, B_2 \ldots B_n, B_1' \ldots B_n^{(n-1)}$$

bestimmte Functionen von $x$ sind. Die Bestimmung von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ ist also auf $n$ Quadraturen zurückgeführt, da die rechten Seiten nur die Variable $x$ enthalten. Die Werthe von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, welche jeder also eine Integrationsconstante enthalten, werden in 3) eingesetzt und man erhält so die Integrale der Gleichungen 1) mit $n$ Constanten. Man hat also in der That die allgemeinen Integrale.

Das eben gegebene Theorem rührt von Lagrange her, und wird gewöhnlich als „Variation der Constanten" bezeichnet. Die Anwendungen dieser Methode sind für Physik und Astronomie, in letzterer namentlich in der Theorie der Störungen, von grosser Wichtigkeit geworden.

Es ist aber der Variation der Constanten noch eine weitere Ausdehnung für den Fall gegeben worden, wo man weniger als $n$ particuläre Integrale kennt.

Mittels ähnlicher Betrachtungen ist es nämlich immer möglich, wenn man ein particuläres Integral der Gleichungen 2) des Abschnitt 16) ohne Constante hat, sowohl die Gleichungen 2) als auch die Gleichungen 1) auf ein anderes System linearer Differenzialgleichungen, welches eine Variable weniger hat, zu reduciren; wenn man 2 particuläre Integrale hat, so wird dasselbe auf ein System mit 2 Variablen weniger reducirt u. s. w.

Sei z. B.

$$x_1 = f_1(x)$$

das gegebene particuläre Integral der Gleichungen 2), so bildet man zunächst auf die mehrfach angedeutete Weise die zugehörigen Gleichungen

$$x_2 = f_2(x),\ x_3 = f_3(x) \ldots x_n = f_n(x).$$

Nehmen wir nun an, die allgemeinen Integrale der Gleichungen 1) hätten die Form:

$$x_1 = u_1 f_1(x),\ x_2 = u_2 f_2(x) \ldots x_n = u_n f_n(x),$$

die man ihnen immer geben kann, wenn $u_1, u_2 \ldots u_n$ zu bestimmende Functionen von $x$ sind.

Diese Werthe setzen wir in die erste der Gleichungen 1) ein und erhalten:

$$u_1 \frac{df_1(x)}{dx} + f_1(x)\frac{du_1}{dx} = A_1 u_1 f_1(x) + A_2 u_2 f_2(x) + \ldots + A_n u_n f_n(x) + A_{n+1},$$

d. h.:

$$u_1 \frac{df_1(x)}{dx} + f_1(x)\frac{du_1}{dx} = u_1 [A_1 f_1(x) + A_2 f_2(x) + \ldots + A_n f_n(x)]$$
$$+ A_2 (u_2 - u_1) f_2(x) + A_3 (u_3 - u_1) f_3(x) + \ldots + A_n (u_n - u_1) f_n(x) + A_{n+1}.$$

Die ersten Glieder beider Seiten dieser Gleichung aber sind gleich, da die Gleichungen

$$x_1 = f_1(x),\ x_2 = f_2(x) \ldots$$

die Gleichungen 2) erfüllen, also:

$$f_1(x)\frac{du_1}{dx}=A_2(u_2-u_1)f_2(x)+A_3(u_3-u_1)f_3(x)+\dots$$
$$+A_n(u_n-u_1)f_n(x)+A_{n+1},$$

und auf dieselbe Weise bildet man aus den übrigen Gleichungen 1) die folgenden:

$$f_2(x)\frac{du_2}{dx}=A_1'(u_1-u_2)f_1(x)+A_3'(u_3-u_2)f_3(x)+\dots$$
$$+A_n'(u_n-u_2)f_n(x)+A'_{n+1}$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$f_n(x)\frac{du_n}{dx}=A_1^{(n-1)}(u_1-u_n)f_1(x)+A_2^{(n-1)}(u_2-u_n)f_2(x)+\dots$$
$$+A_{n+1}^{(n-1)}(u_{n-1}-u_n)f_{n-1}(x)+A_{n+1}^{(n-1)}$$

wenn wir setzen:

$$\frac{f_s(x)}{f_t(x)}=\varphi_s^{(t)}(x),\quad u_s-u_1=v_{s-1},\quad \frac{A_{n+1}^{(t)}}{f_{(t+1)}(x)}=C_t,$$

so nehmen diese Gleichungen die Gestalt an:

$$\frac{du_1}{dx}=A_2\varphi_2'(x)v_1+A_3\varphi_3'(x)v_2+\dots+A_n\varphi_n'(x)v_{n-1}+C_1,$$
$$\frac{du_2}{dx}=-A_1'\varphi_1^{(2)}(x)v_1+A_3'\varphi_3^{(2)}(x)(v_2-v_1)+\dots+A_n'\varphi_n^{(2)}(x)(v_{n-1}-v_1)+C_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{du_n}{dx}=-A_1^{(n-1)}\varphi_1^{(n)}(x)v_{n-1}+A_2^{(n-1)}\varphi_2^{(n)}(x)(v_1-v_{n-1})$$
$$+A_3^{(n-1)}\varphi_3^{(n)}(x)(v_2-v_{n-1})+\dots$$
$$+A_{n-1}^{(n-1)}\varphi_{n-1}^{(n)}(x)(v_{n-2}-v_{n-1})+C_n.$$

Zieht man die erste Gleichung von allen übrigen ab, so erhält man links die Ausdrücke $\frac{dv_1}{dx}$, $\frac{dv_2}{dx}\dots\frac{dv_{n-1}}{dx}$, und rechts die Grössen $v_1, v_2 \dots v_{n-1}$ in linearer Form, also Gleichungen von der Gestalt:

6)
$$\frac{dv_1}{dx}=B_1v_1+B_2v_2+\dots+B_{n-1}v_{n-1}+B_n,$$
$$\frac{dv_2}{dx}=B_1'v_1+B_2'v_2+\dots+B'_{n-1}v_{n-1}+B_n'$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{dv_{n-1}}{dx}=B_1^{(n-2)}v_1+B_2^{(n-2)}v_2+\dots+B_{n-1}^{(n-2)}v_{n-1}+B_n^{(n-2)},$$

wo die Grössen $B_1, B_1' \dots B_n^{(n-2)}$ leicht zu bestimmende Functionen von $x$ sind.

Man hat also zur Bestimmung von $v_1=u_2-u_1$, $v_2=u_3-u_1\dots v_{n-1}=u_n-u_1$ in der That ein lineares System, welches eine Variable weniger als die Gleichun-

gen 1) enthält. Zugleich ist ersichtlich, dass wenn die Gleichungen 2) des Abschnitt 15), wo also die Schlussglieder $A_{n+1}$, $A'_{n+1}$ ... alle gleich Null sind, zu integriren vorliegen, ein dem System 6) ganz gleiches System entsteht, welches wir mit 7) bezeichnen wollen, worin die Grössen $B_1$, $B_2$ ... $B_{n-1}$, $B_1'$ ... $B_{n-1}^{(n-2)}$ ganz dieselbe Bedeutung wie in 6) haben, die Grössen $B_n$, $B_n'$ ... $B_n^{(n-2)}$ aber sämmtlich gleich Null sind.

Um $u_1$ zu bestimmen, hat man nach der Auflösung der Gleichungen 6) noch die Gleichung:

$$\frac{du_1}{dx} = A_2 \varphi_2'(x) v_1 + A_3 \varphi_3'(x) v_2 + \ldots + A_n \varphi_n'(x) v_{n-1} + C_1,$$

und diese ergibt $u_1$ durch blosse Quadratur, wenn, wie es nach der Integration der Gleichungen 6) ja der Fall ist, $v_1$, $v_2$ ... $v_{n-1}$ als Functionen von $x$ gegeben sind.

Schliesslich ist dann:

$$u_2 = v_1 + u_1,\; u_3 = v_2 + u_1 \;\ldots\; u_n = v_{n-1} + u_1$$

in die Gleichungen:

$$x_1 = u_1 f_1(x),\; x_2 = u_2 f_2(x) \;\ldots\; x_n = u_n f_n(x)$$

zu setzen, so dass dann die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Seien jetzt 2 particuläre Integrale der Gleichungen 2) gegeben:

$$x_1 = f_1(x), \qquad x_1 = f_1'(x)$$

und daraus bezüglich gebildet:

$$x_2 = f_2(x) \text{ und } x_2 = f_2'(x) \;\ldots\; x_n = f_n(x) \text{ und } x_n = f_n'(x),$$

so kann man wieder die allgemeinen Integrale der Gleichungen 1) setzen:

$$x_1 = u_1 f_1(x),\; x_2 = u_2 f_2(x) \;\ldots\; x_n = u_n f_n(x)$$

und die Gleichungen 6) bilden.

Nehmen wir jedoch zunächst an, es lägen die Gleichungen 2) zum Integriren vor, so wären die transformirten Gleichungen von der Gestalt, die wir mit 7) bezeichnet haben, also:

7)
$$\frac{dv_1}{dx} = B_1 v_1 + B_2 v_2 + \ldots B_{n-1} v_{n-1},$$

$$\frac{dv_2}{dx} = B_1' v_1 + B_2' v_2 + \ldots + B'_{n-1} v_{n-1},$$

$$\vdots$$

$$\frac{dv_{n-1}}{dx} = B_1^{(n-2)} v_1 + B_2^{(n-2)} v_2 + \ldots + B_{n-1}^{(n-1)} v_{n-1};$$

da aber die Ausdrücke $x_1 = f_1'(x)$, $x_2 = f_2'(x)$ ... $x_n = f_n'(x)$ particuläre Integrale der Gleichungen 2) sind, so müssen dieselben identisch werden, wenn man setzt:

$$u_1 f_1(x) = f_1'(x),\; u_2 f_2(x) = f_2'(x) \;\ldots\; u_n f_n(x) = f_n'(x),$$

da die particulären Integralen doch in den allgemeinen enthalten sein müssen.

Unter dieser Annahme aber ist:

$$u_1 = \frac{f_1'(x)}{f_1(x)},\quad u_2 = \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} \;\ldots\; u_n = \frac{f_n'(x)}{f_n(x)},$$

$$v_1 = \frac{f_2'(x)}{f_2(x)} - \frac{f_1'(x)}{f_1(x)},\quad v_2 = \frac{f_3'(x)}{f_3(x)} - \frac{f_1'(x)}{f_1(x)} \ \ldots\ v_{n-1} = \frac{f_n'(x)}{f_n(x)} - \frac{f_1'(x)}{f_1(x)}.$$

Man hat also particuläre Integrale der Gleichungen 7), von welchen sich die linearen Gleichungen 6) nur durch die Schlussglieder unterscheiden, also in derselben Weise mit ihnen verbunden sind, wie die Gleichungen 1) mit den Gleichungen 2). Man kann also auch nach der eben gegebenen Methode, wenn wie hier ein particuläres Integral der Gleichungen 7) gegeben ist, das System 6) auf ein anderes bringen, welches eine Variable weniger hat, so dass man jetzt nur noch ein System von $n-2$ abhängigen Variablen hat.

Dieselben Betrachtungen und Rechnungen sind zu wiederholen, wenn man noch ein particuläres Integral der Gleichungen 3) hat, d. h.: Jedes allgemeine Integral der Gleichungen 2) reducirt die Systeme 1) und 2) auf eine Variable weniger,

18) Andere Eigenschaften der linearen Differenzialgleichungen.

Die Beziehungen, welche sich für die Integrale der linearen Differensialgleichungen 1) und 2) des Abschnitts 16) finden lassen, sind selbst dann von hohem Interesse, wenn sie nicht zur Darstellung der Integrale in einer den frühern Theilen der Analysis entnommenen Form führen. Die Entwickelung der durch diese Gleichungen definirten Functionen in Reihen, die Erkenntniss ihrer Eigenschaften fängt an, eine Hauptaufgabe der neueren Analysis zu bilden, und schliesst die wichtigsten und schönsten Probleme ein, welche man sich auf der jetzigen Stufe der Wissenschaft zu stellen genöthigt sieht. Diese Betrachtungen aber hängen mit den allgemeinen Eigenschaften der linearen Differenzialgleichungen aufs Engste zusammen, und muss daher dieser Gegenstand hier noch etwas weiter ausgeführt werden.

Daher geben wir nachfolgenden Satz.

Satz I. „Die Integration jedes Systems linearer Differensialgleichungen führt auf ein System, welches eine Variable weniger hat. Dies letztere System wird aber im Allgemeinen nicht mehr linear sein."

Wir werden diesen Satz nur an den Gleichungen 2) zu beweisen haben, da, falls diese vollständig integrirt sind, die Integrale von 1) sich unmittelbar durch die Variation der Constanten ergeben.

Wir machen in diesen Gleichungen folgende Transformationen:

$$x_1 = e^u,\quad x_2 = v_1 e^u,\quad x_3 = v_2 e^u \ \ldots\ x_n = v_{n-1} e^u,$$

wo $u$, $v_1$, $v_2$ ... $v_{n-1}$ Functionen von $x$ sein sollen. Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen 2) ein, so ist leicht ersichtlich, dass überall die Exponentialgrösse sich weghebt, und man hat:

$$8)\quad \frac{du}{dx} = A_1 + A_2 v_1 + A_3 v_2 + \ \ldots\ + A_n v_{n-1},$$

$$v_1 \frac{du}{dx} + \frac{dv_1}{dx} = A_1' + A_2' v_1 + A_3' v_2 + \ \ldots\ + A_n' v_{n-1}$$

$$\vdots$$

$$v_{n-1} \frac{du}{dx} + \frac{dv_{n-1}}{dx} = A_1^{(n-1)} + A_2^{(n-1)} v_1 + A_3^{(n-1)} v_2 + \ldots + A_n^{(n-1)} v_{n-1}.$$

Der Ausdruck für $\frac{du}{dx}$ wird aus der ersten Gleichung in die übrigen eingesetzt; dadurch verschwindet eine Variable $u$ gänzlich.

Man hat $n-1$ Gleichungen mit $n-1$ abhängigen Variablen $v_1$, $v_2$ ... $v_{n-1}$, worin aber Ausdrücke von 2ter Dimension, $v_1^2$, $v_1 v_2$ ... vorkommen. Nach Integration dieser Gleichungen giebt die erste der Gleichungen 8) die Grösse $u$ durch Quadratur.

Satz II. „Ist ein particuläres Integral der Gleichungen 1) von der Form $x_1 = \varphi_1(x)$ ohne Constanten gegeben, und bildet man daraus, wie gezeigt,

$x_2 = \varphi_2(x) \ldots x_n = \varphi_n(x)$, so sind die allgemeinen Integrale der Gleichungen 1):

$$x_1 = \varphi_1(x) + \psi_1(x),\ x_2 = \varphi_2(x) + \psi_2(x) \ldots x_n = \varphi_n(x) + \psi_n(x),$$

wenn

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x) \ldots \psi_n(x)$$

die allgemeinen Integrale der Gleichungen 2) sind."

Offenbar nämlich sind, falls diese Ausdrücke die Gleichungen 1) erfüllen, dieselben allgemeine Integrale, da die Grössen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_n$ $n$ willkürliche Constanten enthalten. Dass diese Ausdrücke in der That Integrale von 1) sind, ist unmittelbar zu verificiren. Setzt man nämlich in die erste Gleichung 1) diese Ausdrücke ein, so kommt:

$$\frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d\psi_1}{dx} = A_1\varphi_1 + A_2\varphi_2 + \ldots + A_n\varphi_n + A_{n+1}$$
$$+ A_1\psi_1 + A_2\psi_2 + \ldots + A_n\psi_n.$$

Der Definition gemäss aber ist die Summe der ersten $n+1$ Glieder rechts dem ersten Gliede links gleich, und die noch übrigen Glieder rechts dem zweiten Gliede links. Die Gleichung wird also, und ganz ebenso die übrigen Gleichungen des Systems 1) identisch.

Satz III. In einem bestimmten Falle kann man ein System particulärer Integrale der Gleichungen 1) finden, wenn man ein particuläres Integral der Gleichungen 2) von bestimmten Eigenschaften hat."

Sei nämlich:

$$x_1 = f_1(x, a),\quad x_2 = f_2(x, a) \ldots x_n = f_n(x, a)$$

ein System particulärer Integrale der Gleichungen 2), welches sich aus der Kenntniss eines einzigen Integrals ergibt; $a$ soll eine willkürliche Constante sein, und die Functionen $f_1, f_2 \ldots f_n$ sollen für jedes $a$ die Gleichungen verificiren:

$$f_1(a, a) = A_{n+1}(a),\ f_2(a, a) = A'_{n+1}(a) \ldots f_n(a, a) = A_{n+1}{}^{(n-1)}(a).$$

Die Ausdrücke rechts sind hier die Schlussglieder der Gleichungen 1), in welchem $a$ für $x$ gesetzt ist.

Dergleichen Integrale lassen sich sogleich bilden, wenn man die allgemeinen Integrale der Gleichungen 2) hat. Man hat dann nämlich $n$ Constanten zur Verfügung, die man so bestimmen kann, dass die zuletzt geschriebenen Gleichungen verificirt werden. In jedem Falle aber werden die Gleichungen 1) verificirt durch die Ausdrücke:

$$x_1 = \int_0^x f_1(x, a)\,da,\quad x_2 = \int_0^x f_2(x, a)\,da \ldots x_n = \int_0^x f_n(x, a)\,da,$$

denn es ist:

$$\frac{dx_s}{dx} = f_s(x, x) + \int_0^x \frac{df_s(x, a)}{dx}\,da,$$

oder da für jedes $a$

$$f_s(a, a) = A_{n+1}{}^{(s-1)}(a),$$

also auch:

$$f_s(x, x) = A_{n+1}{}^{(s-1)}$$

ist:

$$\frac{dx_s}{dx} = A_{n+1}{}^{(s-1)} + \int_0^x \frac{df_s(x, a)}{dx}\,da,$$

oder da $f_s(x, a)$ ein Integral der Gleichungen 2), mithin:

$$\frac{df_s(x,a)}{dx} = A_1^{(s-1)} f_1(x,a) + A_2^{(s-1)} f_2(x,a) + \ldots + A_n^{(s-1)} f_n(x,a)$$

ist:

$$\frac{d\int_0^x f_s(x,a)\,da}{dx} = A_1^{(s-1)} \int_0^x f_1(x,a)\,dx + A_2^{(s-1)} \int_0^x f_2(x,a)\,dx$$
$$+ A_n^{(s-1)} \int_0^x f_n(x,a)\,dx + A_{n+1}^{(s-1)}.$$

Diese Gleichung stimmt in der That mit der entsprechenden des Systems 1) überein, wenn man:

$$\int_0^x f_s(x,a)\,da = x_s$$

setzt; und da man für $s$ alle Zahlen von 0 bis $n$ setzen kann, so verificiren diese Ausdrücke in der That das System 1). Fügt man zu ihnen die allgemeinen Integrale der Gleichungen 2) hinzu, so hat man also deren allgemeine Integrale. Offenbar dient dieser von Cauchy herrührende Satz auch, die Variation der Constanten in anderer Weise zu geben, da er aus den vollständigen Integralen der Gleichungen 2) die der Gleichungen 1) finden lehrt.

Mit Bezug auf das Auffinden particulärer Integrale ist es von Wichtigkeit, zu wissen, ob ein gegebenes Integral ein particuläres oder ein singuläres sei.

Diese Betrachtung wird jedoch bei den linearen Betrachtungen unnöthig durch den folgenden Satz.

Satz IV. „Die linearen Differenzialgleichungen haben überhaupt keine singulären Integrale."

Es folgt dies unmittelbar aus der Form der allgemeinen Integrale.

Die allgemeinen Integrale der Gleichungen 1) haben nämlich nach Gleichung 3) des Abschnitts 16) die Form:

$$x_1 = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_1'(x) + \ldots + \alpha_n f_1^{(n-1)}(x),$$
$$x_2 = \alpha_1 f_2(x) + \alpha_2 f_2'(x) + \ldots + \alpha_n f_2^{(n-1)}(x),$$
$$\vdots$$
$$x_n = \alpha_1 f_n(x) + \alpha_2 f_n'(x) + \ldots + \alpha_n f_n^{(n-1)}(x).$$

Die Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ waren Functionen von $x$, welche durch die Gleichungen 5) des Abschnitts 5) bestimmt sind, und jede eine Integrationsconstante enthalten. Setzen wir daher statt $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ bezüglich $\alpha_1 + c_1, \alpha_2 + c_2 \ldots \alpha_n + c_n$, wo $c_1, c_2 \ldots c_n$ die Integrationsconstanten sind, so nehmen die Ausdrücke folgende Form an:

$$x_1 - \varphi_1(x) - c_1 f_1(x) - c_2 f_1'(x) - \ldots - c_n f_1^{(n-1)}(x) = u_1 = 0,$$
$$x_2 - \varphi_2(x) - c_1 f_2(x) - c_2 f_2'(x) - \ldots - c_n f_2^{(n-1)}(x) = u_2 = 0,$$
$$\vdots$$
$$x_n - \varphi_n(x) - c_1 f_n(x) - c_2 f_n'(x) - \ldots - c_n f_n^{(n-1)}(x) = u_n = 0.$$

Die erste Gleichung wollen wir als das Integral $n$ter Ordnung betrachten. (Vergleiche Abschnitt 14.) Da dasselbe nur $x_1$ und $x$ enthält, so wird man das entsprechende singuläre Integral finden, wenn man

$$\frac{\partial u_1}{\partial c_1} = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \infty,$$

setzt.

Die erste Gleichung aber gibt $f_1(x)=0$, führt also zu keinem singulären Integrale, da sich $x$ gleich einer Constanten aus ihr ergibt; die zweite Gleichung aber:

$$1=\infty,$$

ist unmöglich.

Das singuläre Integral $n-1$ter Ordnung wird gefunden, wenn man $c_1$ etwa aus der zweiten in die erste und dann:

$$\left(\frac{\partial u_1}{\partial c_2}\right)=0,\ \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)=\infty$$

setzt, wo jedoch $c_1$ die durch die 2te Gleichung $u_2=0$ bestimmte Function von $c_2$ und $x_2$ ist. Man hat also:

$$\frac{\partial u_1}{\partial c_2}+\frac{\partial u_1}{\partial c_1}\frac{\partial c_1}{\partial c_2}=0 \quad \text{oder} \quad \frac{\partial u_1}{\partial c_1}\frac{\partial c_1}{\partial x_2}=\infty,$$

d. h.

$$-f_1'(x)-f_1(x)\frac{\partial c_1}{\partial c_2}=0, \qquad -f_1(x)\frac{\partial c_1}{\partial x_2}=\infty,$$

die 2te Gleichung aber gibt:

$$-f_2(x)-f_2'(x)\frac{\partial c_1}{\partial c_2}=0, \qquad 1-f_2(x)\frac{\partial c_1}{\partial x_2}=0.$$

In jedem Falle also würde man für $x$ lediglich eine Constante erhalten. Gleiches zeigt sich in derselben Weise für die Integrale niederer Ordnung, so dass bei allen singuläre Integrale ausgeschlossen sind.

Diesem Satze zufolge kann jede Function, welche die Gleichungen 1) oder 2) verificirt, als particuläres Integral betrachtet, und demgemäss mit Hülfe desselben die Aufgabe reducirt werden.

19) **Anwendung der Variation der Constanten in Astronomie und Physik.**

In den Anwendungen der Mathematik auf Physik und Astronomie kommt oft die Aufgabe vor, Differenzialgleichungen zu integriren, welche von sehr complicirter Form sind, aber einfach werden, wenn man gewisse darin vorkommende sehr kleine Grössen vernachlässigen will. Man kann dann diese kleinen Grössen in der That zunächst vernachlässigen, und hierauf eine erste Annäherung gründen. Von dieser ausgehend, kann man dann die Methode der Variation der Constanten anwenden, um zu einer 2ten Näherung zu gelangen.

Es ist dies z. B. der Fall bei der Störungsrechnung in der Astronomie. Vernachlässigt man die Einwirkung der Planeten auf einander als sehr klein gegen die Einwirkung der Sonne auf jeden derselben, so ist die Aufgabe, die Bewegung der verschiedenen Planeten zu bestimmen, bekanntlich eine sehr einfache, und diese Lösung kann als erste Annäherung betrachtet werden.

Im Allgemeinen aber lassen sich die Gleichungen auf die Gestalt bringen:

$$\frac{dx_1}{dx}=f_1(x,\ x_1,\ x_2\ .\ .\ .\ x_n),\quad \frac{dx_2}{dx}=f_2(x,x_1,x_2\ldots x_n)\ldots\ \frac{dx_n}{dx}=f_n(x,x_1,x_2\ldots x_n).$$

Wir nehmen nun an, jeder der Ausdrücke $f_1,\ f_2\ .\ .\ .\ f_n$, also $f_s$, bestände aus 2 Theilen $G_s+\varepsilon H_s$, wo $\varepsilon$ eine sehr kleine Constante, also $\varepsilon H_s$ ebenfalls sehr klein wäre. Als erste Näherung können dann die Integrale der Gleichungen:

$$\frac{dx_1}{dx}=G_1,\quad \frac{dx_2}{dx}=G_2\ \ .\ .\ .\ \ \frac{dx_n}{dx}=G_n$$

genommen werden. Mögen dieselben die Gestalt haben:

$$x_1=\varphi_1(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2\ .\ .\ .\ \alpha_n),\qquad x_2=\varphi_2(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2\ .\ .\ .\ \alpha_n)\ \ .\ .\ .$$

$$x_n=\varphi_n(x,\ \alpha_1,\ \alpha_2\ .\ .\ .\ \alpha_n),$$

wo $\alpha_1,\ \alpha_2\ .\ .\ .\ \alpha_n$ die Integrationsconstanten sind, und den Bedingungen der Aufgabe gemäss bestimmt werden müssen. Um nun eine zweite Näherung zu erlangen, setzen wir:

$$x_s=\varphi_s(x,\ \alpha_1+\varepsilon\lambda_1,\ \alpha_2+\varepsilon\lambda_2\ .\ .\ .\ \alpha_n+\varepsilon\lambda_n),$$

wo für $s$ alle Werthe von 1 bis $n$ zu setzen, $\lambda_1,\ \lambda_2\ .\ .\ .\ \lambda_n$ zu bestimmende Functionen von $x$ sind.

Den Bedingungen der Aufgabe gemäss ist nämlich der Zuwachs von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ mit $\varepsilon H_s$ zugleich sehr klein, also von gleicher Ordnung als $\varepsilon$. Wir wollen nun mit $\varphi_s^\circ$ stets den Werth von $\varphi_s(x, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)$ mit $\varphi_s$ den Werth von $\varphi_s(x, \alpha_1+\varepsilon\lambda_1, \alpha_2+\varepsilon\lambda_2 \ldots \alpha_n+\varepsilon\lambda_n)$, bezeichnen. Ebenso sollen $G_s^\circ$, $H_s^\circ$ die Werthe von $G_s$, $H_s$ sein, wenn man darin $x_1, x_2 \ldots x_n$ bezüglich mit $\varphi_1^\circ$, $\varphi_2^\circ \ldots \varphi_n^\circ$ vertauscht, dagegen sollen die Bezeichnungen $G_s$, $H_s$ bleiben, wenn man $x_1, x_2 \ldots x_n$ mit $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_n$ vertauscht. Dann ist identisch:

$$\frac{\partial \varphi_s^\circ}{\partial x} = G_s^\circ,$$

was auch die Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ seien, also wenn man für dieselben bezüglich $\alpha_1 + \varepsilon\lambda_1 \ldots$ setzt, ebenfalls identisch:

$$\frac{\partial \varphi_s}{\partial x} = G_s.$$

Da aber $\varphi_1, \varphi \ldots$ Integrale der gegebenen Gleichungen sein sollen, so ist:

$$G_s + \varepsilon H_s = \frac{d\varphi_s}{dx} = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} + \varepsilon \sum_{t=1}^{t=n} \frac{\partial \varphi_s}{\partial \alpha_t} \frac{d\lambda_t}{dx},$$

und wenn man die höheren Potenzen von $\varepsilon$ vernachlässigt:

$$G_s + \varepsilon H_s^\circ = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} + \varepsilon \sum_{t=1}^{t=n} \frac{\partial \varphi_s^\circ}{\partial \alpha_t} \frac{d\lambda_t}{dx},$$

also wegen des Werthes von $G_s$:

$$H_s^\circ = \sum_{t=1}^{t=n} \frac{\partial \varphi_s^\circ}{\partial \alpha_t} \frac{d\lambda_t}{dx}.$$

Diese Gleichung, ein Symbol für $n$ andere, die daraus entstehen, wenn man $s = 1, 2 \ldots n$ setzt, gibt $\frac{d\lambda_1}{dx}, \frac{d\lambda_2}{dx} \ldots \frac{d\lambda_n}{dx}$ als Functionen von $x$ und den Constanten $\alpha$; die Grössen $\lambda$ lassen sich also durch Quadratur bestimmen.

Diese Methode, ebenfalls von Lagrange herrührend, ist für den Fall der mechanischen Gleichungen noch namhafter Vereinfachung fähig, die jedoch hier noch nicht dargestellt werden kann.

Nach der Berechnung der Werthe von $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, und nachdem man diese in die Werthe von $x_1, x_2 \ldots x_n$ eingesetzt hat, kann man durch Wiederholung dieses Verfahrens noch zu einem höheren Grade der Annäherung gelangen.

20) Methoden zur gleichzeitigen Integration der simultanen linearen Differenzialgleichungen.

Jedes System von $n$ simultanen Differenzialgleichungen kann, wie wir gesehen haben, auf eine Gleichung $n$ter Ordnung mit 2 Variablen zurückgeführt werden. Indess ist dies nicht immer das bequemste Verfahren zur Ausführung der Integration. Für die linearen Differenzialgleichungen empfiehlt sich namentlich das folgende. Seien wieder die gegebenen Gleichungen:

1)
$$\frac{dx_1}{dx} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n + A_{n+1},$$
$$\frac{dx_2}{dx} = A_1' x_1 + A_2' x_2 + \ldots + A_n' x_n + A'_{n+1}$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dx} = A_1^{(n-1)} x_1 + A_2^{(n-1)} x_2 + \ldots + A_n^{(n-1)} x_n + A_{n+1}^{(n-1)}.$$

Wir multipliciren sämmtliche Gleichungen bezüglich mit den Factoren:

$$\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}, -1,$$

und addiren die Producte; es ergibt sich dann für die linke Seite der entstehenden Gleichung:

$$\lambda_1 \frac{dx_1}{dx} + \lambda_2 \frac{dx_2}{dx} + \ldots + \lambda_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{dx} - \frac{dx_n}{dx},$$

oder wenn man setzt:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_{n-1} x_{n-1} - x_n = u:$$

$$\frac{du}{dx} - x_1 \frac{d\lambda_1}{dx} - x_2 \frac{d\lambda_2}{dx} - \ldots - x_{n-1} \frac{d\lambda_{n-1}}{dx}.$$

Für die rechte Seite aber ergibt sich folgender Ausdruck, wenn man statt $x_n$ die Grösse $u$ einführt:

$$x_1(\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_1' + \ldots + \lambda_{n-1} A_1^{(n-2)} - A_1^{(n-1)} + \lambda_1^2 A_n + \lambda_1 \lambda_2 A_n'$$
$$+ \ldots + \lambda_1 \lambda_{n-1} A_n^{(n-2)} - \lambda_1 A_n^{(n-1)}),$$

$$x_2(\lambda_1 A_2 + \lambda_2 A_2' + \ldots + \lambda_{n-1} A_2^{(n-2)} - A_2^{(n-1)} + \lambda_1 \lambda_2 A_n + \lambda_2^2 A_n'$$
$$+ \ldots + \lambda_2 \lambda_{n-1} A_n^{(n-2)} - \lambda_2 A_n^{(n-1)}),$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$x_{n-1}(\lambda_1 A_{n-1} + \lambda_2 A'_{n-1} + \ldots + \lambda_{n-1} A_{n-1}^{(n-2)} - A_{n-1}^{(n-1)}$$
$$+ \lambda_1 \lambda_{n-1} A_n + \lambda_2 \lambda_{n-1} A_n' + \ldots + \lambda_{n-1}^2 A_n^{(n-2)} - \lambda_{n-1} A_n^{(n-1)})$$

$$-u(\lambda_1 A_n + \lambda_2 A_n' + \ldots + \lambda_{n-1} A_n^{(n-2)} - A_n^{(n-1)} + \lambda_1 A_{n+1} + \lambda_2 A'_{n+1}$$
$$+ \ldots + \lambda_{n-1} A_{n+1}^{(n-2)} - A_{n+1}^{(n-1)}.$$

Zur Bestimmung der Grössen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$ kann man nun die mit $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ multiplicirten Ausdrücke einzeln den mit $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ multiplicirten Ausdrücken $-\frac{d\lambda_1}{dx}, -\frac{d\lambda_2}{dx} \ldots -\frac{d\lambda_{n-1}}{dx}$ auf der linken Seite gleich setzen; es ergibt sich dann zur Bestimmung der $\lambda$ ein System von $n-1$ Gleichungen, die aber nicht linear sind.

$$2)\ \frac{d\lambda_1}{dx} + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_1' + \ldots + \lambda_{n-1} A_1^{(n-2)} - A_1^{(n-1)} + \lambda_1^2 A_n + \lambda_1 \lambda_2 A_n'$$
$$+ \ldots + \lambda_1 \lambda_{n-1} A_n^{(n-2)} - \lambda_1 A_n^{(n-1)} = 0,$$

$$\frac{d\lambda_2}{dx} + \lambda_1 A_2 + \lambda_2 A_2' + \ldots + \lambda_{n-1} A_2^{(n-2)} - A_2^{(n-1)} + \lambda_2 \lambda_1 A_n + \lambda_2^2 A_n'$$
$$+ \ldots + \lambda_2 \lambda_{n-1} A_n^{(n-2)} - \lambda_2 A_n^{(n-1)} = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{d\lambda_n}{dx}+\lambda_1 A_{n-1}+\lambda_2 A'_{n-1}+\ \ldots\ +\lambda_{n-1} A_{n-1}^{(n-2)}-A_{n-1}^{(n-1)}$$

$$+\lambda_{n-1}\lambda_1 A_n+\lambda_{n-1}\lambda_2 A_n'+\ \ldots\ +\lambda^2_{n-1} A_n^{(n-2)}-\lambda_{n-1} A_n^{(n-1)}=0.$$

Gelingt es, diese Gleichnngen anfzulösen, so hat man nnr noch zn integriren die Gleichnng:

3) $$\frac{du}{dx}+u(\lambda_1 A_n+\lambda_2 A_n'+\ \ldots\ +\lambda_{n-1} A_n^{(n-2)}-A_n^{(n-1)})$$

$$+\lambda_1 A_{n+1}+\lambda_2 A'_{n+1}+\ \ldots\ +\lambda_{n-1} A_{n+1}^{(n-2)}-A_{n+1}^{(n-1)}=0.$$

Diese Gleichung ist eine lineare mit 2 Variablen $u$ und $x$, sie kann daher immer auf Quadraturen zurückgeführt werden. Dieses Verfahren bestätigt also den schon in dem Vorigen gegebenen Satz, dass ein System linearer Differenzialgleichungen sich immer auf eins, welches eine Variable weniger enthält, reduciren lasse, welches jedoch nicht mehr linear ist.

Indess ist es im Allgemeinen nicht thnnlich, die Gleichungen 2) auf Quadratnren zurückzuführen.

Es gelingt dies nur im Allgemeinen in dem Falle, wo $A_1, A_2 \ldots A_n$, $A_1' \ldots A_n' \ldots A_1^{(n-1)} \ldots A_n^{(n-1)}$ sämmtlich Constanten, die Grössen $A_{n+1}, A'_{n+1} \ldots A_{n+1}^{(n-1)}$ aher beliebige Functionen von $x$ sind. Jedoch kann man der Entwickelung in diesem Falle durch eine leichte Modification eine mehr symmetrische Form gehen.

Wir multipliciren nämlich die Gleichungen 1) bezüglich mit $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, wo wir uns nnter diesen Grössen willkürliche Constanten denken, nnd addiren die Producte, indem wir setzen:

$$\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\ \ldots\ +\lambda_n x_n=u.$$

Es ergibt sich dann:

$$\frac{du}{dx}=x_1(\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_1'+\ \ldots\ +\lambda_n A_1^{(n-1)}),$$

$$+x_2(\lambda_1 A_2+\lambda_2 A_2'+\ \ldots\ +\lambda_n A_2^{(n-1)})$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$+x_n(\lambda_1 A_n+\lambda_2 A_n'+\ \ldots\ +\lambda_n A_n^{(n-1)})$$

$$+\lambda_1 A_{n+1}+\lambda_2 A'_{n+1}+\ \ldots\ +\lambda_n A_{n+1}^{(n-1)}.$$

Znr Bestimmnng der Constanten $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$ nehmen wir nun folgende Gleichnngen an:

2) $$\lambda_1 A_1+\lambda_2 A_1'+\ \ldots\ +\lambda_n A_1^{(n-1)}=m\lambda_1,$$

$$\lambda_1 A_2+\lambda_2 A_2'+\ \ldots\ +\lambda_n A_2^{(n-1)}=m\lambda_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\lambda_1 A_n+\lambda_2 A_n'+\ \ldots\ +\lambda_n A_n^{(n-1)}=m\lambda_n,$$

wo $m$ eine neue Constante ist. Eliminirt man aus diesen Gleichungen sämmtliche $\lambda$, oder vielmehr die Verhältnisse $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \ldots \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$ (man kann nämlich eins der

$\lambda$, z. B. $\lambda_1 = 1$ setzen), die allein in Betracht kommen, so hat man den Werth von $m$, dessen Determinantenform sein wird:

$$3)\qquad 0 = \begin{vmatrix} A_1 - m, & A_1', & A_1^{(2)} & \ldots & A_1^{(n-1)}, \\ A_2, & A_2' - m, & A_2^{(2)} & \ldots & A_2^{(n-1)}, \\ A_3, & A_3' & A_3^{(2)} - m & \ldots & A_3^{(n-1)}, \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ A_n, & A_n', & A_n^{(2)} & \ldots & A_n^{(n-1)} - m. \end{vmatrix}$$

Dies ist offenbar eine Gleichung $n$ten Grades, aus der sich $n$ Werthe für $m$ ergehen, die wir mit $m_1, m_2 \ldots m_n$ hezeichnen wollen. Zu jedem dieser Werthe gehen die Gleichungen 2) ein eindeutiges System der Ausdrücke $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \ldots \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$, so dass man $n$ solcher Systeme erhält. Mit Benutzung der Gleichungen 2) und der Definitionsgleichung für $u$:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = u,$$

nimmt aber die Gleichung für $\frac{du}{dx}$ folgende Gestalt an:

$$4)\qquad \frac{du}{dx} = mu + V,$$

wo $V$ eine Function von $x$ ist, welche bestimmt wird durch die Gleichung:

$$V = \lambda_1 A_{n+1} + \lambda_2 A'_{n+1} + \ldots + \lambda_n A_{n+1}^{(n-1)}.$$

Die lineare Gleichung 4) ist leicht zu integriren. Wäre darin $V = 0$, so hätte man

$$\frac{du}{u} = mdx \quad \text{also} \quad \lg u = mx + \lg a, \quad u = ae^{mx},$$

und diese Auflösung entspricht dem Falle, wo die letzten Glieder $A_{n+1}, A'_{n+1} \ldots A_{n-1}^{(n-1)}$ alle gleich Null sind.

Mit diesem Falle könnte man sich begnügen, da auf ihn die Integration der Gleichungen 1) sich ja immer durch die Variation der Constanten zurückführen lässt. Nimmt man aber das allgemeine Integral der Gleichungen 4), so ist gemäss dieser Methode $a$ als eine Variable zu hetrachten. Setzt man den Werth von $u$ unter dieser Voraussetzung in die Gleichung 4) ein, so kommt:

$$\frac{da}{dx} = Ve^{-mx},$$

d. h.:

$$a = \int Ve^{-mx} dx,$$

und:

$$u = e^{mx} \int Ve^{-mx} dx,$$

wo $u$ noch eine Integrationsconstante enthält.

Setzt man für $m$ die entsprechenden $n$ Werthe: $m_1, m_2 \ldots m_n$, so ergeben sich demgemäss auch $n$ Werthe von $u$, die wir mit $u_1, u_2 \ldots u_n$ bezeichnen wollen. Zu jedem Werthe von $m$ aber gehört auch ein System von Werthen $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, die sich aus den Gleichungen 2) ergehen, und die wir dadurch von einander unterscheiden, dass wir die zu $m_s$ gehörigen mit $\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)} \ldots \lambda_n^{(s)}$ bezeichnen.

Die Gleichung:

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n = u$$

erfällt also in $n$ andere von der Form:

5)
$$\lambda_1' x_1 + \lambda_2' x_2 + \ldots + \lambda_n' x_n = u_1,$$
$$\lambda_1^{(2)} x_1 + \lambda_2^{(2)} x_2 + \ldots + \lambda_n^{(2)} x_n = u_2$$
$$\vdots$$
$$\lambda_1^{(n)} x_1 + \lambda_2^{(n)} x_2 + \ldots + \lambda_n^{(n)} x_n = u_n,$$

aus denen sich ergibt:

6)
$$x_1 = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \ldots + \mu_n u_n,$$
$$x_2 = \mu_1' u_1 + \mu_2' u_2 + \ldots + \mu_n' u_n$$
$$\vdots$$
$$x_n = \mu_1^{(n-1)} u_1 + \mu_2^{(n-1)} u_2 + \ldots + \mu_n^{(n-1)} u_n,$$

wo die mit $\mu$ bezeichneten Grössen durch Elimination von allen $x$ bis auf eins aus den Gleichungen 5) sich ergeben und Constanten sind.

Es ist ferner:

$$u_s = e^{m_s x} \int V e^{-m_s x} dx;$$

die Ausdrücke in 6) enthalten also $n$ willkürliche Constanten. Im Falle, dass in den Gleichungen 1) die Schlussglieder fehlen, ist zu setzen:

$$u_s = a_s e^{m_s x},$$

wo die Grössen $a_1, a_2 \ldots a_n$ willkürliche Constanten sind.

Selbstverständlich können die Wurzeln der Gleichung 3) zum Theil oder sämmtlich imaginär sein.

Mögen etwa $m_s$ und $m_t$ zwei conjugirte imaginäre Wurzeln sein, der Art, dass man hat:

$$m_s = p + qi, \quad m_t = p - qi,$$

so wird man demgemäss auch haben:

$$\mu_s^{(r)} = b_r + c_r i, \quad \mu_t^{(r)} = b_r - c_r i,$$

wo $b_r$ und $c_r$ Constanten sind. Es wird dann in jeder Gleichung für eins der $x$ $x_r$ ein Theil vorkommen:

$$\mu_s^{(r)} u_s + \mu_t^{(r)} u_t = e^{(p+qi)x}(b_r + c_r i) \int V e^{-(p+qi)x} dx$$
$$+ e^{(p-qi)x}(b_r - c_r i) \int V e^{-(p-qi)x} dx$$
$$= e^{px}(\cos qx + i \sin qx)(b_r + c_r i) \int V e^{-px}(\cos qx - i \sin qx)\, dx$$
$$+ e^{px}(\cos qx - i \sin qx)(b_r - c_r i) \int V e^{-px}(\cos qx + i \sin qx)\, dx$$
$$= 2e^{px}(b_r \cos qx - c_r \sin qx) \int V e^{-px} \cos qx\, dx$$
$$+ 2e^{px}(b_r \sin qx + c_r \cos qx) \int V e^{-px} \sin qx\, dx.$$

In dem Falle, wo die Schlussglieder fehlen, werden die Integrale

$$\int Ve^{-px}\cos qx\,dx \text{ und } \int Ve^{-px}\sin qx\,dx$$

durch die Integrationsconstanten, welche mithin beliebig sind, ersetzt. Eine Schwierigkeit aber macht in der That der Fall, wo die Gleichung 3) zwei oder mehrere gleiche Wurzeln hat. Sind nämlich $m_s$ und $m_t$ dergleichen, so würden die entsprechenden Werthe $u_s$ und $u_t$ gleich werden, und in den Gleichungen 6) sich die entsprechenden Glieder in eins zusammenziehn, das entsprechende Glied:

$$\mu_s^{(r)}u_t + \mu_t^{(r)}u_t = (\mu_s^{(r)} + \mu_t^{(r)})e^{m_s x}\int Ve^{-m_s x}dx,$$

also auch nur eine willkürliche Constante enthalten. Die Gleichungen 6) geben also in diesem Falle nicht mehr die vollständigen Integrale, da sie nur $n-1$ Constanten enthalten. Indess kann man diesen Fall aus dem allgemeinen in der gewöhnlichen Art ableiten, dass man die Wurzeln $m_s$ und $m_t$ zunächst nicht gleich, sondern sich einander nähernd denkt, so dass der Unterschied verschwindend klein wird. Erhält demnach $m_s$ einen Zuwachs, durch welchen es in $m_t$ übergeht, so werden die zugehörigen Grössen $\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)} \ldots \lambda_n^{(s)}$ als Functionen von $m_s$ zu betrachten sein, die dadurch in $\lambda_1^{(t)}, \lambda_2^{(t)} \ldots \lambda_n^{(t)}$ übergehen und somit wird das System 2), wenn man darin $\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)} \ldots$ für $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ schreibt, nach $m_s$ zu differenziiren sein, um das $m_t$ entsprechende System zu geben.

Man hat also:

$$\text{2a)}\quad A_1\frac{d\lambda_1^{(s)}}{dm_s} + A_1'\frac{d\lambda_2^{(s)}}{dm_s} + \ldots + A_1^{(n-1)}\frac{d\lambda_n^{(s)}}{dm_s} = m_s\frac{d\lambda_1^{(s)}}{dm_s} + \lambda_1^{(s)},$$

$$A_2\frac{d\lambda_1^{(s)}}{dm_s} + A_2'\frac{d\lambda_2^{(s)}}{dm_s} + \ldots + A_2^{(n-1)}\frac{d\lambda_n^{(s)}}{dm_s} = m_s\frac{d\lambda_2^{(s)}}{dm_s} + \lambda_2^{(s)}$$

$$\vdots$$

$$A_n\frac{d\lambda_1^{(s)}}{dm_s} + A_n'\frac{d\lambda_2^{(s)}}{dm_s} + \ldots + A_n^{(n-1)}\frac{d\lambda_n^{(s)}}{dm_s} = m_s\frac{d\lambda_n^{(s)}}{dm_s} + \lambda_n^{(s)}.$$

Statt der aus den Gleichungen 2) ausfallenden $\lambda_1^{(t)}, \lambda_2^{(t)} \ldots \lambda_n^{(t)}$ erhält man mittels dieser Gleichungen ebensoviel neue Constanten:

$$\frac{d\lambda_1^{(s)}}{dm_s}, \frac{d\lambda_2^{(s)}}{dm_s} \ldots \frac{d\lambda_n^{(s)}}{dm_s},$$

welche sich als lineare Functionen von $\lambda_1^{(s)}, \lambda_2^{(s)} \ldots \lambda_n^{(s)}$ ergeben.

Auch die Gleichung für $u_s$ in den Gleichungen 5) muss nach $m_s$ differenziirt werden, wenn man von $u_s$ zu seinem Nachbarwerthe $u_t$ übergebt. Diese Gleichung aber wird:

$$\text{5a)}\quad \frac{d\lambda_1^{(s)}}{dm_s}x_1 + \frac{d\lambda_2^{(s)}}{dm_s}x_2 + \ldots + \frac{d\lambda_n^{(s)}}{dm_s}x_n = \frac{du_s}{dm_s}.$$

Diese Gleichung aber ersetzt die ausfallende Gleichung 5) und zeigt, wenn man sie mit den Gleichungen 5) verbindet, dass statt des Gliedes $\mu_t^{(r)}u_t$ in den Inte-

gralen 6) der Ausdruck $\mu_t^{(r)} \frac{du_s}{dm_s}$ erscheint. Die Grössen $\mu$ aber ergeben sich, wenn man nach und nach alle $x$, bis auf je eins aus den Gleichungen 5) eliminirt in Verbindung mit 5a), so dass dieselben vollständig bestimmt sind. Wegen des Werthes von $u_s$ aber ist:

$$\frac{du_s}{dm_s} = xe^{m_s x}\left(\int Ve^{-m_s x} + a\right) - e^{m_s x}\left(\int Vxe^{-m_s x} dx - \frac{da}{dm_s}\right),$$

wo unter $a$ die Integrationsconstante zu verstehen ist. $\frac{da}{dm_s} = \alpha$ ist dann als eine neue Constante zu betrachten.

Für den Fall, wo $V=0$ ist, also wenn die Schlussglieder gleich Null sind, wird dieser Ausdruck:

$$a\,x\,e^{m_s x} + e^{m_s x}\alpha,$$

so dass eine der in den Integralen vorkommenden Exponentialgrössen mit $x$ multiplicirt ist.

Würden 3 Wurzeln gleich $m_s$, $m_t$, $m_k$, so ist leicht ersichtlich, dass man dieselben alle 3 in einander übergeben lassen kann.

Man muss dann die Gleichung 2a) nochmals nach $m_s$ differenziiren, und erhält die Constanten $\frac{d^2\lambda_1^{(s)}}{dm_s^2}$, $\frac{d^2\lambda_2^{(s)}}{dm_s^2}$ aus dem System, welches so aus 2a) entsteht, ebenfalls in linearer Form; zu 5a) kommt dann die Gleichung:

$$5\text{b)} \qquad \frac{d^2\lambda_1^{(s)}}{dm_s^2}x_1 + \frac{d^2\lambda_2^{(s)}}{dm_s^2}x_2 + \cdots + \frac{d^2\lambda_n^{(s)}}{dm_s^2}x_n = \frac{d^2u_s}{dm_s^2},$$

und in den Integralen tritt ein mit $\frac{d^2u_s}{dm_s^2}$ multiplicirtes Glied hinzu, welches sich im Falle, dass die Schlussglieder Null sind, auf $e^{m_s x}(ax^2+2\alpha x+\beta)$ reducirt, wo $\beta$ eine neue Constante ist.

Allgemein für $p$ gleiche Wurzeln, hat man die entsprechenden Gleichungen 2) und 5) $p-1$ mal zu differenziiren, so dass in den Integralen noch die Ausdrücke: $\frac{du_s}{dm_s}$, $\frac{d^2u_s}{dm_s^2} \cdots \frac{d^{p-1}u_s}{dm_s^{p-1}}$ hinzutreten. Wir erläutern diese Methode durch ein Beispiel.

Seien gegeben die Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx} + Ay + Bz = 0, \qquad \frac{dz}{dx} + A_1 y + B_1 z = 0,$$

so wird in der Gleichung 4) $u=0$ zu setzen sein, und sich ergeben:

$$u = a e^{mx},$$

und man hat zu setzen in die Gleichungen 1) dieses Abschnittes: $-A$ für $A_1$, $-B$ für $A_2$, $-A_1$ für $A_1'$, $-B_1$ für $A_2'$. — Es gestalten sich also die Gleichungen 2):

$$\lambda_1 A + \lambda_2 B = -m\lambda_1, \qquad \lambda_1 A_1 + \lambda_2 B_1 = -m\lambda_2,$$

d. h.:

$$\lambda_1(A+m) = -\lambda_2 B, \qquad \lambda_2(B_1+m) = -\lambda_1 A_1,$$

oder durch Elimination von $\lambda_1$ und $\lambda_2$:

$$\frac{A+m}{A_1}=\frac{B}{B_1+m} \text{ oder: } (A+m)(B_1+m)=BA_1$$

eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln $m_1$ und $m$ sein mögen, so dass man hat:

$$\lambda_1'(A+m_1)=-\lambda_2'B, \qquad \lambda_1^{(2)}(A+m_2)=-\lambda_2^{(2)}B.$$

Die Gleichungen 5) aber werden:

$$\lambda_1'x_1+\lambda_2'x_2=u_1, \qquad \lambda_1^{(2)}x_1+\lambda_2^{(2)}x_2=u_2,$$

aus welchen sich ergibt:

$$x_1=\frac{\lambda_2^{(2)}u_1-\lambda_2'u_2}{\lambda_1'\lambda_2^{(2)}-\lambda_1^{(2)}\lambda_2^{(1)}}, \quad x_2=\frac{-\lambda_1^{(2)}u_1+\lambda_1^{(1)}u_2}{\lambda_1'\lambda_2^{(2)}-\lambda_1^{(2)}\lambda_2^{(1)}}.$$

Diese Gleichungen werden einfacher, wenn man, wie es im Allgemeinen erlaubt ist, $\lambda_1$, also auch $\lambda_1'$ und $\lambda_1^{(2)}=1$ setzt.

Setzen wir dann $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(1)}$ statt $\lambda_2^{(2)}$, $\lambda_2^{(1)}$, so ergibt sich:

$$x_1=\frac{\lambda^{(2)}u_1-\lambda' x u_2}{\lambda^{(2)}-\lambda'}, \quad x_2=\frac{u_2-u_1}{\lambda^{(2)}-\lambda^{(1)}},$$

und zur Bestimmung der $\lambda$:

$$A+m_1=-\lambda'B, \qquad A+m_2=-\lambda^{(2)}B,$$

ausserdem:

$$u_1=a_1 e^{m_1 x}, \qquad u_2=a_2 e^{m_2 x},$$

wo $a_1$, $a_2$ die Integrationsconstanten sind.

Habe jetzt die Gleichung für $m$, d. h.:

$$(A+m)(B_1+m)=BA_1,$$

zwei gleiche Wurzeln, ein Fall, welcher eintritt, wenn man hat:

$$(A+B_1)^2+4(A_1B-B_1A)=0,$$

d. h.:

$$A^2+B_1^2-2AB_1+4A_1B=0.$$

Statt der Gleichung $A+m_2=-\lambda^{(2)}B$, welche ausfällt, ist in diesem Falle die Gleichung $A+m_1=-\lambda'B$ nach $m_1$ zu differenziiren, so dass man hat:

$$B\frac{d\lambda'}{dm_1}=-1, \quad A+m_1=-\lambda'B.$$

Ferner hat man:

$$x_1+\lambda'x_2=u_1,$$

und indem man diese Gleichung nach $m_1$ differenziirt:

$$x_2\frac{d\lambda'}{dm_1}=\frac{du_1}{dm_1},$$

d. h.:

$$x_2=-B\frac{du_1}{dm_1},$$

$$x_1=u_1+\lambda'B\frac{du_1}{dm_1},$$

oder, wenn man für $u_1$, $\frac{du_1}{dm_1}$ u. $\lambda'$ einsetzt:

$$x_1=a e^{mx}-(A+m)(ax+\alpha)e^{mx},$$

$$x_2=-B(ax+\alpha)e^{mx}.$$

$m$ hat hier den Werth $-\frac{A+B_1}{2}$, so dass man auch setzen kann:

$$x_1=e^{mx}\left[\alpha+\frac{B-a}{2}(ax+a)\right].$$

21) Andere Methode zur Integration der simultanen linearen Differenzialgleichungen, wenn die Coefficienten constant sind.

Es ist oft bequemer, dass man, statt in die eben gegebenen allgemeinen Gleichungen einzusetzen, für den gerade vorliegenden Fall das Verfahren einfach von Anfang beginnt.

Dazu empfiehlt sich aber eine einigermassen abweichende Betrachtungsweise, welche wir hier noch geben wollen unter der Voraussetzung, dass es sich um Gleichungen ohne Schlussglieder handle, indem man im entgegengesetzten Falle die Variation der Constanten anwenden kann.

Seien demnach die vorliegenden Gleichungen:

1)
$$\frac{dx_1}{dx}=A_1x_1+A_2x_2+\cdots+A_nx_n,$$
$$\frac{dx_2}{dx}=A_1'x_1+A_2'x_2+\cdots+A_n'x_n$$
$$\vdots$$
$$\frac{dx_n}{dx}=A_1^{(n-1)}x_1+A_2^{(n-1)}x_2+\cdots+A_n^{(n-1)}x_n.$$

Es handle sich zunächst nur um ein System particulärer Integrale. Suchen wir daher die Gleichungen 1) zu verificiren durch folgende Ausdrücke:

2)
$$x_1=a_1e^{mx},\quad x_2=a_2e^{mx}\quad\cdots\quad x_n=a_ne^{mx},$$

wo $m$, $a_1$, $a_2\cdots a_n$ zu bestimmende Constanten sein sollen. Setzt man diese Ausdrücke wirklich in die Gleichungen 1) ein, so erhält man:

3)
$$ma_1=A_1a_1+A_2a_2+\cdots+A_na_n,$$
$$ma_2=A_1'a_1+A_2'a_2+\cdots+A_n'a_n$$
$$\vdots$$
$$ma_n=A_1^{(n-1)}a_1+A_2^{(n-1)}a_2+\cdots+A_n^{(n-1)}a_n.$$

Offenbar gehen diese Gleichungen Werthe für $n-1$ der Constanten $a_1$, $a_2\cdots a_n$ und ausserdem noch für $m$. Es können also die Gleichungen 1) verificirt werden, indem man etwa eine der Constanten $a_1$ gleich der Einheit setzt. Eliminirt man alle $a$, so ergibt sich zur Bestimmung von $m$ dieselbe Gleichung wie im vorigen Abschnitt, nämlich:

4)
$$0=\begin{vmatrix} A_1-m, & A_2 & \cdots A_n, \\ A_1', & A_2'-m & \cdots A_n' \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_1^{(n-1)}, & A_2^{(n-1)} & \cdots A_n^{(n-1)}-m \end{vmatrix}.$$

Die Identität derselben mit der Gleichung 3) des vorigen Abschnittes, so wie auch der Gleichungen 2) desselben mit den Gleichungen 3) dieses Abschnittes ist leicht zu zeigen. — Da die Gleichung 4) $n$ten Grades ist, so gehen die Gleichungen 3) zu jedem der $m$, also $m_1$, $m_2\cdots m_n$ ein entsprechendes System der $a$; wir bezeichnen diese Systeme bezüglich mit:

$$a_1',\ a_2'\cdots a_n'$$
$$a_1^{(2)},\ a_2^{(2)}\cdots a_n^{(2)}$$
$$\vdots$$
$$a_1^{(n)},\ a_2^{(n)}\cdots a_n^{(n)},$$

und so ergeben sich, wenn man diese Werthe nach einander in die Gleichungen 2) einsetzt, $n$ Systeme particulärer Integrale:

$$x_1 = a_1' e^{m_1 x}, \quad x_2 = a_2' e^{m_1 x} \dots x_n = a_n' e^{m_1 x},$$
$$x_1 = a_1^{(2)} e^{m_2 x}, \quad x_2 = a_2^{(2)} e^{m_2 x} \dots x_n = a_n^{(2)} e^{m_2 x}$$
$$\vdots$$
$$x_1 = a_1^{(n)} e^{m_n x}, \quad x_2 = a_2^{(n)} e^{m_n x} \dots x_n = a_n^{(n)} e^{m_n x}.$$

Aus diesen particulären Integralen aber gewinnt man nach den oben gegebenen Regeln das allgemeine, wenn man setzt:

$$x_1 = \alpha_1 a_1' e^{m_1 x} + \alpha_2 a_1^{(2)} e^{m_2 x} + \dots + \alpha_n a_1^{(n)} e^{m_n x},$$
$$x_2 = \alpha_1 a_2' e^{m_1 x} + \alpha_2 a_2^{(2)} e^{m_2 x} + \dots + \alpha_n a_2^{(n)} e^{m_n x}$$
$$\vdots$$
$$x_n = \alpha_1 a_n' e^{m_1 x} + \alpha_2 a_n^{(2)} e^{m_2 x} + \dots + \alpha_n a_n^{(n)} e^{m_n x},$$

wo die Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ beliebige Constanten sind.

22) Lineare Differenzialgleichung $n$ter Ordnung mit 2 Variablen.

Die lineare Differenzialgleichung $n$ter Ordnung mit 2 Variablen hat die Form:

1) $$\frac{d^n x_1}{dx^n} = A_1 x_1 + A_2 \frac{dx_1}{dx} + A_3 \frac{d^2 x_1}{dx^2} + \dots + A_n \frac{d^{n-1} x_1}{dx^{n-1}} + A_{n+1},$$

wo die Grössen $A_1, A_2 \dots A_n, A_{n+1}$ Functionen von $x$ sind. Auch hier unterscheidet man die beiden Fälle, ob das Schlussglied $A_{n+1}$ gleich Null ist oder nicht. In jedem Falle aber kann man die Gleichung 1) durch das System ersetzen:

2) $$\frac{dx_1}{dx} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dx} = x_3 \dots \frac{dx_{n-1}}{dx} = x_n,$$
$$\frac{dx_n}{dx} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \dots + A_{n-1} x_{n-1} + A_n x_n + A_{n+1},$$

also durch ein System von $n$ Gleichungen erster Ordnung, auf welches sich die in den vorigen Abschnitten gegebenen Theorien ohne Weiteres anwenden lassen. Setzen wir $A_{n+1} = 0$, so ist dies nur auf die letzte Gleichung des Systems 2) von Einfluss, welches die Gestalt annimmt:

3) $$\frac{dx_1}{dx} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dx} = x_3 \dots \frac{dx_{n-1}}{dx} = x_n,$$
$$\frac{dx_n}{dx} = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + \dots + A_{n-1} x_{n-1} + A_n x_n.$$

Der Multiplicator des Systems 2) oder 3) hat nach Abschnitt 16) die Form:

$$M = e^{-\int A_n dx},$$

da alle übrigen Glieder der Summe im Exponenten Null werden.

Hat man ein particuläres Integral der Gleichungen 2) oder 3):

$$x_1 = f(x),$$

so ist auch offenbar:

$$x_2 = \frac{df(x)}{dx}, \quad x_3 = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad \ldots \quad x_n = \frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}},$$

und diese Ausdrücke bilden ein System zusammengehöriger particulärer Integrale.

Habe man jetzt $n$ particuläre Integrale für die Gleichungen 3), oder was dasselbe ist, für die Gleichung:

4) $$\frac{d^n x_1}{dx^n} = A_1 x_1 + A_2 \frac{dx_1}{dx} + \cdots + A_n \frac{d^{n-1} x_1}{dx^{n-1}},$$

$$x_1 = f(x),\ x_1 = f'(x),\ x_1 = f^{(2)}(x)\ \cdots\ x_n = f^{(n-1)}(x),$$

so ist nach Abschnitt 15) das allgemeine Integral:

$$x_1 = \alpha_1 f(x) + \alpha_2 f'(x) + \cdots + \alpha_n f^{(n-1)}(x).$$

Um das allgemeine Integral der Gleichung 1) zu finden aber muss man $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ als Functionen von $x$ betrachten, und die Variation der Constanten anwenden, welche in den Gleichungen 4) des Abschnittes 16) enthalten ist. Es wird nämlich, wenn man dort setzt:

$$f(x),\ f'(x) \cdots f^{(n-1)}(x)$$

bezüglich für

$$f_1(x),\ f_1'(x) \cdots f_1^{(n-1)}(x);$$

$$\frac{df(x)}{dx},\ \frac{df'(x)}{dx} \cdots \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}$$

für

$$f_2(x),\ f_2'(x) \cdots f_2^{(n-1)}(x);$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{d^{n-1} f(x)}{dx^{n-1}},\ \frac{d^{n-1} f'(x)}{dx^{n-1}} \cdots \frac{d^{n-1} f^{(n-1)}(x)}{dx^{n-1}}$$

für

$$f_n(x),\ f_n(x) \cdots f_n^{(n-1)}(x)\,$$

5) $$f(x)\frac{d\alpha_1}{dx} + f'(x)\frac{d\alpha_2}{dx} + \cdots + f^{(n-1)}(x)\frac{d\alpha_n}{dx} = 0,$$

$$\frac{df(x)}{dx}\frac{d\alpha_1}{dx} + \frac{df'(x)}{dx}\frac{d\alpha_2}{dx} + \cdots + \frac{df^{(n-1)}(x)}{dx}\frac{d\alpha_n}{dx} = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{d^{n-2} f(x)}{dx^{n-2}}\frac{d\alpha_1}{dx} + \frac{d^{n-2} f'(x)}{dx^{n-2}}\frac{d\alpha_2}{dx} + \cdots + \frac{d^{n-2} f^{(n-1)}(x)}{dx^{n-2}}\frac{d\alpha_n}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_1}{dx}+\frac{d^{n-1}f'(x)}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_2}{dx}+\cdots+\frac{d^{n-1}f^{(n-1)}(x)}{dx^{n-1}}\frac{d\alpha_n}{dx}=A_{n+1},$$

ein System, welches alle $\alpha$ durch Quadraturen gibt.

Eben so einfach überträgt sich das in Bezug auf die Reduction der linearen Differenzialgleichung Gesagte in dem Falle, dass man weniger als $n$ particuläre Integrale der Gleichung 4) kennt, auf diesen Fall.

Ist nämlich

$$x_1=f(x)$$

ein gegebenes Integral der Gleichung 4), so kann man das allgemeine Integral der Gleichung 1) gleich $uf(x)$ setzen, und hat dann offenbar:

$$\frac{d[uf(x)]}{dx}=u\frac{df(x)}{dx}+f(x)\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d^2[uf(x)]}{dx^2}=u\frac{d^2f(x)}{dx^2}+2\frac{du}{dx}\frac{df(x)}{dx}+f(x)\frac{d^2u}{dx^2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^n[uf(x)]}{dx^n}=u\frac{d^nf(x)}{dx^n}+n_1\frac{du}{dx}\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}+n_2\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{n-2}f(x)}{dx^{n-2}}+\cdots+f(x)\frac{d^nu}{dx^n},$$

wo die Grössen $n_1, n_2, n_3 \cdots$ die Binomialcoefficienten vorstellen.

Setzt man diese Werthe in die Gleichung 1) ein, und berücksichtigt dass:

$$\frac{d^nf(x)}{dx^n}=A_1f(x)+A_2\frac{df(x)}{dx}+\cdots+A_n\frac{d^{n-1}f(x)}{dx^{n-1}}$$

vermöge der Definition von $f(x)$ ist, so ergibt sich daraus eine Gleichung von der Gestalt:

$$\frac{d^nu}{dx^n}=\alpha_1\frac{du}{dx}+\alpha_2\frac{d^2u}{dx^2}+\cdots+\alpha_{n-1}\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+\alpha_n,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ Functionen von $x$ sind; setzt man also wieder:

$$\frac{du}{dx}=v,$$

so hat man die Gleichung $n-1$ter Ordnung:

6) $$\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}=\alpha_1v+\alpha_2\frac{dv}{dx}+\cdots+\alpha_{n-1}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}+\alpha_n$$

zu integriren, wonach dann:

$$u=\int v\,dx$$

sich durch Quadratur ergibt.

Es ist auch klar, dass, wenn die Gleichung 4) zur Integration vorliegt, also $A_{n+1}=0$ ist, dann auch $\alpha_n=0$ wird. Sei $u_1f(x)$ also das allgemeine Integral der Gleichung 4), und

$$\frac{du_1}{dx}=v_1,$$

so hat man:

7) $$\frac{d^{n-1}v_1}{dx^{n-1}}=\alpha_1v_1+\alpha_2\frac{dv_1}{dx}+\cdots+\alpha_{n-1}\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}.$$

Die Schlüsse für den Fall, wo mehr als ein particuläres Integral der Gleichung 4) gegeben ist, sind nun wie in Abschnitt 16) zu machen. Ist $f'(x)$ ein zweites, so muss also $f'(x)=u_1 f(x)$ gesetzt werden können, da $u_1 f(x)$ das allgemeine Integral ist. Es ergibt sich:

$$u_1=\frac{f'(x)}{f(x)},\quad v_1=\frac{df'(x)}{dx}.$$

Man hat also ein particuläres Integral der Gleichung 7), durch welches die Gleichung 6) um eine Ordnung reducirt wird u. s. w.

Die Sätze des Abschnitts 17) lassen sich unmittelbar auf unsern Fall anwenden. Wir specialisiren daher nur den Satz III), welcher jetzt lautet, da

$$A_{n+1}(a)=A'_{n+1}(a)\cdots=A_{n+1}{}^{(n-2)}(a)=0,\ A_{n+1}{}^{(n-1)}(a)=A_{n+1}(a)$$

zu setzen ist:

„Ist $x_1=f(x,\,a)$ ein particuläres Integral der Gleichung 4), wo $a$ eine willkürliche Constante ist, und man für jedes $a$ hat:

$$f(x,a)=0,\ \frac{df(x,a)}{dx}=0\cdots\frac{d^{n-2}f(x,a)}{dx^{n-2}}=0,\ \frac{d^{n-1}f(x,a)}{dx^{n-1}}=A_{n+1}$$

für den Fall, wo $x=a$ ist, so ist:

$$x_1=\int_0^x f(x,a)\,da$$

vermehrt um das allgemeine Integral der Gleichung 4), das allgemeine Integral der Gleichung 1)."

Diese Methode, welche, wie wir bereits gesehen haben, immer die Variation der Constanten ersetzt, ist oft bequemer in der Anwendung als die letztere.

Was endlich die linearen Differenzialgleichungen mit constanten Coefficienten $A_1,\ A_2\cdots A_n$ anbetrifft, so werden hier die in dem vorigen Abschnitte gegebenen Betrachtungen sehr einfach. — Seien in der Gleichung 4) in der That die Coefficienten constant, so setzt man $x_1=e^{mx}$, und durch Einsetzen in Gleichung 4) erhält man:

$$m^n=A_1+A_2m+A_3m^2+\cdots+A_nm^{n-1}.$$

Die $n$ Wurzeln dieser Gleichung $m_1,\ m_2\cdots m_n$ geben eben so viele particuläre Integrale, und man hat als allgemeines Integral:

$$x_1=\alpha_1e^{m_1x}+\alpha_2e^{m_2x}+\cdots\alpha_ne^{m_nx},$$

wo $\alpha_1,\ \alpha_2\cdots\alpha_n$ willkürliche Constanten sind. Seien $m_s,\ m_t$ conjugirte imaginäre Wurzeln, so setzt man:

$$m_s=a+bi,\qquad m_t=a-bi,$$
$$\alpha_s=\tfrac{1}{2}(h+ki),\qquad \alpha_t=\tfrac{1}{2}(h-ki),$$

und erhält:

$$\alpha_se^{m_sx}+\alpha_te^{m_tx}=e^{ax}(h\cos bx+k\sin bx),$$

wo $h$ und $k$ willkürliche Constanten sind. Werden 2 oder mehrere Wurzeln $m_s$, $m_{s'}$, $m_{s''}\cdots$ gleich, so denkt man sich dieselben zunächst unendlich wenig von einander verschieden. Ist nun $\alpha_se^{m_sx}$ das $m_s$ entsprechende particuläre Integral,

so müssen auch $\frac{d(\alpha_s e^{m_s x})}{dm_s}$, $\frac{d^2(\alpha_s e^{m_s x})}{dm_s}$ ... die Gleichung erfüllen, Ausdrücke, für welche man erhält:

$$\beta_s e^{m_s x} + x\alpha_s e^{m_s x},$$
$$\gamma_s e^{m_s x} + x\beta_s e^{m_s x} + x^2 \alpha_s e^{m_s x},$$
$$\vdots$$

Die Ausdrücke $\beta_s = \frac{d\alpha_s}{dm_s}$, $\gamma_s = \frac{d^2\alpha_s}{dm_s^2}$ sind als willkürliche Constanten zu betrachten, und diese Werthe in $x_1$ statt der ausfallenden $\alpha_{s'} e^{m_{s'} x}$, $\alpha_{s''} e^{m_{s''} x}$ ... einzusetzen. Wie leicht zu sehen, hat dann das Integral, wenn $t+1$ Wurzeln gleich sind, die Form:

$$x_1 = \alpha_1 e^{m_1 x} + \alpha_2 e^{m_2 x} + \cdots + \alpha_{n-t} e^{m_{n-t} x}(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_t x^t).$$

Dieser Ausdruck hat in der That $n$ willkürliche Constanten.

Wir fügen diesen Betrachtungen einige Beispiele für die Integration linearer Differenzialgleichungen hinzu.

I) Nehmen wir zuerst die Gleichung:

8) $$\frac{d^n x_1}{dx^n} = a_1 \frac{d^{n-1} x_1}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} x_1}{dx^{n-2}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx_1}{dx} + a_n x_1 + f(x),$$

wo $a_1$, $a_2$ ... $a_n$ Constanten, $f(x)$ aber eine beliebige Function von $x$ ist. — Setzt man $f(x)$ zunächst gleich Null, so hat man als vollständiges Integral:

9) $$x_1 = \alpha_1 e^{m_1 (x-c)} + \alpha_2 e^{m_2 (x-c)} + \cdots + \alpha_n e^{m_n (x-c)},$$

wo statt der willkürlichen Constanten gesetzt ist:

$$\alpha_1 e^{-m_1 c}, \alpha_2 e^{-m_2 c} \ldots \ldots \alpha_n e^{m_n c},$$

wie dies ja bei willkürlichen $c$ immer geschehen kann. $m_1$, $m_2$ ... $m_n$ sind die Wurzeln der Gleichung:

$$m^n - a_1 m^{n-1} - a_2 m^{n-2} - \cdots - a_{n-1} m - a_n = 0.$$

Um die Auflösung der Gleichung zu finden, wenn $f(x)$ beliebig ist, haben wir gemäss dem Satze 3) des Abschnittes 17) zu setzen:

$$x_1 = 0,\ \frac{dx_1}{dx} = 0,\ \frac{d^2 x_1}{dx^2} = 0 \cdots \frac{d^{n-2} x_1}{dx^{n-2}} = 0,\ \frac{d^{n-1} x_1}{dx^{n-1}} = f(x),$$

wenn $x = c$ ist, und dies führt zu den $n$ Gleichungen:

10) $$\alpha_1 + \alpha_2 \cdots + \alpha_n = 0,$$
$$\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 \cdots + \alpha_n m_n = 0,$$
$$\alpha_1 m_1^2 + \alpha_2 m_2^2 \cdots + \alpha_n m_n^2 = 0$$
$$\vdots$$

$$\alpha_1 m_1^{n-2} + \alpha_2 m_2^{n-2} + \cdots + \alpha_n m_n^{n-2} = 0,$$

$$\alpha_1 m_1^{n-1} + \alpha_2 m_2^{n-1} + \cdots + \alpha_n m_n^{n-1} = f(c).$$

Auflösungen dieser Gleichungen lassen sich leicht unter allgemeiner Form finden. Setzen wir nämlich:

$$F(x) = x^n - a_1 x^{n-1} - \cdots - a_{n-1} x - a_n,$$

so sind $m_1, m_2 \cdots m_n$ die Wurzeln der Gleichung:

$$F(x) = 0.$$

Wollen wir nun z. B. $\alpha_1$ bestimmen, so multipliciren wir die Gleichungen 10) bezüglich mit

$$k, k_1 \cdots k_{n-2}, 1$$

und addiren sie, indem wir zur Bestimmung der $k$ setzen:

11) $$k + k_1 m_2 + k_2 m_2^2 + k_3 m_2^3 + \cdots + k_{n-2} m_2^{n-2} + m_2^{n-1} = 0,$$

$$k + k_1 m_3 + k_2 m_3^2 + k_3 m_3^3 + \cdots + k_{n-2} m_3^{n-2} + m_3^{n-1} = 0$$

$$\vdots$$

$$k + k_1 m_n + k_2 m_n^2 + k_3 m_n^3 + \cdots + k_{n-2} m_n^{n-3} + m_n^{n-1} = 0,$$

und erhalten:

12) $$\alpha_1 (k + k_1 m_1 + k_2 m_1^2 + k_3 m_1^3 + \cdots + k_{n-2} m_1^{n-2} + m_1^{n-1}) = f(c).$$

Setzt man also:

$$k + k_1 x + k_2 x^2 + \cdots + k_{n-2} x^{n-2} + x^{n-1} = \varphi(x),$$

so lehren die Gleichungen 11), dass $m_2, m_3 \cdots m_n$ die $n-1$ Wurzeln der Gleichung:

$$\varphi(x) = 0$$

sind; man hat demnach:

$$\varphi(x) = (x - m_2)(x - m_3) \cdots (x - m_n) = \frac{F(x)}{x - m_1}.$$

Für $x = m_1$ wird dieser Ausdruck $= \frac{0}{0}$; man erhält aber, wenn man Zähler und Nenner differenziirt:

$$\varphi(m_1) = F'(m_1),$$

wo

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx}$$

zu setzen ist.

Die Gleichung 12) gibt dann:

$$\alpha_1 = \frac{f(c)}{F'(m_1)},$$

und es ist ersichtlich, dass man durch ein gleiches Verfahren erhält:

$$\alpha_1 = \frac{f(c)}{F'(m_1)}, \quad \alpha_2 = \frac{f(c)}{F'(m_2)} \cdots \alpha_n = \frac{f(c)}{F'(m_n)}.$$

Man hat also, wenn man dies in die Gleichung 9) setzt:

14) $$x_1 = f(c)\left(\frac{e^{m_1(x-c)}}{F'(m_1)} + \frac{e^{m_2(x-c)}}{F'(m_2)} + \cdots + \frac{e^{m_n(x-c)}}{F'(m_n)}\right),$$

Bezeichnen wir diesen Ausdruck mit $\chi(c)$, so ist das allgemeine Integral der Gleichung 8):

$$x_1 = \int_0^x \chi(c)\,dc + \psi(x),$$

wo $\psi(x)$ das in 9) gegebene Integral ist; also:

15) $$x_1 = e^{m_1 x}\left(\alpha_1 + \frac{1}{F'(m_1)}\int_0^x e^{-m_1 c} f(c)\,dc\right),$$

$$+ e^{m_2 x}\left(\alpha_2 + \frac{1}{F'(m_2)}\int_0^x e^{-m_2 c} f(c)\,dc\right)$$

$$\vdots$$

$$+ e^{m_n x}\left(\alpha_n + \frac{1}{F'(m_n)}\int_0^x e^{-m_n c} f(c)\,dc\right).$$

II) Nehmen wir ferner als Beispiel einer Gleichung, deren Coefficienten nicht constant sind, die folgende:

$$\frac{d^n x_1}{dx^n} + \frac{\alpha_1}{(ax+b)}\frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}} + \frac{\alpha_2}{(ax+b)^2}\frac{d^{n-2}x_1}{dx^{n-2}} + \cdots$$
$$+ \frac{\alpha_{n-1}}{(ax+b)^{n-1}}\frac{dx_1}{dx} + \frac{\alpha_n}{(ax+b)^n}x_1 = 0;$$

$\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$, $a$ und $b$ sind Constanten.

Man findet ein partielles Integral, wenn man setzt:

$$x_1 = (ax+b)^p,$$

denn wenn man dies einsetzt, ergibt sich:

$$p(p-1)\cdots(p-n+1)a^n + \alpha_1 p(p-1)\cdots(p-n+2)a^{n-1} + \cdots$$
$$+ \alpha_{n-1}pa + \alpha_n = 0,$$

eine Gleichung $n$ten Grades für $p$, deren Wurzeln $p_1, p_2 \cdots p_n$ sein mögen. Das allgemeine Integral ist dann:

$$x_1 = c_1(ax+b)^{p_1} + c_2(ax+b)^{p_2} + \cdots + c_n(ax+b)^{p_n}.$$

Für den Fall, dass 2 Wurzeln unserer Gleichung gleich werden, sind ähnliche Betrachtungen wie früher zu machen.

III) Schliesslich wollen wir noch die Differenzialgleichung

$$\frac{d^n x_1}{dx^n} = F(x)$$

betrachten. Selbstverständlich lässt sich das Integral derselben direct bestimmen. Man hat nämlich:

$$\frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}} = \int F(x)\,dx + c, \quad \frac{d^{n-2}x_1}{dx^{n-2}} = \int dx \int F(x)\,dx + cx + c_1,$$

$$\frac{d^{n-3}x_1}{dx^{n-3}} = \int dx \int dx \int F(x)\,dx + cx^2 + c_1 x + c_2 \;\cdots,$$

also schliesslich:

$$x_1 = \int dx \int dx \cdots \int F(x)\,dx + cx^{n-1} + c_1 x^{n-2} + c_2 x^{n-3} + \cdots$$
$$+ c_{n-2}x + c = \int^n F(x)\,dx,$$

wenn man unter der Bezeichnung $\int^n$ das $n$fache Integral nach derselben Variablen $x$ genommen versteht.

Wendet man jedoch auf die vorgelegte Gleichung die Variation der Constanten an, so erhält man einen andern bequemern Ausdruck.

Die Gleichung

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

hat offenbar als vollständiges Integral den Ausdruck:

$$y = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1}.$$

wo $\alpha,\ \alpha_1,\ \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}$ Constanten sind.

Es ist also (siehe die Gleichungen 5) dieses Abschnitts) für $x_1$ derselbe Ausdruck zu setzen, wo man die Grössen $\alpha$ bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{d\alpha}{dx} + x\frac{d\alpha_1}{dx} + x^2\frac{d\alpha_2}{dx} + \cdots + x^{n-1}\frac{d\alpha_{n-1}}{dx} = 0,$$

$$\frac{d\alpha_1}{dx} + 2x\frac{d\alpha_2}{dx} + \cdots + (n-1)x^{n-2}\frac{d\alpha_{n-1}}{dx} = 0,$$

$$2\frac{d\alpha_2}{dx} + \cdots + (n-1)(n-2)\,x^{n-3}\frac{d\alpha_{n-1}}{dx} = 0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$(n-3)(n-4)\cdots 1\,\frac{d\alpha_{n-3}}{dx} + (n-2)(n-3)\cdots 2x\,\frac{d\alpha_{n-2}}{dx}$$
$$+ (n-1)(n-2)\cdots 3x^2\,\frac{d\alpha_{n-1}}{dx} = 0,$$

$$(n-2)(n-3)\cdots 2\cdot 1\,\frac{d\alpha_{n-2}}{dx} + (n-1)(n-2)\cdots 2x\,\frac{d\alpha_{n-1}}{dx} = 0,$$

$$(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1\,\frac{d\alpha_{n-1}}{dx} = F(x),$$

Gleichungen, aus welchen sich ergibt:

$$\frac{d\alpha_{n-1}}{dx} = \frac{F(x)}{1\cdot 2\cdots(n-1)}, \quad \frac{d\alpha_{n-2}}{dx} = -\frac{xF(x)}{1\cdot 2\cdots(n-2)},$$

$$\frac{d\alpha_{n-3}}{dx} = \frac{x^2 F(x)}{2\cdot 1\cdot 2\cdots(n-3)}, \quad \frac{d\alpha_{n-1}}{dx} = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{x^2 F(x)}{1\cdot 2\cdots(n-4)},$$

und allgemein:

$$\frac{d\alpha_{n-s}}{dx} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-s)}\left(1-s+\frac{s(s-1)}{1\cdot 2}-\frac{s(s-1)(s-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots \right.$$
$$\left. +(-1)^{s-1}\frac{s(s-1)\cdots 2}{1\cdot 2\cdots(s-1)}\right)x^{s-1}F(x).$$

Es ist aber nach dem binomischen Satze:

$$(1-1)^s = 1-s+\frac{s(s-1)}{1\cdot 2}-\cdots+(-1)^{s-1}\frac{s(s-1)\cdots 2}{1\cdot 2\cdots(s-1)}+(-1)^s = 0,$$

woraus sich augenblicklich ergibt:

$$\frac{d\alpha_{n-s}}{dx} = (-1)^{s-1}\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-s)}x^{s-1}F(x),$$
$$\alpha_{n-s} = \frac{(-1)^{s-1}}{1\cdot 2\cdots(n-s)}\int x^{s-1}F(x)\,dx,$$

also:

$$x_1 = \left(x^{n-1}\int F(x)\,dx-(n-1)x^{n-2}\int xF(x)\,dx+\right.$$
$$\left.+\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}x^{n-3}\int x^2F(x)dx+\cdots+(-1)^{n-1}\int x^{n-1}F(x)\,dx\right)\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}.$$

Führt man noch die Integrationsconstanten ein, so ist dieser Ausdruck zu vermehren um:

$$cx^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-2}x+c_{n-1}.$$

Dieser Werth von $x_1$ liesse sich auch unmittelbar aus $x_1 = \int^n F(x)\,dx^n$ durch theilweises Integriren gewinnen.

23) Zurückführung der nicht linearen aber homogenen simultanen Differenzialgleichungen und der entsprechenden Gleichungen höherer Ordnung mit 2 Variablen auf Quadraturen.

Ueber die höheren Differenzialgleichungen, welche nicht linear sind, lässt sich wenig Allgemeines in Bezug auf die Integration sagen. Jedoch treten noch bei gewissen anderen Formen wesentliche Reductionen ein.

I) Denken wir uns zunächst ein System simultaner Differenzialgleichungen unter der allgemeinen Form:

1)
$$f_1\left(x, x_1, x_2 \cdots x_n, \frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}\cdots\frac{dx_n}{dx}\right) = 0,$$
$$f_2\left(x, x_1, x_2 \cdots x_n, \frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}\cdots\frac{dx_n}{dx}\right) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_n\left(x, x_1, x_2 \cdots x_n, \frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx}\cdots\frac{dx_n}{dx}\right) = 0.$$

Die Definition einer homogenen Function $p$ter Ordnung von 2 Variablen $x$, $y$, $\varphi(x, y)$ haben wir oben dahin gegeben, dass sie die Form annehmen kann:

$$\varphi(x, y) = x^p\psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Wir definiren jetzt eine homogene Function von $n+1$ Variablen $x, x_1 \cdots x_n$ $p$ter Ordnung dahin, dass sie die Form annehmen kann:

$$\varphi(x, x_1, x_2 \ldots x_n) = x^p \psi\left(\frac{x_1}{x}, \frac{x_2}{x} \ldots \frac{x_n}{x}\right).$$

Setzen wir jetzt voraus, die Functionen auf der linken Seite der Gleichungen 1) seien homogene Functionen von irgend einer Ordnung von $x, x_1, x_2 \ldots x_n$, nicht aber von den Differenzialquotienten. Jede der Gleichungen kann übrigens eine andere Ordnung haben. Es gilt dann folgender Satz:

„Das System 1) lässt sich immer auf ein anderes zurückführen, welches eine Variable und eine Gleichung weniger enthält."

In der That nehmen unserer Voraussetzung gemäss die Gleichungen 1) die Form an:

2)
$$\varphi_1\left(\frac{x_1}{x}, \frac{x_2}{x} \ldots \frac{x_n}{x}, \frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx} \ldots \frac{dx_n}{dx}\right) = 0,$$
$$\varphi_2\left(\frac{x_1}{x}, \frac{x_2}{x} \ldots \frac{x_n}{x}, \frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx} \ldots \frac{dx_n}{dx}\right) = 0$$
$$\vdots$$
$$\varphi_n\left(\frac{x_1}{x}, \frac{x_2}{x} \ldots \frac{x_n}{x}, \frac{dx_1}{dx}, \frac{dx_2}{dx} \ldots \frac{dx_n}{dx}\right) = 0,$$

indem man die heraustretende Potenz von $x$ weglässt. Wir machen nun die Substitutionen:

$$x_1 = y_1 x, \; x_2 = y_2 x \ldots x_n = y_n x,$$

$$\frac{dx_1}{dx} = y_1 + x\frac{dy_1}{dx}, \; \frac{dx_2}{dx} = y_2 + x\frac{dy_2}{dx} \ldots \frac{dx_n}{dx} = y_n + x\frac{dy_n}{dx},$$

so werden sie von der Gestalt sein:

3)
$$\varphi_p\left(y_1, y_2 \ldots y_n, y_1 + x\frac{dy_1}{dx}, y_2 + x\frac{dy_2}{dx} \ldots y_n + x\frac{dy_n}{dx}\right) = 0,$$

aus welchen sich, wie leicht zu sehen, für die Grössen:

$$x\frac{dy_1}{dx}, \; x\frac{dy_2}{dx} \ldots x\frac{dy_n}{dx}$$

Werthe $u_1, u_2 \ldots u_n$ ergeben, die nur $y_1, y_2 \ldots y_n$ enthalten:

4)
$$x\frac{dy_1}{dx} = u_1, \; x\frac{dy_2}{dx} = u_2 \ldots x\frac{dy_n}{dx} = u_n.$$

Indem wir jede der Gleichungen 4) durch eine, z. B. durch die erste dividiren, erhalten wir $n-1$ Gleichungen von der Form:

5)
$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{u_2}{u_1}, \; \frac{dy_3}{dy_1} = \frac{u_3}{u_1} \ldots \frac{dy_n}{dy_1} = \frac{u_n}{u_1},$$

welche nur $y_1, y_2 \ldots y_n$ enthalten, also in der That ein System mit einer Variable weniger. Nach dessen Integration gibt jede der Gleichungen 4), z. B. die erste:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy_1}{u_1}, \quad \lg x = \int \frac{dy_1}{u_1}.$$

Es ist also $x$ durch Quadratur bekannt, und man hat dann auch:

$$x_1 = y_1 x, \; x_2 = y_2 x \ldots x_n = y_n x.$$

Führt man das System 1) auf eine Gleichung $n$ter Ordnung zwischen 2 Variablen

zurück, so besteht die Reduction darin, dass die Integration durch eine Gleichung $n-1$ ter Ordnung und eine Quadratur gegeben ist.

Anwendung Sei gegeben das System:

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{x_2}{u}, \quad \frac{dx_2}{dx} = \frac{x_3}{u} \quad \dots \quad \frac{dx_{n-1}}{dx} = \frac{x_n}{u},$$

$$\varphi\left(x, x_1, x_2 \dots x_n, \frac{dx_n}{dx}\right) = 0.$$

Setzen wir voraus, dass die Function $\varphi$ in Bezug auf $x, x_1, x_2 \dots x_n$ homogen sei. Die übrigen Gleichungen des Systems sind ebenfalls homogen in Bezug auf diese Grössen, wenn man hat:

7) $$u = \alpha x + \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n,$$

wo $\alpha, \alpha_1 \dots \alpha_n$ Constante sind.

Es kann dies System aber auf die folgende Gleichung $n$ter Ordnung zurückgeführt werden:

$$\varphi\left(x, x_1, u\frac{dx_1}{dx}, u\frac{d_2x_1}{dx^2} \dots u\frac{d_{n-1}x_1}{dx^{n-1}}, -\frac{d_nx_1}{dx^n}\right) = 0,$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$d\left(u\frac{dx_1}{dx}\right) = \frac{d_2x_1}{dx}, \quad d\left(u\frac{d_2x_1}{dx}\right) = \frac{d_3x_1}{dx} \dots$$

Sei z. B.:

$$u = \frac{x}{a},$$

so ist:

$$u\frac{dx_1}{dx} = \frac{dx_1}{d\lg(x^a)}, \quad u\frac{d_2x_1}{dx} = \frac{d_2x_1}{d\lg(x^a)} \dots u\frac{d_{n-1}x_1}{dx} = \frac{d^{n-1}x_1}{d\lg(x^a)}.$$

Unsere Gleichung nimmt also die Gestalt an:

$$\varphi\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dv}, \frac{d^2x_1}{dv^2} \dots \frac{d^{n-1}x_1}{dv^{n-1}}, \frac{1}{v}\frac{d^nx_1}{dv^n}\right) = 0,$$

wo

$$v = \lg x^a$$

ist, und diese Gleichung kann auf eine von $n-1$ter Ordnung reducirt werden, wenn $\varphi$ in Bezug auf $x, x_1, \frac{dx_1}{dv} \dots \frac{d^{n-1}x_1}{dv^{n-1}}$ homogen ist. Diese Gleichung nimmt auch die Gestalt an:

$$\varphi\left[e^{\frac{v}{a}}, x_1, \frac{dx_1}{dv}, \frac{d^2x_1}{dv^2} \dots \frac{d^{n-1}x_1}{dv^{n-1}}, e^{-\frac{v}{a}}\frac{d^nx_1}{dv^n}\right] = 0.$$

Beispiel A. Es sei gegeben:

$$e^{-\frac{v}{a}}\frac{d^2x_1}{dv^2}\left(\frac{dx_1}{dv}\right)^2 - x_1 e^{\frac{v}{a}} + x_1\frac{dx_1}{dv} = 0.$$

Betrachtet man $e^{-\frac{v}{a}}\frac{d^2x_1}{dv^2}$ als eine besondere Grösse $z$, so ist die Gleichung in Bezug auf $x_1, \frac{dx_1}{dv}, e^{\frac{v}{a}}$, nicht aber in Bezug auf $z$ homogen, wie dies sein muss.

Die Reduction geschieht, indem wir setzen:

$$v = \lg x^a, \quad \frac{dx_1}{dv} = x_2,$$

so dass sich unsere Gleichung verwandelt in das System:

$$\frac{dx_1}{d\lg(x^a)} = x_2, \ \frac{1}{x}\frac{dx_2}{d\lg(x^a)} \left(\frac{dx_1}{d\lg(x^a)}\right)^2 - x_1 x + x_1 \frac{dx_1}{d\lg(x^a)} = 0.$$

Es sind nun die Substitutionen zu machen:

$$x_1 = y_1 x, \quad x_2 = y_2 x,$$

$$\frac{dx_1}{d\lg(x^a)} = \frac{x\,dx_1}{a\,dx} = \frac{x^2}{a}\frac{dy_1}{dx} + \frac{xy_1}{a},$$

$$\frac{dx_2}{d\lg(x^a)} = \frac{x\,dx_2}{a\,dx} = \frac{x^2}{a}\frac{dy_2}{dx} + \frac{xy_2}{a}.$$

Die Gleichungen des Systems werden also:

$$\frac{x}{a}\frac{dy_1}{dx} + \frac{y_1}{a} = y_2, \quad \left(\frac{x}{a}\frac{dy_2}{dx} + \frac{y_2}{a}\right) y^2{}_2 - y_1 + y_1 y_2 = 0.$$

Setzt man die aus beiden Gleichungen gezogenen Werthe von $\frac{a\,dx}{x}$ gleich, so erhält man:

$$\left(\left(y_2 - \frac{y_1}{a}\right)\frac{dy_2}{dy_1} + \frac{y_2}{a}\right) y_2{}^2 - y_1 + y_1\ y_2 = 0,$$

also in der That eine Gleichung erster Ordnung mit 2 Variablen.

Beispiel B. Es sei gegeben das System:

$$\varphi(x, x_1, x_2, \frac{dx_2}{dx}) = 0, \quad \frac{dx_1}{dx} = \frac{x_2}{u},$$

und

$$u = a x_1,$$

wo die Function $\varphi$ in Bezug auf $x$, $x_1$, $x_2$ homogen ist. Man hat dann:

$$\frac{dx_1}{dx} = \frac{x_2}{x_1} \quad \text{oder} \quad \frac{d(x_1{}^2)}{dx} = 2x_2,$$

und

$$\varphi\left(x, x_1, \tfrac{1}{2}\frac{d(x_1{}^2)}{dx}, \tfrac{1}{2}\frac{d^2(x_1{}^2)}{dx}\right) = 0,$$

oder was dasselbe ist:

$$\psi\left(x, x_1, \frac{d(x_1{}^2)}{dx}, \frac{d^2(x_1{}^2)}{dx}\right) = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich also immer auf eine von erster Ordnung reduciren, wenn $\psi$ in Bezug auf $x$, $x_1 \frac{d(x_1{}^2)}{dx}$ homogen ist.

Dass sich aus diesem Satze noch eine Menge anderer Resultate ziehen lassen, ist leicht ersichtlich.

II) Sei jetzt wieder ein System von der Form 1) gegeben; es sollen aber die Gleichungen nicht mehr in Bezug auf alle Variablen, sondern auf die abhängigen Variablen $x_1$, $x_2 \cdots x_n$ und ihre Differenzialquotienten, homogen sein. Noch dann gilt der Satz, dass sich das System auf eins mit einer Variablen weniger reduciren lässt. Offenbar nehmen nämlich in diesem Falle die Gleichungen 1) die Form an:

$$\varphi_s\left(x, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \cdots \frac{x_n}{x_1}, \frac{dx_1}{x_1 dx}, \frac{dx_2}{x_1 dx} \cdots \frac{dx_n}{x_1 dx}\right) = 0.$$

Hierin substituirt man:

$$x_2 = y_1 x_1, \ x_3 = y_2 x_1 \cdots x_n = y_{n-1} x_1,$$

und erhält:

$$\varphi_s(x, y_1, y_2 \cdots y_{n-1}, \frac{y_1}{x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{dy_1}{dx}, \frac{y_2}{x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \cdots, \frac{y_{n-1}}{x_1}\frac{dx_1}{dx} + \frac{dy_{n-1}}{dx}) = 0.$$

Aus einer dieser $n$ Gleichungen wird die Grösse $\frac{dx_1}{x_1 dx}$ gefunden und in die übrigen eingesetzt. Man hat dann $n-1$ Gleichungen mit $n$ Variablen:

$$x, y_1, y_2 \cdots y_{n-1},$$

nach deren Integration man erhält:

$$\frac{dx_1}{x_1 dx} = U, \quad \text{also} \quad \lg x_1 = \int U dx,$$

wo $U$ nur $x, y_1 \cdots y_{n-1}$ enthält, die sich also nach der Integration alle als Functionen einer Variablen $x$ ergeben. Schliesslich ist zu setzen:

$$x_2 = y_1 x_1 \cdots x_n = y_{n-1} x_1.$$

Beispiel A. Sei das System gegeben:

$$\frac{dx_1}{dx} = x_2, \frac{dx_2}{dx} = x_3 \cdots \frac{dx_{n-1}}{dx} = x_n,$$

$$\varphi(x, x_1, x_2 \cdots x_n, \frac{dx_n}{dx}) = 0,$$

wo $\varphi$ eine in Bezug auf $x_1, x_2 \cdots x_n \frac{dx_n}{dx}$ homogene Function sein soll. Die übrigen Gleichungen sind offenbar in Bezug auf die Variablen und ihre Differenzialquotienten ebenfalls homogen.

Man kann aber das System ersetzen durch die Gleichung:

$$\varphi(x, x_1, \frac{dx_1}{dx}, \frac{d^2x_1}{dx^2} \cdots \frac{d^n x_1}{dx^n}) = 0,$$

wo $\varphi$ in Bezug auf $x_1, \frac{dx_1}{dx}, \frac{d^2x_1}{dx^2} \cdots \frac{d^n x_1}{dx^n}$ homogen ist, und die Integration dieser Gleichung gelingt also mittels einer andern von der Ordnung $n-1$.

Beispiel B. Es sei gegeben:

$$\frac{d^2x_1}{dx^2} + \frac{A}{x}\frac{dx_1}{dx} + \frac{Bx_1}{x^2} = 0,$$

eine übrigens lineare Gleichung; wie denn alle linearen Gleichungen ohne Schlussglied nur einen besondern Fall der jetzt betrachteten bilden. Wir ersetzen sie durch das System:

$$\frac{dx_2}{dx} + \frac{A}{x}\frac{dx_1}{dx} + \frac{Bx_1}{x^2} = 0, \frac{dx_1}{dx} = x_2,$$

und indem wir einführen:

$$x_2 = y_1 x_1,$$

erhalten wir:

$$y_1 \frac{dx_1}{dx} + x_1 \frac{dy_1}{dx} + \frac{A}{x}\frac{dx_1}{dx} + \frac{Bx_1}{x^2} = 0,$$

$$\frac{dx_1}{dx} = y_1 x_1,$$

oder durch Einsetzen von:

$$\frac{1}{x_1}\frac{dx_1}{dx}=y_1,$$

aus der zweiten Gleichung in die erste:

$$y_1^2+\frac{dy_1}{dx}+\frac{A\,y_1}{x}+\frac{B}{x^2}=0.$$

Führen wir hier ein:

$$y_1=\frac{1}{ux},$$

so kommt:

$$\frac{1}{u^2x^2}-\frac{1}{u^2x^2}\left(u+x\frac{du}{dx}\right)+\frac{A}{ux^2}+\frac{B}{x^2}=0,$$

oder:

$$x\frac{du}{dx}=(A-1)\,u+Bu^2+1,$$

d. h.:

$$\lg x=\int\frac{du}{Bu^2+(A-1)u+1};$$

aus dieser Gleichung ist $x$ und folglich auch $y_1=\frac{1}{ux}$ als Function von $u$ bekannt. Vermittelst der Gleichung:

$$\frac{dx_1}{dx}=y_1\,x_1$$

erhält man dazu:

$$\lg x_1=\int y_1\,dx,\quad x_1=e^{\int y_1\,dx}.$$

Aus den Werthen von $x$ und $x_1$ ist dann $u$ zu eliminiren.

24) Ueber Systeme, die nicht homogen sind.

Eine Reduction tritt auch bei andern Formen von Differenzialgleichungen ein.

I. Möge ein System von der Form gegeben sein:

$$\varphi_1\left(x^{p_1}x_1,x^{p_2}x_2,x^{p_3}x_3\ldots x^{p_n}x_n,x^{p_1+1}\frac{dx_1}{dx},x^{p_2+1}\frac{dx_2}{dx}\ldots x^{p_n+1}\frac{dx_n}{dx}\right)=0,$$

$$\varphi_2\left(x^{p_1}x_1,x^{p_2}x_2,x^{p_3}x_3\ldots x^{p_n}x_n,x^{p_1+1}\frac{dx_1}{dx},x^{p_2+1}\frac{dx_2}{dx}\ldots x^{p_n+1}\frac{dx_n}{dx}\right)=0,$$

$$\vdots$$

$$\varphi_n\left(x^{p_1}x_1,x^{p_2}x_2,x^{p_3}x_3\ldots x^{p_n}x_n,x^{p_1+1}\frac{dx_1}{dx},x^{p_2+1}\frac{dx_2}{dx}\ldots x^{p_n+1}\frac{dx_n}{dx}\right)=0,$$

wo die Exponenten $p_1, p_2 \ldots p_n$ beliebige Zahlen sind.

Es lässt sich auch dies System auf eins mit einer Variablen weniger reduciren. Zu dem Ende setzen wir:

$$x_1 = \frac{u_1}{x^{p_1}},\ x_2 = \frac{u_2}{x^{p_2}} \ldots x_n = \frac{u_n}{x^{p_n}},$$

und erhalten ein neues System von der Gestalt:

$$\varphi_2\left(u_1,\ u_2 \ldots u_n,\ x\frac{du_1}{dx} + p_1 u_1,\ x\frac{du_2}{dx} + p_2 u_2 \ldots x\frac{du_n}{dx} + p_n u_n\right) = 0.$$

Diese Gleichungen geben die Grössen $x\frac{du_1}{dx},\ x\frac{du_2}{dx} \ldots x\frac{du_n}{dx}$ als Functionen von $u_1$ allein. Durch Division jedes dieser Ausdrücke durch einen davon erhält man die Grössen $\frac{du_2}{du_1} \ldots \frac{du_n}{du_1}$ als Functionen der $u$. Nach der Integration dieser Gleichungen ergibt sich dann:

$$\frac{dx}{x} = V du_1,\ \lg x = \int V du_1,$$

wo dann auch $x_1,\ x_2 \ldots x_n$ bekannt sind.

Anwendung. Nehmen wir den Fall, in welchem das System:

$$\frac{dx_1}{dx} = x_2,\ \frac{dx_2}{dx} = x_3 \ \ldots\ \frac{dx_{n-1}}{dx} = x_n,$$

$$\varphi\left(x,\ x_1,\ x_2 \ldots x_n,\ \frac{dx_n}{dx}\right) = 0,$$

oder die Gleichung:

$$\varphi\left(x,\ x_1,\ \frac{dx_1}{dx},\ \frac{d^2x_1}{dx^2} \ldots \frac{d^nx_1}{dx^n}\right) = 0$$

die obige Bedingung erfüllt. Offenbar ist dies immer bei den $n-1$ ersten Gleichungen der Fall, wenn man setzt:

$$p_2 = p_1 + 1,\ p_3 = p_1 + 2 \ldots p_n = p_1 + n - 1,$$

denn diese Gleichungen lassen sich auch schreiben:

$$x^{p_1+1}\frac{dx_1}{dx} = x^{p_1+1}x_2,\ x^{p_1+2}\frac{dx_2}{dx} = x^{p_1+2}x_3 \ldots x^{p_1+n-1}\frac{dx_{n-1}}{dx} = x^{p_1+n-1}\frac{dx_n}{dx}.$$

Es kommt also nur auf die letzte Gleichung an, welche die Form haben muss:

$$f\left(x^{p_1}x_1,\ x^{p_1+1}x_2,\ x^{p_1+2}x_3 \ldots x^{p_1+n-1}x_n,\ x^{p_1+n}\frac{dx_n}{dx}\right) = 0$$

oder:

$$f\left(x^{p_1}x_1,\ x^{p_1+1}\frac{dx_1}{dx},\ x^{p_1+2}\frac{d^2x_1}{dx^2} \ldots x^{p_1+n}\frac{d^nx_1}{dx^n}\right) = 0.$$

$p_1$ ist eine ganz beliebige Zahl. — Nehmen wir z. B. an, es wäre $p_1 = -1$, so ergibt sich:

$$f\left(\frac{x_1}{x},\ \frac{dx_1}{dx},\ x\frac{d^2x_1}{dx^2} \ldots x^{n-1}\frac{d^nx_1}{dx^n}\right) = 0.$$

In diesem Falle lässt sich der Bedingung auch eine andere Form geben. Da sich nämlich jede homogene Gleichung zwischen $y, y_1, y_2 \ldots y_n$ auf die Form bringen lässt:

$$x^p \varphi\left(\frac{y_1}{y}, \frac{y_2}{y} \ldots \frac{y_n}{y}\right)=0, \quad \text{oder} \quad \varphi\left(\frac{y_1}{y}, \frac{y_2}{y} \ldots \frac{y_n}{y}\right)=0,$$

so wird jede in Bezug auf die Variablen $x, x_1, x_2 \ldots x_n$, und auf die Differenziale $dx, dx_1, d^2x_1 \ldots d^nx_1$ (nicht auf die Differenzialquotienten) homogene Gleichung die Form annehmen:

$$f\left(\frac{x_1}{x}, \frac{\frac{dx_1}{x}}{\frac{dx}{x}}, \frac{\frac{d^2x_1}{x}}{\frac{dx^2}{x^2}} \cdots \frac{\frac{d^nx_1}{x}}{\frac{dx^n}{x^n}}\right)=0,$$

d. h.:

$$f\left(\frac{x_1}{x}, \frac{dx_1}{dx}, x\frac{d^2x_1}{dx^2} \ldots x^{n-1}\frac{d^{n-1}x_1}{dx^n}\right)=0,$$

also die obige Form. Man hat also auch den Satz: „dass jede in Bezug auf alle Variablen und die Differenziale homogene Gleichung um eine Ordnung erniedrigt werden kann."

Beispiele. Sei gegeben:

$$nx^2 d^2y=(x\,dy-y\,dx)^2,$$

eine in Bezug auf $x$, $y$, $dx$, $dy$, $d^2y$ homogene Gleichung vierter Ordnung.

Wir schreiben sie zunächst unter der gewöhnlichen Gestalt:

$$nx^3\frac{d^2y}{dx^2}=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2$$

und vertauschen sie mit dem Systeme:

$$\frac{dy}{dx}=y_1, \quad nx^3\frac{dy_1}{dx}=(xy_1-y)^2.$$

Da hier $p_1=-1$ ist, setzen wir:

$$y=u_1x, \quad y_1=u_2,$$

und erhalten:

$$x\frac{du_1}{dx}+u_1=u_2, \quad nx\frac{du_2}{dx}=(u_2-u_1)^2,$$

oder:

$$\frac{dx}{x}=\frac{du_1}{u_2-u_1}=n\frac{du_2}{(u_2-u_1)^2},$$

also:

$$(u_2-u_1)\,du_1=n\,du_2;$$

setzt man noch:

$$u_2-u_1=v,$$

so erhält man:

$$v\,du_1=n\,dv+n\,du_1,$$

$$\frac{n\,dv}{v-n}=du_1, \quad u_1=\lg c(v-n)^n,$$

d. h.:

$$e^{\frac{y}{x}}=c(v-n)^n,$$

wenn man wieder setzt:

$$u_1 = \frac{y}{x}.$$

Es war ferner:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du_1}{u_2 - u_1} = \frac{du_1}{v} = \frac{n\,dv}{v(v-n)} = \frac{dv}{v-n} - \frac{dv}{v},$$

also:

$$\lg x = \lg \frac{h(v-n)}{v}, \; xv = h(v-n),$$

wo $h$ die Integrationsconstante ist. Aus dieser Gleichung und aus $e^{\frac{y}{x}} = c(v-n)^n$ ist $v$ zu eliminiren. Es kommt:

$$e^{\frac{y}{x}} = c\frac{x^n n^n}{(h-x)^n},$$

eine Gleichung, die 2 willkürliche Constanten $c$ und $h$ enthält.

Sei ferner gegeben:

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = my\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Offenbar erfüllt diese Gleichung die verlangte Bedingung. Wir nehmen dafür das System:

$$1 + \frac{dy^2}{dx^2} = my\frac{dy_1}{dx}, \; \frac{dy}{dx} = y_1,$$

und substituiren wie oben:

$$y = ux,$$

da die Gleichung $y_1 = u_2$ nichts Neues gibt. Wir erhalten:

$$1 + \left(x\frac{du}{dx} + u\right)^2 = mux\frac{dy_1}{dx}, \; x\frac{du}{dx} + u = y_1.$$

Aus der zweiten Gleichung ziehen wir:

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{y_1 - u},$$

und indem wir dies in die erste setzen:

$$1 + y_1^2 = mu(y_1 - u)\frac{dy_1}{du},$$

d. h.:

$$\frac{du}{y_1 - u} = \frac{mu\,dy_1}{1 + y_1^2} = \frac{dx}{x}.$$

Wir führen hier indess wieder ein:

$$\frac{y}{x} = u, \; dx = \frac{dy}{y_1},$$

und erhalten:

$$\frac{my\,dy_1}{1 + y_1^2} = \frac{dy}{y_1},$$

d. h.:

$$m\frac{y_1 dy_1}{1 + y_1^2} = \frac{dy}{y},$$

$$y = c(1 + y_1^2)^{\frac{m}{2}},$$

oder:

$$y_1{}^2 = \left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{m}} - 1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2,$$

also:

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{m}} - 1}}, \quad x = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\frac{2}{m}} - 1}}.$$

II. Seien wieder $n$ Gleichungen mit $n+1$ Variablen $x, x_1, x_2 \ldots x_n$ und ihren Differenzialen gegeben.

Setzen wir voraus, dass alle eine der Grössen $x_s$ nicht selbst, sondern nur ihr Differenzial enthalten, so kann man $dx_s$ eliminiren, und man hat $n-1$ Gleichungen mit $n$ Variablen, nach deren Integration $x_s$ sich durch Quadratur ergibt. — Sind in den Gleichungen $t$ Variable $x_s, x_{s+1} \ldots x_{s+t-1}$ nicht selbst enthalten, so ergeben sich durch Elimination ihrer Differenziale $n-t$ Gleichungen mit $n-t+1$ Variablen, nach deren Integration man noch $t$ Quadraturen hat, welche sich vermittelst der Gleichungen ergeben, welche für $dx_s$, $dx_{s+1} \ldots dx_{s+t-1}$ gefunden werden. Es tritt aber auch schon dann eine Reduction ein, wenn von den $n$ Gleichungen nur $n-t$ von $x_s, x_{s+1} \ldots x_{s+t-1}$ zugleich aber auch von ihren Differenzialen frei sind. Denn es enthalten dann diese $n-t$ Gleichungen nur $n-t+1$ Variable, können also integrirt werden. Die übrigen $t$ Gleichungen enthalten dann, wenn man nach der Integration aus den Integralgleichungen die Grössen $x, x_1 \ldots x_{s-1}, x_{s+t} \ldots x_n$ als Functionen von $x$ bestimmt noch $s+1$ Variablen, und das System zerfällt in diesem Falle in eins von $n-t$ und eins von $t$ Gleichungen, oder in eine Gleichung $n-t$ter und eine $t$ter Ordnung.

Anwendungen. 1) Die Gleichung $n$ter Ordnung mit 2 Variablen:

$$f\left(x, \frac{d^s x_1}{dx^s}, \frac{d^{s+1}x_1}{dx^{s+1}} \ldots \frac{d^n x_1}{dx^n}\right) = 0,$$

verwandelt sich offenbar durch die Substitution:

$$\frac{d^s x_1}{dx^s} = y,$$

in eine $n-s$ter Ordnung:

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx} \ldots \frac{d^{n-s}y}{dx^{n-s}}\right),$$

nach deren Integration gefunden wird:

$$x_1 = \int^{(s)} y\, dx^s,$$

wo $\int^{(s)}$ das $s$fache Integral von $y$ nach $dx$ vorstellt.

Ist im Besondern die Gleichung:

$$f\left(\frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}}, \frac{d^n x_1}{dx^n}\right) = 0$$

gegeben, so ist zu setzen:

$$\frac{d^{n-1}x_1}{dx^{n-1}} = y,$$

$$f\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

eine Gleichung, die immer auf Quadraturen führt, da sich daraus:

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y), \quad dx = \frac{dy}{\varphi(y)}$$

ergibt.

2) Da von den Gleichungen:

$$\frac{dx_1}{dx} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dx} = x_3 \ldots \frac{dx_{n-1}}{dx} = x_n,$$

$$f\left(x, x_1, x_2 \ldots x_n, \frac{dx_n}{dx}\right) = 0,$$

welche einer Gleichung $n$ter Ordnung gleichbedeutend sind, die $n-1$ ersten $x$ und $x_1$ selbst nicht enthalten, so wird die Gleichung immer um eine Ordnung niedriger, wenn $x$ oder $x_1$ auch in der Gleichung:

$$f\left(x, x_1, \frac{dx_1}{dx} \ldots \frac{dx_n}{dx}\right) = 0$$

nicht vorkommen, diese also die Gestalt hat:

$$f\left(x_1, \frac{dx_1}{dx}, \frac{d^2x_1}{dx^2} \dots \frac{d^nx_1}{dx^n}\right) = 0,$$

oder:

$$f\left(x, \frac{dx_1}{dx}, \frac{d^2x_1}{dx^2} \dots \frac{d^nx_1}{dx^n}\right) = 0.$$

Die letzte Form ist jedoch schon in 1) enthalten. Fehlen $x$ und $x_1$ gleichzeitig, hat man also:

$$f\left(\frac{dx_1}{dx}, \frac{d^2x_1}{dx^2} \dots \frac{d^nx_1}{dx^n}\right) = 0,$$

so tritt eine Reduction um 2 Einheiten ein.

„Allgemein aber lässt sich die Gleichung:

$$f\left(\frac{d^sx_1}{dx^s}, \frac{d^{s+1}x_1}{dx^{s+1}}, \frac{d^{s+2}x_1}{dx^{s+2}} \dots \frac{d^nx_1}{dx^n}\right) = 0,$$

auf eine von $n-s-1$ter Ordnung reduciren, also auf eine um eine Einheit niedrigere, wie die in 1) betrachtete Gleichung."

Denn setzen wir:

$$\frac{d^sx_1}{dx^s} = x_{s+1}, \quad \frac{d^{s+1}x_1}{dx^s} = x_{s+2} \dots \frac{d^{n-1}x_1}{dx^n} = x_n,$$

so hat man:

$$f\left(x_{s+1}, x_{s+2} \dots x_n, \frac{dx_n}{dx}\right) = 0.$$

Es ist aber:

$$\frac{dx_{s+1}}{dx} = x_{s+2}, \quad \frac{dx_{s+2}}{dx} = x_{s+3} \dots \frac{dx_{n-1}}{dx} = x_n,$$

oder wenn man alle diese Gleichungen durch die erste dividirt:

$$\frac{dx_{s+2}}{dx_{s+1}} = \frac{x_{s+3}}{x_{s+2}}, \quad \frac{dx_{s+3}}{dx_{s+1}} = \frac{x_{s+1}}{x_{s+2}} \dots \frac{dx_{n-1}}{dx_{s+1}} = \frac{x_n}{x_{s+2}}.$$

Es sind dies $n-s-2$ Gleichungen, welche verbunden werden mit $f=0$, aus welcher Gleichung man $dx$ mittels $\frac{dx_{s+1}}{dx} = x_{s+2}$ eliminirt.

Es ergibt sich:

$$f\left(x_{s+1}, x_{s+2} \dots x_n, x_{s+2}\frac{dx_n}{dx_{n-1}}\right) = 0.$$

Man hat also $n-s-1$ Gleichung mit $n-s$ Variablen, welche sich auf eine von $n-s-1$ter Ordnung zurückführen lassen.

3) Ist namentlich gegeben die Gleichung:

$$f\left(\frac{d^{n-2}x_1}{dx^{n-2}}, \frac{d^nx_1}{dx^n}\right) = 0,$$

so kann man sie ersetzen durch das System:

$$f\left(x_{n-1}, \frac{dx_n}{dx}\right) = 0, \quad \frac{dx_{n-1}}{dx} = x_n,$$

und wenn man aus der zweiten Gleichung in die erste substituirt:

$$f\left(x_{n-1},\ x_n\ \frac{dx_n}{dx_{n-1}}\right) = 0.$$

Aus dieser Gleichung aber kann man erhalten:

$$x_n\ \frac{dx_n}{dx_{n-1}} = \varphi\,(x_{n-1}),$$

eine Gleichung, deren Auflösung sogar durch Quadraturen gelingt.

Beispiele. Sei gegeben die Gleichung:

$$\left(1+\frac{dy^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}} = a\,\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Diese Gleichung ist von $x$ und $y$ frei, sie muss also, wie in 1) dargethan, auf Quadraturen führen.

Setzt man in der That

$$\frac{dy}{dx} = u,$$

so folgt:

$$(1+u^2)^{\frac{3}{2}} = a\,\frac{du}{dx},$$

$$dx = \frac{a\,du}{\sqrt{(1+u^2)^3}},$$

d. h.:

$$x = \frac{au}{\sqrt{(1+u^2)}} + C.$$

Mittels der Gleichung:

$$dy = u\,dx = \frac{a\,u\,du}{\sqrt{(1+u^2)^3}}$$

erhält man aber:

$$y = -\frac{a}{\sqrt{(1+u^2)}} + C_1.$$

Aus dieser Gleichung und der für $x$ ist $u$ zu eliminiren. Das Resultat ist:

$$(x-C)^2+(y-C_1)^2 = a^2.$$

Sei ferner gegeben:

$$x^3\,\frac{d^3y}{dx^3} = a\left(\frac{d^2y}{dx^2}+1\right)^2,$$

so setzen wir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u,$$

und es ergibt sich:

$$x^3\,\frac{du}{dx} = a\,(u+1)^2,$$

$$\frac{du}{a\,(u+1)^2} = \frac{dx}{x^3},\ \text{d. h.: } a(u+1) = \frac{c^2}{c+x},$$

oder:

$$a\,u = c - a - \frac{c^2}{c+x},$$

$$y = \frac{1}{a}\iint u\,dx\,dx = \frac{1}{a}\int[x(c-a) - c^2\lg(c+x) + c_1]\,dx,$$

$$= c_1x + (c-a)\frac{x^2}{2a^2} - \frac{c^2}{a^2}(x+c)\lg(x+c) + \frac{c^2x}{a^2} + c_2.$$

25) **Erhöhung der Ordnung einer Gleichung.**

Wir haben bis jetzt Fälle betrachtet, wo ein System von Differenzialgleichungen sich auf eins reduciren lässt, welches eine Variable weniger enthält. Es ist jedoch nicht immer gut gethan, diese Reduction auch wirklich auszuführen, da sie oft die charakteristischen Eigenschaften der vorgelegten Gleichungen verdunkelt. Ja in manchen Fällen ist es sogar besser, wenn man ein System in ein anderes verwandelt, das eine Variable mehr enthält, also entsprechend eine Gleichung $n$ter Ordnung zwischen zwei Variablen in eine Gleichung $n+1$ter Ordnung. Es geschieht dadurch zuweilen, dass die neue Gleichung leichter integrirt werden kann, sei es in Gestalt schon bekannter Functionen, oder in Gestalt von Reihen oder bestimmten Integralen. Wird aber auch dies nicht erreicht, so kann die Erhöhung der Ordnung möglicher Weise dazu dienen, charakteristische Eigenschaften an dem vorgelegten Systeme zu entdecken. Dies geschieht z. B. oft dann, wenn die vorgelegte Gleichung nicht linear ist, man aber durch Erhöhung des Grades zu einer linearen Gleichung gelangen kann.

Wir wollen uns hier z. B. die Aufgabe stellen, diejenigen Gleichungen erster Ordnung zwischen zwei Variablen zu ermitteln, welche durch Transformation in eine lineare Gleichung zweiter Ordnung ohne Schlussglied übergehen. — Wenn man in die allgemeine lineare Gleichung:

1) $$\frac{d^2u}{dx^2} + \alpha\,\frac{du}{dx} + \beta u = 0,$$

wo unter $\alpha$ und $\beta$ Functionen von $x$ gedacht werden, einsetzt:

$$u = e^{ay},$$

wo $a$ eine Constante ist, so verwandelt sich diese Gleichung in die folgende:

$$a\varepsilon^{ay}\frac{d^2y}{dx^2}+a^2e^{ay}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+a\alpha e^{ay}\frac{dy}{dx}+\beta e^{ay}=0,$$

oder:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\alpha\frac{dy}{dx}+\frac{\beta}{a}=0,$$

oder wenn man setzt:

$$\frac{dy}{dx}=z,\ \frac{\beta}{a}=\gamma,$$

2) $$\frac{dz}{dx}+az^2+\alpha z+\gamma=0$$

Umgekehrt lässt sich also diese letzte Gleichung erster Ordnung, die nur dann linear ist, wenn $a=0$ ist, und wo $\alpha$ und $\gamma$ willkürliche Functionen von $x$ sind, stets in eine lineare zweiter Ordnung verwandeln, wenn man setzt:

$$z=\frac{1}{a}\ \frac{d\lg u}{dx},\ \text{d. h.:}\ \ z=\frac{du}{audx}.$$

Ein besonderer Fall der Gleichung 2) ist z. B. die Riccatische Gleichung, die wir in Abschnitt 7) betrachtet haben. Im Allgemeinen aber lassen sich aus diesem Resultate für die Gleichungen von der Form 2) manche Folgerungen ziehen. — Hat man nämlich 2 particle Integrale der Gleichung 1):

$$u=f(x)\ \text{ und }\ u=\varphi(x),$$

so ist das allgemeine Integral:

$$u=Af(x)+B\varphi(x),$$

wo $A$ und $B$ willkürliche Constanten sind, und das allgemeine Integral der Gleichung 2) ergibt sich aus der Gleichung:

$$z=\frac{1}{a}\ \frac{du}{udx},$$

nämlich:

$$z=\frac{f'(x)+c\varphi'(x)}{a[f(x)+c\varphi(x)]},$$

wo:

$$c=\frac{B}{A}$$

gesetzt wurde, und $f'(x)$, $\varphi'(x)$ die Differenzialquotienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$ vorstellen. Dies Integral enthält also, wie dies sein muss, nur eine Constante.

Für die Riccatische Gleichung ist zu setzen:

$$\alpha=0,\quad \gamma=-bx^m;$$

die zugehörige Gleichung zweiter Ordnung ist also:

$$\frac{d^2u}{dx^2}=g\,x^m,$$

wo

$$g=ba$$

ist.

Es kann diese Erhöhung der Ordnung sogar gerathen sein in Bezug auf Gleichungen, die sich durch Trennung der Variablen unmittelbar auf Quadraturen zurückführen lassen. Es ist nämlich möglich, dass dem Integrale der vorliegenden Gleichung statt der transcendenten, scheinbar nicht weiter reducirbaren Form der Quadratur eine einfachere Form gegeben werden kann, welche eben durch Erhöhung der Ordnung erhalten wird.

Das beste Beispiel zu diesem Verfahren ist die Art, wie La Grange das Additionstheorem der elliptischen Transcendenten ableitet. (Siehe den Artikel: Elliptische Transcendenten). Sie muss daher an dieser Stelle dargestellt werden.

Liege zur Integration vor die Gleichung erster Ordnung:

3) $$\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}}+\frac{d\psi}{\sqrt{(1-k^2\sin\psi^2)}}=0,$$

in welcher die Variablen getrennt sind.

Bezeichnen wir den Ausdruck:

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)}},$$

mit $F(\varphi)$, wo $F(\varphi)$ bekanntlich nicht auf andere Transcendenten oder algebraische Functionen reducirt werden kann, so ist das Integral unserer Gleichung:

$$F(\varphi)+F(\psi)=c.$$

Zur Bestimmung der Constante $c$ bemerken wir, dass für $\varphi=0$ auch $F(\varphi)=0$ wird. Entspreche diesem Werthe:

$$\psi=\alpha,$$

so ist also:

$$F(\alpha)=c,$$

und:

$$F(\varphi)+F(\psi)=F(\alpha).$$

Wir suchen aber jetzt durch andere Betrachtungen dem Integrale von 3) eine nicht mehr transcendente Gestalt zu geben. Zu dem Ende führen wir eine Grösse $t$ ein durch die Gleichung:

$$\frac{d\varphi}{dt}=\sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)},$$

und die Gleichung 3) zerfällt dann in das System:

4) $$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{(1-k^2\sin\varphi^2)},\quad \frac{d\psi}{dt} = -\sqrt{(1-k^2\sin\psi^2)}.$$

Da von $t$ nur das Differenzial vorkommt, so können wir den Anfangswerth dieser Grösse beliebig nehmen, und setzen daher fest, dass für $\varphi=0$ auch $t=0$ sein soll.

Die Gleichungen 4) nehmen die Gestalt an:

5) $$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = 1-k^2\sin\varphi^2,\quad \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 1-k^2\sin\psi^2.$$

Durch Subtraction der zweiten von der ersten ergibt sich:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = -k^2(\sin\varphi^2 - \sin\psi^2).$$

Der Theil links nimmt auch die Form an:

$$\frac{d(\varphi+\psi)}{dt}\,\frac{d(\varphi-\psi)}{dt};$$

setzen wir also:

$$\varphi+\psi = u,\quad \varphi-\psi = v,$$

woraus sich ergibt:

$$\sin\varphi - \sin\psi = 2\cos\frac{u}{2}\sin\frac{v}{2},$$

$$\sin\varphi + \sin\psi = 2\sin\frac{u}{2}\cos\frac{v}{2},$$

$$\sin\varphi^2 - \sin\psi^2 = \sin u \sin v,$$

so wird unsere Gleichung:

6) $$\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} = -k^2\sin u \sin v.$$

Um nun, wie angedeutet, den Grad der Gleichungen 5) zu erhöhen, müssen dieselben differenziirt werden:

7) $$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -k^2\sin\varphi\cos\varphi,\quad \frac{d^2\psi}{dt^2} = -k^2\sin\psi\cos\psi.$$

Diese Gleichungen werden addirt und subtrahirt, wobei wir die Relationen berücksichtigen:

$$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi = \sin(u+v),$$

$$2\sin\psi\cos\psi = \sin 2\psi = \sin(u-v),$$

8) $$\frac{d^2u}{dt^2} = -k^2\sin u\cos v,\quad \frac{d^2v}{dt^2} = -k^2\sin v\cos u.$$

Die Gleichungen 7) und 8) bilden ein System von 3 Gleichungen mit 4 Variablen, welches sich leicht integriren lässt. Dividiren wir nämlich die Gleichungen 8) beide durch die Gleichung 6), so ergibt sich:

9) $$\frac{\frac{d^2u}{dt^2}}{\frac{du}{dt}} = \frac{\cos v}{\sin v}\frac{dv}{dt},\quad \frac{\frac{d^2v}{dt^2}}{\frac{dv}{dt}} = \frac{\cos u}{\sin u}\frac{du}{dt},$$

d. h.:

$$d\left(\lg\frac{du}{dt}\right) = d(\lg\sin v),\quad d\left(\lg\frac{dv}{dt}\right) = d(\lg\sin u).$$

Man hat also zwei erste Integrale:

10) $$\frac{du}{dt} = A\sin v,\quad \frac{dv}{dt} = B\sin u,$$

wo $A$ und $B$ Integrationsconstanten sind. Wir bemerken, dass für

$$\varphi = 0, \quad \psi = \alpha$$

wurde, und dass somit:

$$u = \alpha, \quad v = -\alpha$$

sich für diesen Fall ergibt.

Es ist ferner, wenn man die Gleichungen 4) berücksichtigt, in diesem Falle:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 1, \quad \frac{d\psi}{dt} = -\sqrt{(1-k^2 \sin\alpha^2)},$$

also:

$$\frac{du}{dt} = 1 - \sqrt{(1-k^2 \sin\alpha^2)}, \quad \frac{dv}{dt} = 1 + \sqrt{(1-k^2 \sin\alpha^2)},$$

oder wenn man diese Werthe mit den Gleichungen 10) vergleicht:

$$A = \frac{1-\sqrt{(1-k^2 \sin\alpha^2)}}{\sin\alpha}, \quad B = \frac{-1-\sqrt{(1-k^2 \sin\alpha^2)}}{\sin\alpha}.$$

Aus den Gleichungen 10) lässt sich aber $t$ eliminiren, indem man den Quotienten beider Gleichungen nimmt:

11) $$B \sin u\, du = A \sin v\, dv,$$

was zu dem Integral führt:

12) $$B \cos u = A \cos v + C.$$

Zur Bestimmung von $C$ setzt man wieder:

$$\varphi = 0, \quad u = \alpha, \quad v = -\alpha,$$

und erhält:

$$(B-A)\cos\alpha = C,$$

oder mit Berücksichtigung der Werthe von $A$ und $B$:

$$C = -\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

In die Gleichung 12) sind noch die Werthe von $u$ und $v$ einzuführen:

$$B\cos(\varphi+\psi) = A\cos(\varphi-\psi) + C,$$

oder:

$$(B-A)\cos\varphi\cos\psi - (B+A)\sin\varphi\sin\psi = C,$$

oder wenn man für $A$ und $B$ substituirt und den Ausdruck:

$$\sqrt{(1-k^2 \sin\alpha^2)} \text{ mit } \triangle\alpha$$

bezeichnet:

13) $$\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\triangle\alpha = \cos\alpha.$$

Diese merkwürdige Formel gibt also das Integral der Gleichung 3) als algebraische Function von $\sin\varphi$ und $\sin\psi$. Sie bildet den Ausgangspunkt der Theorie der elliptischen Transcendenten.

26) **Integration einer Differenzialgleichung erster Ordnung mit zwei Variablen durch Reihen.**

Die im Abschnitt 9) Satz B. gegebenen Betrachtungen gewähren die Möglichkeit, die Integrale eines Systems von $n$ Gleichungen mit $n+1$ Variablen näherungsweise zu integriren. Die Anfangswerthe, welche die Integrationsconstanten bestimmen, sind dabei immer so zu wählen, dass die Functionen, welche in den vorgelegten Differenzialgleichungen vorkommen, bei dem gewählten Integrationswege nicht durch Discontinuitäts- oder mehrfache Punkte gehen. Bei dieser Vorsicht ist es aber auch möglich, den Integralen die Form von Potenzreihen, welche convergiren müssen, zu geben, und ist diese Form im Allgemeinen die zweckmässigste. Es ist der Beweis der Allgemeingültigkeit dieser Form hier zunächst zu führen. Wir thun dies nach Briot und Bouquet (*théorie des fonctions doublement périodiques*).

Wenn die Function $f(x)$ der complexen Variablen $x$ continuirlich und eindeutig bleibt innerhalb eines Kreises und auf dessen Peripherie, dessen Mittelpunkt dem Werthe $x = x_0$ ent-

spricht, *) und dessen Radius $r$ sein möge, so hat man nach einem von Cauchy herrührenden Satze (vergleiche den Artikel: Quantitäten):

$$\frac{d^n f(x_0)}{dx_0^{\,n}} = \frac{1\cdot 2 \ldots n}{r^n}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0 + r e^{\vartheta i})\, e^{-n\vartheta i} d\vartheta.$$

Sei die Constante $M$ grösser als der grösste Werth, welchen der Modul von $f(x_0 + r e^{\vartheta i})$ innerhalb der Integrationsgrenzen annehmen kann, so ist offenbar:

$$\operatorname{mod}\frac{d^n f(x_0)}{dx_0^{\,n}} < \frac{1\cdot 2 \ldots n}{r^n}\,\frac{M}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\vartheta,$$

d. h.:

1)
$$\operatorname{mod}\frac{d^n f(x_0)}{dx_0^{\,n}} < \frac{1\cdot 2 \ldots n \cdot M}{r^n}.$$

Die Function $f(x, y, z)$ soll endlich und continuirlich bleiben, so lange jede der als complex zu denkenden Variablen $x$, $y$, $z$ sich innerhalb eines Kreises, bezüglich mit Mittelpunkt $x_0$, $y_0$, $z_0$ und mit dem Radius $r$, $r'$, $r''$, oder auf dessen Peripherie befindet. Sei ferner $M$ der grösste Werth, welchen der Modul von $f(x, y, z)$ in diesen Grenzen annehmen kann, so ist nach dem vorhin angeführten Cauchy'schen Satze:

$$\frac{d^{n+n'+n''} f(x_0, y_0, z_0)}{dx_0^{\,n} dy_0^{\,n'} dz_0^{\,n''}} = 1\cdot 2 \ldots n \cdot 1\cdot 2 \ldots n' \cdot 1 \cdot 2 \ldots n''\, \frac{r^{-n} r'^{-n'} r''^{-n''}}{(2\pi)^3}$$

$$\times \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x_0 + r e^{\vartheta i},\ y_0 + r' e^{\vartheta' i},\ z_0 + r'' e^{\vartheta'' i})$$

$$e^{-(n\vartheta + n'\vartheta' + n''\vartheta'')i} d\vartheta\, d\vartheta'\, d\vartheta'',$$

und wenn man jedes Element des Integrals durch die Grösse $M\,d\vartheta\,d\vartheta'\,d\vartheta''$, welche grösser als der Modul ist, ersetzt, erhält man:

2)
$$\operatorname{mod}\frac{d^{n+n'+n''} f(x_0, y_0, z_0)}{dx_0^{\,n} dy_0^{\,n'} dz_0^{\,n''}} < 1\cdot 2 \ldots n \cdot 1 \cdot 2 \ldots n' . 1 . 2 \ldots n''\, \frac{M}{r^n r'^{n'} r''^{n''}}.$$

Es gibt eine Function, deren partielle Differenzialquotienten für $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ Werthe haben, welche den eben gegebenen Grenzwerthen der Module von $f(x, y, z)$ gleich sind.

Die Function:

3)
$$\varphi(x, y, z) = \frac{M}{\left(1 - \frac{x - x_0}{r}\right)\left(1 - \frac{y - y_0}{r'}\right)\left(1 - \frac{z - z_0}{r''}\right)}$$

lässt sich nämlich offenbar in eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ entwickeln, so lange die Module von $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ bezüglich kleiner als $r$, $r'$, $r''$ sind. Das allgemeine Glied dieser Reihe aber ist:

$$\frac{M(x - x_0)^n (y - y_0)^{n'} (z - z_0)^{n''}}{r^n r'^{n'} r''^{n''}},$$

und nach dem Taylorschen Satze ist somit:

---

*) Wir erinnern, dass, wenn man $x = p + qi$ setzt, $p$ und $q$ als rechtwinklige Coordinaten zu betrachten sind, und die Grösse $r = \sqrt{(p^2 + q^2)}$ der analytische Modul von $x$ ist.

$$\frac{d^{n+n'+n''}\varphi(x_0, y_0, z_0)}{dx_0^{\,n}\,dy_0^{\,n'}\,dz_0^{\,n''}} = 1.2\ldots n.1.2\ldots n'.1.2\ldots n''\frac{M}{r^n r'^{n'} r''^{n''}}.$$

Wir betrachten jetzt zunächst die Differenzialgleichung erster Ordnung mit 2 Variablen:

4) $$\frac{du}{dz} = f(z, u).$$

Um die Constante zu bestimmen, setzen wir fest, dass für

$$z = z_0,\ u = u_0$$

sein soll, und wählen diese Werthe so, dass in der Umgebung derselben $f(z, u)$ eindeutig und continuirlich ist. — Setzen wir der Einfachheit wegen:

$$z - z_0 = x,\quad u - u_0 = v,\quad f(z, u) = F(x, v).$$

Es wird dann der Anfangswerth von $v$ für $x = 0$ auch $= 0$ sein. Setzen wir fest, dass $F(x, v)$ oder $\frac{dv}{dx}$ eindeutig und continuirlich bleibe für alle Werthe von $v$ und $x$ innerhalb der Kreise, welche mit den bezüglichen Radien $\varrho$ und $r$ vom Anfangspunkte der Coordinaten aus, welcher $x = 0$ und $v = 0$ entspricht, gezogen sind, so wie auf den Peripherien dieser Kreise selbst. Sei ferner $M$ der grösste Modul, welchen in diesem Gebiete die Function $F$ hat. Besitzt die Differenzialgleichung ein Integral, so findet man durch Differensiiren:

5) $$\frac{dv}{dx} = F(x, v),\ \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx},$$

$$\frac{d^3v}{dx^3} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial v}\frac{dv}{dx} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{d^2v}{dx^2}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

Nehmen wir jetzt die Differenzialgleichung:

6) $$\frac{dw}{dx} = \varphi(x, w) = \frac{M}{\left(1-\frac{x}{\varrho}\right)\left(1-\frac{w}{r}\right)},$$

in welcher für $x = 0$ auch $w = 0$ sein soll.

Ganz ebenso wie oben erhält man:

7) $$\frac{dw}{dx} = \varphi(x, w),\ \frac{d^2w}{dx^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{dw}{dx},$$

$$\frac{d^3w}{dx^3} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial w} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial w^2}\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{d^2w}{dx^2}$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

so lange die Gleichung 6) ein eindeutiges und continuirliches Integral hat.

Macht man $x = 0$ und $w = 0$, so nehmen $\varphi$ und seine partiellen Differenzialquotienten reelle und positive Werthe an, und aus Betrachtung der Gleichungen 7) ersieht man leicht, dass auch $\frac{dw}{dx}$, $\frac{d^2w}{dx^2}$, $\frac{d^3w}{dx^3}$ . . . reell und positiv sein müssen, wenn man $x = 0$ setzt.

Vergleicht man nun die Gleichungen 5) und 7), so sieht man, dass für $x = 0$ der Modul von $\frac{dv}{dx}$ kleiner als $\frac{dw}{dx}$ ist, u. s. f.

Wenn also die Functionen $v$ und $w$ wirklich vorhanden sind, so sind für $x = 0$ alle Differenzialquotienten von $v$ kleiner als die entsprechenden von $w$.

Die Function $w$ aber ist wirklich vorhanden, denn durch Integration der Gleichung 6) ergibt sich:

8) $$w - \frac{w^2}{2r} = -M\varrho \lg\left(1-\frac{x}{\varrho}\right).$$

Es ist hierbei berücksichtigt, dass $w$ für $x = 0$ verschwinden soll. Hier ist $w$ also eine Function von $x$. Nach den allgemeinen Prinzipien über Functionen bleibt $w$ so lange eindeutig und continuirlich, so lange $x$ kleiner als $\varrho$ bleibt und die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung, welche $w$ gibt, nicht gleich werden. Letzteres ist aber der

Fall, wenn der Differenzialquotient des Gliedes links $1-\frac{w}{r}$ gleich Null wird, d. h. wenn $w=r$ ist. Sucht man den entsprechenden Werth $R$ von $x$, so hat man:

$$\frac{r}{2}=-M\varrho \lg\left(1-\frac{R}{\varrho}\right),$$

d. h.:

$$\lg\left(1-\frac{R}{\varrho}\right)=-\frac{r}{2M\varrho},$$

oder:

$$R=\left(1-e^{-\frac{r}{2M\varrho}}\right)\varrho,$$

ein Ausdruck, der stets kleiner als $\varrho$ ist.

Ist $A$ der grösste Modul, den $w$ innerhalb des Kreises mit Radius $R$ annimmt, so hat man:

$$\frac{d^n w}{dx^n}<1.2\ldots n\,\frac{A}{R^n},$$

wenn man $x=0$ setzt; also umsomehr:

$$\mathrm{mod}\,\frac{d^n v}{dx^n}<1.2\ldots n\,\frac{A}{R^n}.$$

Daraus folgt dann, dass die Reihe, welche der Maclaurinsche Satz ergibt:

$$9)\quad r=\left(\frac{dv}{dx}\right)_0 x+\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_0\frac{x^2}{1.2}+\ldots$$

für alle Werthe von $x$, deren Modul kleiner als $R$ ist, convergirt. Denn es ist der Modul des allgemeinen Gliedes der Reihe offenbar kleiner als: $A\left(\frac{\mathrm{mod}\,x}{R}\right)^n$; ist also $\mathrm{mod}\,(x)<R$, so ist die Reihe der Moduln und folglich die Reihe für $v$ selbst convergent.

Die Function $v$, welche durch diese Reihe definirt ist, genügt aber der vorgelegten Differenzialgleichung 4), denn man hat:

$$F(x,v)=F_0+F_0'x+F_0''\frac{x^2}{1\cdot 2}\ldots,$$

wenn man unter $F'$, $F''$ die totalen Differenzialquotienten von $x$ unter $F_0$, $F_0'$... die Anfangswerthe von $F$, $F'$ ... versteht. Die Differenzialquotienten ergeben sich durch die Gleichungen:

$$10)\qquad F'=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial v}\frac{dv}{dx},\quad F''=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial v}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2+\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Ferner ist:

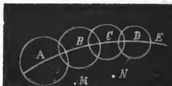
$$\frac{dv}{dx}=\left(\frac{dv}{dx}\right)_0+\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_0 x+\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_0\frac{x^2}{1.2}+\ldots$$

Man muss die aus 5) gefundenen Werthe von $\left(\frac{dv}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_0$ in die Gleichungen 10) einsetzen, nachdem man $x=0$, $v=0$ gemacht hat. Man sieht aber, dass die Glieder rechts der Gleichungen 5) und 10) identisch sind, und man hat also identisch:

$$F_0'=\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)_0,\quad F_0''=\left(\frac{d^3v}{dx^3}\right)_0,$$

so dass der Differenzialgleichung genügt wird.

Fig. 57.




Es lässt sich nun leicht zeigen, wie man durch Reihenentwicklung die Differenzialgleichung

$$\frac{du}{dz}=f(z,u)$$

auflösen kann, wenn der Integrationsweg eine beliebige Linie $ABCDE$ (Fig. 57) bildet, auf welcher sich jedoch kein Discontinuitäts- oder vielfacher Punkt der Function $f(z,u)$ befindet. Dergleichen Punkte seien $M$, $N$. Ist nämlich für Punkt $A$ $z=z_0$, $u=u_0$ willkürlich angenommen, so hat man nach dem Maclaurin'schen Satze, wenn für Punkt $B$ $z=z_1$, $u=u_1$ ist:

$$u_1 = u_0 + \frac{du_0}{dz_0}(z_1 - z_0) + \frac{1}{1 \cdot 2} \frac{d^2u}{dz_0^2}(z_1 - z_0)^2 + \ldots,$$

und die Differenzialquotienten geben die Gleichungen 5), wenn man darin wieder $x = z - z_0$, $v = u - u_0$ setzt, oder, was dasselbe ist, die Gleichungen:

$$11) \qquad \frac{du}{dz} = f,\ \frac{d^2u}{dz^2} = \frac{df}{dz} + \frac{df}{du}\frac{du}{dz} \ldots$$

wo $u = u_0$, $z = z_0$ zu setzen ist

Es darf der Modul von $B$ aber nicht grösser sein als:

$$R = \left(1 - e^{-\frac{r}{2M\varrho}}\right)\varrho,$$

wo $r$ und $\varrho$ bezüglich die grössten Moduln von $z - z_0$, $u - u_0$ sind, für welche $f(z, u)$ continuirlich und eindeutig bleibt, $M$ der grösste Modul von $F(z, u)$ zwischen $A$ und $B$. Man kann aber, wie weit auch der Endpunkt unseres Integrationsweges $E$ von $A$ entfernt sei, durch Wiederholung dieses Verfahrens immer zum Ziele gelangen. Zu dem Ende schlage man von $B$ aus mit Radius $BC$ einen Kreis, derart, dass

$$BC \leqq \left(1 - e^{-\frac{r'}{2M'\varrho'}}\right)\varrho',$$

wo $r'$, $\varrho'$ die grössten Moduln sind, für welche $z - z_1$, $u - u_1$ continuirlich und eindeutig bleiben, $M'$ der grösste Modul von $f(z, u)$ zwischen $B$ und $C$ ist.

Man hat dann, wenn man für Punkt $C$ $z = z_2$, $u = u_2$ setzt:

$$u_2 = u_1 + \frac{du_1}{dz_1}(z_2 - z_1) + \frac{1}{1 \cdot 2}\frac{d^2u_1}{dz_1^2}(z_2 - z_1)^2 + \ldots$$

$z_1$, $u_1$ sind hier die Anfangswerthe, welche durch die vorige Reihenentwicklung gegeben sind. Es ist klar, dass man auf dieselbe Weise von $C$ zu einem hinreichend nahe gelegenen Punkt $D$ und so zuletzt zu $E$ derart gelangen kann, dass man das Ziel immer durch eine endliche Menge von Entwickelungen nach ganzen positiven Potenzen bezüglich der Grössen $z - z_0$, $z - z_1$, $z - z_2 \ldots$ erreicht. Bemerkenswerth ist es, dass man im Allgemeinen besser thut, die Reihenentwickelungen nicht nach dem Maclaurinschen Satze, sondern direct nach der Methode der unbestimmten Coefficienten vorzunehmen. Wir werden später Beispiele geben.

Es lässt sich aber auch zeigen, dass es ausser der so gefundenen keine zweite Function $u$ gibt, welche die Differenzialgleichung $\frac{du}{dz} = f(u, z)$ erfüllt, und für $u = u_0$ den Werth $z = z_0$ annimmt, so lange $f(u, z)$ eindeutig und continuirlich bleibt.

Sei nämlich $u + v$ eine zweite Function, so muss sein:

$$\frac{d(u+v)}{dz} = f(u+v, z),$$

also:

$$\frac{dv}{dz} = f(u+v, z) - f(u, z).$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung für $v = 0$ verschwindet, so enthält sie, da $f$ in den angegebenen Grenzen eindeutig ist, eine ganze Potenz von $v$ als Factor, und es ist:

$$\frac{dv}{dz} = v^m \varphi(z),$$

und durch Integration auf einem beliebigen Wege erhält man:

$$\frac{1}{m-1}\left(\frac{1}{v_0^{m-1}} - \frac{1}{v^{m-1}}\right) = \int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz,$$

wenn $m$ grösser als 1 ist.

Diese Gleichung ist unmöglich, da $v_0 = 0$ ist, das bestimmte Integral aber einen endlichen Werth haben muss.

Ist $m = 1$, so hat man:

$$\frac{dv}{v} = \varphi(z)\,dz,$$

$$v = v_0\, e^{\int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz},$$

und da $v_0 = 0$, ist auch $v = 0$.

27) Integration von $n$ Gleichungen mit $n+1$ Variablen durch Reihen.

Die eben gegebenen Principien erstrecken sich auf den allgemeinsten Fall von $n$ Gleichungen mit $n+1$ Variablen.

Wir setzen wieder:

$$1) \qquad \frac{du}{dz} = f(z, u, u_1 \ldots),$$

$$\frac{du_1}{dz} = f(z, u, u_1 \ldots) \ldots$$

Wie oben kann man die Behandlung auf den Fall zurückführen, wo die Anfangswerthe der Variablen $z = 0$, $u = 0$,

$u_1=0\ldots$ sind. $f, f_1$ sollen eindeutig und continuirlich bleiben, so lange die Moduln von $z, u, u_1 \ldots$ nicht grösser als $\varrho, r, r_1 \ldots$ sind. $M, M_1 \ldots$ sind die grössten Werthe, welche die Moduln von $f, f_1 \ldots$ auf dem Integrationswege annehmen. Wir setzen dann:

$$\varphi=\frac{1}{\left(1-\frac{z}{\varrho}\right)\left(1-\frac{u}{r}\right)\left(1-\frac{u_1}{r_1}\right)\ldots}$$

Die partiellen Differenzialquotienten von $f, f_1 \ldots$ für $z=u=u_1=\ldots=0$ haben dann Werthe, deren Moduln kleiner sind als die entsprechenden Differenzialquotienten von $M\varphi, M_1\varphi \ldots$

Setzen wir jetzt:

$$\frac{dv}{dz}=M\varphi\,(z, v, v_1 \ldots), \quad \frac{dv_1}{dz}=M_1\varphi\,(z, v, v_1 \ldots)\ldots,$$

so haben die Differenzialquotienten:

$$\left(\frac{du}{dz}\right)_0, \quad \left(\frac{du_1}{dz}\right)_0 \ldots \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2u_1}{dz^2}\right)_0 \ldots,$$

die man durch Gleichungen, entsprechend den Gleichungen 5) des vorigen Abschnitts, findet, Moduln, die bezüglich kleiner sind als die reellen und positiven Grössen:

$$\left(\frac{dv}{dz}\right)_0, \quad \left(\frac{dv_1}{dz}\right)_0 \ldots \left(\frac{d^2v}{dz^2}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2v_1}{dz^2}\right)_0 \ldots,$$

die man in ähnlicher Weise findet.

Aber die letzten Gleichungen sind leicht zu integriren. Man hat:

$$\frac{dv}{M}=\frac{dv_1}{M_1}\ldots,$$

also:

$$\frac{v}{M}=\frac{v_1}{M_1}\ldots=k,$$

und wenn man die so gefundenen Werthe von $v, v_1 \ldots$ in eine der ursprünglichen Gleichungen einsetzt:

$$2) \qquad \left(1-\frac{M}{r}k\right)\left(1-\frac{M_1}{r_1}k\right)\ldots dk=\frac{dz}{1-\frac{z}{\varrho}}.$$

Die Integration gibt:

$$3) \quad k-\left(\frac{M}{r}+\frac{M_1}{r_1}+\ldots\right)\frac{k^2}{2}+\left(\frac{MM_1}{rr_1}+\ldots\right)\frac{k^3}{3}\ldots=-\varrho\lg\left(1-\frac{z}{\varrho}\right).$$

Diese Gleichung bestimmt eine Function $k$, die gleichzeitig mit $z$ verschwindet und bis zu einem gewissen Modul $R$ eindeutig und continuirlich bleibt. — Sei $A$ das Maximum des Moduls von $k$ innerhalb dieser Grenzen, so ist:

$$\left(\frac{d^nk}{dz^n}\right)_0<1\cdot2\ldots n\frac{A}{R^n},$$

und um so mehr:

$$\operatorname{mod}\left(\frac{d^nu}{dz^n}\right)_0<1\cdot2\ldots n\frac{MA}{R^n},$$

$$\operatorname{mod}\left(\frac{d^nu_1}{dz^n}\right)_0<1\cdot2\ldots n\frac{M_1A}{R^n},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

woraus dann folgt, dass die Entwicklungen:

$$u = \left(\frac{du}{dz}\right)_0 z + \left(\frac{d^2u}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \ldots,$$

$$u_1 = \left(\frac{du_1}{dz}\right)_0 z + \left(\frac{d^2u_1}{dz^2}\right)_0 \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \ldots,$$

so lange convergiren, als der Modul von $z$ kleiner als $R$ ist, und diese Reihen genügen also den gegebenen Differenzialgleichungen. — Es ist noch $R$ zu bestimmen. Da $k$ mit $z$ verschwindet, so bleibt diese Grösse eindeutig, so lange als irgend 2 Wurzeln der Gleichung 3) nicht gleich werden. Letzteres aber tritt ein, wenn der Differenzialquotient in Bezug auf $k$ im Ausdrucke links der Gleichung 3), oder was dasselbe ist, der Ausdruck links in der Gleichung 2) Null wird. Es findet dies statt, wenn

$$k = \frac{r}{M} \quad \text{oder} \quad = \frac{r_1}{M_1} \ldots$$

ist. Setzt man den kleinsten dieser Werthe in die Gleichung 3), so gibt der zugehörige reelle und positive Werth von $z$ das gesuchte $R$ an. Der Ausdruck aber wird einfacher, wenn man die Grenzen der Entwickelung etwas verengt.

Zu dem Ende ersetzt man die Moduln $r, r_1 \ldots$ durch den kleinsten unter ihnen, und die Maxima $M, M_1 \ldots$ durch das grösste derselben. Dann nimmt Gleichung 2) die Gestalt an:

$$(1 - \frac{M}{r} k)^m dk = \frac{dz}{1 - z},$$

und die Integration gibt:

$$\frac{r}{M(m+1)} \left[1 - (1 - \frac{M}{r} k)^{m+1}\right] = -\varrho \lg\left(1 - \frac{z}{\varrho}\right).$$

Die Function $k$ bleibt dann eindeutig und continuirlich bis zu einem Werthe $R$, welchen die Formel gibt:

$$\lg\left(1 - \frac{R}{\varrho}\right) = -\frac{r}{(m+1) M\varrho},$$

d. h.:

$$R = \varrho(1 - e^{-\frac{r}{(m+1) M\varrho}}).$$

Man sieht, dass die ganze Entwicklung nur die Wiederholung der im Abschnitt 26) gegebenen ist.

28) **Betrachtung des Falles, wo sich auf dem Integrationswege Discontinuitäten finden.**

Der Fall, wo sich eine Discontinuität auf dem Integrationswege findet, kann allerdings wie bei den bestimmten Integralen durch eine beliebige kleine Ausbiegung vermieden werden.

Indess ist gerade die Betrachtung dieser Discontinuitäten eine Quelle, aus welcher die Erkenntniss höchst wichtiger Eigenschaften der Functionen zu schöpfen ist. Wenn wir diesen Gegenstand also im Allgemeinen in die Theorie der Transcendenten zu verweisen haben, so beschränken wir uns hier auf eine Gleichung zwischen zwei Variablen erster Ordnung, wo für einen gewählten Anfangswerth von $z$ und $u$ der Differenzialquotient $\frac{du}{dz}$ unendlich wird. Die Ausführung ist dem schon angeführten Buche entnommen.

Sei

$$\frac{du}{dz} = f(u, z).$$

Wie vorhin führen wir durch Substitution die Anfangswerthe auf den Fall zurück, wo

$$z = 0, \quad u = 0$$

ist. Nehmen wir an, dass für diese Werthe

$$f(0, 0) = \infty$$

ist, so setzen wir:

$$f(u, z) = \frac{1}{\varphi(u, z)}$$

und erhalten:

$$\frac{dz}{du} = \varphi(u, z),$$

wo für $z = 0$, $u = 0$ auch $\varphi = 0$ ist. Da also in der Nachbarschaft dieses Werthes $\varphi$ continuirlich bleibt, so kann man nach dem obigen Verfahren $z$ in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen entwickeln:

$$z = A_0 u^\alpha + A_1 u^{\alpha+1} + \ldots$$

Das von $u$ freie Glied verschwindet jedenfalls, da für $u = 0$, $z = 0$ ist. Nehmen wir der Allgemeinheit wegen an, dass $u^\alpha$ die erste Potenz von $u$ ist, welche vorkommt.

Um $\alpha$ zu bestimmen, entwickeln wir auch $\varphi(u, z)$ in eine Reihe nach Potenzen von $u$ und $z$:

$$\varphi(u, z) = a u^m + bz + cuz + ez^2 + \ldots$$

wo $m$ eine ganze positive Zahl ist.

Gleich Null kann $m$ nicht sein, weil dann für $z=0$ $\varphi(u, s)$ nicht gleich Null wäre.

Setzt man in $\varphi(u, z)$ den eben gefundenen Werth von $z$ ein, so kommt:

$$\varphi(u, s) = a u^m + b A_0 u^\alpha + \ldots$$

und, indem man den Werth von $s$ differenziirt:

$$\frac{dz}{du} = A_0 \alpha u^{\alpha-1} + A_1 (\alpha+1) u^\alpha.$$

Dieser Ausdruck mit $\varphi(u, z)$ identificirt, giebt:

$$A_0 \alpha u^{\alpha-1} + A_1 (\alpha+1) u^\alpha = a u^m + b A_0 u^\alpha,$$

woraus folgt, dass $\alpha$ nicht gleich Null sein kann, weil sonst $A_0$ oder $\alpha$ gleich Null wären. Das letztere widerspricht der Annahme, das erstere dem Umstande, dass $u^\alpha$ die erste wirklich vorkommende Potenz von $u$ war. In diesem Falle giebt es also kein mit $s$ verschwindendes Integral.

Es muss also sein:

$$\alpha - 1 = m, \quad A_0 \alpha = a,$$

d. h.:

$$\alpha = m+1, \quad A_0 = \frac{a}{m+1},$$

und man hat:

$$s = \frac{a}{m+1} u^{m+1} + \ldots$$

Ist $z$ sehr klein, so kann man also setzen:

$$u = B_0 s^{\frac{1}{m+1}} + \ldots,$$

wo

$$B_0 = \left(\frac{m+1}{a}\right)^{\frac{1}{m+1}} \quad \ldots$$

ist. Es gibt also $m+1$ Werthe von $u$ für jeden Werth von $z$.

Setzt man noch $z = r e^{\varphi i}$ und seien $u_0$, $u_1 \ldots u_m$ die zugehörigen Werthe von $u$, so ist:

$$u_1 = B_0 r^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\varphi i}{m+1}},$$

$$u_1 = B_0 r^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\varphi + 2\pi}{m+1} i},$$

$$u_2 = B_0 r^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\varphi + 4\pi}{m+1} i}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$u_m = B_0 r^{\frac{1}{m+1}} e^{\frac{\varphi + 2m\pi}{m+1} i}.$$

Während also der $z$ entsprechende Punkt einen unendlich kleinen Kreis um den Punkt $z=0$ beschreibt, geht $u_0$ in $u_1$, $u_1$ in $u_2 \ldots u_{m-1}$ in $u_m$, und $u_m$ wieder in $u_0$ über. Wenn also der Differenzialquotient für $s=s_1$, $u=u_1$ unendlich wird, und $m$ die Ordnung des niedrigsten partiellen Differenzialquotienten von $\frac{1}{f}$ nach $u$ ist, welcher nicht verschwindet, so hat die Grösse $m+1$ verschiedene Werthe, von denen jeder in den folgenden übergeht, während $s$ um den Punkt $z_0$ einen Kreis beschreibt. Nach $m+1$ Umläufen kehrt $u$ zu seinem alten Werthe zurück.

Setzen wir jetzt:

$$z = s_1^{m+1}.$$

Während $s_1$ einen Umlauf macht, macht $z$ deren $m+1$; denn setzt man $z_1 = \varrho e^{\vartheta i}$, so ist:

$$s = \varrho^{m+1} e^{(m+1)\vartheta i} = R e^{\tau i},$$

denn wird $\vartheta$ um $2\pi$ vermehrt, so vermehrt sich $\tau$ um $2(m+1)\pi$, es macht also $u$ einen Umlauf. Hieraus folgt:

„dass $u$ eine eindeutige Function von $z_1$ ist“ und sich folglich in eine convergirende Reihe nach ganzen Potenzen von $s_1 = z^{\frac{1}{m+1}}$ entwickeln lässt. Man hat also:

$$u = B_0 z_1^{\frac{1}{m+1}} + B_1 z_1^{\frac{2}{m+1}} + \ldots$$

Dies gibt $m+1$ verschiedene Werthe von $u$, da $z_1^{\frac{1}{m+1}} = \sqrt[m+1]{z_1}$ eben so viel Werthe hat.

29) **Reihenentwicklungen für verschiedene Integrale von Differenzialgleichungen.**

Sei gegeben die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} + y + x^3 = 0.$$

Nehmen wir an, dass für $x=0$, $y=y_0$ sei, so hat man:

$$\frac{dy}{dx}=-y-x^3,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=y+x^3-3x^2,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=-y-x^3+3x^2-6x,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4}=+y+x^3-3x^2+6x-6,$$

$$\frac{d^5y}{dx^5}=-y-x^3+3x^2-6x+6,$$

$$\frac{d^6y}{dx^6}=y+x^3-3x^2+6x-6,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{d^ny}{dx^n}=(-1)^n(y+x^3-3x^2+6x-6).$$

Diese allgemeine Formel gilt für jeden Werth von $n$, der grösser als 3 ist. Setzen wir $x=0$, $y=y_0$, so gibt der Maclaurinsche Satz aber:

$$y=y_0-y_0x+y_0\frac{x^2}{1\cdot2}-y_0\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+(y_0-6)\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-(y_0-6)\frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}+\dots$$

Nach Abschnitt 25) convergirt diese Reihe so lange, als der Modul von $x$, die Grösse: $R=(1-e^{-\frac{r}{2M\varrho}})\varrho$ nicht übersteigt.

$r$ und $\varrho$ sind hier die grössten Moduln von $x$ und $y$, für welche $-y-x^3$ eindeutig und continuirlich bleibt. Da dies immer stattfindet, so ist:

$$\varrho=\infty,\qquad R=\infty,$$

und es convergirt die Reihe für $x$ immer. Dieselbe nimmt auch die Form an:

$$y=(y_0-6)\left(1-x+\frac{x^2}{1\cdot2}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}-\dots\right)$$
$$+6\left(1-x+\frac{x^2}{1\cdot2}-\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}\right).$$

Offenbar aber lässt sich diese Reihe summiren und man hat:

$$y=(y_0-6)e^{-x}+6(1-x)+3x^2-x^3.$$

II) Sei gegeben:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+y=0,\quad\text{oder}\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{y}{x},$$

eine Gleichung, für die man auch das System setzen kann:

$$\frac{dy}{dx}=z,\quad \frac{dz}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

Die Integration kann, wenn Reihenentwicklung nach ganzen Potenzen gefordert wird, nicht mit $x=0$ begonnen werden, da in diesem Falle $\frac{y}{x}$ unendlich werden kann.

Setzen wir also:

$$x=a,\qquad y=y_a,\qquad \frac{dy_a}{da}=y_a',$$

so erhalten wir:

$$\frac{d^2y_a}{da^2}=-\frac{y_a}{a},\quad \frac{d^3y_a}{da^3}=\frac{-ay_a'+y_a}{a^2}\ \dots,$$

also nach dem Taylorschen Satse:

$$y = y_a + y_a'(x-a) - \frac{y_a}{a}\frac{(x-a)^2}{1\cdot 2} + \frac{y_a - a y_a'}{a^2}\frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \cdots$$

Um ans Abschnitt 26) die Grenzen der Convergenz dieser Reihe zn ersehen, hahen wir au setzen:

$$y = y_a + y_1, \quad z = y_a' + z_1, \quad x = a + x_1.$$

Das System von 2 simnltanen Gleichungen wird dann:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = y_a' + z_1, \quad \frac{dz_1}{dx_1} = -\frac{y_a + y_1}{a + x_1}.$$

Der Ausdruck $y_a' + z_1$ hleiht stets eindeutig nnd continnirlich, $-\frac{y_a + y_1}{a + x_1}$ für alle complexen Werthe, in welchen der Modnl von $x_1$ kleiner als der von $a$ ist. Wir setzen also:

$$\varrho = a,$$

nnd für $r$, $r_1$ diejenigen Werthe, welche sich ans der Reihenentwichlnng für $y$ ergehen, wenn man darin $x_1 = 0$, also $x = 2a$ schreiht. Anf ähnliche Art werden die Modnln $M$ nnd $M_1$ hestimmt. Man ersieht anf diese Weise, dass nnsere Reihe nicht immer eonvergirt. Würde man dle Gleiehung:

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

fortgesetzt differenziiren, so erhielte man:

$$x\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0, \quad x\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad x\frac{d^5y}{dx^5} + 3\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^3y}{dx^3} = 0 \ldots$$

Nimmt man nnn an, dass für $x = 0$ anch $y = 0$ sel, nnd sctzt voraus, dass kein Differensialqnotient nnendlich wird, so erhält man, wenn $y_0'$ der Anfangswerth von $\frac{dy}{dx}$ ist, dnrch Entwicklnng nach Maclanrin:

$$y = y_0'\left(x - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots\right),$$

nnd da diese Reihe, wle sieh dlrect ergibt, immer convergirt, so gibt sie ein Integral. Es ist dles aher ein particnläres, da es nnr eine Constante enthält. Indess lässt sich das allgemeine dnrch Variation der Constanten (Abschnitt 16) hierans bestimmen. Zn dem Ende sei:

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2}\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} - \ldots,$$

so ist $C\varphi(x)$ das allgemeine Integral, wo jedoch $C$ eine Fnnction von $x$ ist.

Setzt man in die simnltanen Gleichnngen:

$$\frac{dy}{dx} = z, \quad x\frac{dz}{dx} + y = 0,$$

$$y = C\varphi(x), \quad z = C_1\varphi'(x)$$

ein, so erhält man:

$$C\varphi'(x) + \varphi(x)\frac{dC}{dx} = C_1\varphi'(x),$$

$$xC_1\varphi''(x) + x\varphi'(x)\frac{dC_1}{dx} + C\varphi(x) = 0,$$

Gleichnngen, welehe man anch schreihen kann:

$$\varphi(x)\frac{dC}{dx} = (C - C_1)\varphi(x),$$

$$x\varphi'(x)\frac{dC_1}{dx} + (C - C_1)\varphi(x) = 0.$$

$x\varphi''(x)+\varphi(x)$ verschwindet nämlich, weil $y=\varphi(x)$ ein Integral ist. Durch Subtraction ergibt sich, nachdem man bezüglich durch $\varphi(x)$ und $x\varphi'(x)$ dividirt hat:

$$\frac{d(C-C_1)}{dx}=-(C-C_1)\left(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}-\frac{\varphi(x)}{x\varphi'(x)}\right).$$

Wegen $x\varphi''(x)+\varphi(x)=0$ nimmt diese Gleichung die Gestalt an:

$$\frac{d(C-C_1)}{(C-C_1)dx}=-\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}-\frac{\varphi''(x)}{\varphi'(x)},$$

und das Integral ist offenbar:

$$\lg(C-C_1)=-\lg\varphi(x)-\lg\varphi'(x)+\lg\alpha,$$

oder:

$$\varphi\, x\, \varphi' x(C-C_1)=\alpha,$$

wo $\alpha$ die Integrationsconstante ist.

Setzt man hieraus in die erste Gleichung des Systems den Werth von $C-C_1$ ein, so hat man:

$$\varphi(x)\frac{dC}{dx}+\frac{\alpha}{\varphi(x)}=0,$$

d. h. integrirt:

$$C=\alpha\int\frac{dx}{[\varphi(x)]^2}+\beta.$$

Das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung ist also:

$$y=\alpha\,\varphi(x)\int\frac{dx}{[\varphi(x)]^2}+\beta\,\varphi(x).$$

Entwicklung nach ganzen positiven Potenzen von $x$ kann hier, wie vorauszusehen war, nicht stattfinden.

III) Sei gegeben:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+nxy=0.$$

Man findet, wenn man weiter differenziirt:

$$x\frac{d^3y}{dx^3}+3\frac{d^2y}{dx^2}+nx\frac{dy}{dx}+ny=0,$$

$$x\frac{d^4y}{dx^4}+4\frac{d^3y}{dx^3}+nx\frac{d^2y}{dx^2}+2n\frac{dy}{dx}=0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Die Gleichung gibt keine allgemeine Entwicklung nach ganzen Potenzen von $x$, da für $x=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ unendlich werden kann. Indess gibt diese Form ein particuläres Integral, welches wie oben zur Auffindung des allgemeinen verwendet werden kann.

Setzt man nämlich $x=0$, und verlangt, dass keiner der Differenzialquotienten unendlich sei, so ergibt sich:

$$\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{n}{3}y,\quad \frac{d^3y}{dx^3}=0,\quad \frac{d^4y}{dx^4}=\frac{n^2}{5}y,$$

allgemein:

$$\frac{d^my}{dx^m}=0;$$

wenn $m$ ungerade ist:

$$\frac{d^{2m}y}{dx^{2m}} = (-1)^m \frac{n^m y}{2m+1}.$$

Es ergibt sich hieraus, wenn $y=y_0$ für $x=0$ ist:

$$y=y_0\left(1-\frac{nx^2}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{n^2x^4}{1\cdot 2\cdots 5}-\frac{n^3x^6}{1\cdot 2\cdots 7}+\ldots\right),$$

eine immer convergirende und leicht zu summirende Reihe, welche gibt:

$$y=\frac{C\sin(x\sqrt{n})}{x}.$$

Um das allgemeine Integral zu haben, wendet man wieder die Variation der Constanten an. Ist $C$ jetzt nicht constant, so hat man:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC}{dx}\,\frac{\sin(x\sqrt{n})}{x}+C\,\frac{d\,\frac{\sin(x\sqrt{n})}{x}}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2C}{dx^2}\,\frac{\sin(x\sqrt{n})}{x}+2\frac{dC}{dx}\,d\left(\frac{\sin(x\sqrt{n})}{x}\right)+C\,\frac{d^2\left(\frac{\sin(x\sqrt{n})}{x}\right)}{dx^2},$$

also wenn man dies in die vorgelegte Gleichung einsetzt mit Berücksichtigung, dass $\frac{\sin(x\sqrt{n})}{x}$ ein Integral ist:

$$\frac{d^2C}{dx^2}\sin(x\sqrt{n})+2x\frac{dC}{dx}\,\frac{d\,\frac{\sin(x\sqrt{n})}{x}}{dx}+2\frac{dC}{dx}\,\frac{\sin(x\sqrt{n})}{x}=0,$$

Selbstverständlich ist das hier eingeschlagene Verfahren dasselbe, als wenn wir die vorgelegte Gleichung in 2 simultane verwandelt hätten Die Gleichung nimmt die Gestalt an:

$$\frac{d^2C}{dx^2}+2\sqrt{n}\cot(x\sqrt{n})\frac{dC}{dx}=0,$$

also durch Integration:

$$\frac{dC}{dx}=\frac{C_1}{(\sin[x\sqrt{n}])^2},$$

und:

$$C=C'+C''\cot(x\sqrt{n}),$$

welches das vollständige Integral gibt:

$$y=\frac{C'\sin(x\sqrt{n})+C''\cos(x\sqrt{n})}{x}.$$

IV) Es soll jetzt die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\,\frac{dy}{dx}+y=0$$

durch die Methode der unbestimmten Coefficienten integrirt werden. Da es möglich sein kann, dass für $x=0$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\infty$ wird, so lassen wir die Exponenten unbestimmt, und setzen:

$$y=A_1x^\alpha+A_2x^\beta+A_3x^\gamma+\ldots$$

Dies zweimal differenziirt und in die gegebene Gleichung eingesetzt, gibt:

$$0=A_1x^\alpha+A_2x^\beta+A_3x^\gamma+\ldots$$
$$+A_1\alpha x^{\alpha-2}+A_2\beta x^{\beta-2}+A_3\gamma x^{\gamma-2}+\ldots$$
$$+A_1\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+A_2\beta(\beta-1)x^{\beta-2}+A_3\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}+\ldots$$

Setzt man den Coefficienten von $x-2$ gleich Null, so kommt:

$$\alpha=0.$$

Wenn $\beta-2$ kleiner als $\alpha$ wäre, so würde sich auch $\beta=0$ ergeben, was nicht möglich. Wir setzen also:

$$\beta-2=\alpha,\ \gamma-2=\beta\ \ldots,$$

woraus sich ergibt:

$$\alpha=0,\quad \beta=2,\quad \gamma=4\ \ldots,$$
$$A_2\beta^2+A_1=0,$$
$$A_3\gamma^2+A_2=0,$$

also:

$$A_2=-\frac{A_1}{2^2},\quad A_3=\frac{A_1}{2^2.4^2},\quad A_4=-\frac{A_1}{2^2.4^2.6^2}\ \ldots$$

$$y=A_1\left(1-\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^4}{2^2.4^2}-\frac{x^6}{2^2.4^2.6^2}+\ldots\right).$$

Man erhält auch hier nur ein particuläres Integral. Uebrigens sind in unserer Annahme über die Exponenten $\alpha, \beta \ldots$ Willkürlichkeiten enthalten. Sie liessen sich auch so wählen, dass man das vollständige Integral erhielt, wenn man diese Exponenten negativ nähme.

V) Die beiden zuletzt behandelten Gleichungen sind nur besondere Fälle der folgenden:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{m}{x}\frac{dy}{dx}+ny=0.$$

Indem wir auf ein allgemeines Integral aus den bereits angeführten Gründen verzichten können, wollen wir setzen:

$$y=A_0x^\alpha+A_1x^{\alpha+1}+A_2x^{\alpha+2}+\ldots,$$

also:

$$\frac{dy}{dx}=A_0\alpha x^{\alpha-1}+A_1(\alpha+1)x^\alpha+A_2(\alpha+2)x^{\alpha+1}+\ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A_0\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}+A_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1}+A_2(\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha+\ldots$$

also durch Einsetzen in die Gleichung, und durch Zusammenfassung der mit derselben Potenz von $x$ multiplicirten Glieder erhält man:

$$A_0\alpha(\alpha-1)+mA_0\alpha=0,$$
$$A_1\alpha(\alpha+1)+mA_1(\alpha+1)=0,$$
$$A_2(\alpha+1)(\alpha+2)+mA_2(\alpha+2)+nA_0=0,$$
$$A_3(\alpha+2)(\alpha+3)+mA_3(\alpha+3)+nA_1=0$$
$$\vdots$$
$$A_s(\alpha+s-1)(\alpha+s)+mA_s(\alpha+s)+nA_{s-2}=0.$$

Die erste Gleichung gibt:

$$\alpha=0,\quad \text{oder}\quad \alpha=1-m.$$

Je nachdem wir den einen oder andern Werth nehmen, wird die Reihenentwicklung eine ganz verschiedene sein. Gehen wir zunächst von $\alpha=0$ aus, so kommt:

$$A_1=0,\qquad A_2=\frac{-nA_0}{2(1+m)},\ A_3=0\ \ldots,$$

allgemein:

$$A_s=\frac{-nA_{s-2}}{s(m+s-1)},$$

also:

$$A_{2s+1}=0,\; A_{2s}=\frac{(-1)^s\left(\frac{n}{2}\right)^s A_0}{1\cdot2\cdot3\ldots s(m+1)(m+3)\ldots(m+2s-1)}.$$

Es ergibt sich hieraus die Reihenentwicklung:

$$y=A\varphi(x),$$

wo zu setzen ist:

$$\varphi(x)=1-\frac{\frac{n}{2}x^2}{1(m+1)}+\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2x^4}{1\cdot2(m+1)(m+3)}-\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^3x^6}{1\cdot2\cdot3(m+1)(m+3)(m+5)}+\ldots$$
$$+\frac{\left(-\frac{n}{2}\right)^s x^{2s}}{1\cdot2\ldots s(m+1)(m+3)\ldots(m+2s-1)}+\ldots).$$

Setzt man dagegen $\alpha=1-m$, so kommt man in ganz ähnlicher Weise zu der Entwicklung:

$$y=B\psi(x),$$

wo zu setzen ist:

$$\psi(x)=x^{-m+1}-\frac{\frac{n}{2}x^{-m+3}}{1(-m+3)}+\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2x^{-m+5}}{1\cdot2(-m+3)(-m+5)}+\ldots$$
$$+\frac{\left(-\frac{n}{2}\right)^p x^{-m+2p+1}}{1\cdot2\ldots p(-m+3)(-m+5)\ldots(-m+2p+1)}+\ldots$$

Geben beide Reihenentwicklungen einen Werth, so hat man offenbar als allgemeines Integral:

$$y=A\varphi(x)+B\psi(x).$$

In der That convergirt die Reihe $\varphi(x)$ immer, wenn $m$ keine negative ganze und ungerade Zahl ist, wie leicht zu sehen, die Reihe $\psi(x)$, wenn $m$ keine positive ganze und ungerade Zahl ist, welche grösser als $+1$ ist. Mit Ausschluss dieser beiden Fälle ist also in unserer Formel das allgemeine Integral enthalten. Selbst in diesen Fällen aber haben wir ein particuläres Integral:

$$y=A\varphi(x)\quad\text{oder}\quad y=B\psi(x).$$

Das allgemeine gibt dann die Variation der Constanten. Man erhält, wenn $A$ als Function von $x$ betrachtet wird:

$$\frac{dy}{dx}=A\varphi'(x)+\varphi(x)\frac{dA}{dx},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=A\varphi''(x)+2\varphi'(x)\frac{dA}{dx}+\varphi(x)\frac{d^2A}{dx^2},$$

also durch Einsetzen in die Differenzialgleichung:

$$2\varphi'(x)\frac{dA}{dx}+\varphi(x)\frac{d^2A}{dx^2}+\frac{m}{x}\varphi(x)\frac{dA}{dx}=0,$$

durch Integration also:

$$\frac{dA}{dx}=\frac{C}{x^m[\varphi(x)]^2},$$

$$A=C\int\frac{dx}{x^m[\varphi(x)]^2}+C_1,$$

also:

$$y=C\varphi(x)\int\frac{dx}{x^m[\varphi(x)]^2}+C_1\varphi(x),$$

oder wenn $m$ eine positive ungerade Zahl ist:

$$y = C\psi(x)\int\frac{dx}{x^m[\varphi(x)]^2} + C_1\varphi(x)$$

Diese Formel ist auch dann zu nehmen, wenn $m=1$ ist. Obgleich dann nämlich beide Reihen convergiren, so werden sie doch identisch, und die Formel:

$$y = A\varphi(x) + B\psi(x),$$

beschränkt sich auf ein Glied, gibt also nur ein particuläres Integral.

Es lässt sich für das Integral unserer Gleichung aber noch eine andere, oft vortheilhaftere Reihenentwicklung geben.

Setzen wir zu dem Ende:

$$y = Ax^\alpha\varphi(x) + A_1x^{\alpha+1}\varphi'(x) + A_2x^{\alpha+2}\varphi''(x) + \ldots,$$

wo $A$, $A_1$, $A_2$ ... zu bestimmende Constanten, $\varphi(x)$ eine Function von $x$, $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$ ... die Differenzialquotienten derselben sein sollen.

Man erhält durch Differensiiren:

$$\frac{m}{x}\frac{dy}{dx} = mA\alpha x^{\alpha-2}\varphi(x) + mA_1(\alpha+1)x^{\alpha-1}\varphi'(x) + mA_2(\alpha+2)x^\alpha\varphi''(x) + \ldots$$

$$+ mAx^{\alpha-1}\varphi'(x) + mA_1x^\alpha\varphi''(x) + \ldots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\varphi(x) + A_1(\alpha+1)\alpha x^{\alpha-1}\varphi'(x) + A_2(\alpha+2)(\alpha+1)x^\alpha\varphi''(x) + \ldots$$

$$+ 2A\alpha x^{\alpha-1}\varphi'(x) + 2A_1(\alpha+1)x^\alpha\varphi''(x) + \ldots$$

$$+ Ax^\alpha\varphi''(x) + \ldots$$

Dies in die Differenzialgleichung einsetzend, und den Coefficienten des mit $x^{\alpha+p-2}$ multiplicirten allgemeinen Gliedes gleich Null setzend, erhalten wir:

$$[(\alpha+p)(\alpha+p+m-1)A_p + (2\alpha+2p+m-2)A_{p-1} + A_{p-2}]\varphi^{(p)}(x)$$

$$+ nA_{p-2}\varphi^{(p-2)}(x) = 0,$$

für jeden Werth von $p$, der grösser als 1 ist.

Diese Gleichung wird erfüllt, wenn man setzt:

$$(\alpha+p)(\alpha+p+m-1)A_p + (2\alpha+2p+m-2)A_{p-1} = 0,$$

und gleichzeitig:

$$\varphi^{(p)}(x) + n\varphi^{(p-2)}(x) = 0.$$

Wegen der Willkürlichkeit der Constanten und der Function $\varphi$ sind offenbar diese Annahmen gestattet. Die letzte Gleichung wird offenbar für jedes $p$ erfüllt, wenn man setzt:

$$\varphi''(x) + n\varphi(x) = 0,$$

und das allgemeine Integral dieser Gleichung ist:

$$\varphi(x) = C\sin(x\sqrt{n}) + C_1\cos(x\sqrt{n}).$$

Setzt man jetzt auch die Coefficienten der mit $x^{\alpha-1}$ und $x^{\alpha-2}$ multiplicirten Glieder gleich Null, so kommt:

$$\alpha(\alpha-1) + m\alpha = 0, \quad A_1(\alpha+1)(\alpha+m) + A(m+2\alpha) = 0.$$

Die erste Gleichung gibt:

$$\alpha = 0 \quad \text{oder} \quad \alpha = 1-m,$$

die zweite in jedem der beiden Fälle:

$$A_1 = -A.$$

Sei zunächst:

$$\alpha = 1-m,$$

so wird die Relation zwischen $A_p$ und $A_{p-1}$ sein:

$$p(p-m+1)A_p=(m-2p)A_{p-1}.$$

Durch successives Einsetzen der Werthe von $p$, erhält man einen entwickelten Ausdruck für $A_p$, der mit $A$ multiplicirt ist. Wegen der Constanten $C$ und $C_1$ kann aber $A=1$ gesetzt werden, und man hat:

$$A_p=-\frac{(m-2p)(m-2p+2)\ \dots\ (m-4)}{(p-m+1)(p-m)\ \dots\ (3-m)}\,\frac{1}{1\cdot 2\cdots p},$$

woraus sich ergibt:

$$y=x^{1-m}\Big[\lambda-x\frac{d\lambda}{dx}+\ \dots\ +\frac{(m-4)\ \dots\ (m-2p)}{(m-3)\ \dots\ (m-p+1)}\,\frac{(-x)^p}{1\cdot 2\cdots p}\,\frac{d^p\lambda}{dx^p}+\ \dots\Big],$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$\lambda=C\sin(x\sqrt{n})+C_1\cos(x\sqrt{n}).$$

Diese Reihe wird abbrechen, wenn $A_p=0$ wird, und in diesem Falle hat unsere Gleichung also ein aus einer endlichen Anzahl Glieder bestehendes allgemeines Integral. Es tritt dies ein, wenn $m$ eine positive grade Zahl ist.

Setzen wir nun auch $\alpha=0$, so wird die Relation zwischen $A_{p-1}$ und $A_p$ sein:

$$A_p=-\frac{m+2p-2}{p(m+p-1)}A_{p-1},$$

oder in entwickelter Gestalt, wenn man $A=1$ setzt:

$$A_p=\frac{(m+2)(m+4)\ \dots\ (m+2p-2)}{(m+1)(m+2)\ \dots\ (m+p-1)}\,\frac{(-1)^p}{1\cdot 2\cdots p},$$

woraus sich ergiht:

$$y=\lambda-x\frac{d\lambda}{dx}+\ \dots\ +\frac{(-x)^p(m+2)(m+4)\ \dots\ (m+2p-2)}{1\cdot 2\ \cdots\ p\,(m+1)(m+2)\ \dots\ (m+p-1)}\,\frac{d^p\lambda}{dx^p}+\ \dots,$$

wo $\lambda$ die obige Bedeutung hat.

Diese Reihe bricht ab, wenn $m$ eine negative grade Zahl ist. Also:

„Unsere Gleichung hat ein in endlicher Form darzustellendes Integral immer dann, wenn $m$ eine positive oder negative grade Zahl ist."

VI. Wir betrachten schliesslich noch die Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2}=A\,x^m u,$$

dieselbe, auf welche wir früher (in Abschnitt 25) die Riccatische Gleichung zurückgeführt haben.

Wurde die letztere in der Form dargestellt:

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=bx^m,$$

und waren:

$$u_1=f(x),\qquad u_2=\varphi(x)$$

die particulären Integrale der ersten Gleichung, so war das allgemeine der Riccatischen:

$$y=\frac{f'(x)+c\varphi'(x)}{a[f(x)+c\varphi(x)]}.$$

Setzt man $x^p=kz$, so nimmt unsere Gleichung die Gestalt an:

$$\frac{p^2}{k^2}x^{2p-2}\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{p(p-1)}{k}x^{p-2}\frac{du}{dz}-Ax^m u=0;$$

wird also angenommen:

$$2p-2=m, \quad p=\frac{m}{2}+1,$$

und durch $x^m$ dividirt, so hat man:

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{m}{m+2}\frac{1}{z}\frac{du}{dz}-\frac{A\,k^2}{\left(\frac{m}{2}+1\right)^2}u=0,$$

oder, wenn man setzt:

$$k=\frac{\frac{m}{2}+1}{\sqrt{A}}:$$

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{\left(\frac{m}{m+2}\right)}{z}\frac{du}{dz}-u=0.$$

Diese Gleichung aber stimmt völlig mit der in V) behandelten überein, wenn man darin setzt:

$$\frac{m}{m+2} \text{ für } m \text{ und } -1 \text{ für } n,$$

Ist $\frac{m}{m+2}$ eine negative oder positive grade Zahl, so wird also das Integral in geschlossener Form aufzufinden sein.

Setzt man $\frac{m}{m+2}=\pm 2i$, so erhält man:

$$m=\frac{\mp 4i}{\pm 2i-1},$$

oder:

$$m=-\frac{4i}{2i\pm 1}.$$

Wir haben schon früher direct gezeigt, dass in diesen Fällen sich ein Integral der Riccatischen Gleichung finden lasse.

Auf die in V) behandelte Gleichung lassen sich übrigens noch die folgenden zurückführen:

$$\frac{dy}{dx}+ay^2=b\,e^{px}.$$

Setzt man hierin:

$$y=\frac{1}{au}\frac{du}{dx},$$

so kommt:

$$\frac{d^2u}{dx^2}=a\,b\,u\,e^{px},$$

und wenn man:

$$\frac{2\sqrt{a\,b}}{p}e^{\frac{1}{2}px}=z$$

setzt:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}-u=0.$$

Sei ferner gegeben:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\left(p^2-\frac{n(n+1)}{x^2}\right)y=0.$$

Wir setzen:

$$y=x^{n+1}z,$$

und erhalten:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{2(n+1)}{x}\frac{dz}{dx}+p^2z=0.$$

30) **Integration von Differenzialgleichungen durch bestimmte Integrale.**

Da viele Reihen durch bestimmte Integrale summirt werden können, so ist es oft möglich, auch Integralen von Differenzialgleichungen die Form bestimmter Integrale zu geben. Man kann auch in manchen Fällen sich directer Methoden bedienen. Indessen sind hierbei mancherlei Vorsichtsmaassregeln nöthig. Zunächst muss klar sein, ob immer oder in welchen Grenzen das bestimmte Integral einen Werth habe. Es kann ferner das Resultat illusorisch werden, wenn die Function unter dem Integralzeichen für einen bestimmten Werth discontinuirlich wird, ein Umstand, der mit der Auswahl der Anfangswerthe, d. h. der Integrationsconstanten, in enger Verbindung steht. Entsteht das bestimmte Integral durch Summirung einer Reihe, so ist ferner festzustellen, ob es so lange gelte, als die Reihe convergirt, da es vorkommen kann, dass in gewissen Grenzen die Summe dieser Reihe eine ganz andere Form hat als in andern. Umgekehrt kann auch das bestimmte Integral weitere Grenzen haben als die Summe. Kurz, im Allgemeinen gehört die Zurückführung des Integrals einer Differenzialgleichung auf irgend eine Form, oder eine Reihe von Formen, die in allen Grenzen ein Resultat geben, zu den schwierigsten Untersuchungen (wobei auch die complexen Werthe der Variablen zu berücksichtigen sind), wegen des Wechsels dieser Form bei Ueberschreitung der Discontinuitäten und Mehr-

dentigkeiten. Als Muster der Behandlung eines solchen Problems kann die Abhandlung Riemann's (siehe die Abhandlungen der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften) über diejenige lineare Differenzialgleichung dienen, welcher die hypergeometrische Reihe genügt. Was speciell die Ausdrücke in der Form bestimmter Integrale anbetrifft, so ist aus den angeführten Gründen keineswegs die noch sehr naive Weise hinreichend, in welcher man sich heut zu Tage in Wien mit diesem Problem abfindet.

Wir müssen uns hier mit einigen einfacheren Beispielen begnügen.

I) Wir wollen zunächst die in V) des vorigen Abschnitts betrachtete Gleichung wieder aufnehmen.

Es ist:

$$\cos(\alpha\cos\omega) = 1 - \frac{\alpha^2\cos\omega^2}{1\cdot 2} + \frac{\alpha^4\cos\omega^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \dots$$

Wir multipliciren mit $\sin\omega^{m-1}d\omega$, und integriren in den Grenzen $o$ und $\pi$, was jedoch nur einen Werth gibt, wenn $m$ positiv ist, da im entgegengesetzten Falle an den Grenzen die Function unendlich würde. Berücksichtigen wir ferner bei dieser Integration die Formel:

$$\int_0^\pi \cos\omega^{2s}\sin\omega^\mu d\omega = \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2s-1)}{(\mu+2)(\mu+4)\dots(\mu+2i)}\int_0^\pi \sin\omega^\mu d\omega,$$

wo $\mu$ grösser als $-1$ zu nehmen ist. (Es folgt diese Formel aus den in Abschnitt 27) des Artikels: „Analytische Quadratur" gegebenen, durch fortgesetzte Wiederholung des Verfahrens.) Man erhält dann das Schlussresultat:

$$\int_0^\pi \cos(\alpha\cos\omega)\sin\omega^{m-1}d\omega = \int_0^\pi \sin\omega^{m-1}d\omega - \dots$$

$$+ \frac{\left(-\frac{s^2}{2}\right)^p\int_0^\pi \sin\omega^{m-1}d\omega}{1\cdot 2\cdot 3\dots p(m+1)(m+3)\dots(m+2p-1)} + \dots,$$

d. h. wenn man $\alpha = x\sqrt{n}$ setzt:

$$\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\sin\omega^{m-1}d\omega = \int_0^\pi \sin\omega^{m-1}d\omega\,[1 - \frac{\frac{nx^2}{2}}{1\cdot(m+1)} +$$

$$+ \frac{\left(\frac{nx^2}{2}\right)^2}{1\cdot 2\,(m+1)(m+3)} - \dots + \frac{\left(-\frac{nx^2}{2}\right)^p}{1\cdot 2\dots p(m+1)(m+3)\dots(m+2p-1)} + \dots].$$

Es ist dies aber offenbar die in V) des vorigen Abschnittes mit $\varphi(x)$ bezeichnete Reihe, multiplicirt mit $\int_0^\pi \sin\omega^{m-1}d\omega$. Da nun $y = A\varphi(x)$ eine willkürliche Constante enthält, so ist ein particuläres Integral der vorgelegten Gleichung:

$$y = A\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\sin\omega^{m-1}d\omega,$$

jedoch nur dann, wenn $m$ positiv ist.

Die mit $\psi(x)$ bezeichnete Reihe lässt sich auch unter der Form schreiben:

$$\psi(x) = x^{-m+1}\,[1 - \frac{\frac{nx^2}{2}}{1\cdot(-m+3)} + \frac{\left(\frac{nx^2}{2}\right)^2}{1\cdot 2\,(-m+3)(-m+5)} - \dots$$

$$+ \frac{\left(-\frac{nx^2}{2}\right)^2}{1\cdot 2\dots p(-m+3)(-m+5)\dots(-m+2p+1)} + \dots],$$

und man sieht hieraus leicht, dass sich der Ausdruck in den Klammern von der

Reihe $\varphi(x)$ nur dadurch unterscheidet, dass für $m$ gesetzt worden ist $-m+2$. — Die Verwandlung in ein bestimmtes Integral ähnlich dem vorigen setzt also voraus, dass $m$ kleiner als 2 ist. In diesem Falle hat man:

$$y = Bx^{1-m}\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\,\omega)\sin\omega^{1-m}\,d\omega.$$

Beide Ausdrücke haben einen Sinn, wenn: $0<m<2$ ist, und in diesen Fällen ist also das allgemeine Integral:

$$y = A\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\sin\omega^{m-1}\,d\omega + Bx^{1-m}\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\sin\omega^{1-m}d\omega$$

$$=\int_0^\pi \frac{\cos(x\sqrt{n}\cos\omega)}{\sin\omega^{m-1}}\left[A\sin\omega^{2m-2}+Bx^{1-m}\right]d\omega.$$

Ausserhalb der Grenzen Null und Zwei besteht immer eins der particulären Integrale, aus welchen sich nach der im vorigen Abschnitt gegebenen Methode das allgemeine finden lässt. An den Grenzen selbst findet nur ein particuläres Integral statt. Für $m=0$ wird die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+ny=0,$$

woraus das Integral direct zu finden ist:

$$y = C\sin(x\sqrt{n})+E\cos(x\sqrt{n}),$$

welches sich auch aus Betrachtung des bestimmten Integrals für $y$ und Anwendung der Variation der Constanten ergeben würde.

Für $m=2$ ist die Gleichung:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+ny=0.$$

Sie ist schon im vorigen Abschnitte behandelt worden und ergab das Integral:

$$y=\frac{C\sin(x\sqrt{n})+G\cos(x\sqrt{n})}{x},$$

einen Werth, den man auch direct erhält, wenn man setzt:

$$y=\frac{u}{x},$$

wo dann die vorgelegte Gleichung wird:

$$\frac{d^2u}{dx^2}+nu=0.$$

Es verdient noch der Fall Berücksichtigung, wo $m=1$ wird. Obgleich in diesem Falle beide particulären Integrale gültig sind, so werden sie doch in diesem Falle gleich und geben also nicht das allgemeine Integral. Jedoch erhält man dasselbe, wenn man in dem allgemeinen Werthe von $y$ für $m$ setzt $1+\delta$, und $\delta$ abnehmen lässt. Man hat dann nämlich:

$$y=\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\left[A\sin\omega^{\delta}+Bx^{-\delta}\sin\omega^{-\delta}\right]d\omega,$$

aber:

$$(x\sin\omega)^{-\delta}=1-\delta\lg(x\sin\omega)+\ldots$$

$$\sin\omega^{\delta}=1+\delta\lg\sin\omega+\ldots$$

also mit Vernachlässigung der die erste übersteigenden Potenzen von $\delta$:

$$y=\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\left(A+B+\delta\left[(A-B)\lg\sin\omega-B\lg x\right]\right)d\omega.$$

Setzen wir hierin:

$$A+B=C, \quad \delta(A-B)=2E,$$

so ergibt sich:

$$\delta B=\frac{\delta C}{2}-E,$$

oder da $C$ und $E$ endlich, $\delta$ aber unendlich klein sein soll:

$$\delta B=-E.$$

Durch Einsetzen dieser Werthe erhält man:

$$y=\int_0^\pi \cos(x\sqrt{n}\cos\omega)\,[C+E\lg(x\sin\omega^2)]\,d\omega.$$

Auf die hier behandelte Differenzialgleichung wurde die Riccatische (VII des vorigen Abschnitts) zurückgeführt. Nehmen wir wieder die Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2}=Ax^m u,$$

woraus sich die Riccatische ergab, so ist das allgemeine Integral derselben also immer in der Form eines bestimmten Integrals zu finden, wenn $\frac{m}{m+2}$ zwischen 0 und 2 liegt. Diese Bedingung ist immer erfüllt, wenn $m$ positiv ist. Ist $m$ aber negativ, so gehen die Grenzbedingungen, wenn man $m=-s$ setzt:

$$\frac{s}{s-2}>0, \quad \frac{s}{s-2}<2,$$

offenbar:

$$s>2 \quad \text{und} \quad s>4,$$

also bei negativen $m$ findet die oben gegebene Form noch dann statt, wenn $m$ zwischen $-4$ und $-\infty$ liegt. Macht man die im vorigen Abschnitte gegebenen Substitutionen, so erhält man in diesen Fällen:

$$u=A\int_0^\pi \cos\left(\mu x^{\frac{m}{2}+1} i\cos\omega\right)\sin\omega^{-\frac{2}{m+2}}\,d\omega$$

$$+Bx\int_0^\pi \cos\left(\mu x^{\frac{m}{2}+1} i\cos\omega\right)\sin\omega^{\frac{2}{m+2}}\,d\omega,$$

wo gesetzt ist:

$$\mu=\frac{2\sqrt{A}}{m+2}, \quad i=\sqrt{(-1)}.$$

Durch Wegschaffen des Imaginären erhält man:

$$u=\int_0^\pi \left(e^{\mu x^{\frac{m}{2}+1}\cos\omega}+e^{-\mu x^{\frac{m}{2}+1}\cos\omega}\right)\left(A\sin\omega^{-\frac{2}{m+2}}\right.$$

$$\left.+Bx\sin\omega^{\frac{2}{m+2}}\right)d\omega.$$

Das Verhältniss $\frac{A}{B}$ ist dann die einzige in dem Integral der Riccatischen Gleichung vorkommende Constante.

In den Grenzen 0 und $-4$ für $m$ hat man nur ein particuläres Integral, welches man erhält, wenn man bezüglich den mit $A$ oder $B$ multiplicirten Theil der Null gleich setzt. Das allgemeine Integral der Riccatischen Gleichung gibt dann die Formel:

$$y = \frac{\frac{du}{dx}}{au} + \frac{1}{u^2 \left(C + a\int \frac{dx}{u^2}\right)},$$

wo $u$ das gefundene particuläre Integral der Gleichnng:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = Ax^m \cdot u$$

ist.

Für $m = 0$ hat man:

$$\frac{d^2u}{dz^2} - u = 0,$$

wo:

$$z = \frac{2\sqrt{A}}{m+2} x^{\frac{m}{2}+1}$$

ganz wie im vorigen Abschnitte zu setzen ist. Das Integral ist:

$$u = Ce^z + Ee^{-z}.$$

Ist $m = -4$, so erhält man:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{du}{dz} - u = 0,$$

nnd wenn man:

$$u = \frac{v}{2}$$

setzt:

$$\frac{d^2v}{dz^2} - v = 0,$$

also:

$$u = \frac{Ce^z + Ee^{-z}}{z},$$

In dem einzigen Falle, wo $m = -2$ ist, werden beide particulären Integrale illusorisch. Es ergibt sich in diesem Falle direct:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{Au}{x^2},$$

eine Gleichung, die der in Abschnitt 2) II. behandelten Klasse angehören, und deren Integral ist:

$$u = Cx^{k_1} + Ex^{k_2},$$

wo $k_1$ nnd $k_2$ die Wurzeln der qnadratischen Gleichung:

$$k^2 - k = A$$

sind.

II) Wir wollen aber auch anf directe Art die Gleichnng:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{m-1}{mx}\frac{dy}{dx} = C^2 y,$$

offenbar dieselbe, mit der wir nns eben beschäftigten, dnrch bestimmte Integrale auflösen, nm eine Anwendnng anch dieser Methode zn zeigen. Wir folgen hierbei dem Gange, welchen Lobatto (Crelle's Journal, Bd. 17) einschlägt. Das Resultat, wie es schon gegeben worden ist, rührt von Kummer her.

Setzen wir:

$$y = \int e^{-px} P dp,$$

wo $P$ eine zn bestimmende Fnnction von $p$ ist, so erhält man:

$$xy = \int e^{-px} P x\, dp = -e^{-px} P + \int e^{-px} dp,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\int e^{-px} Pp\, dp,$$

$$x\frac{d^2y}{dx^2} = \int e^{-px} Pp^2 x\, dp = -e^{-px} Pp^2 + \int e^{-px} d(Pp^2),$$

nnd wenn man dies in die gegebene Gleichung setzt:

$$0 = e^{-px} P(c^2 - p^2) + \int e^{-px} \left[d(Pp^2) - c^2 dP - \frac{m-1}{m} Pp\, dp\right].$$

Setzt man den nnter dem Integralzeichen erhaltenen Theil gleich 0, so kommt:

$$(p^2 - c^2)\, dP + \frac{m+1}{m} Pp\, dp = 0,$$

oder dnrch Integration:

$$P = (c^2 - p^2)^{-\frac{m+1}{2m}}.$$

Die Grenzen des für $y$ gesetzten Integrals ergeben sich, wenn man den Theil ausserhalb des Summenzeichens, welcher für die Grenzwerthe gilt, verschwinden lässt. Es ist also zn setzen:

$$e^{-px}(c^2-p^2)^{\frac{m-1}{2m}}=0.$$

Ist $\frac{m-1}{m}$ positiv, so wird diese Gleichung erfüllt, wenn

$$p=+c \quad \text{oder} \quad =-c$$

ist. [Der Werth $p=\infty$ gibt im Allgemeinen kein Resultat, weil ja $x$ auch negativ sein kann.*)] Nehmen wir also $-c$ und $+c$ als Integrationsgrenzen, so ergibt sich:

$$y=A\int_{-c}^{+c} e^{-pu}(c^2-p^2)^{-\frac{m+1}{2m}}dp$$

$$=A\int_0^c (e^{pu}+e^{-pu})(c^2-p^2)^{-\frac{m+1}{2m}}dp,$$

oder wenn man für $p$ setzt $cq$:

$$y=A\int_0^1 (e^{cqu}+e^{-cqu})(1-q^2)^{-\frac{m+1}{2m}}dq,$$

wo die Constante $A$ einen andern Werth als vorhin hat. Es ist dies ein particuläres Integral. Indess findet man unter gewissen Bedingungen ein zweites, wenn man in die gegebene Differenzialgleichung setzt:

$$y=mx^{\frac{1}{m}}z.$$

Es wird dieselbe dann:

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\frac{m+1}{mx}\frac{dz}{dx}=c^2z.$$

Diese Gleichung aber hat die Form der ursprünglichen, wenn man in derselben $m$ mit $-m$ vertauscht. Ist also $\frac{m+1}{m}$ positiv, so erhält man ganz wie oben:

$$z=\frac{y}{mx^{\frac{1}{m}}}=B\int_0^1 (e^{cqu}+e^{-cqu})(1-q^2)^{-\frac{m-1}{2m}}dq.$$

Finden also beide Bedingungen statt, so ist der allgemeine Werth von $y$:

$$y=\int_0^1 (e^{cqu}+e^{-cqu})[A(1-q^2)^{-\frac{m+1}{2m}}+B(1-q^2)^{-\frac{m-1}{2m}}]dq.$$

Setzt man:

$$\frac{m-1}{m}=n,$$

so ist:

$$\frac{m+1}{m}=2-n.$$

---

*) In der angeführten Abhandlung nimmt Lobatto irrthümlicher Weise die Grenzen $c$ und $\infty$ als allgemein gültig. Dieser Fall ist aber ein trefflicher Beleg dafür, wie das Resultat sich mit der Auswahl der Constanten ändert. Sind diese so gewählt, dass $x$ positiv bleibt, so kann das Integral auch in den Grenzen 0 und $\infty$ genommen werden, sonst nicht.

Bei positivem $n$ ist nun dieser Ausdruck immer positiv, wenn $n$ kleiner als 2 ist und in diesen Fällen findet der Ausdruck für das allgemeine Integral statt. Ausserhalb dieser Grenzen ist, wie leicht zu sehen, entweder der mit $A$ oder der mit $B$ multiplicirte Theil ein particuläres Integral der vorgelegten Gleichung. Der Fall, wo $n$ imaginär ist, würde jedoch andere Betrachtungen erfordern.

III) Schliesslich, um auch die Integration einer höhern Differenzialgleichung durch bestimmte Integrale zu zeigen, entnehmen wir der angeführten Abhandlung noch die Behandlung der Gleichung:

$$\frac{d^ny}{dx^n}-xy=a,$$

mit der Bemerkung, dass das Resultat schon früher durch Scherk mittels der Summation von Reihen gefunden, und direct durch Jakobi verificirt worden ist.

Wir setzen:

$$y=\int e^{px}Pdp,$$

wo $P$ wieder eine Function von $p$ sein soll. Es ist dann:

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\int e^{px}p^ndp,$$

also wenn man in die ursprüngliche Gleichung einsetzt:

$$\int e^{px}\,Pp^ndp-\int e^{px}x\,Pdp=a,$$

oder, wenn man das zweite Integral theilweise integrirt:

$$-e^{px}\,P+\int e^{px}\,[Pp^ndp+dP]=a.$$

Die Gleichung ist erfüllt, wenn man setzt:

$$Pp^ndp+dP=0,$$

und:

$$e^{p_1x}P_1-e^{p_0x}P_0=-a,$$

wo $p_1$, $p_0$, $P_1$, $P_0$ die Werthe von $p,P$ an den Integrationsgrenzen sind. Die erste Gleichung aber gibt integrirt:

$$P=Ce^{-\frac{p^{n+1}}{n+1}},$$

und die zweite wird erfüllt, wenn man setzt:

$$p_1=\infty,\quad p_0=0,\quad C=a.$$

Da nämlich der erste Theil:

$$e^{p_1x}P_1=ae^{-\frac{p_1^{n+1}}{n+1}}e^{p_1x}$$

ist, so verschwindet derselbe für $p_1=\infty$ immer, wenn:

$$\frac{p_1^{n+1}}{n+1}-p_1x$$

positiv ist, d. h. wenn:

$$p_1^n>(n+1)x$$

ist, eine Bedingung, welche für unendliches $p_1$ immer zu erfüllen ist, da $n$ eine positive ganze Zahl sein muss. Man hat also das particuläre Integral:

$$y=a\int_0^\infty e^{-\frac{p^{n+1}}{n+1}}e^{px}dp.$$

Stellt nun $\varepsilon$ irgend eine $n+1$te Wurzel der Einheit vor, so ändert sich $P$ nicht, wenn man $\varepsilon p$ für $p$ setzt, und man hat also $n+1$ particuläre Integrale von der Form:

$$y=a\varepsilon\int_0^\infty e^{-\frac{p^{n+1}}{n+1}}e^{\varepsilon px}dp.$$

Ist $\varepsilon$ eine primitive Wurzel, so ist in dieser Formel $\varepsilon$ nach und nach zu vertauschen mit:

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3\ \ldots\ \varepsilon^n.$$

Da nun jedes dieser particulären Integrale der Gleichung:

$$\frac{d^ny}{dx^n}-xy=a$$

genügt, so ist zu sehen, dass die Summe:

$$y=\int_0^\infty e^{-\frac{p^{n+1}}{n+1}}dp[Ce^{px}+C_1\varepsilon e^{\varepsilon px}$$

$$+C_2\varepsilon^2e^{\varepsilon^2px}+\ldots+C_n\varepsilon^ne^{\varepsilon^npx}]$$

genügen muss der Differenzialgleichung:

$$\frac{d^ny}{dx^n}-xy=C+C_1+C_2+\ \ldots\ +C_n.$$

Damit diese mit der gegebenen übereinstimme, ist zu setzen:

$$C+C_1+C_2+\ \ldots\ +C_n=a,$$

eine Bedingung, welche die $n+1$ Con-

stanten auf $n$ reducirt, wie es auch sein muss, da die vorgelegte Gleichung $n$ter Ordnung ist.

31) Ueber eine Differenzialgleichung mit 3 Variablen.

Bei allen bis jetzt behandelten Aufgaben war die Anzahl der gegebenen Differenzialgleichungen um Eins kleiner als die der Variablen. Es konnte daher eine der letzteren als unabhängige Variable betrachtet werden, und die Anzahl der Integrale war gleich der der gegebenen Gleichungen. Die Sache wird aber anders, wenn diese Bedingung nicht mehr erfüllt ist.

Zunächst wollen wir uns auf den einfachsten Fall einer Gleichung mit 3 Variablen, von der Gestalt:

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

beschränken, wo $X$, $Y$, $Z$ Functionen von $x$, $y$, $z$ sind, um in den nächsten Abschnitten die gefundenen Resultate möglichst zu erweitern.

Die Frage stellt sich hierbei zunächst:

„Wie viel unabhängige Variablen sind unter diesen dreien vorhanden?"

Offenbar ist nach Bestimmung derselben auch die Anzahl der Integrale bekannt, denn die Summe der unabhängigen Variablen und der Integrale ist gleich 3.

Es müssen nämlich, wenn $x$ allein unabhängige Variable ist, zwei Integralgleichungen stattfinden, welche $y$ und $z$ als Functionen von $x$ geben. Sind $x$ und $y$ unabhängige Variablen, so ist nur eine Integralgleichung gefordert, welche $z$ als Function von $x$ und $y$ giebt. Ein dritter Fall ist unmöglich.

I) Nehmen wir zunächst den letzten Fall an, dass also 2 unabhängige Variablen $x$ und $y$ vorhanden sind. Wir schreiben dann unsere Gleichung folgendermaassen:

$$dz = -\frac{X}{Z}dx - \frac{Y}{Z}dy,$$

eine Gleichung, welche offenbar gleichbedeutend ist mit dem System:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{X}{Z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Y}{Z}.$$

Differenziirt man aber die erste Gleichung nach $y$ (mit Berücksichtigung, dass auch die Grösse $z$, welche in $X$, $Y$, $Z$ enthalten ist, als Function von $x$ und $y$ betrachtet werden muss, da ja das Integral $z$ als eine solche Function ergeben muss), und die zweite nach $x$, so erhalten wir gleiches Resultat, nämlich:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x\,\partial y} = \frac{-Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + X\left(\frac{\partial Z}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{Z^2},$$

$$= \frac{-Z\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{Z^2};$$

hieraus folgt, wenn man den gemeinschaftlichen Nenner weglässt, und für $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ die Werthe setzt:

$$Z\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) + Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + X\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) = 0.$$

Dies ist eine Bedingung, welche durch die Coefficienten $X$, $Y$, $Z$ erfüllt werden muss, damit $z$ eine Function von $x$ und $y$ sei, also die vorgelegte Gleichung nur ein Integral habe. Man nennt sie „Bedingung der Integrabilität", obwohl nicht ganz passend, da eine Integration der Gleichung in jedem Falle möglich ist.

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, so lässt sich die Auffindung des Integrals leicht in folgender Weise bewerkstelligen.

Da in der vorgelegten Gleichung $z$ als Function von $x$ und $y$ zu betrachten ist, so kann man zunächst $y$ constant denken. Sie nimmt dann die Gestalt an:

$$Xdx + Zdz = 0,$$

eine Gleichung, welche nur die Variablen $x$ und $z$ enthält. Man integrirt dieselbe. Die willkürliche Constante des Integrals kann jedoch eine Function der als constant gedachten Grösse $y$ sein.

Dem Integrale gibt man am passendsten diejenige Form, welche wir in Abschnitt 9) als Hauptintegrale bezeichnet haben, d. h. wir geben $x$ eine beliebige Zahl, etwa Null oder allgemeiner $x_0$ als Anfangswerth, und bezeichnen $z_0$ als zugehörigen Werth von $z$.

$$z_0 = \varphi(x, y, z)$$

ist dann das Hauptintegral. — Wiederholungsweise bemerken wir, dass sich

aus jedem Integral unserer Gleichung $f(x, y, z) = c$ das Hauptintegral finden lässt. Setzt man nämlich hierin für $x$ $x_0$ und $z_0$ für $z$, so hat man:

$$f(x, y, z) = f(x_0, y, z_0),$$

eine Gleichung, aus der sich $z_0$ ergibt.

Da nun die Gleichung

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

für jeden Werth von $x$, also auch für $x_0$ gelten muss, wo dann $dx = 0$, $z = z_0$ wird, so erhalten wir:

$$Y_0 dy + Z_0 dz_0 = 0,$$

wo $Y_0$, $Z_0$ diejenigen Werthe von $Y$ und $Z$ sind, welche man erhält, wenn man darin $x$ und $z$ bezüglich mit $x_0$ und $z_0$ vertauscht, während $y$ beliebig bleibt.

Die Integration dieser Gleichung gibt nun $z_0$ als Function von $y$ allein mit einer willkürlichen Constante $\alpha$. Sei:

$$z_0 = \psi(y, \alpha),$$

so ist also das Integral der anfänglich vorgelegten Gleichung:

$$\psi(y, \alpha) = \varphi(x, y, z).$$

Die Integration ist also zurückgeführt auf 2 Gleichungen mit 2 Variablen:

$$Xdx + Zdz = 0 \text{ und } Y_0 dy + Z_0 dz_0 = 0,$$

welche man unabhängig von einander integriren kann. Von der ersten, in der man $y$ constant denkt, ist jedoch das Hauptintegral $z_0 = \varphi(x, y, z)$ zu bilden, und schliesslich aus beiden $z_0$ zu eliminiren.

Beispiel. Sei gegeben die Gleichung:

$$(ay - bz)dx + (cz - ax)dy + (bx - cy)dz = 0.$$

Es ist also:

$$X = ay - bz, \quad Y = cz - ax, \quad Z = bx - cy,$$

Ausdrücke, die offenbar der Bedingung der Integrabilität genügen.

Man hat also die beiden Gleichungen:

$$(ay - bz)\,dx + (bx - cy)\,dz = 0,$$
$$cz_0\,dy - cy\,dz_0 = 0,$$

indem man $x_0 = 0$ setzt.

Das Integral der ersten Gleichung ist:

$$\lg(bz - ay) = \lg(cy - bx) + \lg g,$$

wo $g$ die willkürliche Constante ist.

Setzen wir hierin $x = 0$, $z = z_0$, so kommt:

$$\lg(bz_0 - ay) = \lg cy + \lg g,$$

also durch Subtraction:

$$\lg \frac{bz - ay}{bz_0 - ay} = \lg \frac{cy - bx}{cy},$$

oder:

$$cy(bz - ay) = (bz_0 - ay)(cy - bx).$$

Die zweite Gleichung integrirt, gibt aber:

$$z_0 = \alpha y,$$

also durch Elimination von $z_0$:

$$(b\alpha - a)(cy - bx) = c(bz - ay),$$

wo $\alpha$ die willkürliche Constante ist.

Setzt man:

$$\frac{c}{b\alpha - a} = \gamma,$$

so ist noch:

$$\frac{cy - bx}{bz - ay} = \gamma,$$

wo $\gamma$ ebenfalls willkürlich ist.

II) Im Falle, dass die Bedingung der Integrabilität nicht erfüllt ist, gestaltet sich die Betrachtung der Gleichung

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

sehr einfach.

Dieselbe kann nur eine unabhängige Variable, und muss mithin 2 Integrale haben. Nun ist es klar, dass die vorgelegte Gleichung immer ein Integral gibt, wenn man zwischen $x$, $y$ und $z$ eine ganz willkürliche Beziehung annimmt, die wir durch:

1) $$0 = \varphi(x, y, z)$$

bezeichnen wollen. Man kann mittels derselben eine Variable $z$ eliminiren, und es verschwindet dann auch $dz$ durch die Gleichung:

2) $$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz = 0,$$

wenn man den daraus gezogenen Werth von $dz$ in die vorgelegte Gleichung einsetzt. Letztere verwandelt sich also in eine Gleichung mit 2 Variablen, deren Integral sein soll:

$$f(x, y) = \alpha.$$

Die willkürliche Gleichung:

$$0 = \varphi(x, y, z)$$

kann dann als ein zweites Integral betrachtet werden. Also:

„Wird die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt, so hat die Gleichung immer 2 Integrale, von denen jedoch eins ganz willkürlich ist."

Der nöthigen Rechnung kann man auch folgende Form geben. Man multiplicire Gleichung 2) mit der unbekannten Grösse $\lambda$ und addire sie zur vorgelegten Gleichung, so ergibt sich:

3) $\left(X+\lambda\frac{\partial q}{\partial x}\right)dx+\left(Y+\lambda\frac{\partial q}{\partial y}\right)dy=0,$

wenn man zur Bestimmung von $\lambda$ setzt:

4) $Z+\lambda\frac{\partial q}{\partial z}=0.$

Die Gleichungen 1) und 4) dienen dann, um aus Gleichung 3) $z$ und $\lambda$ zu eliminiren, und diese Gleichung 3) gibt dann das zweite Integral, während $q$ ganz willkürlich und $q=0$ das erste Integral ist.

III) Das in II) enthaltene Resultat ist als das allgemeine, das in I) enthalten, als ein Ausnahmefall zu betrachten, da hierbei eine Bedingungsgleichung zu erfüllen ist. Indess braucht eine Differenzialgleichung mit 3 Variablen nicht gerade die hier angenommene Form zu haben, da $dx$, $dy$, $dz$ in jeder Potenz, Homogenität vorausgesetzt, erscheinen können. Immer aber ist das in II) gegebene Verfahren anzuwenden. Sei z. B. die allgemeinste Relation zwischen $dx$, $dy$, $dz$ angenommen, welche eine homogene Gleichung zweiter Ordnung gibt, also:

1) $dz^2+A\,dx\,dz+B\,dy\,dz=C\,dx^2+E\,dx\,dy+F\,dy^2,$

wo $A$, $B$, $C$, $E$, $F$ Functionen von $x$, $y$, $z$ sind. Immer kann man setzen:

$q(x, y, z)=0,$

wo $q$ eine beliebige Function ist. Eliminirt man mittels dieser Gleichung und ihres Differenzials $z$ und $dz$ aus der Gleichung 1), so hat man eine Differenzengleichung mit 2 Variablen $x$ und $y$, die integrirt, und mit $q=0$ verbunden, die Aufgabe löst. — Stellen wir aber jetzt die Frage: „Unter welchen Bedingungen hat die Gleichung 1) nur ein Integral?" so ist der Gang der Untersuchung ähnlich wie in 1) anzustellen.

Wir setzen:

2) $dz=p\,dx+q\,dy,$

wo $x$ und $y$ unabhängige Variable sein sollen. Dieser Werth wird in 1) eingesetzt, wo dann $dz$ eliminirt ist. Man hat:

$$(p^2+Ap-C)\,dx^2+(q^2+Bq-F)\,dy^2+(2pq+Aq+Bp-E)\,dx\,dy=0.$$

Da nun $x$ und $y$ unabhängige Variablen sind, so ist dieser Gleichung nur zu genügen, wenn man setzt:

3) $p^2+Ap-C=0,\quad q^2+Bq-F=0,\quad 2pq+Aq+Bp-E=0.$

Es sind dies 3 Gleichungen, aus denen man $p$ und $q$ eliminiren kann. Die resultirende Gleichung zwischen $A$, $B$, $C$, $E$ und $F$ muss dann identisch erfüllt werden. Setzen wir der Kürze wegen:

$$C=-\frac{A^2}{4}+G^2,\quad F=-\frac{B^2}{4}+H^2,$$

so ist:

4) $$p=-\frac{A}{2}\pm G,\quad q=-\frac{B}{2}\pm H,$$

und also die Bedingungsgleichung:

$$(-A\pm 2G)(-B\pm 2H)+A(-B\pm 2H)+B(-A\pm 2H)-2E=0,$$

d. h.:

5) $$\pm(BH-GB)+2GH-E-\frac{BA}{2}=0.$$

Diese Bedingungsgleichung ist jedoch nicht die einzige. Wegen der Gleichung 2) muss nämlich auch sein:

$$\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}.$$

Differenziiren wir also bezüglich die Gleichungen 4) nach $y$ und $x$ mit Rücksicht darauf, dass $z$ eine Function von $x$ und $y$ ist, so erhalten wir:

$$-\frac{\partial A}{\partial y}\pm 2\frac{\partial G}{\partial y}-\frac{\partial A}{\partial z}q\pm 2\frac{\partial G}{\partial z}q=-\frac{\partial B}{\partial x}\pm 2\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial B}{\partial z}p\pm 2\frac{\partial H}{\partial z}p,$$

oder, wenn wir für $p$ und $q$ die Werthe einsetzen:

6) $$\frac{\partial B}{\partial x}\mp 2\frac{\partial H}{\partial x}-\frac{\partial A}{\partial y}\pm 2\frac{\partial G}{\partial y}=+\left(-\frac{B}{2}\pm H\right)\left(\frac{\partial A}{\partial z}\mp 2\frac{\partial G}{\partial z}\right)-\left(-\frac{A}{2}\pm G\right)\left(\frac{\partial B}{\partial z}\mp 2\frac{\partial H}{\partial z}\right).$$

Die Coefficienten $A$, $B$, $C$, $E$, $F$ müssen also beide Bedingungsgleichungen 5) und 6) identisch machen, damit ein Integral der Gleichung 1) genügen könne. Uebrigens ist es nur nöthig, dass eins der beiden Systeme erfüllt werde, welche entstehen, wenn man überall in 5) und 6) die untern oder die obern Zeichen nimmt. Jedoch darf man nicht etwa in 5) die untern und in 6) die obern Zeichen nehmen.

Sind aber diese Bedingungen der Integrabilität erfüllt, so ist die Lösung wie in 1) zu machen.

Man denkt zuerst $y$ constant, und erhält:

$$dz^2 + Adx\,dz = Cdx^2.$$

Sei:

$$z_0 = f(x, y, z)$$

das Hauptintegral dieser Gleichung, wo der Anfangswerth von $x$ gleich der Zahl $x_0$ angenommen ist. Man hat dann noch zu integriren die Gleichung:

$$dz_0{}^2 + B_0\,dy\,dz_0 = F_0\,dy^2,$$

wo $B_0$, $F_0$ sich aus $B$, $F$ ergehen, wenn man darin $x$, $z$ mit $x_0$, $z_0$ vertauscht: Aus dem Integral dieser Gleichung, welches sein soll:

$$\varphi(y, z_0) = \alpha,$$

und aus dem Hauptintegral der ersten ist dann wieder $z_0$ zu eliminiren.

Man sieht, wie diese Methode Anwendung findet, wie hoch auch die Dimension der Differenziale sei, dass sich aber mit derselben auch die Anzahl der Integrabilitätsbedingungen vermehren muss.

Wären in Gleichung 1):

$$A = B = 0,$$

so dass diese also lautet:

$$dz^2 = Cdx^2 + Edx\,dy + Fdy^2,$$

so wären die Gleichungen 3) von der Gestalt:

$$p^2 = C,\quad q^2 = F,\quad 2pq = E.$$

Die erste Bedingung der Integrabilität ist dann:

$$E^2 = 4\,CF,$$

eine Bedingung, welche offenbar bewirkt, dass

$$dz^2 = (\sqrt{C}\,dx \pm \sqrt{F}\,dy)^2$$

wird. In diesem Falle ist also:

$$dz = \sqrt{C}\,dx \pm \sqrt{F}\,dy,$$

und die Gleichung ganz so wie in 1) zu behandeln.

32) Ueber eine Gleichung mit $n$ Variablen von der Form:

$$A_1dx_1 + A_2dx_2 + \cdots + A_ndx_n = 0.$$

Die Gleichung, wo die Differenziale $dx_1$, $dx_2 \ldots dx_n$ in linearer Form vorkommen und $A_1$, $A_2 \ldots A_n$ willkürliche Functionen von $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ sind, hat in ihrer Allgemeinheit zuerst Pfaff behandelt, sie wird daher auch oft als Pfaff'sche Gleichung bezeichnet. Einer weitern Untersuchung hat sie Jakobi (Crelle's Journal, Band 2 und 17) unterworfen. Die hier trotz möglichster Kürze mit einiger Vollständigkeit zu gebende Behandlung wird sich an diejenigen Untersuchungen anschliessen, welche der Verfasser dieses Wörterbuchs darüber angestellt hat. (Crelle's Journal Band 58.)

Wir setzen zu dem Ende:

$$1)\quad X_1dx_1 + X_2dx_2 + \cdots + X_ndx_n = \sum_{s=1}^{s=n} X_s dx_s = 0,$$

und stellen zunächst die Frage, wie viel Integrale dieselbe im allgemeinen Falle habe, d. h. wenn zwischen den Grössen $X_1$, $X_2 \ldots X_n$ keinerlei Bedingungsgleichungen stattfinden. Wir bemerken noch, dass eine Auflösung der Gleichung desto allgemeiner ist, aus je weniger Integralen sie besteht, da je mehr Integrale gegeben sind, desto weniger von den Grössen $x$ willkürlich bleiben.

Wir unterscheiden jetzt, wie schon früher, die beiden Differenzialzeichen $d$ und $\delta$ derart, dass wir $d$ dann nehmen, wenn wir einen Theil der veränderlichen $x$ von den andern als derartig abhängig betrachten, wie es durch die Integralgleichungen angezeigt wird.

Betrachten wir aber die $x$ als völlig unabhängig von einander, so bedienen wir uns des Zeichens $\delta$, während also $\Sigma X_s dx_s$ immer gleich 0 ist, ist dies mit $\Sigma X_s \delta x_s$ nicht der Fall. Indessen kann man, während die $x$ ganz beliebig sind, $n$ neue Variablen einführen, welche beliebige Functionen der $x$ sein sollen. Wir theilen diese neuen Variablen aber in zwei Gruppen, die eine aus $p$ Gliedern, $t_1$, $t_2 \ldots t_p$, die andere aus $q$, $u_1$, $u_2 \ldots u_q$ bestehend. $p$ und $q$ sind nicht bestimmt, jedoch natürlich immer

$p+q=n$. Vermöge der Bestimmungsgleichungen kann man dann setzen:

$$\delta x_s = \frac{\partial x_s}{\partial t_1}\delta t_1 + \frac{\partial x_s}{\partial t_2}\delta t_2 + \ldots + \frac{\partial x_s}{\partial t_p}\delta t_p + \frac{\partial x_s}{\partial u_1}\delta u_1 + \ldots + \frac{\partial x_s}{\partial u_q}\delta u_q,$$

und auch in den Grössen $X$, $x_1, x_2 \ldots x_n$ durch $t_1, t_2 \ldots t_p, u_1 \ldots u_q$ ersetzen. Es ist dann identisch:

2) $$\Sigma X_s\,\delta x_s = \Sigma T_r\,\delta t_r + \Sigma U_h\,\delta u_h,$$

wo $T_1, T_2 \ldots T_p, U_1 \ldots U_q$ leicht zu bestimmende Functionen von $t_1 \ldots t_p, u_1 \ldots u_q$ sind, und man hat, wenn man die Differenziale nach $t_r$ und $u_h$ nimmt:

$$T_r = \Sigma X_s \frac{\partial x_s}{\partial t_r}, \quad U_h = \Sigma X_s \frac{\partial x_s}{\partial u_h},$$

Vertauschen wir jetzt das Zeichen $\delta$ mit $d$, was immer geschehen kann, da $\delta$ das allgemeinste Gesetz des Differenziirens, $d$ einen bestimmten Fall anzeigt, so ist:

$$\Sigma X_s dx_s = 0,$$

also auch:

$$\Sigma T_r d t_r + \Sigma U_h du_h = 0.$$

Damit diese letzte Gleichung erfüllt werde, müssen entweder alle Differenziale $dt_r$, $du_h$ verschwinden, d. h. alle $t$ und $u$ constant sein, oder die Coefficienten $T$ und $U$ derjenigen, wo dies nicht der Fall ist, gleich Null sein. Die beiden bis jetzt willkürlichen Gruppen der $t$ und $u$ bestimmen wir jetzt derart, dass alle $T$ gleich Null sein sollen, und alle $u$ constant. Sollte also keins der $T$ verschwinden, so wäre $p=0$, $q=n$ zu setzen u. s. f. Man hat also im allgemeinen Falle $p$ Gleichungen von der Form:

3) $$\Sigma X_s \frac{\partial x_s}{\partial t_r} = 0,$$

wo für $r$ nach und nach $1, 2 \ldots p$ zu setzen ist. — Das System der Gleichungen 3) ist als vollständig identisch mit der gegebenen Gleichung 1) zu betrachten. Denn da in der Gleichung 1) gewisse unabhängige Variable vorhanden sein müssen, so kann man sich eben die $t$ als solche denken, und wenn man nach jedem derselben differenziirt, so verwandelt sich eben die Gleichung 1) in 3). Was die Grössen $u$ anbetrifft, so müssen dieselben gleich Constanten gesetzt werden, damit Gleichung 1) erfüllt sei.

„Die Grössen $u$ sind mithin die Integrale der Gleichung 1)."

Es ist dies eben die Definition, welche wir von Integralen gegeben haben. Um die allgemeinste Auflösung zu haben, muss die Anzahl der Integrale, d. h. der Grössen $u$ möglichst klein sein. Es fragt sich also, welches die kleinste Anzahl derselben bei willkürlichen Werthen der $X$ sein kann. Aus Gleichung 2) ergibt sich jetzt:

4) $$\Sigma X_s\,\delta x_s = \Sigma U_h\,\delta u_h,$$

d. h.:

4a) $$X_s = \Sigma U_h \frac{\partial u_h}{\partial x_s},$$

und da die Anzahl der $X$ $n$ ist, so hat man $n$ Gleichungen von der Gestalt 4a), welche man erhält, wenn man nach und nach $1, 2, 3 \ldots n$ für $s$ setzt. Aus diesen $n$ Gleichungen sind die Grössen $U_1, U_2 \ldots, u_1, u_2 \ldots$ derart zu bestimmen, dass die Anzahl der $U$ und die der $u$ gleich $q$ ist, und es kann also im Allgemeinen $q$ nicht kleiner als $\frac{n}{2}$ sein. Denn sonst würden nach Elimination der $U$ und $u$ noch Bedingungsgleichungen zwischen den $X$ stattfinden. Es sind also zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $n$ grade oder ungrade ist. — Im ersteren Falle ist die Anzahl der $u$ wirklich gleich $\frac{n}{2}$, im letztern dienen die Gleichungen 4a) zunächst, um $\frac{1}{2}(n+1)$ der Factoren $U$ zu bestimmen, Da dann die Anzahl der Integrale $u$ auch gleich $\frac{1}{2}(n+1)$, aber nur noch $\frac{1}{2}(n+1)-1$ oder $\frac{1}{2}(n-1)$ Gleichungen übrig sind, so ist eins der Integrale in diesem Falle ganz willkürlich. Wir wer-

den dies willkürliche Integral mit $\varphi$ bezeichnen. Man hat also in beiden Fällen die Identitäten:

5) $$\sum_{s=1}^{s=2n} X_s dx_s = U_1 \partial u_1 + U_2 \partial u_2 + \ldots + U_n \partial u_n,$$

6) $$\sum_{s=1}^{s=2n+1} X_s dx_s = \lambda \partial \varphi + U_1 \partial u_1 + U_2 \partial u_2 + \ldots + U_n \partial u_n,$$

und es sind die Integrale der Gleichung:

$$\sum_{s=1}^{s=2n} X_s dx_s = 0,$$

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2 \ldots u_n = a_n,$$

wo $a_1, a_2 \ldots a_n$ beliebige Constanten vorstellen. Die Integrale der Gleichung:

$$\sum_{s=1}^{s=2n+1} X_s dx_s = 0$$

sind dagegen:

$$\varphi = c, \quad u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2 \ldots u_n = a_n,$$

wo $\varphi$ eine willkürliche Function der $x$ ist.

Die Integration einer totalen Differenzialgleichung stellt sich also wesentlich verschieden, je nachdem die Anzahl der Variablen gerade oder ungerade ist. Für den letztern Fall haben wir bereits schon das einfachste Beispiel $n=3$ betrachtet, und gefunden, dass in der That von den 2 Integralen eins willkürlich ist.

Die Grössen $t$ haben wir oben als unabhängige Variable betrachtet. Es lässt sich nun zeigen, dass man für dieselben, deren Anzahl in beiden Fällen gleich $n$ ist, ganz beliebige Functionen der $x$ nehmen kann, ohne dass sich die Integrale ändern.

Nehmen wir nämlich $2n$ bezüglich $2n+1$ Gleichungen von der Gestalt:

$$x_s = \psi_s(t_1, t_2 \ldots t_p, u_1, u_2 \ldots u_q),$$

wo die $t$ willkürlich sind, die $u$ ihre ihnen gegebene Bedeutung behalten, so ist offenbar:

$$\Sigma X_s dx_s = \Sigma C \partial t + \Sigma B \partial u,$$

eine Gleichung, die ganz wie Gleichung 2) ist.

Wegen der Gleichung 4) muss aber auch sein:

$$\Sigma U_h \partial u_h = \Sigma C_r \partial t_r + \Sigma B_h \partial u_h,$$

eine Gleichung, die sich nur erfüllen lässt, wenn:

$$B_h = U_h, \quad C_r = 0$$

für jedes $r$ und $h$ ist. Die $u$ sind also Integrale, was auch die $t$ sein mögen.

33) Integration der totalen Differenzialgleichung für den Fall, dass die Anzahl der Variablen grade ist.

Wir integriren zunächst die Gleichung:

$$\sum_{s=1}^{s=2n} X_s dx_s = 0,$$

d. h. wir bestimmen in Gleichung 5) des vorigen Abschnittes die Integrale $u$. Der Kunstgriff, dessen man sich hierbei bedient, besteht in der Auswahl der an sich willkürlichen unabhängigen Variablen $t$. Zu dem Ende setzen wir:

$$U_1 = V\alpha_1, \quad U_2 = V\alpha_2 \ldots U_n = V\alpha_n,$$

wo $V$ allein die erste unabhängige Variable $t_1$ enthalten soll, die Grössen $\alpha$ aber nur Functionen der übrigen $t_2, t_3 \ldots t_n$ sind. Es ist dies z. B. der Fall, wenn man setzt:

$$V=\frac{1}{t_1},\quad \alpha_1=1,\quad \alpha_2=\frac{1}{t_2},\quad \alpha_3=\frac{1}{t_2 t_3}\ \ldots\ \alpha_n=\frac{1}{t_2 t_3 \ldots t_n},$$

d. h.:

$$t_1=\frac{1}{U_1},\quad t_2=\frac{U_1}{U_2},\quad t_3=\frac{U_2}{U_3}\ \ldots\ t_n=\frac{U_{n-1}}{U_n},$$

Gleichungen, durch welche die unabhängigen Variablen $t$ vollständig bestimmt werden.

Setzt man noch

$$A=\frac{1}{V}$$

und multiplicirt die Gleichung 5) des vorigen Abschnitts mit $A$, so erhält man:

7) $$\Sigma\, A X\, \delta x=\Sigma \alpha\, \delta u,$$

und:

8) $$\Sigma\, A X\, \frac{\partial x}{\partial t_1}=0.$$

Die Gleichung 8) findet darum statt, weil die Grössen $u_1, u_2 \ldots u_n$ von $t_1$ unabhängig, also $\frac{\partial u_h}{\partial t_1}=0$ ist. — Betrachtet man $t_1$ jetzt allein als unabhängige Variable, so sind die Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n, u_1, u_2 \ldots u_n$ von $t_1$ unabhängig, also bei dieser Betrachtungsweise als constant zu denken. Diese $2n-1$ Grössen sind mithin Integrale der Gleichung 8) (wenn nämlich, wie hier angenommen wurde, $\alpha_1=1$ ist. Bei andern Annahmen wäre auch $\alpha_1$ ein Integral, es fände aber dann zwischen den $\alpha$ eine Beziehung statt, vermöge deren $\alpha_1$ als eine Function der übrigen sich ergäbe).

Wir führen jetzt noch das Differenzialzeichen $\partial$ ein, welches immer andeuten soll, dass nach der ersten der unabhängigen Variablen, also hier nach $t_1$ differenziirt worden ist, während, wie eben gezeigt, $\delta$ auf ein Differenziiren nach jedem $t$, $d$ auf ein ganz beliebiges Differenziiren geht. Der Ausdruck rechts in Gleichung 7) ist nun, wie wir gesehen haben, von $t_1$ ganz unabhängig, daher sein Differenzial $\partial$ gleich 0, d. h:

$$\partial\,(\Sigma\, AX\delta x)=0.$$

Die Gleichungen 8) können wir jetzt auch schreiben:

$$\Sigma\,(AX\partial x)=0,$$

da $\partial$ so gut wie der Differenzialquotient $\frac{\partial x}{\partial t_1}$ nur Differenziiren nach $t_1$ andeutet. Denkt man sich nun unter den $x$, wie doch hierbei geschehen muss, die bezüglichen Functionen von $t_1$, so ist diese letztere Gleichung offenbar identisch, und daher auch ihr Differenzial nach einem beliebigen Gesetze genommen. Man hat also:

$$d\,(\Sigma\, A\, X\, \partial x)=0.$$

Offenbar aber erhält man durch theilweises Differenziiren:

$$d\,(\Sigma\, AX\partial x)=\Sigma\, d\,(AX)\,\partial x+\Sigma\, AX\,\partial\, dx=A\,\Sigma\, dX\,\partial x+d\,A\,\Sigma\, X\,\partial x+\Sigma\, A\, X\,\partial\, dx;$$

es ist aber:

$$\Sigma\, X\partial x=0,$$

also:

$$d\,(\Sigma\, AX\partial x)=A\,\Sigma\, dX\partial x+\Sigma\, A\, X\,\partial\, dx=0.$$

Ferner hat man:

$$\partial\,(\Sigma\, A\, X dx)=\Sigma\, AX\,\partial\, dx+\Sigma\,\partial\,(AX)\,dx=0,$$

und durch Subtraction der beiden letzten Gleichungen:

9) $$\Sigma\,\partial\,(AX)\,dx=A\,\Sigma\, dX\,\partial x.$$

Da die Differenziale $dx_1, dx_2 \ldots dx_{2n}$ ganz willkürlich sind, so müssen die mit einem jeden derselben multiplicirten Glieder auf beiden Seiten der Gleichung 9) einzeln gleich sein. Dieselbe zerfällt sonach in $2n$ andere Gleichungen:

10)
$$\partial(AX_1)=A\sum_{p=1}^{p=2n}\frac{\partial X_p}{\partial x_1}\partial x_p,$$
$$\partial(AX_2)=A\sum_{p=1}^{p=2n}\frac{\partial X_p}{\partial x_2}\partial x_p$$
$$\vdots$$
$$\partial(AX_{2n})=A\sum_{p=1}^{p=2n}\frac{\partial X_p}{\partial x_{2n}}\partial x_p,$$

oder da man hat:

$$\partial(AX_p)=A\left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1}\partial x_1+\frac{\partial X_p}{\partial x_2}\partial x_2+\ldots+\frac{\partial X_p}{\partial x_{2n}}\partial x_{2n}\right)+X_p\partial A,$$

so verwandeln sich die Gleichungen 10) in:

11)
$$X_1\partial A=A\sum_{p=1}^{p=2n}\left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1}-\frac{\partial X_1}{\partial X_p}\right)\partial x_p,$$
$$X_2\partial A=A\sum_{p=1}^{p=2n}\left(\frac{\partial X_p}{\partial x_2}-\frac{\partial X_2}{\partial x_p}\right)\partial x_p$$
$$\vdots$$
$$X_{2n}\partial A=A\sum_{p=1}^{p=2n}\left(\frac{\partial X_p}{\partial x_{2n}}-\frac{\partial X_{2n}}{\partial x_p}\right)\partial x_p.$$

Es sind dies nach Elimination von $\frac{\partial A}{A}$, welches durch blosses Absiehn einer Gleichung von den übrigen geschehen kann, $2n-1$ Gleichungen mit $2n$ Variablen. Die $2n-1$ Integrale dieses Systems aber sind, wie wir bereits gesehen haben, die Grössen $\alpha_2$, $\alpha_3$ ... $\alpha_n$, $u_1$, $u_2$ ... $u_n$, oder vielmehr im Allgemeinen jedes System von $2n-1$ von einander unabhängigen Functionen dieser Grössen.

Bei der Integration dieses Systems 11), welche also nach den uns bekannten Regeln geschehen muss, erhält man natürlich im Allgemeinen Integrale von dieser letztern Form. Da wir aber die $u$ suchen, so müssen die $\alpha$ aus den Integralen eliminirt werden.

Dies erfordert aber die Auflösung neuer Differenzialgleichungen.

Bezeichnen wir mit $\beta_1$, $\beta_2$ ... $\beta_{2n-1}$ irgend ein System von Integralen der Gleichungen 11), wie es durch die Auflösung derselben gegeben ist, so hat man identisch:

$$\Sigma AX\delta x=B_1\delta\beta_1+B_2\delta\beta_2+\ldots+B_{2n-1}\delta\beta_{2n-1},$$

denn da die $\beta$ Functionen der $\alpha$ oder $u$ sind, so sind mithin auch die $\alpha$ oder $u$ Functionen der $\beta$, also:

$$\delta u=\frac{\partial u}{\partial\beta_1}\delta\beta_1+\frac{\partial u}{\partial\beta_2}\delta\beta_2+\ldots+\frac{\partial u}{\partial\beta_{n-1}}\delta\beta_{n-1},$$

und die Gleichung:

$$\Sigma AX\delta x=\Sigma\alpha\,\delta u$$

muss die hier hingeschriebene Form annehmen. Die Grössen $B$ sind dabei nur Functionen der $\beta$, also von $t_1$, oder was hier dasselbe ist, von $A$ ganz frei. Die Gleichung 1) des vorigen Abschnittes geht also über in:

12) $$\sum_{s=1}^{s=2n-1} B_s d\beta_s = 0.$$

Die $\beta$ sind hier gegebene Functionen der $x$, die $B$ werden bestimmt durch die $2n$ Gleichungen:

$$A X_s = \frac{B_1 \partial\beta_1}{\partial x_s} + B_2 \frac{\partial\beta_2}{\partial x_s} \ldots + B_{2n-1} \frac{\partial\beta_{2n-1}}{\partial x_s}.$$

wo für $s$ zu setzen ist: 1, 2 ... $2n$. Eine dieser Gleichungen muss eine Folge der übrigen sein, die andern dienen zur Bestimmung der $B$ als Functionen von $x$. Diese Variablen $x_1$, $x_2$ ... $x_{2n}$ werden aber mit Hülfe der $2n-1$ Integralgleichungen bis auf eine als Functionen der $\beta$ ausgedrückt, und in den Grössen $B$ kann nach der Substitution derselben $x_1$ nicht mehr vorkommen, da, wie wir eben gezeigt haben, dieselben nur von den $\beta$ abhängig sind. Es bleibt also noch übrig, die Gleichung 12) zu integriren. Da die Anzahl der Variablen $\beta$ ungerade ist, so erfordert sie nach dem vorigen Abschnitte ein willkürliches Integral. Dazu wähle man eins der $\beta$, z. B. $\beta_1$. Dies kann unbeschadet der Allgemeinheit geschehn, da ja jedes Integral als eine willkürliche Function eines beliebigen Systems anderer Integrale betrachtet werden darf. Wir setzen daher $\beta_1$ einer Constanten gleich. Nun hat die Gleichung 12) noch $2n-2$, also eine grade Anzahl von Variablen. Ihre Lösung kann also durch ein System von der Form 11) bewirkt werden, in welchem man die $X, x$ durch die $B, \beta$ und die Zahl $n$ durch $n-1$ ersetzt. Sind $\gamma_1$, $\gamma_2$ ... $\gamma_{n-2}$ die Integrale dieses Systems, so kann man wieder $\gamma_1$ gleich einer Constante setzen, und erhält ganz wie oben eine der Gleichung 12) analoge

$$\Sigma\, C\, dy = 0$$

mit $2n-4$ Variablen. Fährt man so fort, so hat man nach und nach ein System von $2n-5$ Gleichungen mit $2n-4$, $2n-7$ Gleichungen mit $2n-6$, u. s. w., endlich 1 Gleichung mit 2 Variablen. Indem man das erste Integral jedes Systems einer Constanten gleich setzt, erhält man so die Integrale:

$$\beta_1, \gamma_1, \delta_1 \ldots \nu_1,$$

im Ganzen $n$ Integrale, und diese sind offenbar die Integrale der vorgelegten Gleichung 5) des vorigen Abschnittes, d. h. diejenigen Grössen, die wir mit $u_1$, $u_2$ ... $u_n$ bezeichnet haben.

Bis zu diesem Punkte hat Pfaff das Problem behandelt. Die Ausführung wird aber bei weitem einfacher und eleganter, wenn man sich mit Jakobi derjenigen Integrale bedient, welche wir oben als Hauptintegrale bezeichnet haben.

34) Einführung der Hauptintegrale in Bezug auf die hier behandelte Aufgabe.

Nachdem das System 11) integrirt ist, kann man die Integrale $\beta$ unter unendlich vielen Formen schreiben. Wir führen jetzt die Form der Hauptintegrale ein, d. h. wir setzen $x_1 = 0$ oder gleich einer andern beliebigen Zahl. Es mögen dann sich verwandeln $x_2$ in $x_2'$, $x_3$ in $x_3'$ u. s. w. Wir ersetzen dann das System der $\beta$ durch das System $x_2'$, $x_3'$, $x_4'$ ..., und die Gleichung 12) des vorigen Abschnitts wird dann:

$$\Sigma\, A X \delta x = \Sigma\, K\, \delta x',$$

wo die $K$ nur Funktionen der Grössen $x_2'$, $x_3'$ ... sind. Das Wichtige dieser Form ist nun, dass man diese Grössen $K$ augenblicklich bestimmen kann. — Zu dem Ende bezeichnen wir mit $A'$, $X_1'$, $X_2'$ ... die Werthe, welche bezüglich $A$, $X_1$, $X_2$ annehmen, wenn man darin $x_1$, $x_2$ ... $x_{2n}$ mit $0, x_2' \ldots x'_{2n}$ vertauscht. Da nun die Gleichung:

$$\Sigma\, A X \delta x = \Sigma\, K\, \delta x'$$

für beliebige Werthe der $x$ gilt, so ist auch:

$$\Sigma\, A' X' \delta x' = \Sigma\, K\, \delta x',$$

also identisch:

$$K_s = A' X_s,$$

und:

12a) $$\Sigma\, A X \delta x = \Sigma\, A' X' \delta x'.$$

Da $x_2'$ an die Stelle von $\beta_1$ getreten ist, so ist $u_1 = x_2'$, einer Constante gleich gesetzt, das erste Integral der Gleichung 5). Man hat nun zu integriren die Gleichung:

$$\Sigma\, X' dx' = 0,$$

welche 12) entspricht, und deren Variablen $x_3'$, $x_4'$ ... $x'_{2n}$ sind. Die Inte-

gration führt auf ein System von $2n-2$ Differenzialgleichungen, welches wir mit 11a) bezeichnen. Es geht aus 11) dadurch hervor, dass man darin die beiden ersten Gleichungen ganz fortlässt, und in den übrigen $x_3, x_4 \ldots x_{2n}, X_3, X_4 \ldots X_{2n}, A$ vertauscht mit $x_3', x_4' \ldots x'_{2n}, X_3', X_4' \ldots X_{2n}, A_2$. Das System 11a) habe nun die Hauptintegrale $x_4'', x_5'' \ldots x''_{2n}$, und der Werth von $A_2$ für $x_3'=0$ sei $A_2'$, so hat man ganz wie oben:

$$\Sigma A_2 X' \partial x' = \Sigma A_2' X'' \partial x''.$$

Man setzt $u_2 = x_4''$ einer Constanten gleich, so ist zu integriren die Gleichung:

$$\Sigma X'' dx'' = 0.$$

Diese zerfällt wieder in ein System von $2n-4$ Gleichungen, welches der Gleichung 11) analog ist und das wir mit 11b) bezeichnen. Es entsteht aus 11), indem man die ersten 4 Gleichungen weglässt, für $x_5 \ldots x_{2n}, X_5 \ldots X_{2n}, A$ aber schreibt: $x_5'', x_6'' \ldots x''_{2n}, X_5'' \ldots X''_{2n}, A_3$. Dieses System 11b) möge nun zu Hauptintegralen haben: $x_6''' \ldots x_{2n}'''$ u. s. w. Man hat also nach und nach zu integriren die Systeme 11), 11a), 11b), 11c) u. s. w., im Ganzen $n$ Systeme mit bezüglich $2n, 2n-2, 2n-4 \ldots 2$ Variablen (mit Ausschluss der Grössen $A, A_2, A_3 \ldots$, die sich immer nach Auflösung der übrigen Gleichungen durch blosse Quadratur ergeben). Die Hauptintegrale der verschiedenen Systeme werden gebildet, indem man nach und nach:

$$x_1, x_3' \, x_5'' \ldots x_{2n-1}^{(n-1)}$$

der Null oder einer andern Zahl gleich setzt, und jedes System gibt ein Integral der Gleichung 5), nämlich:

$$u_1 = x_2', \quad u_2 = x_4'' \ldots u_n = x_{2n}^{(n)}.$$

Wir wollen noch die Grösse $A$ der Uebereinstimmung wegen mit $A_1$ bezeichnen.

Schon im Abschnitt 9) haben wir eine Variable, die nicht selbst, sondern deren Differenzial allein in dem gegebenen System vorkommt, als Index des Systems bezeichnet. Wir wollen diesen Ausdruck hier so erweitern, dass wir eine Variable noch dann Index nennen, wenn nur das Differenzial einer Function von ihr in den Gleichungen vorkommt. In den Gleichungen 11) kommt nun nur:

$$\frac{\partial A}{A} = \partial \lg A,$$

vor, und somit ist $A$ und in den Systemen 11a), 11b) ... also auch $A_2, A_3 \ldots$ ein Index. Jeder Index hat, wie wir noch erinnern wollen, die Eigenschaft, dass er ohne Erhöhung des Systems eliminirt werden kann. Zieht man nämlich in 11), nachdem durch $A$ dividirt ist, eine Gleichung von allen übrigen ab, so ist $\partial \lg A$ verschwunden. Nach der Integration der so gebildeten Gleichungen gibt eine beliebige der Gleichung 11), z. B. die erste:

$$\partial \lg A = \frac{1}{X_1} \Sigma \left( \frac{\partial X_p}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_p} \right) \partial x_p,$$

und da mittels der Integrale alle $x$ als Functionen einer dieser Grössen bestimmt werden können, hat man:

$$A = e^{\int \frac{1}{X_1} \Sigma \left( \frac{\partial X_p}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_p} \right) \partial x_p}.$$

Es ergibt sich also der Index eines Systems immer durch blosse Quadratur.

Die Gleichung 11a) lautet nun:

$$\Sigma X \partial x = \frac{A_1'}{A_1} (X_3' \partial x_3 + X_3' \partial x_3' + \ldots).$$

Man hat ferner, wenn man das eingeschlagene Verfahren wiederholt:

$$\sum_{p=3}^{p=2n} X_p' \partial x_p' = \frac{A_2'}{A_2} (X_4'' \partial x_4'' + X_5'' \partial x_5'' + \ldots)$$

u. s. w., also schliesslich:

$$13)\quad \Sigma X\delta x = \frac{A_1'}{A_1} X_2'\delta x_2' + \frac{A_1' A_2'}{A_1 A_2} X_4''\delta x_4'' + \frac{A_1' A_2' A_3'}{A_1 A_2 A_3} X_6'''\delta x_6''' + \ldots + \frac{A_1' A_2' A_3' \ldots A_n'}{A_1 A_2 A_3 \ldots A_n} X_{2n}^{(n)}\delta x_{2n}^{(n)}.$$

Man kann hierbei als unabhängige Variable betrachten die Indices $A_1, A_2 \ldots A_n$ oder auch die Factoren $\frac{A_1'}{A}$, $\frac{A_1' A_2'}{A_1 A_2} \ldots \frac{A_1' A_2' \ldots A_n'}{A_1 A_2 \ldots A_n}$.

Die sehr wichtige Gleichung 13) gibt die Form an, auf welche sich der Ausdruck $\Sigma X\delta x$, wo $\delta$ eine beliebige Veränderung anzeigt, bringen lässt, wenn die Gleichung $\Sigma X dx = 0$ integrirt ist.

Um die Wichtigkeit dieser Gleichung zu zeigen, bemerken wir, dass es oft vorkommt, dass einige der Functionen $X$, also etwa $X_{n+p+1}$, $X_{n+p+2} \ldots X_{2n}$ gleich Null sind, während die vorhandenen $X$ Functionen der $2n$ Variablen $x$ sind. Man hat dann nur nöthig, $p$ Systeme von der Form 11), 11 a) ... zu integriren, um eine Gleichung von der Form zu haben:

$$14)\quad X_{2p}^{(p)}dx_{2p}^{(p)} + X_{2p+1}^{(p)}dx_{2p+1}^{(p)} + \ldots + X_{n+p}^{(p)}dx_{n+p}^{(p)} = 0.$$

Die ersten Hauptintegrale der $p-1$ vorher gebildeten Systeme sind zugleich Integrale der Gleichung $\Sigma X dx = 0$; es fehlen also noch $n-p+1$ Integrale, da ihre Anzahl $n$ ist, und diese werden erhalten, wenn man $n-p+1$ Grössen $x_{2p}^{(p)}, x_{2p+1}^{(p)} \ldots x_{n+p}^{(p)}$ gleich Constanten setzt. Es sind also in diesem Falle statt $n$ nur $p$ Systeme zu integriren. Ausserdem hat man:

$$15)\quad \Sigma X\delta x = \frac{A_1'}{A_1} X_2\delta x_2' + \frac{A_1' A_2'}{A_1 A_2} X_4''\delta x_4'' + \ldots + \frac{A_1' A_2' \ldots A_{p-1}}{A_1 A_2 \ldots A_{p-1}} X_{2p-2}^{(p-1)}\delta x_{2p-2}^{(p-1)} + \frac{A_1' A_2' \ldots A_p'}{A_1 A_2 \ldots A_p}\left(X_{2p}^{(p)}\delta x_{2p}^{(p)} + X_{2p+1}^{(p)}\delta x_{2p+1}^{(p)} + \ldots + X_{n+p}^{(p)}\delta x_{n+p}^{(p)}\right).$$

Besonders wichtig ist der Fall, wo $p=1$ ist. Man hat dann nach einer Integration bereits die Gleichung 14). Es ist lediglich das System 11) zu integriren, und die Hauptintegrale desselben sind auch die Integrale der vorgelegten Gleichung 5). Die Gleichung 15) aber nimmt in diesem Falle die Gestalt an:

$$15\text{ a)}\quad \Sigma X\delta x = \frac{A_1'}{A_1}\left(X_2'\delta x_2' + X_3'\delta x_3' + \ldots + X'_{n+1}\delta x'_{n+1}\right).$$

Dieser Fall ist darum so wichtig, weil auf ihn, wie zu seiner Zeit gezeigt werden soll, die partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung sich immer zurückführen lassen.

35) **Integration einer totalen Differenzialgleichung mit einer ungraden Anzahl von Variablen.**

Wir haben uns jetzt mit der Integration der Gleichung 6) zu beschäftigen, welche wir schreiben wollen:

$$16)\quad \sum_{s=1}^{s=2n+1} X_s\,dx_s = \lambda\delta q + \sum_{h=1}^{h=n} U_h\delta u_h.$$

Setzt man die willkürliche Function $\varphi$ gleich einer Constante $a$, so kann man mittels der Gleichungen:

$$\varphi = 0, \quad \partial\varphi = \sum_{s=1}^{s=2n+1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_s} \partial x_s = 0$$

eins der $x$ und das entsprechende $\partial x$ auf der linken Seite von 16) eliminiren, während rechts das erste Glied fortfällt. Man hat dann eine Gleichung mit $2n$ Variablen, die auf $n$ Integrale zurückgeführt werden soll.

Somit ist die Aufgabe vollständig gelöst. Wir wollen jedoch durch Einführung der Hauptintegrale der Gleichung 16) eine einfachere Gestalt geben.

Zu dem Ende führen wir statt $x_{2n+1}$ und $\partial x_{2n+1}$ die Grössen $\varphi$ und $\partial\varphi$ ein, mittels der Gleichungen:

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots x_{2n+1}) = \varphi, \quad \Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial x_p} \partial x_p = \partial\varphi.$$

Es wird dann:

$$\sum_{s=1}^{s=2n+1} X_s \partial x_s = \sum_{s=1}^{s=2n} V_s \partial x_s + \lambda \partial\varphi,$$

wo gesetzt wurde:

$$V_s = X_s - X_{2n+1} \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_s}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2n+1}}},$$

$$\lambda = X_{2n+1} \frac{1}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{2n+1}}}.$$

Dem Ausdrucke $\Sigma V \partial x$ aber kann dieselbe Form wie dem Ausdrucke $\Sigma X \partial x$ in Gleichung 13) gegeben werden, da derselbe nur $2n$ der Grösse $x$ enthält, wenn man das darin vorkommende $\varphi$ als constant betrachtet. Sind wieder $x_3', x_4'' \ldots$ die ersten Hauptintegrale der sich hieraus ergebenden $n$ Systeme, welche durch Integration der Gleichung $\Sigma V dx = 0$ entstehen, wenn man darin $\varphi$ als constant betrachtet. Seien $V', V'' \ldots$ die entsprechenden Werthe von $V$, welche entstehen, wenn man $x_1, x_2 \ldots$ bezüglich durch $x_3', x_4' \ldots x'_{2n}, x_5'', x_6'' \ldots$ ersetzt; haben $A_1, A_1', A_2, A_2'$ dieselbe Bedeutung wie oben, so ist also:

$$\text{17)} \quad \sum_{s=1}^{s=2n+1} X_s \partial x_s = \lambda \partial\varphi + \frac{A_1'}{A_1} V_2' \partial x_2' + \frac{A_1' A_2'}{A_1 A_2} \partial x_4'' + \ldots + \frac{A_1' A_2' \ldots A_n'}{A_1 A_2 \ldots A_n} V_{2n}^{(n)} \partial x_{2n}^{(n)}.$$

Die den Systemen 11), 11a) ... analog gebildeten Gleichungen nehmen aber in diesem Falle eine symmetrische Form an, welche für die Folge von Wichtigkeit sein wird. Es ist nämlich wegen Gleichung 16):

$$\Sigma X \partial x - \lambda \partial\varphi = \Sigma U \partial u.$$

Man kann nun aus denselben Gründen wie in Abschnitt 32) annehmen, dass alle Grössen $U$ die erste unabhängige Variable $t_1$ nur in einem gemeinschaftlichen Factor $\frac{1}{A_1}$ oder $\frac{1}{A}$ enthalten, wie dies auch unmittelbar Gleichung 17) zeigt, und setzt man:

$$A\lambda = \mu,$$

so hat man:

$$\sum_{s=1}^{s=2n} AX_s \partial x_s - \lambda \partial\varphi = \sum_{h=1}^{h=n} \alpha_h \partial u_h,$$

wo dle Factoren $\alpha$ von $A$ nnabhängig sind. Man erhält nnn ebenso, wie im hezeichneten Abschnitte:

$$\delta\,(\Sigma\, A\, X\, \partial x - \mu \partial \varphi) = 0,$$

und:

$$\partial(\Sigma\, A\, X\, \delta x - \mu \delta \varphi) = 0.$$

Da aber die Lösnng nnserer Gleichnng erfordert, dass $\varphi$ einer Constante gleich sei, so ist:

$$\partial \varphi = 0 \quad \text{nnd folglich auch} \quad \delta\, \partial \varphi = 0.$$

Man erhält dann dnrch Transformation der letzten beiden Gldichnngen:

$$A\, \Sigma\, X\, \partial \delta x + \Sigma\, \partial\,(A X)\, \delta x - \partial \mu\, \delta \varphi = 0,$$

$$A\, \Sigma\, X\, \partial \delta x + \Sigma\, \delta (A X)\, \partial x = 0,$$

also durch Subtraction:

18) $$\Sigma\, \partial\,(A X)\, \delta x - \partial \mu\, \delta \varphi = A\, \Sigma\, \delta X\, \partial x,$$

wenn man die Gleichnng $\Sigma\, X\, \partial x = 0$ berücksichtigt. Hierans bildet man ganz wie in Abschnitt 32) das System:

19) $$X_1\, \partial A = \partial \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + A \sum_{p=1}^{p=2n+1} \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_p}\right) \partial x_p,$$

$$X_2\, \partial A = \partial \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + A \sum_{p=1}^{p=2n+1} \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_p}\right) \partial x_p,$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

$$X_{2n+1}\, \partial A = \partial \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_{2n+1}} + A \sum_{p=1}^{p=2n+1} \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_{2n+1}} + \frac{\partial X_{2n+1}}{\partial x_p}\right) \partial x_p.$$

Mit diesen $2n+1$ Gleichnngen verbindet man:

$$\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial x}\, \partial x = 0.$$

Offenbar kann man dnrch blosses Abziehen znnächst $\partial \mu$, dann aber, nach Divislon durch $A$, auch $\frac{\partial A}{A} = \partial \lg A$ eliminiren. $\lg A$ nnd $\mu$ ergehen sich dann nach Integration des so redncirten Systems dnrch blosse Quadraturen. Es sind also $\mu$ nnd $A$ Indiees des Systems 19). Nach Elimination derselben hat das System also noch $2n$ Gleichnngen mit $2n+1$ Variahlen. Ein Integral desselhen, $\varphi = a$, lst aber hereits bekannt. Setzt man $x_1 = 0$, so erhält man in Verbindnng mit $\varphi = a$ die Hanptintegrale $x_2'$, $x_3'$ . . . $x'_{2n}$, nnd es wird:

$$\Sigma\, A\, X\, \delta x = A\,(\lambda\, \delta \varphi + \Sigma\, V \delta x) = \mu\, \delta \varphi + A'\, \Sigma\, V'\, \delta x'.$$

Der Ansdruck $\Sigma\, V' \delta x'$ enthält nnr $2n-1$ Variable. Man setzt wieder $x_2'$ gleich einer Constanten, nnd snr Bestimmnng der übrigen Integrale der Gleichung 16) ist dann wieder von einem Systeme wie 11a) auszngehen, oder was dasselhe ist, von dem System 19), wenn man darin $x\,X$ mit $x'\,V'$ vertanscht, nnd $\partial \mu = 0$ setzt.

36) **Bedingnngen, nnter welchen weniger Integrale als im allgemeinenFalle derGleichnng genügen.**

Die vorigen Abschnitte erschöpfen den allgemeinen Fall nnseres Problems. — Wie aber bei einer Gleichnng mit 3 Variahlen der Fall eintreten konnte, dass sie nnr ein Integral hatte, so ist es bei $2n$ nnd $2n+1$ Variahlen ebenfalls möglich, dass sie anch weniger als $n$, besügen $n+1$ Integrale habe, nnd hahen wir für alle diese Fälle die entsprechenden Bedingungsgleichnngen zwischen den Grössen $X$ aufznstellen.

Wir nnterscheiden wieder die beiden Hauptfälle, wo die Anzahl der Variablen grade, nnd wo sie nngrade ist.

I. Fall einer graden Anzahl von Variablen.

In der Gleichung:

$$\sum_{s=1}^{s=2n} X_s \partial x_s = \Sigma U \partial u$$

kommt die erste veränderliche $t_1$ nur als gemeinschaftlicher Factor der Grössen $U$ vor, und dies war der Grund, dass die $2n-1$ Integrale des Systems 11) ausser den $u$ noch aus den Verhältnissen

$$\frac{U_2}{U_1}, \frac{U_3}{U_1} \dots \frac{U_n}{U_1} \text{ bestanden.}$$

Ist nun die Anzahl der Grössen $u$, also der Integrale der Gleichung $\Sigma X dx = 0$ kleiner als $n$, etwa $n-q$, und eben so gross selbstverständlich auch die der $U$, so hat man nur $2n-2q-1$ Integrale des Systems 11).

Es kann also dies System 11) in diesem Falle auch nur aus $2n-2q-1$ Gleichungen bestehen, da sich nur soviel von einander unabhängige Gleichungen durch Differenziiren der Integralgleichungen ergeben, und es folgt hieraus, dass $2q$ von den $2n-1$ Gleichungen des Systems 11) Folgen der übrigen sein müssen.

Dieser Bedingung wollen wir zunächst einen analytischen Ausdruck geben

Zu dem Ende schreiben wir mit Jakobi:

$$\frac{\partial X_p}{\partial x_s} - \frac{\partial X_s}{\partial x_p} = (p, s),$$

und die Gleichungen 11) haben dann die Gestalt:

20)
$$X_1 \partial A = A \Sigma (p, 1) \partial x_p,$$
$$X_2 \partial A = A \Sigma (p, 2) \partial x_p,$$
$$\vdots$$
$$X_{2n} \partial A = A \Sigma (p, 2n) \partial x_p,$$

wo die Summen auf alle Werthe von $p$, von $p=1$ bis $p=2n$ gehen. Ausserdem ist offenbar:

$$(p, s) = -(s, p), \quad (p, p) = 0.$$

Damit die $2q$ letzten dieser Gleichungen Folgen der übrigen sind, muss man die Coefficienten von $\partial x_1 \dots \partial x_{2n}$ und $\partial A$ in diesen letzten Gleichungen, der Summe der entsprechenden Coefficienten der $2n-2q$ ersten Gleichungen, wenn man dieselben mit an bestimmenden Grössen multiplicirt, gleichsetzen können.

Es ist also für jede Zahl $r$, die der Reihe $2n-2q+1$, $2n-2q+2 \dots 2n$ entnommen ist:

21)
$$X_r = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=2n-2q} \alpha_\varrho^{(r)} X_\varrho, \quad (p, r) = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=2n-2q} \alpha_\varrho^{(r)} (p, \varrho),$$

wo $p$ jede Zahl von 1 bis $2n$ vorstellt.

Die Grössen:

$$\alpha_1^{(2n-2q+1)}, \alpha_2^{(2n-2q+1)} \dots \alpha_{2n-2q}^{(2n-2q+1)}$$
$$\vdots$$
$$\alpha_1^{(2n)} \quad \alpha_2^{(2n)} \quad \dots \alpha_{2n-2q}^{(2n)}$$

sind als unbekannte Grössen zu betrachten.

Für jeden Werth von $r$ hat man hiernach also $2n+1$ Gleichungen, und wenn man aus diesen die entsprechenden $\alpha$, an Anzahl $2n-2q$, eliminirt, so bleiben noch $2q+1$ übrig, und da $r$ $2q$ verschiedene Werthe annimmt, so würde man im Ganzen $2q(2q+1)$ Bedingungsgleichungen zwischen den Grössen $X$ haben, welche anzeigen, dass die Gleichung $\Sigma X dx = 0$ nur $n-q$ Integrale habe.

Stellten wir uns die allgemeine Aufgabe, $n$ Gleichungen mit $n+p$ Variablen zu integriren, und nähmen wir an,

dass ein solches System nur $n$ Integrale habe (die Anzahl der Integrale der der Gleichungen gleich sei), so sind hierbei ebenfalls gewisse Bedingungsgleichungen zu erfüllen.

Sind nämlich $x_1, x_2 \ldots x_n, y_1, y_2 \ldots y_p$ die Variablen des Systems, so gehen die $n$ Integrale alle $n$ Grössen $x$ als Function der $p$ Grössen $y$; die letztern sind also unabhängige Variable. Ist somit:

$$\sum_{r=1}^{r=n} X_r dx_r = Y_1 dy_1 + Y_2 dy_2 + \ldots Y_p dy_p,$$

eine Gleichung des Systems, so ist:

$$\sum_{r=1}^{r=n} X_r \frac{\partial x_r}{\partial y_s} = Y_s.$$

Die Gleichung zerfällt also in $p$ andere, und da das System aus $n$ Gleichungen besteht, so hat man deren $np$, welche hinreichen, die $np$ Grössen $\frac{\partial x_r}{\partial y_s}$ zu bestimmen. Nimmt man die Ausdrücke für zwei derselben $\frac{\partial x_r}{\partial y_s}$ und $\frac{\partial x_r}{\partial y_s'}$, differenziirt den ersten nach $y_s'$, den zweiten nach $y_s$, so erhält man zwei Ausdrücke, die einander gleich sind. Jede dieser Gleichungen ist eine Bedingung für das Vorhandensein von $n$ Integralen, und wenn man $r$ alle Werthe von 1 bis $n$, $s$ alle von 1 bis $p$ annehmen lässt, so ist die Anzahl dieser Bedingungen offenbar $\frac{1}{2} np(p-1)$.

Setzt man z. B. $n=1$, $p=2n-1$, so wird diese Anzahl: $(2n-1)(n-1)$.

Dieser Fall stimmt mit dem unserigen überein, wenn man ein Integral voraussetzt, also $n-q=1$, $q=n-1$ setzt.

Die Formel $2q(2q+1)$, die wir für die Anzahl der Bedingungsgleichungen fanden, gibt dann: $2(2n-1)(n-1)$, also die doppelte Anzahl der auf anderem Wege gefundenen Bedingungsgleichungen. — Es löst sich dieser Widerspruch dadurch, dass von den aus 21) folgenden Bedingungsgleichungen immer die Hälfte wegfällt, mithin deren Zahl nur $q(2q+1)$ ist.

Um dies zu zeigen, wollen wir den entwickelten Ausdruck für die Bedingungsgleichungen bilden, d. h. aus den Gleichungen 21) die $\alpha$ eliminiren. Die Resultate in Determinantenform sind:

$$22)\quad \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,w) & (1,r), \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots & (2,w) & (2,r) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (w,1) & (w,2) & (w,3) & \ldots & (w,w) & (w,r), \\ (v,1) & (v,2) & (v,3) & \ldots & (s,w) & (v,r) \end{vmatrix} = 0.$$

$$22a)\quad \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,w) & (1,r), \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots & (2,w) & (2,r) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (w,1) & (w,2) & (w,3) & \ldots & (w,w) & (w,r), \\ X_1, & X_2, & X_3 & \ldots & X_w, & X_r \end{vmatrix} = 0.$$

Jede der Zahlen $r$ und $v$ kann die Werthe von $2n-2q+1$ bis $2n$ annehmen. $w$ ist immer gleich $2n-2q$.

Die Anzahl der Gleichungen 22) ist also $4q^2$, die der Gleichungen 22a) $2q$, was zusammen $2q(2q+1)$ Gleichungen gibt. Jedoch fallen von dem System 22) eine Anzahl Gleichungen weg.

Zunächst ist $(p, s) = -(s, p)$ und die Anzahl der Columnen ungrade. In $2q$ von den Gleichungen 22) ist nun $r=v$. Vertauscht man also die vertikalen Columnen mit den Horizontalreihen, so wird dadurch das Vorzeichen der Determinante geändert. Bei jeder solchen Vertauschung aber bleibt nach einem bekannten Satze die Determinante unverändert, und folglich muss dieselbe iden-

tisch gleich Null sein. Es fallen also von den $4q^2$ Gleichungen 22) schon $2q$ als identisch weg. In den $4q^2-2q$ übrigen ist $r$ von $v$ verschieden, und in je zweien davon, die man sich durch Vertauschung von $r$ und $v$ entstanden denken kann, unterscheiden sich die Ausdrücke links vom Gleichheitszeichen aus dem angeführten Grunde nur durchs Vorzeichen. Also je 2 dieser Gleichungen haben gleiche linke Seiten, und die Anzahl der Gleichungen 22) bleibt nur noch $2q^2-q$, was mit den $2q$ Gleichungen 22a) verbunden, in der That: $q(2q+1)$ Bedingungsgleichungen gibt. — Soll die Gleichung $\Sigma X\,dx$ nur ein Integral haben, so war die Anzahl der Bedingungsgleichungen, die man hier auch Bedingungen der Integrabilität nennt: $(2n-1)(n-1)$. Es ist dann zu setzen $w=2$, und die Bedingungen der Integrabilität lauten also:

$$22b)\quad \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,r) \\ (2,1) & (2,2) & (2,r) \\ (v,1) & (v,2) & (v,r) \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,r) \\ (2,1) & (2,2) & (2,r) \\ X_1 & X_2 & X_r \end{vmatrix} = 0.$$

Nach Elimination des Index $A$ hat man also noch $2n$ Gleichungen.

II) Fall einer ungraden Anzahl von Variablen.

Sei nun $2n+1$ die Anzahl der Variablen.

Bleibt das willkürliche Integral bestehen, so wird mittels desselben die Anzahl der Variablen auf $2n$ reducirt, und der Gang der Untersuchung, sowie das Resultat derselben ist dann wie in $A$. Da aber $\varphi$ in der reducirten Gleichung vorkommt, so sind die Bedingungsgleichungen und also auch die Anzahl der Integrale von der Auswahl des willkürlichen Integrals abhängig. — Wir stellen aber jetzt die Frage: „Wie müssen in $\sum_{s=1}^{s=2n+1} X_s\,dx_s=0$ die Grössen $X$ beschaffen sein, damit die Gleichung durch $n$ Integrale, ohne willkürliches befriedigt werden kann". Der Fall ist offenbar die Verallgemeinerung dessen, den wir in Bezug auf 3 Variable, also $n=1$, bereits behandelt haben, wo ein Integral der Gleichung genügt, und die Bedingung der Integrabilität sich ergibt. Im allgemeinen Falle ist nun in den Gleichungen 19) offenbar $\partial\mu=0$ zu setzen. Es entstehen dann Gleichungen, die wir mit 19a) bezeichnen, und die ganz gleiche Form mit den Gleichungen 11) haben, jedoch ist ihre Anzahl, wie die der $x$, $2n+1$.

Integrale derselben, d. h. von $t_1$ unabhängige Grössen, sind, wie Gleichung 16) zeigt, wo das erste Glied rechts $\lambda\partial\varphi$ verschwindet, die Ausdrücke $u_1, u_2 \ldots u_n$, $\frac{U_2}{U_1}, \frac{U_3}{U_1} \ldots \frac{U_n}{U_1}$, da alle $U$ das $t_1$ nur als gemeinschaftlichen Factor enthalten. Man hat also $2n$ Gleichungen mit $2n-1$ Integralen, was nur möglich ist, wenn eine Gleichung eine identische Folge der übrigen ist. Die Bedingung dafür wird durch die beiden Gleichungen 21) dargestellt, wenn man $r=2n+1$ setzt, und die Summe auf alle Werthe $\rho$ von 1 bis $2n$ bezieht. Die Elimination der $\alpha$ führt dann wieder auf Gleichungen, die 22) und 22a) analog sind, wenn man setzt: $r=v=2n+1$, $w=2n$. Dann stellt das System 22a) nur eine Gleichung vor, und die Gleichung 22) wird identisch aus den in $A$ erörterten Gründen. Damit also die Gleichung

$$\sum_{s=1}^{s=2n+1} X\,dx=0$$

durch $n$ Integrale, von denen keins willkürlich ist, befriedigt werden könne, ist folgende Bedingung zu erfüllen:

$$\begin{vmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & \ldots & (1,2n) & (1,2n+1) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & \ldots & (2,2n) & (2,2n+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ (2n,1) & (2n,2) & (2n,3) & \ldots & (2n,2n) & (2n,2n+1) \\ X_1, & X_2, & X_3 & \ldots & X_{2n}, & X_{2n+1} \end{vmatrix} = 0.$$

Für $n=1$ ist diese Gleichung die Bedingung der Integrabilität.

Sollen ausser dem willkürlichen Integrale noch $q$ andere wegfallen, also im Ganzen $q+1$, so haben die Gleichungen 19a) $2n-2q-1$ Integrale, und von den

$2n$ Gleichungen, die nach Elimination des Index aus 19a) sich ergeben, sind somit $2q+1$ identische Folgen der übrigen. Man erhält wieder dafür die Bedingungen 21), in denen zu setzen ist: für $r$ alle Zahlen von $2n-2q+1$ bis $2n+1$, für $p$ alle Zahlen von 1 bis $2n+1$. und wo die Summen von $\varrho=1$ bis $\varrho=2n-2q$ auszudehnen sind.

Nach Elimination der $u$ stellen sich dann Systeme wie 22) und 22a) ein, wo zu setzen ist: $w=2n-2q$ wie oben und für $r$ und $v$ jede der Zahlen von $2n-2q+1$ bis $2n+1$.

Die Anzahl der Bedingungen wäre somit: $(2q+1)(2q+2)$, reducirt sich aber in derselben Weise wie in $A$ auf die Hälfte, d. h. auf $(2q+1)(q+1)$ Bedingungen.

Soll die Gleichung $\Sigma X dx=0$ also nur ein Integral haben, so wird die Anzahl der Bedingungen gefunden, wenn man setzt: $q=n-1$, also: $n(2n-1)$ Bedingungen.

Es ist ferner $w=2$, und für $r$ und $v$ jede der Zahlen von 3 bis $2n+1$ zu setzen.

Die Bedingungen der Integrabilität schreiben sich also im Falle einer ungraden Anzahl von Variablen ganz wie die für den Fall der graden Anzahl entwickelten (22b).

37) Vereinfachung des allgemeinen Verfahrens, wenn die Anzahl der Integrale geringer ist als im allgemeinen Falle.

Nach Fortfall der identischen Gleichungen und nach Elimination von $A$ hat man, sowohl wenn die Anzahl der Variablen grade, als wenn sie ungrade ist, noch $2n-2q-1$ Differenzialgleichungen 11) oder 19a) übrig. Diese enthalten im erstern Falle $2n$, im letztern $2n+1$ Variablen, und da die Anzahl der Integrale der Gleichungen 11) $2n-1-2q$ ist, also ebensoviel Variable sich als Function der übrigen ergeben, so ist die Anzahl der noch übrigen, also unabhängigen Variablen $x$ im ersten Falle gleich $2q+1$, im letzteren $2q+2$. Dadurch erhalten die Gleichungen 11) einen ganz andern Charakter wie im allgemeinen Falle, wo $q=0$ ist, also nur eine unabhängige Variable sich vorfindet.

Seien $x_1, x_2 \ldots x_s$ die unabhängigen Variablen, also $s$ bezüglich gleich $2q+1$ oder gleich $2q+2$, seien ferner die $2n-2q-1$ oder $2n-s$ beziiglich $2n-s+1$ Gleichungen, die sich aus den Gleichungen 11) nach Elimination von $A$ ergeben, alle von der Gestalt:

$$\sum_{r=1}^{r=s} X_r dx_r + \Sigma Y_h dy_h = 0,$$

wo die nicht unabhängigen Variablen zum Unterschiede mit $y$ bezeichnet worden sind, $X$ und $Y$ Functionen aller $x$ und $y$, in jeder Gleichung die Werthe der $X$ und $Y$ andere sind, und die zweite Summe auf alle Werthe von $h$, von $h=1$ bis $h=\varrho$ geht, wo $\varrho$ gleich $2n-s$ oder bezüglich $\varrho=2n-s+1$ ist.

Da nun $x_1, x_2 \ldots x_s$ von einander unabhängig sind, so kann man $x_2, x_3 \ldots x_s$ constant denken, und hat zu integriren das System:

$$X_1 dx_1 + \sum_{h=1}^{h=\varrho} Y_h dy_h = 0.$$

Hier ist die Anzahl der unabhängigen Variablen nur Eins, und die Anzahl der abhängigen $\varrho$ gleich der der Gleichungen. Die Integration erfolgt also in der gewöhnlichen Weise. Wir setzen $x_1=0$ und bilden die Hauptintegrale: $y_1', y_2' \ldots y_\varrho'$. In die vorgelegte Gleichung setzen wir nun diese Werthe, und mögen dadurch $X$ und $Y$ sich in $X'$ und $Y'$ verwandeln.

Diese Ausdrücke entstehen also, wenn man:

$$x_1=0, \quad y_1=y_1', \quad y_\varrho=y_\varrho'$$

setzt, $x_2, x_3 \ldots x_s$ aber unverändert lässt. In der so gebildeten Gleichung:

$$\sum_{r=2}^{r=s} X'_r dx_r + \Sigma Y_h' dy_h' = 0,$$

welche ein System vorstellt, denken wir $x_3, x_4 \ldots x_s$ constant, und erhalten:

$$X_2' dx_2 + \Sigma Y_h' dy_h' = 0.$$

Für $x_2=0$ sollen nun die Hauptintegrale sein: $y_1'', y_2'' \ldots y_\varrho''$ und durch Einsetzen von $0, y_1'', y_2'' \ldots y_\varrho''$ für $x_2, y_1', y_2' \ldots y_\varrho'$ sich die $X'$ und $Y'$ verwandeln in $X''$ und $Y''$. Man hat dann ganz wie oben zu bilden die Gleichung:

$$X'' dx_3 + \Sigma Y'' dy'' = 0,$$

deren Hauptintegrale sind: $y_1''', y_2''' \ldots y_\varrho'''$ u. s. w. Man hat, wenn man bis zu $X^{(s-1)} dx_s + \Sigma Y^{(s-1)} dy^{(s-1)}$ fortfährt, $s$ Systeme von $\varrho$ Gleichungen

mit $\varrho+1$ Variablen zu integriren, um das System 11) aufzulösen.

Die Variablen eines jeden Systems sind die Hauptintegrale des vorhergehenden. Die Hauptintegrale des letzten Systems:

$$y_1^{(s)},\ y_2^{(s)}\ \ldots\ y_\varrho^{(s)}$$

sind endlich die der vorgelegten Gleichungen, und setzt man dieselben gleich Constanten, so hat man die vollständige Auflösung derselben.

Die hier gegebene Methode erstreckt sich auf jedes System von $\varrho$ Gleichungen mit $s+\varrho$ Variablen, wenn dasselbe $\varrho$ Integrale hat, was allerdings die Erfüllung gewisser Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten $X$ und $Y$ erfordert.

In unserm Falle, um auf diesen jetzt zurückzukommen, sind diese Bedingungsgleichungen erfüllt, weil das Vorhandensein von $\varrho$ Integralen von Anfang an feststeht. Dies Integrationsverfahren bedingt aber für unsere Aufgabe eine bedeutende Reduction. Man hat nämlich statt eines Systemes von $2n-1$ Gleichungen mit $2n$ Variablen, worauf die Gleichungen 11) im allgemeinen Falle zurückgeführt waren, jetzt $2q+1$, beziehlich $2q+2$ Systeme mit $2n-2q-1$ Variablen.

Die allgemeinere Aufgabe führt auf eine Differenzialgleichung von der Ordnung $2n-1$ zwischen 2 Variablen, die zweite auf $s$ Gleichungen von der Ordnung $2n-2q-1$, also eine desto bedeutendere Reduction, je grösser $q$ ist. Führen wir jetzt wieder für $y_1,\ y_2\ \ldots\ y_\varrho$ die Werthe: $x_{s+1},\ x_{s+2}\ \ldots\ x_\nu$ ein, wo $\nu$ beziehlich gleich $2n$ oder gleich $2n+1$ ist, so sind die Hauptintegrale des ganzen Systems 11) jetzt: $x_{s+1}^{(s)}$, $x_{s+2}^{(s)}\ldots x_\nu^{(s)}$, und wenn man diese Werthe für $x_{s+1},\ x_{s+2}\ \ldots\ x_\nu$, aber die unabhängigen Variablen $x_1$, $x_2\ \ldots\ x_s$ alle gleich Null setzt, so hat man identisch:

$$\Sigma X\,\delta x=\frac{A^{(s)}}{A}\left(X^{(s)}_{s+1}\,\delta x^{(s)}_{s+1}+X^{(s)}_{s+2}\,\delta x^{(s)}_{s+2}+\ldots X^{(s)}_{\nu}\,\delta x^{(s)}_{\nu}\right),$$

eine Formel, die ganz wie 15a) gebildet ist, und wo $A^{(s)}$, $X^{(s)}_{s+1}$, $X^{(s)}_{s+2}$ u. s. w. aus $A$, $X_{s+1}$, $X_{s+2}$ entstehn, wenn man darin $x_1,\ x_2\ \ldots\ x_s,\ x_{s+1}$, $x_{s+2}\ \ldots$ vertauscht mit $0, 0\ \ldots 0, x^{(s)}_{s+1},\ x^{(s)}_{s+2}\ \ldots$

Die Anzahl der Glieder rechts ist $2n-2q-1$ in beiden Fällen, also immer ungrade. Man setzt also $x^{(s)}_{s+1}$ gleich einer Constante, und löst die Gleichung

$$X^{(s)}_{s+2}\,dx^{(s)}_{s+2}+X^{(s)}_{s+3}\,dx^{(s)}_{s+3}+\ldots+X_\nu^{(s)}\,dx_\nu^{(s)}=0,$$

ganz wie früher auf. Dieselbe hat $2n-2q-2$ Variable, also $n-q-1$ Integrale, und diese geben in Verbindung mit

$$x^{(s)}_{s+1}=\text{const.}$$

die $n-q$ Integrale unserer Gleichung:

$$\Sigma X\,dx=0.$$

Klar ist es übrigens, dass diese Reduction einer Gleichung von der Ordnung $2n-1$ auf eine von der Ordnung $2n-2q-1$ schon dann einträte, wenn es sich bei irgend einer Aufgabe darum handelte, ein System von Gleichungen, deren Form die von 11) ist, zu integriren, und die Bedingungen, welche das Wegfallen von $q$ Integralen erfordert, erfüllt wären.

38) Vortheile für die Integration, welche sich ergeben, wenn ein Integral bereits bekannt ist.

Aus den in den beiden letzten Abschnitten gegebenen Sätzen lassen sich auch für die allgemeine Aufgabe der Integration der totalen Differenzialgleichungen wichtige Vortheile ziehen.

Diese Vortheile hat für die partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung, welche ein besonderer Fall unserer Gleichung sind, Jakobi angegeben. Die Resultate sind bereits früher von ihm mitgetheilt (Crelle's Journal Bd. 17). Indess ist Jakobi's Arbeit selbst erst lange nach dem Tode des berühmten Mathematikers durch Klebsch publicirt worden (Crelle Bd. 60). Schon vor dieser Publication hatte der Verfasser dieses Wörterbuchs für den allgemeinern hier behandelten Fall ähnliche Resultate ge-

wonnen (Crelle Bd. 59), welche hier noch folgen sollen. — Denkt man sich von einem zu integrirenden System zunächst ein Integral gewonnen, so wird dadurch im Allgemeinen das System auf ein anderes reducirt, welches eine Gleichung und eine Variable weniger enthält. In unserm Falle aber ist der Vortheil ein grösserer.

Sei zunächst die Anzahl der Variablen wieder $2n$. Ist nun ein Integral bekannt, so kann dies immer als das erste betrachtet und mit $u_1$ bezeichnet werden. Man bringt dann unsere Gleichung

$$\Sigma A X \delta x = \Sigma \alpha \delta u$$

auf die Form:

$$\Sigma A X \delta x - \alpha_1 \delta u_1 = \alpha_2 \delta u_2 + \alpha_3 \delta u_3 + \ldots + \alpha_n \delta u_n.$$

Wie in Abschnitt 34), wenn man daselbst die Grössen $\mu$, $\varphi$ mit $\alpha_1$, $u_1$ vertauscht, beweist man die Relation:

$$\Sigma \partial (AX) \delta x - \partial \alpha_1 \delta u_1 = A \Sigma \delta X \partial x,$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich ein System von der Form 19), nämlich:

23)
$$X_1 \partial A = \partial \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + A \sum_{p=1}^{p=2n} (p, 1) \partial x_p,$$

$$X_2 \partial A = \partial \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + A \sum_{p=1}^{p=2n} (p, 2) \partial x_p$$

$$\begin{matrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{matrix}$$

$$X_{2n} \partial A = \partial \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n}} + A \sum_{p=1}^{p=2n} (p, 2n) \partial x_p.$$

Mit Hülfe der Gleichung $u_1 =$ const. und durch blosse Subtraction kann man aus diesen $2n$ Gleichungen eliminiren $x_1$ und die Indices $A$ und $\alpha_1$. Es bleiben dann noch $2n-2$ Gleichungen mit $2n-1$ Variablen. Die Anzahl der Integrale, $u_2, u_3 \ldots u_n$, $\frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \ldots \frac{\alpha_n}{\alpha_2}$ ist aber $2n-3$ (man kann nämlich in der Gleichung

$$\Sigma A X \delta u - \alpha_1 \delta u_1 = \alpha_2 \delta u_2 + \alpha_3 \delta u_3 + \ldots$$

ganz wie oben die erste unabhängige Veränderliche als gemeinschaftlichen Factor von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots$ denken, wodurch denn die Verhältnisse $\frac{\alpha_3}{\alpha_2}, \frac{\alpha_4}{\alpha_2} \ldots \frac{\alpha_n}{\alpha_2}$ von derselben unabhängig, mithin Integrale der Gleichungen 23) werden. Diese Verhältnisse aber und die Grössen $u_2$, $u_3 \ldots$ bilden ganz aus den früher angeführten Gründen alle Integrale des Systems 23). Damit nun $2n-2$ Gleichungen $2n-3$ Integrale haben, muss eine Gleichung des Systems eine Folge der übrigen sein, und dann enthalten die Gleichungen 23) zwei unabhängige Variablen. Dies ist übrigens auch an sich klar, da der Definition zufolge alle $\alpha$, also auch $\alpha_1$, von $A$ unabhängig sind.

Nach dem im vorigen Abschnitte Gesagten, zerfällt das System von $2n-1$ Gleichungen mit $2n$ Variablen in zwei Systeme von $2n-3$ Gleichungen mit $2n-2$ Variablen. Ein System mit $2n$ Variablen wird auf eins mit $2n-2$ Variablen im Allgemeinen durch die Kenntniss zweier Integrale reducirt. Man kann also sagen, „dass bei unserer Aufgabe die Kenntniss eines Integrals dieselben Dienste thue, als die Kenntniss zweier im allgemeinen Falle".*)

Da aber die Gleichungen 11) $2n-1$

*) Dass zwei Systeme statt eines zu integriren sind, ist hierbei ganz unerheblich. Immer können in der Integralrechnung eine beliebige Anzahl simultaner Systeme von gleichviel Gleichungen und Variablen auf ein einziges zurückgeführt werden. So z. B. setze man statt der beiden simultanen, aus je einer Gleichung bestehenden Systeme:

$$dy = f(x, y)\,dx, \quad dy' = \varphi(x', y')\,dx':$$

$$dy = [A f(x, y) + B \varphi(x, y)]\,dx,$$

wo $A$ und $B$ beliebige Constante sind. $B=0$ gibt dann die erste Gleichung, $A=0$ die letzte, und man sieht, wie dies auf jede Anzahl von Gleichungen und Variablen angewandt werden kann.

Integrale erfordern, die Gleichungen 23) aber deren nur $2n-3$ geben, zu welchen noch $u_1$ kommt, so scheint ein Integral zu fehlen. Offenbar ist dies aber der Index $\alpha_1$, denn $\alpha_1$ ist ja von $A$ unabhängig. „Es kann also das noch fehlende Integral nach Auflösung der Gleichungen 23) durch blosse Quadraturen gefunden werden."

Ist noch ein ferneres Integral der Gleichungen 23), also ein solches, welches weder mit $u_1$ noch mit $\alpha_1$ zusammenfällt, gegeben, so kann dies für $u_2$ genommen werden, da das erste Integral jedes Systems willkürlich ist. Es ist aber:

$$\Sigma AX\delta x - \alpha_1 \delta u_1 - \alpha_2 \delta u_2 = \alpha_3 \delta u_3 + \ldots + \alpha_n \delta u_n,$$

eine Gleichung, die wir auf dem in Abschnitt 35) eingeschlagenen Wege verwandeln in das System:

$$24)\quad X_1 \partial A = \partial\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \partial\alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + A \sum_{p=1}^{p=2n} (p,\ 1)\, \partial x_p,$$

$$X_2 \partial A = \partial\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \partial\alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + A \sum_{p=1}^{p=2n} (p,\ 2)\, \partial x_p$$

$$\vdots$$

$$X_{2n} \partial A = \partial\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_{2n}} + \partial\alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_{2n}} + A \sum_{p=1}^{p=2n} (p,\ 2n)\, \partial x_p,$$

$A$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ sind Indices. Mit Hülfe von

$$u_1 = \text{const.},\quad u_2 = \text{const}$$

reduciren sich diese Gleichungen nach Elimination von $x_1$, $x_2$, $A$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ auf $2n-3$ Gleichungen mit $2n-2$ Variablen. Die Anzahl der Integrale $u_3, u_4 \ldots u_n$, $\frac{\alpha_4}{\alpha_3} \ldots \frac{\alpha_n}{\alpha_3}$ aber ist $2n-5$. Es werden also, wie auch direct aus der Unabhängigkeit der Grössen $A$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ von einander folgt, 3 Variable unabhängig. Zu integriren sind 3 Systeme von $2n-5$ Gleichungen mit $2n-4$ Variablen. Auch dieses Integral der Gleichungen 24) vertritt die Stelle von zweien. Von den noch fehlenden Integralen der Gleichungen 24) ist dann $u_3$ das eine, $\alpha_3$ das andere. — Ist auch von den Gleichungen 24) ein Integral $u_3$ bekannt, so hat man Gleichungen von der Form:

$$25)\quad X_s \partial A = \partial\alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_s} + \partial\alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_s} + \partial\alpha_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_s} + A\, \Sigma (p, s)\, \partial x_p.$$

Sie zerfallen in 4 Systeme von je $2n-7$ Gleichungen mit $2n-6$ Variablen. Hat man so alle Integrale $u_1, u_2 \ldots u_n$ gefunden, so erhält man die Indices $\alpha$ ohne Weiteres durch Auflösung der $2n$ linearen Gleichungen:

$$AX_p = \sum_{s=1}^{s=2n} \alpha_s \frac{\partial u_s}{\partial x_p},$$

wo $p$ alle Werthe von 1 bis $2n$ annimmt, die Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Unbekannten sind. Sind aber nur die Integrale der Gleichung 25), nicht die noch übrigen $u$ bekannt, so ergeben sich die Indices $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ durch Quadratur.

Man kann nun wieder ein Integral des Systems 25) als bekannt voraussetzen, von dem neu entstehenden wieder eins und so fort bis zum $r$ten. Dann hat man Gleichungen von der Form:

$$26)\quad X_s \partial A = \sum_{q=1}^{q=r} \partial\alpha_q \frac{\partial u_q}{\partial x_s} + A \sum_{p=1}^{p=2n} (p,\ s)\, \partial x_p;$$

sind $v_{2r+1}, v_{2r+2} \ldots v_{2n}$ die Integrale dieser Gleichung, so ist:

$$\Sigma X\partial x = \sum_{q=1}^{q=r} \alpha_q du_q = b_{2r+1} dv_{2r+1} + b_{2r+2} dv_{2r+2} + \ldots + b_{2n} dv_{2n}.$$

Sind die $\alpha$, $u$ und $v$ bekannt, so sind es auch die $b$, und man behandelt die Gleichung

$$\Sigma b\, dv = 0$$

ganz wie die Gleichung 5). — Selbstverständlich findet alles Gesagte auch dann statt, wenn die Anzahl der Variablen $2n+1$ ist, nachdem man dieselbe mittels des willkürlichen Integrals auf $2n$ reducirt hat.

39) Vortheile für die Integration, wenn gleichzeitig 2 oder mehrere Integrale bekannt sind.

Wir nahmen im vorigen Abschnitte an, dass man ein Integral der Gleichungen 11) kenne, diese mittels desselben auf das System 23) reducire, von diesem wieder ein Integral bestimme, mittels desselben das System 24) bilde u. s. w. Es kann aber auch der Fall sein, dass man zwei Integrale der Gleichungen 11) gleich von Anfang an zu bestimmen im Stande ist. Wenn eins dieser beiden Integrale $u_2$ zugleich eins der Gleichungen 23) ist, oder was dasselbe ist, ein Integral der Gleichungen

$$\Sigma X dx = 0,$$

da das erste Integral jedes Systems ja als Integral dieser letzten Gleichung betrachtet werden darf, so kann man ganz wie im vorigen Abschnitte operiren, und es würde dann die Aufgabe so reducirt sein, als wenn 4 Integrale eines beliebigen Systems gegeben wären. — Es ist zu untersuchen, in welchen Fällen dies gestattet sei.

Im Allgemeinen ist ein Integral $u_2$ der Gleichungen 12) eine Function von $u_1$, $\alpha_1$ und einem beliebigen Integralsystem der Gleichungen 23). Es kann aber $u_1$ mittels der Gleichung

$$u_1 = \text{const.}$$

eliminirt werden. Ist dann auch $\alpha_1$ in $u_2$ nicht vorhanden, so ist letzteres wirklich ein Integral der Gleichungen 23). Die Bedingung für letzteres und mitbin dafür, dass $u_1$ und $u_2$ die Stelle von 4 Integralen vertreten, ist:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = 0.$$

Die Klammer zeigt hier an, dass in $u_2$ die Variablen $x_1, x_2 \ldots x_{2n}$ ausgedrückt sind als Functionen von $u_1$, $\alpha$, $A$ und den $2n-3$ Integralen der Gleichungen 23), und unter dieser Bedingung nach $\alpha$ differenziirt ist. $A$ kann hierin indess nicht vorkommen, da $u_2$ ein Integral ist. Die linke Seite dieser Gleichung ist nun leicht darzustellen. Da in den Gleichungen 23) $A$, $\alpha_1$ von einander unabhängig sind, so zerfällt dies System, in dem man bezüglich $\alpha_1$ und $A$ constant denkt, in 2 Systeme von der Gestalt:

$$X_s = A \sum_{p=1}^{p=2n} (p, s) \left(\frac{\partial x_p}{\partial A}\right), \quad 0 = \frac{\partial u_1}{\partial x_s} + A \sum_{p=1}^{p=2n} (p, s) \left(\frac{\partial x_p}{\partial \alpha_1}\right).$$

Das erste System hat dieselbe Form als 11), es wird also jedenfalls $u_2$ ein Integral davon sein. Das zweite, welches $2n$ Gleichungen enthält, die $s=1$, $s=2$ $\ldots s=2n$ entsprechen, gibt die Werthe der Differenzialquotienten $\left(\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}\right)$, $\left(\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}\right)$ $\ldots \left(\frac{\partial x_{2n}}{\partial \alpha_1}\right)$ durch Auflösung linearer Gleichungen. Setzt man diese Werthe ein in:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = \sum_{r=1}^{r=2n} \frac{\partial u_2}{\partial x_r} \left(\frac{\partial x_r}{\partial \alpha}\right),$$

so erhält man:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_2}\right) = \frac{1}{A} \sum_{p=1}^{p=2n} \sum_{r=1}^{r=2n} Q_{p,\, r} \frac{\partial u_1}{\partial x_p} \frac{\partial u_2}{\partial x_r},$$

wo die $Q$ leicht zu bestimmende Functionen der Grössen $(p, s)$ sind. Wir wollen mit $V$ die eben hingeschriebene Doppelsumme rechts, welche in $\frac{1}{A}$ multiplicirt ist, bezeichnen. Die Bedingung dafür, dass die gleichzeitig bekannten Integrale die angegebene Reduction bewirken, ist also:

$$V=0,$$

wo $V$ gegeben ist, wenn man $u_1$ und $u_2$ kennt.

Sind 3 Integrale $u_1$, $u_2$, $u_3$ gleichzeitig bekannt, so folgt ganz in derselben Weise, dass dieselben das System so reduciren, wie im allgemeinen Falle deren 6, wenn man hat:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)=0,\ \left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}\right)=0,\ \left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2}\right)=0.$$

Die Ausdrücke $\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}$, $\frac{\partial x}{\partial \alpha_2}$, welche hierin vorkommen, werden durch das System 24) gegeben, aus welchen man die Gleichungen erhält:

$$0=\frac{\partial u_1}{\partial x_s}+A\sum_{p=1}^{p=2n}(p,s)\frac{\partial x_p}{\partial x_1},$$

$$0=\frac{\partial u_2}{\partial x_s}+A\sum_{p=1}^{p=2n}(p,s)\frac{\partial x_p}{\partial x_2}.$$

Sind $n$ Integrale gegeben, welche die Gleichungen erfüllen:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)=0,\ \left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_1}\right)=\left(\frac{\partial u_3}{\partial \alpha_2}\right)=0\ \ldots\ \left(\frac{\partial u_n}{\partial \alpha_1}\right)=\left(\frac{\partial u_n}{\partial \alpha_2}\right)=\ \ldots\ =\left(\frac{\partial u_n}{\partial \alpha_{n-1}}\right)=0,$$

so sind dies die $n$ Integrele der Gleichung $\Sigma X\,dx=0$. Die dann noch fehlenden Integrale der Gleichungen 11) sind die $\alpha$, und diese ergeben sich aus den algebraischen Gleichungen:

$$\Sigma AX\frac{\partial x}{\partial u_s}=\alpha_s.$$

Sind aber nur $p$ Integrale $u$ bekannt, so ergeben sich die zugehörigen $\alpha_1$, $\alpha_2$ ... $\alpha_p$ durch Quadratur aus den Gleichungen 26).

Kommen wir jetzt auf den Fall, wo 2 Integrale gegeben sind, zurück, und nehmen wir an, dass $V$ nicht identisch gleich Null sei. Es fragt sich, ob trotzdem eine wesentliche Reduction der Aufgebe eintrete.

Da $u_2$ und $\alpha_1$ Integrale der Gleichung 11) sind, so ist der Ausdruck:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)=\frac{V}{A}$$

ebenfalls ein Integral derselben, denn der Differenzialquotient $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ ist ja wie $u_2$ von $A$ unabhängig.

Es können nun 3 Fälle eintreten

Entweder I) $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ ist identisch einer Constanten gleich, dann ist $u_2=c\alpha_1$. Es kann dann dies Integral nur dazu dienen, den Index $\alpha_1=\frac{u_2}{c}$ ohne Quadratur zu finden, oder II) $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ ist gleich einer Function von $u_2$, $\varphi(u_2)$, dann ist:

$$\alpha_1=\int\frac{du_2}{\varphi(u_2)}.$$

Der Vortheil ist hier noch geringer, er besteht eben darin, dass $\alpha_1$ sich gleich anfänglich vor der Integration der Gleichungen 23) durch Quadratur bestimmen lasse. Endlich III) $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ ist weder der Null, noch einer Constante, noch einer Function von $u_2$ identisch gleich, dann ist $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)=\frac{V}{A}$ ein neues Integral der Gleichungen.

In diesem Falle, auf welchen Jakobi ein Hauptgewicht legt, der ihn für die in der Mechanik und Variationsrechnung vorkommenden Gleichungen, die einen besondern Fall unserer Gleichung bilden, zuerst erörtert hat, und ihn, da er aus einer Poisson'schen Formel abstrahirt ist, den Poisson'schen Satz nennt, lässt sich also aus zwei Integralen, wenn zugleich der Index $A$ bekannt ist, ein drittes Integral finden. Es ist klar, dass wenn man $\frac{V}{A}=w$ setzt, $\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)$ ein weiteres Integral der Gleichungen 11) ist, falls dieser Ausdruck weder gleich Null, noch einer Constante, noch einer Function von $u_2$ oder $w$, oder $u_2$ und $w$ identisch gleich ist. Ist $\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)=w_1$, so giebt $\left(\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1}\right)$ ein viertes Integral, wenn $w_1$ auch diese Bedingungen erfüllt, und namentlich nicht eine Function von $u_2$, $w$, $w_1$ allein ist u. s. w. Es ist

also möglich, aus zwei bekannten Integralen $u_1$, $u_2$ von gewissen Eigenschaften alle übrigen zu entwickeln, und es ist klar, dass es solche Integrale $u_1$ und $u_2$ geben muss, wenn auch höchst selten der Fall eintreten mag, dass sich derartige ohne Kenntniss der übrigen bilden lassen. Nehmen wir aber auch an, $\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)$ erfüllt nicht die eben gegebenen Bedingungen. Ist dann $\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)=0$, so ist $w$ wie vorher $u_2$ zur Reduction des Problems zu gebrauchen, d. h. es vertritt $w$ die Stelle von 2 Integralen. Ist $\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)$ gleich einer Constante, oder gleich einer Function von $w$ allein, so erhalten wir wieder $\alpha_1$; ist $\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)$ eine Function von $u_2$ und $w$ allein, so geben die beiden Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)=w,\ \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)=\varphi(u_2, w),$$

d. h. die Gleichung:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial u_2}\right)=\frac{\varphi(u_2, w)}{w}$$

gibt ein Integral $\psi(u_2, w)$, welches von $\alpha_1$ unabhängig ist, also die Stelle von 2 Integralen vertritt, ausserdem ergibt sich $\alpha_1$ durch Quadratur.

Ist $w$ ein neues Integral, und bildet man $\left(\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1}\right)$; und möge dies nicht die angegebenen Bedingungen erfüllen, sondern eine Function von $u_2, w, w_1$ sein so hat man die Gleichungen:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)=w,\ \left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)=w_1,\ \left(\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1}\right)=\varphi(u_2, w, w_1).$$

Man erhält durch Auflösung zweier Gleichungen mit 3 Variablen 2 von $\alpha_1$ unabhängige Integrale, und $\alpha_1$ durch Quadratur. Eins der beiden Integrale dient zur Reduction, das andere, welches $w_2$ heisse, ist dann weiter zu untersuchen, wie oben. Mit Ausnahme des Hauptfalles, wo die Integrale die Stelle von 2 vertraten, also $v=0$ war, kommt in den Ausdrücken $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$, $\left(\frac{\partial w}{\partial \alpha_1}\right)$ . . . immer der Index $A$ vor; dieser müsste also bekannt sein, um unsere Untersuchung anzustellen. Nur in dem von Jakobi behandelten Falle ist $A$ eine Constante. Klebsch hat indess bemerkt (Crelle Bd. 60), dass man den Ausdruck $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ durch einen andern, der ebenfalls ein Integral der Gleichungen 11) ist, ersetzen könne, und der von $A$ frei ist.

Offenbar ist nämlich:

$$\lg\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)=\lg V+\lg A,$$

wo $V$ von $A$ frei ist, und da $A$ von $\alpha_1$ unabhängig ist:

$$V_1=\frac{\partial \lg\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)}{\partial \alpha_1}=\frac{\partial V}{V \partial \alpha_1}.$$

Es ist also auch $\frac{\partial V}{V\partial \alpha_1}=V_1$ ein Integral der Gleichungen 11), welches von $A$ frei ist, und auf welches sich ganz die obigen Betrachtungen anwenden lassen, wenn man überall $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ durch $v_1$ ersetzt. Da aus

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha_1}=\sum_{s=1}^{s=2n}\frac{\partial v}{\partial x_p}\frac{\partial x_p}{\partial \alpha_1}$$

mittels der oben gegebenen Gleichungen die Grössen $\frac{\partial x}{\partial \alpha_1}$ sich eliminiren lassen, so behält alles oben Gesagte seine Gültigkeit. Ist namentlich $v_1$ nicht identisch einer Constante, so bildet es ein neues Integral, und man untersucht $\left(\frac{\partial v_1}{\partial \alpha_1}\right)$ u. s. w. Alle diese Ausdrücke sind aber vom Index $A$ ganz frei.

40) Zusammenfassung der gefundenen Resultate.

Wir wollen schliesslich die, wie es bei dem behandelten Gegenstande nicht anders sein kann, ziemlich complicirte Untersuchung der totalen Differenzialgleichung hier nochmals zusammenfassen.

I) Die Gleichung $\Sigma X dx=0$ hat $n$ oder $n+1$ Integrale, je nachdem die Anzahl der Variablen $2n$ oder $2n+1$ ist. Im letztern Falle ist ein willkürliches darunter, nach dessen Elimination der zweite Fall auf den ersten zurückgeführt ist.

II) Die Bestimmung dieser Integrale führt zu $n$ Systemen von Differenzialgleichungen mit bezüglich $2n, 2n-2 \dots 6, 4, 2$ Variablen. Fallen jedoch in der Gleichung $\Sigma X dx=0$ von den Functio-

nen $X$ $n-p$ aus, so hat man nur $p$ Systeme zu integriren; fallen $n-1$ aus, d. h. ist die vorgelegte Gleichung von der Gestalt:

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \ldots X_{n+1} dx_{n+1} = 0,$$

so ist nur ein System zu integriren.

III) Soll die Gleichung $\Sigma X dx = 0$ nur $n-q$ Integrale haben, so müssen bei $2n$ Variablen $q(2q+1)$, bei $2n+1$ $(q+1)(2q+1)$ Bedingungsgleichungen erfüllt werden. Es tritt aber dabei eine derartige Reduction der ganzen Auflösung ein, dass man statt $q+1$ Systeme mit bezüglich $2n$, $2n-2 \ldots 2n-2q$ Variablen bezüglich $2q+1$ und $2q+2$ Systeme mit $2n-2q-1$ Variablen zu integriren hat.

IV) Besondere Vortheile gewährt die Auflösung, wenn man ein Integral bereits bestimmt hat. Die Aufgabe wird dann so reducirt, als wenn man bei einem gewöhnlichen Systeme zwei Integrale kännte. Ist von dem nun gebildeten Systeme ebenfalls ein Integral bekannt, so vertritt dies ebenfalls zwei, die im allgemeinen Falle gegeben wären; ist von dem so gebildeten System wieder eins bekannt u. s. w., so dass man im Ganzen $p$ Integrale kennt, so hat man noch $p+1$ Systeme mit bezüglich $2n-2p$ Variablen zu integriren, und die Gleichung $\Sigma X dx = 0$ ist so reducirt, als hätte man die $p$ ersten Systeme bereits vollständig integrirt. An Stelle der ersparten Integrationen treten blosse Quadraturen.

V) Sind 2, 3 oder mehr Integrale gleichzeitig gegeben, und erfüllen diese gewisse Bedingungsgleichungen, so wird die Aufgabe so reducirt, als wären 4, 6 . . . Integrale eines gewöhnlichen Systems bekannt. Werden diese Bedingungsgleichungen nicht erfüllt, so gewährt die Kenntniss mehrerer Integrale andere Vortheile.

Ja, in einem Falle, den man, wenn man will, sogar als den allgemeinen betrachten kann, reichen 2 bekannte Integrale hin, um alle übrigen zu bestimmen.

Wir unterlassen übrigens, diese Theorie mit Beispielen zu belegen, da der nächste Artikel, die partiellen Differenzialgleichungen betreffend, zu solchen Anlass geben wird.

41) Verschiedene Systeme von Integralen.

Die Gleichung:

$$\sum_{s=1}^{s=2n} X_s dx_s = 0,$$

auf die auch der Fall einer ungeraden Anzahl von Variablen zurückgeführt wurde, ist nach dem Obigen integrirt, wenn man durch eine Transformation:

5) $$\sum_{s=1}^{s=2n} X_s \delta x_s = U_1 \delta u_1 + U_2 \delta u_2 + \ldots + U_n \delta u_n$$

setzen kann, und es sind dann:

$$u_1 = a_1,\ u_2 = a_2 \ \ldots\ u_n = a_n,$$

wo $a_1, a_2 \ldots a_n$ willkürliche Constanten sind, die Integrale; d. h. durch Differenziiren dieser Gleichungen und Dividiren der Differenziale, nachdem jedes mit einer gewissen Grösse multiplicirt ist, kann man den Ausdruck $\Sigma X dx = 0$ entstanden denken. Umgekehrt sind $n$ Integrale der letzten Gleichung $u_1 = a_1$, $u_2 = a_2 \ldots u_n = a_n$ irgendwie bekannt, so kann man $\Sigma X \delta x$ auf die angegebene Form bringen, wo $U_1, U_2 \ldots U_n$ ebenfalls gegebene Grössen sind. Aber es gibt auch Integrale von ganz anderm Charakter, welche statt der Constanten willkürliche Functionen enthalten. Dieselben lassen sich aber stets bestimmen, wenn man $n$ Integrale wie die obigen hat.

Offenbar nämlich machte alle Relation zwischen $u$ und $U$ die Gleichung $\Sigma X dx = 0$ identisch, welche bewirken, dass der Ausdruck rechts in Gleichung 5) verschwinde.

Nehmen wir nun an, es wäre:

27) $$u_n = \varphi(u_1, u_2 \ldots u_{n-1}),$$

wo $\varphi$ eine willkürliche Function ist, so wird der Ausdruck rechts in Gleichung 5) die Form annehmen:

$$\left(U_1 + U_n \frac{\partial \varphi}{\partial u_1}\right) \delta u_1 + \left(U_2 + U_n \frac{\partial \varphi}{\partial u_2}\right) \delta u_2 + \ldots + \left(U_{n-1} + U_n \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}}\right) \delta u_{n-1},$$

und dieser Ausdruck wird gleich Null, wenn wir mit Gleichung 27) die $n-1$ Relationen zwischen jetzt bekannten Grössen:

28) $$U_1 + U_n \frac{\partial \varphi}{\partial u_1} = 0,\ U_2 + U_n \frac{\partial \varphi}{\partial u_2} = 0,\ \ldots\ U_{n-1} + U_n \frac{\partial \varphi}{\partial u_{n-1}} = 0$$

verbinden. Also diese Relationen in Verbindung mit Gleichung 27) stellen ebenfalls ein System von Integralen der Gleichung $\Sigma X dx = 0$ vor.

Die Anzahl derselben ist wieder $n$, sie enthalten aber keine Constante, dagegen eine willkürliche Function von $n-1$ Variablen.

Specialisirt man dieselbe aber derart, dass sie $n$ willkürliche Constanten enthält, so kann man aus 27) und 28) ein den Gleichungen $u_1 = a_1 \ldots$ analoges System wieder gewinnen.

Setzen wir ferner:

$$29)\qquad u_{n-1} = \varphi_1(u_1, u_2 \ldots u_{n-2}),\quad u_n = \varphi_2(u_1, u_2 \ldots u_{n-2}),$$

so wird die rechte Seite von 5) die Gestalt haben:

$$(U_1 + U_{n-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} + U_n\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1})du_1 + \ldots + (U_{n-2} + U_{n-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_{n-2}} + \frac{\partial\varphi_2}{\partial u_{n-2}})du_{n-2}$$

Dieser Ausdruck wird gleich Null, wenn man mit den beiden Gleichungen 29) die folgenden $n-2$ Relationen verbindet:

$$30)\qquad \begin{aligned} U_1 + U_{n-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} + U_n\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1} &= 0,\\ U_2 + U_{n-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_2} + U_n\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_2} &= 0\\ \vdots\qquad\qquad &\vdots\\ U_{n-2} + U_{n-1}\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_{n-2}} + U_n\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_{n-2}} &= 0. \end{aligned}$$

Offenbar ist dieses System von Integralen weniger allgemein als das vorige, da es zwar 2 willkürliche Functionen, aber nur mit $n-2$ Variablen enthält. — In derselben Weise kann man ein Integralsystem von $n$ Gleichungen bilden, welches 3 willkürliche Functionen mit $n-3$ Variablen enthält u. s. f.

Schliesslich hat man ein System von $n-1$ willkürlichen Functionen mit einer Variable:

$$31)\qquad u_2 = \varphi_1(u_1),\quad u_3 = \varphi_2(u_1) \ldots u_n = \varphi_{n-1}(u_1),$$

zu welchem die eine Gleichung tritt:

$$32)\qquad U_1 + U_2\frac{\partial\varphi_1}{\partial u_1} + U_3\frac{\partial\varphi_2}{\partial u_1} + \ldots + U_n\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial u_1} = 0.$$

Alle diese Systeme haben wesentlich verschiedenen Charakter. Ausserdem gibt es noch ein System, das weder Constanten noch willkürliche Functionen enthält. Offenbar nämlich wird auch die rechte Seite in 5) gleich Null, wenn man setzt:

$$33)\qquad U_1 = 0,\ U_2 = 0 \ldots U_n = 0.$$

Diese Integrale nennt man, der früheren Bezeichnung analog, singuläre.

Die Vollständigkeit dieser Untersuchungen würde freilich erfordern, dass man ein System von $s$ simultanen Gleichungen von der Form $\Sigma X dx = 0$, wo $s$ eine beliebige Zahl ist, in ähnlicher Weise behandelte. Der Verfasser entsagt dem aber um so lieber, als er gestehen muss, dass er für jetzt nur im Stande wäre, Bruchstücke zur Lösung dieser höchst schwierigen Aufgabe beizubringen, was dem Zwecke dieses Wörterbuchs fremd wäre. Er schliesst also diesen Artikel, indem er glaubt, die Theorie der totalen Differenzialgleichungen, so weit sie bis jetzt ausgebildet ist, in einiger Vollständigkeit dem Leser vorgeführt zu haben.

**Quadraturen, Zurückführung der partiellen Differenzialgleichungen auf —.**

1) Einleitung.

Unter einer partiellen Differenzialgleichung versteht man eine solche, welche die Differenzialquotienten einer oder mehrerer abhängigen Variablen nach wenigstens 2 unabhängigen Variablen enthält. Wie totale Differenzialgleichungen, können auch die partiellen erster, zweiter u. s. w. Ordnung sein, je nachdem die höchsten darin enthaltenen Differenzialquotienten erster, zweiter u. s. w. Ordnung sind.

Das allgemeine Schema einer partiellen Differenzialgleichung ist mithin:

$$f\left(x_1,\, x_2 \ldots x_n,\, z_1,\, z_2 \ldots z_p \frac{\partial^\lambda z_q}{\partial x_1^{u_1}\, \partial x_2^{u_2} \ldots \partial x_n^{u_n}}\right) = 0.$$

$x_1, x_2 \ldots x_n$ sind die unabhängigen, $z_1, z_2 \ldots z_p$ die abhängigen Variablen, $u_1 + u_2 \ldots + u_n = \lambda$ der Differenzialquotient, ein Symbol für alle diejenigen, welche entstehen, wenn man $\lambda, u_1, u_2 \ldots u_n$ mit 0, 1, 2 . . . vertauscht.

Selbstverständlich gibt es auch simultane partielle Differenzialgleichungen, und würde man ein System derselben aus der hier gegebenen Gleichung erhalten, wenn man für $f$ andere Functionen $f_1, f_2 \ldots$ von derselben Variablen gleich Null setzte und mit dieser Gleichung verbände. Jedoch ist eine Behandlung der simultanen partiellen Differenzialgleichungen fast noch gar nicht unternommen, und sind nur sehr vereinzelte spezielle Fälle den gegenwärtigen Hülfsmitteln der Analysis zugänglich. — Wir werden uns daher auch hier fast ausschliesslich auf eine partielle Differenzialgleichung mit einer abhängigen Variablen zu beschränken haben. — Das allgemeine Schema für dieselbe ist:

$$f\left(x_1,\, x_2 \ldots x_n,\, z,\, \frac{\partial z}{\partial x_1},\, \frac{\partial z}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n},\, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2},\, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} \ldots \right.$$

$$\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2},\, \frac{\partial^3 z}{\partial x_1^3},\, \frac{\partial^3 z}{\partial x_1^2 \partial x_2} \ldots \frac{\partial^3 z}{\partial x_n^3} \ldots \frac{\partial^s z}{\partial x_1^s} \ldots \frac{\partial^s z}{\partial x_{n-1} \partial x_n^{s-1}},\, \frac{\partial^s z}{\partial x_n^s}\right) = 0.$$

Was die Behandlung derselben anbetrifft, so muss zuvor bemerkt werden, dass auch dieses Problem in seiner Allgemeinheit nur wenig ausgebeutet ist und Schwierigkeiten der erheblichsten Art darbietet. Diese Schwierigkeiten beziehen sich nicht allein auf die Natur und auf die Darstellung der allgemeinen Integrale, obgleich auch diese in den wenigsten Fällen einer genauern Kenntniss zugänglich sind, sondern auch auf die Anwendungen. Denn oft kommt es vor, dass, um eine partielle Differenzialgleichung, deren allgemeines Integral man kennt, für einen bestimmten Fall anzuwenden, also zu spezialisiren, Probleme von der grössten und bei unsern jetzigen Kenntnissen unüberwindlichen Schwierigkeit zu lösen wären, so dass man in der Regel leichter zum Ziele kommt, wenn man, statt das allgemeine Integral zu suchen, sich von Anfang an den Bedingungen der speziellen Aufgabe möglichst anschliesst, und so zu einer Lösung derselben zu gelangen sucht.

Allgemeineres ist nur für die partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung gelungen, und zwar besteht das Resultat darin, „dass jede partielle Differenzialgleichung erster Ordnung sich in ein System von $n$ totalen Differenzialgleichungen mit $n+1$ Variablen zerlegen lässt."

Diese Reduction, welche immer angewandt werden kann, löst also auch die Zurückführung der partiellen Differenzialgleichungen auf Quadraturen in den Fällen, wo nach dem vorigen Artikel die Auflösung des in Rede stehenden Systems totaler Differenzialgleichungen auf Quadraturen führt.

Bei partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnung hat man sich fast ausschliesslich auf die Behandlung der linearen Gleichungen, d. h. der Gleichungen von der Form:

$$A \frac{\partial^s z}{\partial x_1^s} + B \frac{\partial^s z}{\partial x_1^{s-1} \partial x_2} + C \frac{\partial^s z}{\partial x_1^{s-1} \partial x_3} + \ldots + S \frac{\partial^s z}{\partial x_n^s} = 0$$

beschränken müssen, wo $A$, $B$, $C \ldots S$ Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n, s$ und der partiellen Differenzialquotienten von $z$ bis einschliesslich zur $s-1$ ten Ordnung sind, eine Gleichung, die man symbolisch auch schreiben kann:

$$\Sigma A_p, q, r \ldots \frac{\partial^s z}{\partial x_p^{\alpha_1} \partial x_q^{\alpha_2} \partial x_r^{\alpha_3} \ldots} = 0,$$

wo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots = s$$

ist.

Aber auch hierbei entbehren die angewandten Methoden der Allgemeinheit.

Wir werden uns jetzt zunächst mit den Gleichungen erster Ordnung zu beschäftigen haben, und ehe wir die Methoden zur Auflösung derselben geben, untersuchen, welchen Transformationen dieselben unterliegen, und welches die Natur ihrer Integrale sei.

2) Allgemeines über die Gleichungen erster Ordnung und ihre Integrale.

Da in den partiellen Gleichungen von beliebiger Ordnung die Differenzialquotienten einer Variablen $z$ nach den andern Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$ genommen, enthalten sind, so wird offenbar als Integral eine Gleichung gefordert, welche $z$ als Function von $x_1, x_2 \ldots x_n$ gibt.

Im Wesen einer partiellen Differenzialgleichung liegt es also, dass sie nur ein Integral habe, wenn sie, wie hier angenommen, nur eine abhängige Variable enthält.

Es muss aber gezeigt werden, dass auch wirklich jede partielle Differenzialgleichung ein solches Integral habe und wie dasselbe beschaffen, d. h. wie viel Constanten oder sonstige willkürlich zu bestimmende Grössen in demselben enthalten seien.

Wir thun dies an dieser Stelle für die Gleichungen erster Ordnung.

Sei

$$F(x_1, x_2 \ldots x_n, z) = 0$$

eine beliebige Gleichung, welche noch ausser den Variablen eine Anzahl Constanten enthält, so kann man dieselbe nach $x_1, x_2 \ldots x_n$ differenziiren, und erhält auf diese Weise noch $n$, also im Ganzen $n+1$ Gleichungen, aus denen man $n$ Constanten eliminiren kann, um schliesslich zu einer Gleichung zu gelangen, welche ausser $x_1, x_2 \ldots x_n, z$ noch $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}$ enthält.

Sei:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_n\, z\, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}) = 0$$

diese Gleichung, so kann $f$ eine ganz beliebige Form haben, wenn $F$ nicht näher bestimmt ist, und man sieht daher: „dass jede partielle Differenzialgleichung erster Ordnung $f=0$ ein Integral $F=0$ hat, welches $n$ willkürliche Constanten $a_1, a_2 \ldots a_n$, also soviel enthält, als die Differenzialgleichung abhängige Variable hat."

Dieses Integral wird das vollständige genannt. Man kann aus demselben beliebige partikuläre Integrale gewinnen, wenn man den Constanten beliebige Werthe gibt. — Indessen haben die partiellen Differenzialgleichungen noch Integrale von einem ganz verschiedenen Charakter, welche statt der willkürlichen Constanten willkürliche Functionen der Variablen enthalten.

Ein solches Integral heisst allgemeines, und offenbar ist es wirklich von allgemeinerer Art als das vollständige Integral. Vom Dasein eines solchen allgemeinen Integrals über überzeugen wir uns durch folgende Schlüsse.

Schreiben wir zunächst die gegebene Differenzialgleichung unter der Form:

$$\frac{\partial z}{\partial x_n} = \varphi\,(x_1, x_2 \ldots x_n, z, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}}),$$

und geben der Grösse $x_n$ die continuirlich auf einander folgenden Werthe:

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{s-1},$$

welchen die Werthe von $s$:

$$z_0, s_1 \dots z_{s-1}$$

bezüglich entsprechen sollen. Diese Werthe, $s_0, s_1 \dots z_{s-1}$, von denen wir übrigens voraussetzen müssen, dass sie ebenfalls continuirlich aus einander hervorgehen, weil dies der Begriff des Differenziirens fordert, sind also noch Functionen von $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$. Es ist aber:

$$\frac{\partial z_{r-1}}{\partial x_n} = \frac{z_r - z_{r-1}}{\alpha_r - \alpha_{r-1}},$$

wo $z_r, z_{r-1}, \alpha_r, \alpha_{r-1}$ beliebige auf einander folgende Glieder der entsprechenden Reihen sind.

Unsere gegebene Gleichung stellt also folgendes recurrente System dar:

$$z_1 = s_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)\varphi(x_1, x_2 \dots x_{n-1}, \alpha_0, z_0, \frac{\partial s_0}{\partial x_1} \dots \frac{\partial z_0}{\partial x_{n-1}}),$$

$$s_2 = s_1 + (\alpha_2 - \alpha_1)\varphi(x_1, x_2 \dots x_{n-1}, \alpha_1, z_1, \frac{\partial z_1}{\partial x_1} \dots \frac{\partial z_1}{\partial x_{n-1}})$$

$$\vdots$$

$$s_s = s_{s-1} + (\alpha_s - \alpha_{s-1})\varphi(x_1, x_2 \dots x_{n-1}, \alpha_{s-1}, z_{s-1}, \frac{\partial z_{s-1}}{\partial x_1} \dots \frac{\partial s_{s-1}}{\partial x_{n-1}}).$$

Aus der ersten Gleichung kann man $z_1$ bestimmen, wenn man $z_0$, also auch die Differenzialquotienten dieser Grösse als Functionen von $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ kennt. Die Differenzialquotienten von $z_1$ ergeben sich dann durch Differenziiren dieser Gleichung. Die zweite Gleichung gibt $s_2$ und enthält keine weitere Willkürlichkeit, und so kann man allmälig bis zu $s_s$ gelangen; die Grössen $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_{s-1}$ sind folglich beliebige, aber continuirlich auf einander folgende Grössen. Für $z_0$ ist also keine weitere Bestimmung gegeben, und somit kann diese Grösse eine ganz willkürliche Function von $n-1$ Variablen $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ sein, die jedoch den Gesetzen des Differenziirens gemäss so genommen werden muss, dass $s$ auf dem ganzen Integrationswege durch keine Discontinuität geführt wird.

„Das allgemeine Integral enthält also eine willkürliche Function mit einer Variablen weniger, als die Anzahl der unabhängigen Variablen beträgt."

Man kann auch setzen:

$$z_s = z_0 + (\alpha_1 - \alpha_0)\varphi_0 + (\alpha_2 - \alpha_1)\varphi_1 + \dots (\alpha_s - \alpha_{s-1})\varphi_{s-1},$$

wo unter $\varphi_{(r)}$ verstanden ist der Ausdruck:

$$\varphi(x_1, x_2 \dots x_{n-1}, \alpha_r, z_r, \frac{\partial s_r}{\partial x_1} \dots \frac{\partial s_r}{\partial x_{n-1}}),$$

oder symbolisch:

$$z = z_0 + \int_{\alpha_0}^{\alpha_s} (\varphi_{(r)} d\alpha_r) = \psi(\alpha_1, x_2 \dots x_{n-1}) + \int_{\alpha_0}^{\alpha_s} \varphi_r d\alpha_r.$$

In diesem als Grenze einer Summe zu betrachtenden Integrale ist also Alles bis auf die willkürliche Function $\psi$, welche für $z_0$ gesetzt wird, bestimmt. Für $z_s$ ist $z$ gesetzt. Die Function $\psi$ aber kommt unter dem Quadraturzeichen $\int$ selbst vor. Sonach gilt von diesem allgemeinen Integrale $z$ dasselbe, was überhaupt über die Eigenschaften der durch Quadraturen definirten Functionen galt (siehe den

Artikel: Quadraturen), namentlich der Satz, dass ein solcher Ausdruck nur dann zwischen gegebenen Grenzen zwei verschiedene Werthe geben kann, wenn die durchlaufenen beiden Integrationswege einen Discontinuitäts- oder mehrfachen Punkt umschliessen.

3) Beziehung zwischen dem vollständigen und dem allgemeinen Integral.

Für die partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung gibt es aber noch eine andere Art, sich von dem Vorhandensein des allgemeinen Integrals zu überzeugen, und was zugleich wichtiger ist, dasselbe immer dann wirklich aufzufinden, wenn das vollständige Integral bekannt ist.

Diese Methode rührt von Lagrange her, und sie führt also die ganze Integration der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung auf die Bestimmung des vollständigen Integrals zurück.

Sei:

$$f=0$$

eine gegebene partielle Differenzialgleichung, wo also die linke Seite:

$$x_1, x_2 \ldots x_n, z \quad \text{und} \quad \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}$$

enthält. Sei ferner:

$$F(a_1, a_2 \ldots a_n)=0$$

das vollständige Integral dieser Gleichung, wo $a_1, a_2 \ldots a_n$ die willkürlichen Constanten sind, und $F$ also ausser denselben noch die Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n, z$ enthält. Es ist dann die Gleichung $f=0$ nach Abschnitt (2) entstanden, indem man aus den Gleichungen:

$$1) \qquad F=0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right)=0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right)=0 \ldots \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right)=0$$

die Constanten $a_1, a_2 \ldots a_n$ eliminirt.

Das Zeichen $\left(\frac{\partial F}{\partial x_s}\right)$ zeigt hier an, dass die Function $F$ derart nach $x_s$ differenziirt werden soll, dass $z$ als Function von $x_s$ betrachtet wird, es ist also:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x_s}\right)=\frac{\partial F}{\partial x_s}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_s}.$$

Nehmen wir nun an, es wären $a_1, a_2 \ldots a_n$ keine willkürlichen Constanten, sondern Functionen der unabhängigen Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$, und sei eine dieser Grössen $a_n$ eine Function der übrigen $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$, also:

$$2) \qquad a_n=\psi(a_1, a_2 \ldots a_{n-1}),$$

so erhält man beim Differenziiren von $F=0$ jetzt die folgenden Gleichungen:

$$3) \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_s}\right)+\left(\frac{\partial F}{\partial a_1}+\frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_1}\right)\frac{\partial a_1}{\partial x_s}+\left(\frac{\partial F}{\partial a_2}+\frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_2}\right)\frac{\partial a_2}{\partial x_s}+\ldots$$
$$+\left(\frac{\partial F}{\partial a_{n-1}}+\frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}}\right)\frac{\partial a_{n-1}}{\partial x_s}=0,$$

wo $s$ alle ganzzahligen Werthe von 1 bis $n$ annimmt.

Es ist aber ferner klar, dass die Gleichungen 3) dann völlig mit den Gleichungen 1) übereinstimmen, also auch das Eliminationsresultat, welches die Differenzialgleichung $f=0$ gibt, dasselbe bleibt, wenn man setzt:

4) $\frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_1} = 0,\ \frac{\partial F}{\partial a_2} + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_2} = 0\ \ldots\ \frac{\partial F}{\partial a_{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial a_n}\ \frac{\partial a_n}{\partial a_{n-1}} = 0.$

Aus diesen $n-1$ Gleichungen aber kann man die $n-1$ Grössen $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ bestimmen, und die Gleichung 2), wo $\psi$ eine völlig willkürliche Function ist, gibt dann $a_n$. Setzt man alles dies in die Gleichung $F=0$ ein, so hat man offenbar ein Integral der Gleichung $f=0$, da die letztere durch Differenziiren der ersteren, und Eliminiren der Grössen $a_1, a_2 \ldots a_{n-1}$ entstanden ist. Dies Integral enthält aber eine willkürliche Function von $n-1$ Variablen und ist also das allgemeine Integral.

Im Uebrigen kann man noch andere Arten von Integralen der Gleichung $f=0$ ableiten, welche ebenfalls willkürliche Functionen enthalten, die jedoch von einem weniger allgemeinen Charakter sind, als das eben gefundene. Alle diese Integrale aber sind gegeben, wenn man das vollständige Integral kennt. Nehmen wir nämlich wieder an, die $a$ seien Functionen der Variablen $x$, statt der Beziehung 3) aber seien die folgenden gegeben:

5) $a_{r+1} = \psi_1(a_1, a_2 \ldots a_r),\ \ a_{r+2} = \psi_2(a_1, a_2 \ldots a_r) \ldots$

$$a_n = \psi_{n-r}(a_1, a_2 \ldots a_r),$$

wo die $\psi$ willkürliche Functionen, jedoch nur von $r$ Variablen sind. Die Zahl $r$ kann jeden Werth von $r=1$ bis $r=n-1$ annehmen. Die Differenzialquotienten von $F=0$ werden dann:

6) $$\left(\frac{\partial F}{\partial x_s}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+1}}\ \frac{\partial a_{r+1}}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+2}}\frac{\partial a_{r+2}}{\partial a_1} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_1}\right)\frac{\partial a_1}{\partial x_s}$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial a_2} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+1}}\ \frac{\partial a_{r+1}}{\partial a_2} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+2}}\ \frac{\partial a_{r+2}}{\partial a_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_2}\right)\frac{\partial a_2}{\partial x_s} + \ldots$$
$$+ \left(\frac{\partial F}{\partial a_r} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+1}}\ \frac{\partial a_{r+1}}{\partial a_r} + \ \ldots\ + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_r}\right)\frac{\partial a_r}{\partial x_s} = 0,$$

und diese Gleichungen stimmen wieder ganz mit den Gleichungen 1) überein, wenn man setzt:

7) $$\frac{\partial F}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+1}}\ \frac{\partial a_{r+1}}{\partial a_1} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+2}}\ \frac{\partial a_{r+2}}{\partial a_1} + \ \ldots\ + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_1} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial a_2} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+1}}\ \frac{\partial a_{r+1}}{\partial a_2} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+2}}\ \frac{\partial a_{r+2}}{\partial a_2} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_2} = 0$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial F}{\partial a_r} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+1}}\ \frac{\partial a_{r+1}}{\partial a_r} + \frac{\partial F}{\partial a_{r+2}}\ \frac{\partial a_{r+2}}{\partial a_r} + \ \ldots\ + \frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial a_r} = 0.$$

Die Anzahl der Gleichungen 5) und 7) ist offenbar zusammen gleich $n$; sie reichen also zur Bestimmung der Grössen $a_1, a_2 \ldots a_n$ hin, welche man in die Gleichung $F=0$ einsetzt. Diese gibt somit ein Integral, welches $n-r$ willkürliche Functionen mit $r$ Variablen enthält.

Da $r$ jeden Werth von $r=1$ bis $r=n-1$ annehmen kann, wo der letzte Fall dem allgemeinen Integrale entspricht, so hat man $n-1$ Klassen von Integralen, welche willkürliche Functionen enthalten, und zwar entsprechend, $n-1$ willkürliche Functionen mit einer Variable, $n-2$ mit zwei Variablen u. s. f., endlich eine mit $n-1$ Variablen.

Ausser diesen ist aber noch ein Integral zu merken, welches weder willkürliche Functionen noch Constanten enthält, aus keiner der gegebenen Klassen aber durch Specialisirung erhalten werden kann. Dies Integral heisst singuläres, und schliesst sich seinem Charakter nach somit den singulären Integralen der totalen Differenzialgleichungen genau an. Es kann dasselbe jederzeit bestimmt werden, wenn man das vollständige Integral kennt.

Nehmen wir nämlich an, es seien in der Gleichung $F(a_1, a_2 \ldots a_n)=0$ $a_1, a_2 \ldots a_n$ Functionen der $x$, aber ganz von einander unabhängig, so erhält man durch Differenziiren:

$$8)\qquad \left(\frac{\partial F}{\partial x_s}\right)+\frac{\partial F}{\partial a_1}\frac{\partial a_1}{\partial x_s}+\frac{\partial F}{\partial a_2}\frac{\partial a_2}{\partial x_s}+\ldots+\frac{\partial F}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial x_s}=0,$$

und diese Gleichungen werden mit den Gleichungen 1) identisch, wenn man setzt:

$$9)\qquad \frac{\partial F}{\partial a_1}=0,\ \frac{\partial F}{\partial a_2}=0\ \ldots\ \frac{\partial F}{\partial a_n}=0,$$

$n$ Gleichungen, aus denen man $a_1, a_2 \ldots a_n$ bestimmt, und in $F=0$ einsetzt. Man hat dann ein Integral von dem bezeichneten Charakter.

Zur Anwendung dieses Verfahrens auf Beispiele werden die folgenden Abschnitte Gelegenheit geben.

4) **Die partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung als besonderer Fall der totalen Differenzialgleichungen betrachtet.**

Die wichtigste Eigenschaft der hier betrachteten Gleichungen ist aber die, dass sich eine solche immer als eine totale Differenzialgleichung mit $2n$ Variablen betrachten lässt, wenn die Anzahl der unabhängigen Variablen der partiellen Differenzialgleichung gleich $n$ ist, und dass sich somit die Theorie der partiellen Differenzialgleichungen auf die in den letzten Abschnitten des vorigen Artikels gegebene Theorie einer totalen Differenzialgleichung mit mehr als zwei Variablen zurückführen lässt, und in der That führt diese Betrachtung auf dem einfachsten und kürzesten Wege zum Ziele, indem jede partielle Differenzialgleichung erster Ordnung in $2n-1$ totale mit $2n$ Variablen zerfällt.

Diese Identität der totalen und partiellen Differenzialgleichungen ergibt sich unmittelbar durch folgende Betrachtungen. Statt der Gleichung:

$$1)\qquad f\left(x_1, x_2 \ldots x_n, z\ \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)=0$$

kann man offenbar setzen die folgende:

$$2)\qquad f(x_1, x_2 \ldots x_n, z, p_1, p_2 \ldots p_n)=0$$

verbunden mit dem System:

$$3)\qquad \frac{\partial z}{\partial x_1}=p_1,\ \frac{\partial z}{\partial x_2}=p_2\ \ldots\ \frac{\partial z}{\partial x_n}=p_n.$$

Diese letzteren Gleichungen aber lassen sich in die Gestalt einer einzigen bringen, nämlich:

$$4)\qquad dz=p_1dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_ndx_n,$$

denn durch successives Differenziiren der Gleichung 4) nach den Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n$ erhält man wieder die Gleichungen 3).

Die beiden Gleichungen 2) und 4) sind also mit 1) völlig gleichbedeutend.

Die Gleichung 2) kann dazu dienen, eine der $2n+1$ Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n, z, p_1, p_2 \ldots p_n$ zu bestimmen, und enthält Gleichung 4) dann noch deren $2n$. Da aber diese Gleichung nur die Differenziale von $(n+1)$ derselben: $x_1, x_2 \ldots x_n$, $z$, nicht aber die von $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$ enthält, so gilt das im vorigen Artikel, Abschnitt 40, 11) Gesagte hier, dass von den aufgestellten Systemen von Differenzialgleichungen das erste zur Integration hinreicht. Diese merkwürdige Vereinfachung der zuerst von Pfaff hingestellten allgemeinen Integrationsmethode der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung rührt von Jakobi her.

Wir wollen jetzt noch die durch Gleichung 4) gegebene Form der partiellen Differenzialgleichung erster Ordnung benutzen, um eine zuerst von Legendre gegebene Transformation zu beweisen, welche in manchen Fällen auch bei Gleichungen höherer Ordnung von Nutzen sind.

Die Gleichung 4) lässt sich nämlich auch auf die Form bringen:

$$dz = d(p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n) - x_1 dp_1 - x_2 dp_2 - \dots - x_n dp_n,$$

d. h.:

$$5)\qquad du = x_1 dp_1 + x_2 dp_2 + \dots + x_n dp_n,$$

wo gesetzt wurde:

$$6)\qquad u = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - z,$$

$$z = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n - u.$$

Die Gleichung 5) aber zerfällt in das folgende System:

$$7)\qquad \frac{\partial u}{\partial p_1} = x_1,\ \frac{\partial u}{\partial p_2} = x_2 \dots \frac{\partial u}{\partial p_n} = x_n,$$

und diese Werthe in die Gleichung 2) einsetzend, erhält man:

$$8)\ f\left(\frac{\partial u}{\partial p_1}, \frac{\partial u}{\partial p_2} \dots \frac{\partial u}{\partial p_n},\ p_1 \frac{\partial u}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial u}{\partial p_2} + \dots + p_n \frac{\partial u}{\partial p_n} - u,\ p_1, p_2 \dots p_n\right) = 0,$$

eine partielle Differenzialgleichung erster Ordnung, die somit mit 1) ganz identisch ist. In 8) sind $p_1, p_2 \dots p_n$ die unabhängigen Variablen, also dieselben Grössen, welche in 1) die Differenzialquotienten von $z$ waren, während die Grössen $x_1, x_2 \dots x_n$ in 8) die Differenzialquotienten von $u$ sind.

Ehe wir jetzt mit Anwendung des vorigen Artikels die vollständige Theorie der hier betrachteten Gleichungen geben, wollen wir aber noch einen besondern Fall, den der linearen Gleichungen, direct betrachten.

5) Integration der linearen Gleichungen erster Ordnung.

Sei gegeben die Gleichung:

$$1)\qquad A_1 \frac{\partial z}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial z}{\partial x_2} + \dots + A_n \frac{\partial z}{\partial x_n} = B,$$

wo $A_1, A_2 \dots A_n, B$ Functionen von $z, x_1, x_2 \dots x_n$ sind. Diese Gleichung heisst lineare, da sie in Bezug auf die partiellen Differenzialquotienten von $z$ linear ist. Wir ersetzen sie zunächst, wie im vorigen Abschnitte, durch das System:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = p_1,\ \frac{\partial z}{\partial x_2} = p_2 \dots \frac{\partial z}{\partial x_n} = p_n,$$

oder durch die eine Gleichung:

$$2)\qquad dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_n dx_n = 0$$

verbunden mit:

$$3)\qquad A_1 p_1 + A_2 p_2 + \dots + A_n p_n = B.$$

Indem wir aus 2) und 3) $p_n$ eliminiren, erhalten wir:

$$4)\qquad A_n dz - A_n p_1 dx_1 - A_n p_2 dx_2 - \dots - A_n p_{n-1} dx_{n-1}$$
$$- (B - A_1 p_1 - A_2 p_2 - \dots - A_{n-1} p_{n-1}) dx_n = 0,$$

oder, indem wir die mit $p_1, p_2 \dots p_{n-1}$ multiplicirten Theile von einander sondern:

5) $A_n dz - B dx_n + p_1(A_1 dx_n - A_n dx_1) + p_2(A_2 dx_n - A_n dx_2) + \ldots$
$$+ p_{n-1}(A_{n-1} dx_n - A_n dx_{n-1}) = 0.$$

Es wird diese Gleichung offenbar erfüllt, wenn man setzt:

$$A_n dz = B dx_n,\quad A_n dx_1 = A_1 dx_n,\quad A_n dx_2 = A_2 dx_n \ldots A_n dx_{n-1} = A_{n-1} dx_n,$$

ein System von $n$ Differenzialgleichungen mit $n+1$ Variablen, welches man auch unter der Gestalt schreiben kann:

6) $$dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n : dz = A_1 : A_2 : \ldots : A_n : B.$$

Bildet man die Integrale dieses Systems, so lösen diese offenbar die Gleichung 4) oder 2) vollständig auf, während $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$ ganz willkürlich bleiben. Aber nicht unmittelbar ist auch eine Auflösung der Gleichung 1) hierdurch gegeben. Denn diese Gleichung erfordert, dass man $z$ als Function von $x_1, x_2 \ldots x_n$ erhält, während die $n$ Integrale der Gleichungen 6) $z, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}$ als Functionen von $x_n$ sich ergeben.

Indess lässt sich aus diesen Betrachtungen leicht das allgemeine Integral von 1) ableiten. Seien die Integrale der Gleichungen 6) zunächst:

7) $$f_1 = \alpha_1,\quad f_2 = \alpha_2 \ldots f_n = \alpha_n,$$

wo $f_1, f_2 \ldots f_n$ Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ aber willkürliche Constanten sind, so ist offenbar:

8)
$$A_n \delta z - B \delta x_n = \Sigma e \delta f,$$
$$A_1 \delta x_n - A_n \delta x_1 = \Sigma e' \delta f,$$
$$A_2 \delta x_n - A_n \delta x_2 = \Sigma e'' \delta f$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$
$$A_{n-1} \delta x_n - A_n \delta x_{n-1} = \Sigma e^{(n)} \delta f,$$

wo die Summenzeichen auf die Grössen $\delta f_1, \delta f_2 \ldots \delta f_n$ sich beziehen, $e, e' \ldots e^{(n)}$ aber Functionen von $z, x, x_1 \ldots x_n$ sind, die sich leicht bestimmen lassen, wenn die Integrale bekannt sind. Das Zeichen $\delta$ deutet hier, wie schon oft in den vorhergehenden Artikeln an, dass die Grössen $x, x_1 \ldots x_n, z$ nach einem ganz beliebigen Gesetze variirt sind. Durch Einsetzen der Beziehung 8) in die, wenn man Gleichung 3) als erfüllt voraussetzt, identische Gleichung:

$$A_n(\delta z - p_1 \delta x_1 - p_2 \delta x_2 - \ldots - p_n \delta x_n) = A_n \delta z - B \delta x_n + p_1(A_1 \delta x_n - A_n \delta x_1)$$
$$+ p_2(A_2 \delta x_n - A_n \delta x_2) + \ldots + p_{n-1}(A_{n-1} \delta x_n - A_n \delta x_{n-1})$$

erhält man nun:

9) $$\delta z - p_1 \delta x_1 - p_2 \delta x_2 - \ldots - p_n \delta x_n = h_1 \delta f_1 + h_2 \delta f_2 + \ldots + h_n \delta f_n,$$

wo die Ausdrücke $h_1, h_2 \ldots h_n$ ausser $x_1, x_2 \ldots x_n, z$ noch $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$, jedoch in linearer Form, enthalten.

Ist die rechte Seite gleich Null, so ist dies also auch mit der linken Seite der Fall; es wird dann:

$$\delta z = dz,\quad \delta x_1 = dx_1 \ldots \delta x_n = dx_n$$

zu setzen sein.

Nehmen wir nun an, es sei:

10) $$f_n = \varphi(f_1, f_2 \ldots f_{n-1}),$$

wo $\varphi$ eine willkürliche Function von $n-1$ Variablen ist, so wird die rechte Seite von 9) die Gestalt annehmen:

$$\left(h_1+h_n\frac{\partial\varphi}{\partial f_1}\right)\partial f_1+\left(h_2+h_n\frac{\partial\varphi}{\partial f_2}\right)\partial f_2+\ .\ .\ .+\left(h_{n-1}+h_n\frac{\partial\varphi}{\partial f_{n-1}}\right)\partial f_n.$$

Setzt man dann noch:

11) $$h_1+h_n\frac{\partial\varphi}{\partial f_1}=0,\quad h_2+h_n\frac{\partial\varphi}{\partial f_2}=0\ .\ .\ .\ h_{n-1}+h_n\frac{\partial\varphi}{\partial f_{n-1}}=0,$$

so ist in der That dieser Ausdruck gleich Null. Die $n-1$ Gleichungen 11) lassen sich aber immer erfüllen, während $\varphi$ ganz willkürlich ist. Es enthalten die Ausdrücke $h_1, h_2 \ldots h_n$ nämlich die $n-1$ noch ganz unbestimmten Grössen $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$; sie können also zu deren Bestimmung dienen. Die Gleichung 10) gibt also in jedem Falle eine Auflösung von 2), und da sie $z$ als Function von $x_1, x_2 \ldots x_n$ gibt, auch das allgemeine Integral von 1), während $\varphi$ eine ganz willkürliche Function ist. Die Gleichungen 7), welche $n$ willkürliche Constanten enthalten, entsprechen dem in Abschnitt 2) betrachteten vollständigen Integrale. Da sie aber nicht als Integrale von 1) zu betrachten sind, so muss man sagen: „dass die linearen Differenzialgleichungen kein vollständiges, wohl aber ein allgemeines Integral haben."

Das letztere bestimmt man, indem man die totalen Differenzialgleichungen 6) integrirt und ein Integral als willkürliche Function der übrigen bestimmt, oder was dasselbe ist, zwischen allen Integralen die Gleichung:

12) $$\psi(f_1, f_2 \ldots f_n)=0$$

festsetzt, wo $\psi$ eine willkürliche Function ist.

Beispiele.

I) Sei gegeben:

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial z}{\partial x_2}=nz.$$

Es ist hier:

$$A_1=x_1,\quad A_2=x_2,\quad B=nz,$$

und die Gleichungen 6) werden:

$$dx_1 : dx_2 : dz = x_1 : x_2 : nz,$$

d. h.:

$$\frac{dx_1}{x_1}=\frac{dx_2}{x_2}=\frac{dz}{nz}.$$

Die Integrale sind:

$$\frac{x_2}{x_1}=\alpha_1,\quad \frac{z}{x_1^{\,n}}=\alpha_2,$$

also das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung:

$$\varphi\left(\frac{x_2}{x_1},\ \frac{z}{x_1^{\,n}}\right)=0,$$

oder:

$$z=x_1^{\,n}\varphi\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

II) Sei ferner gegeben:

$$x_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+z\frac{\partial z}{\partial x_2}+x_2=0.$$

Man hat:

$$A_1=x_1,\quad A_2=z,\quad B=-x_2,$$

$$dx_1 : dx_2 : dz = x_1 : z : -x_2,$$

d. h.:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{z} = -\frac{dz}{x_2}.$$

Die Gleichung:

$$x_2 dx_2 + z dz = 0$$

gibt integrirt:

$$x_2^2 + z^2 = \alpha_1^2,$$

und wenn man den hieraus gezogenen Werth:

$$z = \sqrt{(\alpha_1^2 - x_2^2)}$$

in die Gleichung:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{z}$$

einsetzt, so erhält man das Integral:

$$\lg \alpha_2 x_1 = \arcsin \frac{x_2}{\alpha_1}.$$

d. h.:

$$\alpha_2 x_1 = e^{\arcsin \frac{x_2}{\sqrt{(z^2+x_2^2)}}}.$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{x_1} e^{\arcsin \frac{x_2}{\sqrt{(z^2+x_2^2)}}},$$

und das Integral der vorgelegten Gleichung ist:

$$\psi\left(\frac{1}{x_1} e^{\arcsin \frac{x_2}{\sqrt{(z^2+x_2^2)}}},\; x_2^2+z^2\right)=0.$$

III) Seien $A_1$, $A_2$ ... $A_n$ und $B$ Constante, so sind die Integrale von 6) von der Form:

$$\frac{x_1}{A_1}+\alpha_1 = \frac{x_2}{A_2}+\alpha_2 = \;\ldots\; = \frac{x_n}{A_n}+\alpha_n = \frac{z}{B}+\beta;$$

also das allgemeine Integral von 1) ist:

$$\psi\left(\frac{z}{B}-\frac{x_1}{A_1},\; \frac{z}{B}-\frac{x_2}{A_2} \;\ldots\; \frac{z}{B}-\frac{x_n}{A_n}\right)=0.$$

6) Betrachtung einer gewissen Klasse simultaner partieller Differenzialgleichungen.

Die eben gegebene Integrationsmethode erstreckt sich auf eine Klasse simultaner Gleichungen von der Gestalt:

1)
$$A_1 \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial z_1}{\partial x_2} + \ldots + A_n \frac{\partial z_1}{\partial x_n} = B_1,$$

$$A_1 \frac{\partial z_2}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial z_2}{\partial x_2} + \ldots + A_n \frac{\partial z_2}{\partial x_n} = B_2$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$A_1 \frac{\partial z_s}{\partial x_1} + A_2 \frac{\partial z_s}{\partial x_2} + \ldots + A_n \frac{\partial z_s}{\partial x_n} = B_s,$$

wo $A_1, A_2 \ldots A_n, B_1, B_2 \ldots B_s$ Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n, z_1, z_2 \ldots z_n$ sein sollen.

Dieses System gehört also zu den wenigen Fällen simultaner partieller Differenzialgleichungen, die einer weiteren Behandlung zugänglich sind.

Setzen wir wieder:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_1}=p_1', \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_2}=p_2' \quad \ldots \quad \frac{\partial z_1}{\partial x_n}=p_n',$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial x_1}=p_1'', \quad \frac{\partial z_2}{\partial x_2}=p_2'' \quad \ldots \quad \frac{\partial z_2}{\partial x_n}=p_n''$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial z_s}{\partial x_1}=p_1^{(s)}, \quad \frac{\partial z_s}{\partial x_2}=p_2^{(s)} \quad \ldots \quad \frac{\partial z_s}{\partial x_n}=p_n^{(s)},$$

so lassen sich ganz ähnliche Betrachtungen wie die im vorigen Abschnitte anstellen. Namentlich kann man mittels der Gleichungen 1) die Grössen $p_n', p_n'' \ldots p_n^{(s)}$ bestimmen, und erhält dann ein System von der Gestalt:

$$A_n dz_r - A_n p_1^{(r)} dx_1 - A_n p_2^{(r)} dx_2 - \ldots A_{n-1} p^{(r)}_{n-1} dx_{n-1}$$
$$-(B_r - A_1 p_1^{(r)} - A_2 p_2^{(r)} - \ldots A_{n-1} p^{(r)}_{n-1})\, dx_n = 0,$$

wo $r$ jede Zahl von 1 bis $s$ sein kann; diese Gleichung nimmt eine eben solche Form als die Gleichung 5) des vorigen Abschnittes an, und diese wird erfüllt durch die den Gleichungen 6) analogen:

$$dz_r : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = B_r : A_1 : A_2 \ldots A_n,$$

oder, indem man für $r$ alle Werthe setzt:

2) $dz_1 : dz_2 \ldots : dz_s : dx_1 : dx_2 : \ldots : dx_n = B_1 : B_2 \ldots : B_s : A_1 : A_2 : \ldots : A_n.$

In diesen $n+s-1$ Differenzialgleichungen mit $n+s$ Variablen, kommen die Grössen $p_1^{(r)}, p_2^{(r)} \ldots p_n^{(r)}$ nicht vor.

Ganz durch dieselben Schlüsse wie im vorigen Abschnitte gelangt man zu $r$ Gleichungen von der Form:

3) $\partial z_r - p_1^{(r)}\partial x_1 - p_2^{(r)}\partial x_2 - \ldots p_n^{(r)}\partial x_n = h_1^{(r)}\partial f_1 + h_2^{(r)}\partial f_2 + \ldots$
$$h^{(r)}_{n+s-1}\partial f_{n+s-1},$$

wo $f_1, f_2 \ldots f_{n+s-1}$ die Integrale der Gleichungen 2) sind. — Die Gleichungen 1) erfordern, dass man $z_1, z_2 \ldots z_s$ als Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ ausdrückt. Dies geschieht, wenn man setzt:

4)
$$f_n = \varphi_1(f_1, f_2 \ldots f_{n-1}),$$
$$f_{n+1} = \varphi_2(f_1, f_2 \ldots f_{n-1})$$
$$\vdots$$
$$f_{n+s-1} = \varphi_s(f_1, f_2 \ldots f_{n-1}),$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_s$ willkürliche Functionen sind.

Diese Gleichungen gehen nämlich die $s$ Grössen $z$ als Functionen der $x$.
Es sind aber die $\varphi$ ganz beliebig, denn setzt man dieselben in die Gleichungen 3) ein, so erhält man rechts den Ausdruck:

$$\left(h_1^{(r)}+h_n^{(r)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial f_1}+h^{(r)}_{n+1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial f_1}+\;\ldots\;+h^{(r)}_{n+s-1}\frac{\partial\varphi_s}{\partial f_1}\right)\partial f_1,$$

$$+\left(h_2^{(r)}+h_n^{(r)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial f_2}+h^{(r)}_{n+1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial f_2}+\;\ldots\;+h^{(r)}_{n+s-1}\frac{\partial\varphi_s}{\partial f_2}\right)\partial f_2,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$+\left(h^{(r)}_{n-1}+h_n^{(r)}\frac{\partial\varphi_1}{\partial f_{n-1}}+h^{(r)}_{n+1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial f_{n-1}}+\ldots+h^{(r)}_{n+s-1}\frac{\partial\varphi_s}{\partial f_{n-1}}\right)\partial f_{n-1},$$

ein Ausdruck, der gleich Null wird, wenn man die Coefficienten von $\partial f_1, \partial f_2 \ldots \partial f_{n-1}$ gleich Null setzt. Es sind dies, wenn $r$ gegeben ist, $n-1$ Gleichungen und wenn man $r$ alle möglichen Werthe gibt, so entstehen $s(n-1)$ dergleichen. Diese können immer erfüllt werden, wenn man über die noch unbestimmten $s(n-1)$ Grössen:

$$p_1',\; p_2' \ldots p_{n-1}',$$
$$p_1'',\; p_2'' \ldots p_{n-1}'',$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$p_1^{(s)},\; p_2^{(s)} \ldots p^{(s)}_{n-1},$$

welche in den $h$ enthalten sind, angemessen verfügt, und es sind daher die Gleichungen 4) oder die mit ihnen identischen:

5)
$$\psi_1(f_1, f_2 \ldots f_{n+s-1})=0,$$
$$\psi_2(f_1, f_2 \ldots f_{n+s-1})=0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\psi_s(f_1, f_2 \ldots f_{n+s-1})=0,$$

die sich durch Integriren des Systems 2) ergeben, Integrale der Gleichungen 1) so dass die Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_s$ völlig willkürlich bleiben.

**Beispiele.** Sind in den Gleichungen 1) die Grössen $A$ und $B$ constant, so sind die Integrale von 2) von der Gestalt:

$$\frac{z_1}{B_1}+\alpha_1=\frac{z_2}{B_2}+\alpha_2\;\ldots\;=\frac{z_s}{B_s}+\alpha_s=\frac{x_1}{A_1}+\beta_1=\frac{x_2}{A_2}+\beta_2=\;\ldots\;=\frac{x_n}{A_n}+\beta_n,$$

und die Gleichungen 5) nehmen die Gestalt an:

$$\psi_r\left(\frac{z_2}{B_2}-\frac{z_1}{B_1},\frac{z_3}{B_3}-\frac{z_1}{B_1},\ldots\frac{z_s}{B_s}-\frac{z_1}{B_1},\frac{x_1}{A_1}-\frac{z_1}{B_1},\frac{x_2}{A_2}-\frac{z_1}{B_1},\ldots\frac{x_n}{A_n}-\frac{z_1}{B_1}\right)=0,$$

wo $\psi_{(r)}$ der allgemeine Ausdruck für die willkürlichen Functionen $\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_s$ sein soll.

7) **Allgemeine Auflösung der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung.**

Bei der allgemeinen Aufgabe ist ohne Weiteres die Anwendung von dem in

den letzten Abschnitten des vorigen Artikels gegebenen Gleichungen zu machen.

Sei die gegebene partielle Differenzialgleichung:

$$1)\qquad a = \varphi\left(z, x_1, x_2 \dots x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \dots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right),$$

wo $a$ eine Constante ist, die wir eben nur der Analogie mit dem im vorigen Artikel Gegebenen wegen hinzufügen, so zerlegen wir dieselbe wieder in das System von 2 Gleichungen:

$$2)\qquad dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \dots - p_n dx_n = 0,$$

$$3)\qquad \varphi(z, x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n) = a.$$

Die Gleichung 2) enthält $2n+1$ Variable, von denen, wie schon gesagt, eine mittels der Gleichung 3) sich wegschaffen lässt. Indessen führt eine andere Auffassung zu etwas eleganterer Darstellung. Nehmen wir nämlich an, Gleichung 2) hätte in der That $2n+1$ Variable, so muss dieselbe ein willkürliches Integral haben, und als solches betrachten wir eben die Gleichung 3), welche eine Relation zwischen $z$, den $x$ und den $p$ angibt. Vergleichen wir jetzt die Gleichung 2) mit der im vorigen Artikel betrachteten:

$$\sum_{s=1}^{s=2n+1} X_s dx_s = 0,$$

so ist zu setzen:

$$X_1 = -p_1,\ X_2 = -p_2 \dots X_n = -p_n,\ X_{n+1} = 0,\ X_{n+2} = 0 \dots X_{2n} = 0,\ X_{2n+1} = 1,$$

$$x_1 = x_1,\ x_2 = x_2 \dots x_n = x_n,$$

$$x_{n+1} = p_1,\ x_{n+2} = p_2 \dots x_{2n} = p_n,\ x_{2n+1} = z.$$

Die Gleichungen 19) des vorigen Artikels (Abschnitt 32), welche zur Auflösung dieser Differenzialgleichung dienten, waren:

$$X_1 \partial A = \partial\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + A \sum_{p=1}^{p=2n+1} \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_p}\right) \partial x_p,$$

$$X_2 \partial A = \partial\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + A \sum_{p=1}^{p=2n+1} \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_p}\right) \partial x_p$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$X_{2n+1} \partial A = \partial\mu \frac{\partial\varphi}{\partial x_{2n+1}} + A \sum_{p=1}^{p=2n+1} \left(\frac{\partial X_p}{\partial x_{2n+1}} - \frac{\partial x_{2n+1}}{\partial x_p}\right) \partial x_p,$$

in Verbindung mit:

$$\sum_{s=1}^{s=2n+1} \frac{\partial\varphi}{\partial x_s} \partial x_s = 0;$$

die Indices $\mu$ und $A$ müssen eliminirt werden.

In unserm Falle zerfallen diese Gleichungen in 3 Gruppen, welche von den $n$ ersten, den $n$ folgenden, und endlich von der letzten Gleichung ausgefüllt werden. Diese Gruppen sind:

4)
$$p_1\partial A+\partial\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+A\partial p_1=0,$$
$$p_2\partial A+\partial\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+A\partial p_2=0$$
$$\vdots$$
$$p_n\partial A+\partial\mu\frac{\partial\varphi}{nx_n}+A\partial p_n=0,$$

4a)
$$\partial\mu\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}-A\partial x_1=0,$$
$$\partial\mu\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}-A\partial x_2=0,$$
$$\vdots$$
$$\partial\mu\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}-A\,\partial x_n=0,$$

4b)
$$-\partial A+\partial\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0.$$

Die Gleichung 4b) kann zur Elimination von $\partial A$ dienen, und man hat:

5)
$$\partial\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_s}+p_s\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+A\,\partial p_s=0,$$
$$\partial\mu\,\frac{\partial\varphi}{\partial p_s}-A\,\partial x_s=0,$$

wo $s$ jeden ganzzahligen Werth von 1 bis $n$ annimmt. Da hierbei eine Gleichung verloren geht, verbinden wir mit dem System noch die Gleichung 2). Das System 5) ist nun zu integriren. Um die Integrale von 2) zu erhalten, bedarf es keiner weitern Integration, da $n-1$ der Functionen X hier gleich Null sind, was nach dem im vorigen Artikel, Abschnitt 36) Gesagten die Bedingung dafür war, dass die Hauptintegrale des ersten Systems zur Lösung der Aufgabe hinreichen. Setzt man also etwa $z=0$ oder gleich einer beliebigen andern Zahl (man könnte statt z auch eins der $x$, $x_1=0$ oder gleich einer andern Zahl setzen) und sind $x_1'$, $x_2'\ldots x_n'$, $p_1'$, $p_2'\ldots p_n'$ die Hauptintegrale der Gleichung 5), so hat man:

$$\partial z-p_1\partial x_1-p_2\partial x_2\ldots-p_n\partial x_n=-\frac{A'}{A}(p_1'\partial x_1'+p_2'\partial x_2'+\ldots+p_n'\partial x_n'),$$

und $x_1'$, $x_2'\ldots x_n'$ sind die Integrale der Gleichung 2), während, um sämmtliche Integrale von den Gleichungen 5) zu haben, man noch die Hauptintegrale $p_1'$, $p_2'\ldots p'_{n-1}$ hinzufügen muss.

Die Gleichungen:

$$x_1'=\alpha_1,\quad x_2'=\alpha_2\ \ldots\ x_n'=\alpha_n,$$

wo $\alpha_1$, $\alpha_2\ldots\alpha_n$ die willkürlichen Constanten sind, enthalten auf der linken Seite die Grössen: $x_1$, $x_2\ldots x_n$, $z$, $p_1$, $p_2\ldots p_n$. Mittels dieser $n$ Gleichungen und der Gleichungen 3) lassen sich also sämmtliche $p$ eliminiren, und man behält eine Gleichung mit $n$ willkürlichen Constanten übrig. Diese ist mithin das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung 1). Um hieraus das allgemeine Integral und das singuläre zu finden, bedient man sich der in Abschnitt 2) dieses Artikels gegebenen Methode, d. h. man verbindet zur Auffindung des allgemeinen Integrals die Gleichungen:

6) $$\psi(\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n)=0,$$

und:

7)
$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}+\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_1}=0.$$
$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_2}+\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_2}=0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_{n-1}}+\frac{\partial F}{\partial \alpha_n}\frac{\partial \alpha_n}{\partial \alpha_{n-1}}=0,$$

wo $F=0$ das vollständige Integral ist, und zu der des singulären hat man die Gleichungen:

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1}=0, \ \frac{\partial F}{\partial \alpha_2}=0 \ \ldots \ \frac{\partial F}{\partial \alpha_n}=0.$$

Wie leicht zu sehen, stimmt dies mit der im vorigen Artikel gegebenen Methode zur Einführung willkürlicher Functionen in die Integrale der totalen Differenzialgleichungen völlig überein.

Wir wollen zunächst das Gesagte auf ein Beispiel anwenden. Sei gegeben die Gleichung:

$$(1+p_1^2+p_2^2+ \ \ldots \ +p_n^2)f(z)=a,$$

wo $f(z)$ eine beliebige Function von $z$ ist. — Es nehmen dann die Gleichungen 5) die Gestalt an:

$$ap_s \partial\mu \frac{f(z)}{f'(z)}+A\partial p_s=0,$$
$$2p_s \partial\mu f(z)-A\,\partial x_s=0.$$

Indem man jede Gleichung des ersten Systems durch die erste desselben dividirt, erhält man:

$$\frac{p_s}{p_1}+\frac{dp_s}{dp_1},$$

woraus sich $n-1$ Integrale ergeben:

$$p_1=\frac{p_2}{c_1}=\frac{p_3}{c_2}= \ \ldots \ \frac{p_n}{c_{n-1}},$$

wo $c_1, c_2, c_3 \ldots c_{n-1}$ willkürliche Constanten sind.

Setzt man die Werthe von $p_2, p_3 \ldots p_n$ in das zweite System, welches dann die Gestalt annimmt:

$$2c_{s-1}\, p_1 \partial\mu f(z)=A\,\partial x_s,$$

und dividirt jede dieser Gleichungen durch die erste des Systems:

$$2p_1 \partial\mu f(z)=A\,\partial x_1,$$

so erhält man Gleichungen von der Gestalt:

$$\frac{dx_s}{dx_1}=c_{s-1},$$

woraus sich ebenfalls $n-1$ Integrale ergeben:

$$x_s=c_{s-1}\, x_1+e_{s-1},$$

wo die Grössen $c_{s-1}$ ebenfalls willkürliche Constanten sind. — Man hat also $2n-2$ Integrale, und es fehlen uns deren noch 2. Das eine wird erlangt, wenn man in die gegebene Gleichung die Werthe von $p_2, p_3 \ldots p_n$ einsetzt. Dieselbe nimmt die Gestalt an:

$$f(z)+p_1^2 f(z)(1+c_1^2+c_2^2+\ldots+c^2_{n-1})=a,$$

eine Gleichung, welche $p_1$ als Function von $z$ allein giebt. Es ist nämlich:

$$p_1=\sqrt{\frac{a-f(z)}{f(z)(1+c_1^2+c_2^2+\ldots+c^2_{n-1})}}.$$

Das letzte Integral endlich giebt die Gleichung:

$$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_ndx_n,$$

wenn man für $p_1, p_2 \ldots p_n$ ebenfalls substituirt. Man erhält:

$$\frac{dz}{p_1}=dx_1+c_1\,dx_2+c_2\,dx_3+\ldots+c_{n-1}\,dx_n,$$

ein Ausdruck, der integrirt werden kann, da $p_1$ eine Function von $z$ allein ist. Man hat:

$$\int\frac{dz}{p_1}=x_1+c_1x_2+c_2x_3+\ldots+c_{n-1}x_n+g,$$

wo $g$ eine neue Constante ist. — Ist z. B.:

$$f(z)=z^2,$$

so ist:

$$\frac{1}{p_1}=\frac{z\sqrt{(1+c_1^2+c_2^2+\ldots+c^2_{n-1})}}{\sqrt{(a-z^2)}},$$

also:

$$\int\frac{dz}{p_1}=-\sqrt{(a-z^2)}\sqrt{1+c_1^2+c_2^2+\ldots+c^2_{n-1}},$$

also:

$$\sqrt{(a-z^2)}\sqrt{1+c_1^2+c_2^2+\ldots+c^2_{n-1}}+x_1+c_1x_2+c_2x_3+\ldots$$
$$+c_{n-1}x_n+g=0.$$

Zur Auffindung der Hauptintegrale ist es hier bequemer, nicht $z$, sondern $x_1=0$ zu setzen, wie es doch geschehen kann. Es ist dann gemäss der Gleichung:

$$x_s=c_{s-1}x_1+e_{s-1},$$

$$x_s'=e_{s-1}, \text{ also: } x_s-c_{s-1}x_1=x_s',$$

oder da:

$$c_{s-1}=\frac{p_s}{p_1}$$

war:

$$\frac{p_1x_s-p_sx_1}{p_1}=x_s'.$$

Diese Gleichungen sind zu verbinden mit:

$$p_1=\frac{p_2}{c_1}=\frac{p_3}{c_2}=\ldots=\frac{p_n}{c_{n-1}},$$

welche durch Einführung der Hauptintegrale:

$$p_1' = \frac{p_2'}{c_1} = \frac{p_3'}{c_2} = \; , \; . \; . = \frac{p_n'}{c_{n-1}}$$

sich verwandeln in:

$$\frac{p_2}{p_1'} = \frac{p_3}{p_3'} = \; . \; . \; . = \frac{p^n}{p_n'}.$$

Die Gleichung:

$$\frac{1}{p_1} = \frac{z\sqrt{(1+c_1^2+c_2^2+ \; . \; . \; . \; + c^2_{n-1})}}{\sqrt{(a-z^2)}}$$

aber wird durch Eliminiren der Grössen $c_1, c_2 \; . \; . \; . \; c_{n-1}$:

$$1 = \frac{\sqrt{(a-z^2)}}{z\sqrt{(p_1^2+p_2^2+ \; . \; . \; . \; +p_n^2)}},$$

d. h.:

1) $$a-z^2 = z^2(p_1^2+p_2^2+ \; . \; . \; . \; +p_n^2).$$

oder:

2) $$z^2(1+p_1^2+p_2^2+ \; . \; . \; . \; +p_n^2) = a,$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich durch Einführung der Hauptintegrale:

$$z'^2(1+p_1'^2+p_2'^2+ \; . \; . \; . \; +p_n'^2) = a,$$

oder wenn man für $p_2' \; . \; . \; . \; p_n'$ die Werthe setzt:

3) $$z'^2[p_1^2+p_1'^2(p_2^2+p_3^2+ \; . \; . \; . \; +p_n^2)] = a\,p_1^2.$$

Auch die Gleichung:

$$\sqrt{(a-z^2)}\sqrt{(1+c_1^2+c_2^2+ \; . \; . \; . \; +c^2_{n-1})}+x_1+c_1x_2+c_2x_3+ \; . \; . \; .$$
$$+c_{n-1}x_n+g=0$$

nimmt durch Elimination der $c$ die Gestalt an:

$$\sqrt{(a-z^2)}\sqrt{(p_1^2+p_2^2+ \; . \; . \; . \; +p_n^2)}+p_1x_1+p_2x_2+ \; . \; . \; . \; +p_nx_n+g\,p_1=0,$$

d. h.:

4) $$(a-z^2)(p_1^2+p_2^2+ \; . \; . \; . \; p_n^2) = (p_1x_1+p_2x_2+ \; . \; . \; . \; p_nx_n+g\,p_1)^2.$$

Durch Einführung der Hauptintegrale ergibt sich hieraus:

$$(a-z'^2)(p_1'^2+p_2'^2+ \; . \; . \; . \; +p_n'^2) = (p_2'x_2'+ \; . \; . \; . \; +p_n'x_n'+gp_1')^2,$$

und durch Einsetzen der Werthe von $p_2', p_3' \; . \; . \; . \; p_n', x_2' \; . \; . \; . \; x_n'$:

5) $$(a-z'^2)(p_1^2+p_2^2+ \; . \; . \; . \; +p_n^2) = [p_2x_2+p_3x_3+ \; . \; . \; . \; +p_nx_n$$
$$-\frac{x_1}{p_1}(p_2^2+p_3^2+ \; . \; . \; . \; +p_n^2)+g\,p_1]^2.$$

Aus den Gleichungen 3), 4), 5) können nun $g$ und $p_1'$ eliminirt werden; es bleibt noch eine Gleichung, welche $z'$ bestimmt. Aus dieser, den $n-1$ Gleichungen 1) und der Gleichung 2) sind dann $p_1, p_2 \; . \; . \; . \; p_n$ zu eliminiren, und man behält eine Gleichung mit $n$ willkürlichen Constanten $x_2', x_3' \; . \; . \; . \; x_n', z'$ übrig, welche das vollständige Integral der vorgelegten Gleichung ist.

8) Anwendung der allgemeinen Aufgaben auf den Fall, wo nur 2 unabhängige Variablen vorhanden sind.

Sind nur 2 unabhängige Variablen gegeben, so besteht das System 5) des vorigen Abschnittes aus folgenden 5 Gleichungen:

I) $$d\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+p_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+A\,dp_1=0,$$

II) $$d\mu\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+p_2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)+A\,dp_2=0,$$

III) $$d\mu\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}-A\,dx_1=0,$$

$$d\mu\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}-A\,dx_2=0,$$

IV) $$dz=p_1\,dx_1+p_2\,dx_2.$$

Beispiele.

I) Die im vorigen Abschnitte behandelte allgemeine Aufgabe gibt für $n=2$ die Gleichungen:

1) $$p_1x_2-p_2x_1=p_1x_2',$$

2) $$ap_1^2=z'^2(p_1^2+p_1'^2)(p_1^2+p_2^2),$$

3) $$(a-z'^2)(p_1^2+p_2^2)=(p_2x_2'+gp_1)^2,$$

4) $$(a-z^2)(p_1^2+p_2^2)=(p_1x_1+p_2x_2+gp_1)^2,$$

5) $$z^2(1+p_1^2+p_2^2)=a.$$

Aus diesen 5 Gleichungen ist zu eliminiren $p_1$, $p_2$, $p_1'$, $g$. Man behält eine Gleichung übrig, welche die beiden willkürlichen Constanten $z'$, $x_2'$ hat, und das vollständige Integral bildet.

Die dritte und vierte Gleichung geben:

6) $$\sqrt{(p_1^2+p_2^2)(z^2-z'^2)}=p_2(x_2'-x_2)-p_1x_1.$$

Aus dieser in Gemeinschaft mit der ersten und fünften ist $p_1$ und $p_2$ zu eliminiren. Die erste aber gibt:

$$p_2=\frac{p_1}{x_1}(x_2-x_2');$$

dies in die sechste eingesetzt, gibt:

7) $$\sqrt{[x_1^2+(x_2-x_2')^2](z^2-z'^2)}+(x_2-x_2')^2+x_1^2=0.$$

Diese Gleichung ist von $p_1$, $p_2$, $p_1'$, $p_2'$ frei, sie ist also das vollständige Integral. Sie nimmt auch die Form an:

$$\sqrt{z^2-z'^2}=i\sqrt{(x_2-x_2')^2+x_1^2},$$

also:

8) $$z^2-z'^2+(x_2-x_2')^2+x_1^2=0.$$

II) Es sei ferner gegeben die Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=ax_1+bz+f\left(x_1,\frac{\partial z}{\partial x_2}\right)=0.$$

Es ist hier zu setzen:

$$\varphi=ax_1+bz-p_1+f(x_1,p_2),$$

und die Integration wird auf folgendes System zurückgeführt:

$$d\mu\left(a+bp_1+\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)+A\,dp_1=0,$$

$$p_2b\,d\mu+A\,dp_2=0,$$

$$d\mu+A\,dx_1=0,$$

$$d\mu\frac{\partial f}{\partial p_2}-A\,dx_2=0.$$

$a$ und $b$ sind Constante, $f$ eine beliebige Function von 2 Variablen.

Eliminirt man $d\mu$, so hat man folgende 3 Gleichungen:

1) $$p_2b\,dx_1=dp_2,$$

2) $$\frac{\partial f}{\partial p_2} dx_1 + dx_2 = 0,$$

3) $$dx_1 \left(a + b p_1 + \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = dp_1.$$

Die Gleichung 1) hat zum Integrale:

4) $$p_2 = a e^{b x_1}.$$

Setzt man diesen Werth in $f$ ein, so ist diese Function nur noch von $x_1$ abhängig, ebenso wie seine Differenzialquotienten. Sei sonach:

$$\frac{\partial f}{\partial p_2} = F'(x_1, a),$$

so wird das Integral der Gleichung 2) sein:

5) $$x_2 + F(x_1, a) = \beta,$$

und wenn man in 3) setzt:

$$p_1 = u e^{b x_1},$$

so wird diese Gleichung die Gestalt annehmen:

$$\left(a + \frac{\partial f}{\partial x_1}\right) dx_1 = e^{b x_1} du,$$

also:

$$u = -\frac{1}{b} e^{-b x_1} + [\psi(x_1, a) + \gamma] e^{-b x_1},$$

wo:

$$\psi(x_1, a) = e^{b x_1} \int \frac{\partial f}{\partial x_1} e^{-b x_1} dx_1$$

ist, also:

6) $$p_1 = -\frac{1}{b} + \psi(x_1, a) + \gamma.$$

Setzt man $x_1 = 0$, so geben die Gleichungen 4), 5) und 6):

$$p_1' = a, \quad x_2' + \varphi(0, a) = \beta,$$

$$p_1' = -\frac{1}{b} + \psi(0, a) + \gamma,$$

und indem man $a$, $\beta$ und $\gamma$ aus 4), 5) und 6) eliminirt:

7) $$p_2 = p_2' e^{b x_1},$$

8) $$x_2 + F(x_1, p_2') = x_2' + F(0, p_2'),$$

9) $$p_1 - p_1' = \psi(x, p_2') - \psi(0, p_2').$$

Diese Gleichungen sind zu verbinden mit $\varphi = 0$, oder:

10) $$a x_1 + bz - p_1 + f(x_1, p_2) = 0,$$

und:

11) $$bz' - p_1' + f(0, p_2') = 0;$$

aus den Gleichungen 9) und 11) wird $p_1'$ eliminirt. Es kommt:

$$bz' - p_1 + \psi(x_1, p_2') - \psi(0, p_2') + f(0, p_2') = 0.$$

Mittels der Gleichung 10) kann hieraus aber auch $p_1$ weggeschafft werden:

12) $$bz' + \psi(x, p_2') - \psi(0, p_2') + f(0, p_2') = a x_1 + bz + f(x_1, p_2).$$

Um $p_2'$ wegzuschaffen, hat man die Gleichung:

$$p_2' = p_1 e^{-b x_1},$$

und nachdem dies eingesetzt worden, ergibt sich aus 12) und 8) das allgemeine Integral, wenn man noch $p_2$ eliminirt.

Es gibt aber auch eine oft bequemere Methode zur Erlangung des allgemeinen Integrals, bei welcher die Eliminationen vermieden werden, und welche für den Fall von 3 Variablen bereits Lagrange, der sich zuerst mit diesem speciellen Falle beschäftigte, angegeben hat. Es ist beiläufig gesagt nichts weiter, als die im vorigen Artikel für totale Differenzialgleichungen angegebene Methode, dieselben durch successive Integration und Benutzung der nach und nach gewonnenen Integrale aufzulösen.

Lagrange benutzt nämlich von den Integralen der Differenzialgleichungen I), II) und III) nur eins. Sei dasselbe:

$$f(x,\ y,\ z,\ p_1,\ p_2)=\alpha.$$

Verbindet man dies mit der gegebenen Differenzialgleichung:

$$\varphi\,(x,\ y,\ z,\ p_1,\ p_2)=0,$$

so kann man, wenn:

$$p_1=\frac{\partial z}{\partial x_1},\quad p_2=\frac{\partial z}{\partial x_2}$$

geschrieben wird, daraus 2 Gleichungen von der Gestalt:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=u,\quad \frac{\partial z}{\partial x_2}=v,$$

oder:

$$dz=u\,dx_1+v\,dx_2$$

gewinnen, wo $u$ und $v$ Functionen von $x, y, z$ sind, welche die willkürliche Constante $\alpha$ enthalten. Selbstverständlich werden sie der Bedingung der Integrabilität genügen. Integrirt man diese Gleichung, so erhält man eine Function von $x, y, z, \alpha$ mit einer zweiten Constante $\beta$, also ein vollständiges Integral.

Wenden wir dies auf das letzte Beispiel an, indem wir von dem Integral:

$$p_2=\alpha e^{bx_1}$$

ausgehen und dies mit der Gleichung:

$$ax_1+bz-p_1+f(x_1,\ p_2)$$

verbinden, so erhalten wir:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1}=ax_1+bz+F(x_1,\ \alpha),$$
$$\frac{\partial z}{\partial x_2}=\alpha e^{bx_1},$$

wo $F(x_1,\alpha)=f(x_1,\ \alpha e^{bx_1})$ gesetzt ist, also:

$$dz=[ax_1+bz+F(x_1,\ \alpha)]\,dx_1+\alpha e^{bx_1}dx_2.$$

Setzen wir zuerst $x_1$ constant, so kommt:

$$z=\alpha x_2 e^{bx_1}+U,$$

oder wenn man:

$$x_2=0$$

setzt:

$$U=z'.$$

Es ist also:

$$z'=z-\alpha x_2\,e^{bx_1}$$

das Hauptintegral, und indem man $z=z'$, $x_2=0$ in die Differenzialgleichung einsetzt:

$$dz'=[a\,x_1+bz'+F(x_1,\ \alpha)]\,dx_1,$$

eine Gleichung, die sich integriren lässt, wenn man setzt:

$$z'=u\,e^{bx_1};$$

Es kommt:

$$e^{bx_1}du = [a x_1 + F(x_1, a)]\, dx_1,$$
$$u = \psi(x_1, a) + \beta,$$

wenn man setzt:

$$\psi(x_1, a) = \int \frac{a x_1 + F(x_1, a)}{e^{bx_1}}\, dx_1,$$

$$z' = e^{bx_1}[\psi(x_1, a) + \beta].$$

Das vollständige Integral ist somit:

$$e^{bx_1}[\psi(x_1, a) + \beta] = z - a x_2 e^{bx_1}.$$

Es wird bei dieser Methode nicht allein die Elimination erleichtert, sondern auch die Integration vereinfacht.

Die Anwendung des vorigen Artikels wird unmittelbar den Gebrauch dieser Methode für beliebig viel unabhängige Variablen ergeben.

9) **Vortheile beim Integriren der allgemeinen partiellen Differenzialgleichung erster Ordnung, wenn man die Integrale nach und nach bestimmt.**

Die im vorigen Abschnitt gemachte Bemerkung findet ihren allgemeinen Ausdruck in dem im vorigen Artikel für die totalen Differenzialgleichungen bewiesenen Satze, dass man, wenn ein Integral bekannt ist, statt $2n-1$ Gleichungen mit $2n$ Variablen, zwei Systeme von $2n-3$ Gleichungen mit $2n-2$ Variablen zu integriren hat, dass, wenn ferner ein Integral der so gebildeten Gleichungen bekannt ist, 3 Systeme von $2n-5$ Gleichungen mit $2n-4$ Variablen der Integration unterliegen u. s. f., dass also jedes Integral in Bezug auf die Reduction der allgemeinen Aufgabe die Stelle von 2 Integrationen vertritt.

Was die Gestalt der Systeme anbetrifft, welche nach Kenntniss bezüglich eines, zweier u. s. w. Integrale entstehn, so sind dieselben in den Gleichungen 24), 25), 26), 27), Abschnitt 38) des vorigen Artikels enthalten.

Bemerken wir, dass diese Gleichungen von den Gleichungen 11) besagten Artikels, aus denen sie abgeleitet sind, sich nur dadurch unterscheiden, dass rechts ein Ausdruck: $\sum_{q=1}^{q=r} \partial a_q \frac{\partial u_q}{\partial x_s}$ hinzukommt, wo $u_1, u_2 \ldots$ die bereits bekannten Integrale sind, und wenden wir dies auf die Gleichungen 4), 4a) und 4b) des Abschnitt 7) an, so erhalten wir folgendes Resultat.

Wenn ein Integral $u_1$ der partiellen Differenzialgleichung bekannt ist, so sind folgende Gleichungen noch zu integriren:

1) $$p_s dA + d\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + \partial a_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_s} + A\, dp_s = 0,$$

1a) $$d\mu \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} + da_1 \frac{\partial u_1}{\partial p_s} - A\, dx_s = 0,$$

1b) $$-dA + d\mu \frac{\partial \varphi}{\partial z} + da_1 \frac{\partial u_1}{\partial z} = 0,$$

wo $s$ in 1) und 1a) alle Werthe von 1 bis $n$ annimmt. Eine Gleichung dieses Systems dient, um $dA$ zu eliminiren. $a_1$ und $\mu$ sind unabhängige Variablen. Schafft man wirklich $dA$ weg, so wird das System:

2) $$d\mu \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + da_1 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_s} + p_s \frac{\partial u_1}{\partial z}\right) + A\, dp_s = 0,$$

2a) $$d\mu \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} + da_1 \frac{\partial u_1}{\partial p_s} - A\, dx_s = 0.$$

Dieses System kann man in 2 andere zerfällen, wenn man je eine der unabhängigen Variablen constant nimmt. Man erhält:

3)
$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}+p_s\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\frac{\partial p_s}{\partial \mu}=0.$$

3a)
$$\frac{\partial \varphi}{\partial p_s}-A\frac{\partial x_s}{\partial \mu}=0,$$

und:

4)
$$\frac{\partial u_1}{\partial x_s}+p_s\frac{\partial u_1}{\partial z}+A\frac{\partial p_s}{\partial \alpha_1}=0,$$

4a)
$$\frac{\partial u_1}{\partial p_s}-A\frac{\partial x_s}{\partial \alpha_1}=0.$$

Mit diesen Systemen ist zu verbinden:

$$dz=p_1dx_1+p_2dx_2+\ldots+p_ndx_n,$$

d. h.:

$$\frac{\partial z}{\partial \mu}=p_1\frac{\partial x_1}{\partial \mu}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial \mu}+\ldots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial \mu},$$

und:

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha_1}=p_1\frac{\partial x_1}{\partial \alpha_1}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial \alpha_1}+\ldots+p_n\frac{\partial x_n}{\partial \alpha_1}.$$

Ist von diesem Systeme 2) und 2a) ein Integral $u_2$ bekannt, so vermehren sich die Formeln 1), 1a), 1b) nur um ein entsprechendes Glied.

Ist von dem neu gebildeten Systeme wieder ein Integral $u_3$ ... und so fort bis zum $r$ten System bekannt, so hat man noch zu integriren die folgenden, ganz wie 1), 1a), 1b) gebildeten Gleichungen:

5)
$$p_s\,dA+d\mu\frac{\partial \varphi}{\partial x_s}+\sum_{q=1}^{q=r}\partial\alpha_q\frac{\partial u_q}{\partial x_s}+A\,dp_s=0,$$

5a)
$$d\mu\frac{\partial \varphi}{\partial p_s}+\sum_{q=1}^{q=r}\partial\alpha_q\frac{\partial u_q}{\partial p_s}-A\,dx_s=0,$$

5b)
$$-dA+d\mu\frac{\partial \varphi}{\partial z}+\sum_{q=1}^{q=r}d\alpha_q\frac{\partial u_q}{\partial z}=0,$$

wo $dA$ eliminirt wird, $d\mu$, $d\alpha_1$, $d\alpha_2$ ... $d\alpha_r$ unabhängige Variablen sind, also das System in $r+1$ andere zerfällt, wenn man immer $r$ dieser Variablen constant denkt.

Wenn von Anfang an 2 Integrale $u_1$ und $u_2$ bekannt sind, so vertreten diese nach dem vorigen Artikel die Stelle von 4 Integrationen, wenn:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)=0$$

ist, wo $u_2$ als Function von $u_1$, $\alpha_1$ und einem beliebigen System von Integralen der Gleichungen 2) und 2a) gedacht, und demgemäss differenziirt ist. In jedem andern Falle gibt der Ausdruck $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ zu andern im vorigen Artikel erörterten Reductionen Gelegenheit; in gewissen Fällen lassen sich aus $u_1$ und $u_2$ alle übrigen Integrale finden. Dieser Ausdruck $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ hat aber in unserm Falle der partiellen Differenzialgleichung eine besonders einfache Form. Es ist nämlich:

$$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{\partial u_2}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha_1}\right) + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\partial u_2}{\partial x_s}\left(\frac{\partial x_s}{\partial \alpha_1}\right) + \sum_{s=1}^{s=n} \frac{\partial u_2}{\partial p_s}\left(\frac{\partial p_s}{\partial \alpha_1}\right).$$

Vermöge der Gleichungen 4) und 4a) aber hat man:

$$\left(\frac{\partial x_s}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{1}{A}\frac{\partial u_1}{\partial p_s},$$

$$\left(\frac{\partial p_s}{\partial \alpha_1}\right) = -\frac{1}{A}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_s} + p_s\frac{\partial u_1}{\partial z}\right),$$

also:

6) $$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = \frac{1}{A}\sum_{s=1}^{s=n}\left[\frac{\partial u_1}{\partial p_s}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_s} + p_s\frac{\partial u_2}{\partial z}\right) - \frac{\partial u_2}{\partial p_s}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_s} + p_s\frac{\partial u_1}{\partial z}\right)\right].$$

Mit diesem Ausdrucke sind dieselben Betrachtungen zu machen, wie im Falle der totalen Differenzialgleichungen.

10) **Betrachtung des Falles, wo die unabhängige Variable nicht selbst, sondern nur ihre Differenzialquotienten vorkommen.**

Der Fall, wo die Grösse $z$ nicht selbst in der gegebenen Differenzialgleichung enthalten ist, verdient besondere Berücksichtigung. Er spielt in den Problemen der Mechanik und in denjenigen Differenzialgleichungen, welche den Aufgaben der Variationsrechnung entspringen, eine wichtige Rolle. Ausserdem aber lässt sich jeder andere Fall auf diesen zurückführen, wenn man die Anzahl der unabhängigen Variablen um eine vermehrt. — Sei nämlich wieder gegeben die Gleichung:

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, z, p_1, p_2 \ldots p_n) = 0,$$

wo:

$$p_s = \frac{\partial z}{\partial x_s}$$

zu setzen ist.

Führen wir ein die neue Variable:

$$z_1 = x_{n+1} z,$$

so ist:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_{n+1}} = z,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x_s} = x_{n+1}\frac{\partial z}{\partial x_s} = p_s x_{n+1},$$

wo $s$ eine der Zahlen 1 bis $n$ ist. Die gegebene Gleichung nimmt also auch die Gestalt an:

$$\varphi\left(x_1, x_2 \ldots x_n\right), \frac{\partial z_1}{\partial x_{n+1}}, \frac{1}{x_{n+1}}\frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \frac{1}{x_{n+1}}\frac{\partial z_1}{\partial x_2} \ldots \frac{1}{x_{n+1}}\frac{\partial z_1}{\partial x_n}) = 0,$$

eine Gleichung, die also nur die Differenzialquotienten der unabhängigen Variablen $z_1$ enthält.

Zur Untersuchung dieser Gleichung gehen wir wieder von der Form:

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = a$$

aus. Die Gleichung 4b) des Abschnittes 7) lehrt dann, dass $A$ constant sein muss, da $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$ ist. — Setzt man nun in 4) und 4a):

$$\lambda = \frac{\mu}{A},$$

so ergibt sich:

2) $$dp_s = -d\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_s},$$

2a) $$dx_s = d\lambda \frac{\partial \varphi}{\partial p_s}.$$

Da in diesen Gleichungen $z$ nicht vorhanden ist, so reducirt sich das System gegen den allgemeinern Fall um eine Ordnung, da die $z$ entsprechende Gleichung zunächst nicht zu berücksichtigen ist. Nach Vollendung der Integration ergibt sich dann $z$ durch Quadratur vermöge der Gleichung:

$$dz = \sum_{s=1}^{s=n} p_s\, dx_s = \sum_{s=1}^{s=n} p_s \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} d\lambda,$$

also:

$$z = \int \sum_{s=1}^{s=n} p_s \frac{\partial \varphi}{\partial p_s} d\lambda;$$

es kommt $z$ also nur als Index vor. Die Formel 6) des vorigen Abschnittes nimmt die Gestalt an:

3) $$\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right) = \sum_{s=1}^{s=n} \left(\frac{\partial u_1}{\partial p_s}\frac{\partial u_2}{\partial x_s} - \frac{\partial u_2}{\partial p_s}\frac{\partial u_1}{\partial x_s}\right)$$

(die Constante $A$ ist nämlich immer gleich 1, wenn man statt $\mu$ den Ausdruck $\lambda = \frac{\mu}{A}$ einführt). In diesem Falle, auf den sich, wie wir sahen, jede partielle Differenzialgleichung zurückführen lässt, kommt also der Index $A$ nicht vor. — Ist also $\left(\frac{\partial u_2}{\partial \alpha_1}\right)$ weder einer Zahl gleich, noch auch eine Folge der Gleichungen:

$$u_1 = c_1, \quad u_2 = c_2,$$

so ist dieser Ausdruck ein drittes Integral der partiellen Differenzialgleichung, und man hat weder die Kenntniss des Index $A$ nöthig, noch braucht man denselben nach Klebsch's Methode zu eliminiren.

11) Behandlung der mechanischen Gleichungen. — Anwendung der Variation der Constanten auf dieselben.

Wir wollen noch den bereits erwähnten Zusammenhang der im letzten Abschnitte behandelten Gleichung:

1) $$\varphi\left(x_1, x_2 \ldots x_n, \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \ldots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

mit den mechanischen und den in der Variationsrechnung vorkommenden berühren. Dieser Zusammenhang besteht darin, dass die letzterwähnten Gleichungen sich immer auf das System 2) und 2a) des vorigen Abschnittes bringen lassen. Ihre Integrale, an Anzahl $2n-1$, sind also auch Integrale der Gleichung:

2) $$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 \ldots - p_n dx_n = 0,$$

wo $p_n$ durch Gleichung 1) gegeben ist.

Offenbar lassen sich, wenn man ein vollständiges Integral der Gleichung 1) hat, auch die letzteren $2n-1$ Integrale finden. Sei nämlich:

3) $$z = \alpha_n + f(x_1, x_2 \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}) = F$$

das vollständige Integral, $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Integrationsconstanten. Dass dasselbe die Form 3) haben muss, folgt daraus, dass, wenn man den Werth von $z$ um eine Constante vermehrt und diesen in 1 einsetzt, diese Gleichung unverändert bleibt, so dass nothwendig eine Constante $\alpha_n$ zu der Function addirt sein muss. Ferner ist offenbar:

3a) $$p_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1},\ p_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}\ \dots\ p_n = \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

da $p_1, p_2 \dots$ die Werthe von $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2} \dots$ sind. Die letzte Gleichung muss wegen 1) identisch erfüllt werden. Denkt man sich $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ aus 3) und den $n-1$ ersten Gleichungen 3a) bestimmt, so werden selbstverständlich diese Gleichungen identisch. Nun ist ebenfalls identisch:

$$\partial F = \frac{\partial f}{\partial x_1}\partial x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\partial x_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\partial x_n + \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\partial \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\partial \alpha_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{n-1}}\partial \alpha_{n-1} + \partial \alpha_n,$$

wo für die $\alpha$ die aus 3) und 3a) genommenen Functionen der $x$ und $p$ zu setzen sind. Also wegen der obigen Bemerkung:

4) $$\partial z - p_1 \partial x_1 - p_2 \partial x_2 - \dots - p_n \partial x_n = \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}\partial \alpha_1 + \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}\partial \alpha_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{n-1}}\partial \alpha_{n-1} + \partial \alpha_n,$$

Die Gleichung 2) wird, wie selbstverständlich, erfüllt, wenn man für die $\alpha$ Constante nimmt. Was nun die Integration unsers Systems 2) und 2a) des vorigen Abschnittes anbetrifft, so ist bei Behandlung der totalen Differenzialgleichung, von der die Gleichung 2) dieses Abschnittes ein besonderer Fall ist, gezeigt worden, dass die Coefficienten von $\partial \alpha_1, \partial \alpha_2 \dots$ die unabhängige Variable des Systems nur als gemeinschaftlichen Factor enthalten können. Da aber einer dieser Coefficienten gleich 1 ist, also einen solchen nicht haben kann, so sind die Coefficienten alle Constanten gleich und folglich Integrale des Systems.

Die mechanischen Gleichungen werden also gelöst durch das System von Integralen:

$$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n, \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \dots \frac{\partial f}{\partial \alpha_{n-1}},$$

wo die Gleichungen 3) und 3a) die $\alpha$ ergeben.

In der Theorie der totalen Differenzialgleichungen (vergleiche den vorigen Abschnitt) erwähnten wir, dass bei den mechanischen Gleichungen die Variation der Constanten einfachere Resultate als im allgemeinen Falle geben.

Auch dieses wollen wir hier ausführen. Die Gleichung 1) möge die Gestalt haben:

5) $$\varphi(x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n) + \varepsilon\psi(x_1, x_2 \dots x_n, p_1, p_2 \dots p_n) = 0$$

wo $\varepsilon$ eine sehr kleine Constante ist. Man kann dann in erster Näherung $\varepsilon = 0$ setzen, und unter dieser Voraussetzung ein vollständiges Integral der Gleichung $\varphi = 0$ finden. Sei:

6) $$z = f_0 + \alpha_n = F_0$$

solches, wo $f_0 = f(x_1, x_2 \dots x_n, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n)$ gesetzt ist, man also auch hat:

6a) $$p_1 = \frac{\partial f_0}{\partial x_1},\ p_2 = \frac{\partial f_0}{\partial x_2}\ \dots\ p_n = \frac{\partial f_0}{\partial x_n}.$$

Nehmen wir jetzt an, die vollständige Gleichung 5) würde integrirt durch Gleichung:

7) $$z = f(x_1, x_2 \dots x_n, \alpha_1 + \varepsilon\lambda_1, \alpha_2 + \varepsilon\lambda_2, \alpha_{n-1} + \varepsilon\lambda_{n-1}) + \alpha_n + \varepsilon\lambda_n = F,$$

wo $\lambda_1, \lambda_2 \dots \lambda_n$ zu bestimmende Functionen der $x$ sind; in Verbindung mit den Gleichungen:

7a) $$p_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1},\quad p_2 = \frac{\partial f}{\partial x_2}\ \ldots\ p_{n-1} = \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}},$$

wo $f$ die Function in 7), welche $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ enthält, bedeuten soll, während $f_0$ dieselbe Function in 6) anzeigt, wo $\lambda_1, \lambda_2 \ldots$ sämmtlich verschwinden. Die Zeichen $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2} \ldots$ drücken hier aus, dass nur nach dem entwickelten $x$ differenziirt ist. Soll auch nach dem in den $\lambda$ enthaltenen $x$ differenziirt werden, so schreiben wir: $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right), \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)$. Wir wollen ferner den aus der Gleichung 5) gezogenen Werth von $p_n$ mit $P_n$ bezeichnen, während für den aus der Gleichung $\varphi = 0$ genommenen die Bezeichnung $p_n$ bleiben soll.

Offenbar ist dann:

$$P_n = p_n + \epsilon q,$$

wo das zweite Glied mit $\epsilon$ verschwindet und $q$ eine aus 5) zu bestimmende Grösse ist.

Dass übrigens das System 7) und 7a) die Gleichung 5) integriren kann, ist leicht zu zeigen. Man kann nämlich die $\lambda$ ($n$ an Anzahl) so bestimmen, dass sie die $n$ Gleichungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1},\quad \frac{\partial z}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2}\ \ldots\ \frac{\partial z}{\partial x_{n-1}} = \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}},\quad \frac{\partial z}{\partial x_n} = P_n,$$

erfüllen, wo für $z$ der Ausdruck 7) zu setzen, also:

$$\frac{\partial z}{\partial x_s} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_s}\right) + \epsilon \frac{\partial \lambda_n}{\partial x_s}$$

ist, und diese $n$ Gleichungen sind mit 5) völlig identisch. Der Factor $\epsilon$ vor den $\lambda$ deutet nur an, dass, wie selbstverständlich ist, der Zuwachs der $\alpha$ mit $\epsilon$ von gleicher Ordnung ist. Nun ist:

$$8)\ dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \ldots - (p_n + \epsilon q) dx_n = dF - \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}\right) dx_1 - \left(\frac{\partial F}{\partial x_2}\right) dx_2 - \ldots$$
$$- \left(\frac{\partial F}{\partial x_n}\right) dx_n = dF - \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 - \ldots - \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n - \frac{\partial f}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 - \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 - \ldots$$
$$- \frac{\partial f}{\partial \lambda_{n-1}} d\lambda_{n-1} - \epsilon d\lambda_n.$$

Ausserdem war identisch:

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \ldots - p_n dx_n = dF_0 - \frac{\partial f_0}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial f_0}{\partial x_2} dx_2 - \ldots - \frac{\partial f_0}{\partial x_n} dx_n,$$

wenn man die in $F_0$ und $f_0$ enthaltenen Werthe von $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ aus den Gleichungen 6) und 6a) (mit Ausnahme der letzten, welche identisch ist) nimmt. Diese Gleichungen stimmen aber genau mit 7) und 7a) überein, wenn man die $\alpha$ mit $\alpha + \epsilon\lambda$ vertauscht; es sind also nach Elimination der $\alpha + \epsilon\lambda$ ebenfalls identisch:

$$dz - p_1 dx_1 - p_2 dx_2 - \ldots - p_n dx_n = dF - \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 - \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 - \ldots - \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Sonach nimmt die Gleichung 8) die Form an:

$$-\epsilon q\, dx_n = -\frac{\partial f}{\partial \lambda_1} d\lambda_1 - \frac{\partial f}{\partial \lambda_2} d\lambda_2 - \ldots - \frac{\partial f}{\partial \lambda_{n-1}} d\lambda_{n-1} - \epsilon\, d\lambda_n.$$

Man hat aber:

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda_s} = \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \alpha_s},$$

und ausserdem, wenn man die höhern Potenzen von $\varepsilon$ vernachlässigt:

$$\varepsilon \frac{\partial f}{\partial \alpha_s} = \varepsilon \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_s},$$

also wenn man diese hier jedenfalls gestattete Vernachlässigung anwendet:

9) $$q\, dx_n - \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_1} d\lambda_1 - \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_2} d\lambda_2 - \ldots - \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_{n-1}} d\lambda_{n-1} - d\lambda_n = 0.$$

Diese Gleichung ist zu integriren. Um $q$ zu bestimmen, hat man:

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_{n-1}, p_n + \varepsilon q) + \varepsilon \psi(x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = 0,$$

wo im letzten Gliede für $p_n + \varepsilon q$ geschrieben ist $p_n$, was bei Vernachlässigung der höhern Potenzen von $\varepsilon$ offenbar gestattet ist. Hieraus ergibt sich, wenn man die Gleichung:

$$\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n, p_1, p_2 \ldots p_n) = 0$$

berücksichtigt:

10) $$q \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} + \psi = 0.$$

Die Grössen $p_1, p_2 \ldots p_n$, die in 9) und 10) involute enthalten sind, werden mittels der Gleichungen 6a) und $\varphi = 0$ eliminirt. Ebenso wird $q$ aus 10) in 9) eingesetzt, und letztere Gleichung hat dann die Gestalt:

11) $$dx_n + u_1 d\lambda_1 + u_2 d\lambda_2 + \ldots + u_n d\lambda_n = 0,$$

wo:

$$u_s = \frac{1}{u_n} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_s}, \quad u_n = \frac{\partial \varphi}{\partial p_n} \frac{1}{\psi}$$

zu setzen ist.

Die Gleichung 11) enthält nun die Variablen $x_1, x_2 \ldots x_n, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n$, von welchen letztern aber nur Differenziale vorkommen.

Wenden wir die Gleichungen 11) (Abschnitt 33) des vorigen Artikels) an, also:

$$X_s dA = A \sum_{p=1}^{p=2n} \left( \frac{\partial X_p}{\partial x_s} - \frac{\partial X_s}{\partial x_p} \right) dx_p,$$

so zerfallen diese wieder in 3 Gruppen, wo die $x$ ersetzt sind bezüglich durch:

$$x_n, x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, \lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_n,$$

die zugehörigen $X$ sind dann:

$$1, 0, 0 \ldots 0, u_1, u_2 \ldots u_n.$$

Das System ist also:

12) $$dA = A \sum_{p=1}^{p=n} \left( d\lambda_p \frac{\partial u_p}{\partial x_n} \right), \quad 0 = \sum_{p=1}^{p=n} \left( d\lambda_p \frac{\partial u_p}{\partial x_s} \right),$$

$$u_s dA = -A \sum_{p=1}^{p=n} \left( dx_p \frac{\partial u_s}{\partial x_p} \right).$$

In der zweiten Gruppe hat $s$ alle Werthe von 1 bis $n-1$, in der dritten von 1 bis $n$. Die erste Gruppe enthält nur eine Gleichung. Offenbar aber nehmen die Gleichungen der dritten Gruppe die Gestalt an:

 Quadraturen — Zurückf. auf.

$$u_s\,dA + A\,du_s = 0,$$

und gehen $n$ Integrale:

$$Au_s = c_s.$$

Diese Gleichnngen reichen hin, um $A$ und alle $u$ als Functionen einer dieser Grössen $u_n$ auszudrücken, und zwar in der Form:

13) $$u_s = \beta_s u_n = A = \frac{c}{u_n}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichnngen lässen sich alle $x$ nnd $A$ als Fnnctionen von $x_n$ ausdrücken. Setzt man diese Werthe in die heiden ersten Gruppen, so kommt nnr in der ersten $A$, nnd zwar nur der Ansdruck $\frac{dA}{A} = -d\lg u_n$ vor. Diese Gleichnngen sind also von der Constante $c$ frei nnd enthalten ausser den $d\lambda$ nur die Variable $x$ nnd die Constanten $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_{n-1}$. Dnrch Anflösnng nach den $d\lambda$ erhält man Gleichungen von der Form:

$$d\lambda_s = v_s\,dx_n,$$

wo die $v_s$ nnr $x_n$ enthalten. Durch blosse Qnadratur erhält man also die übrigen Integrale nnter der Form: .

$$\lambda_s - \vartheta_s(x_n) = \gamma_s.$$

Die Fnnctionen $\vartheta_s$ enthalten die Constanten $\beta_1 \dots \beta_{n-1}$, die man mittels der Gleichungen 13) eliminirt, so dass man hat:

14) $$\lambda_s = \chi_s(x_1, x_2 \dots x_n) + \gamma_s.$$

Diese Werthe sind nnn in das vollständige Integral 7) einznsetzen. Die $\gamma$ können weggelassen werden, da sie sich mit den Constanten $\alpha$ vereinigen, so dass diese auch hier als Integrationsconstanten zu betrachten sind. Die Integrale des mechanischen Systems sind also die Ausdrücke:

$$\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n, \frac{\partial f}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial f}{\partial \alpha_2} \dots \frac{\partial f}{\partial \alpha_{n-1}},$$

d. h. es sind die nämlichen wie die des Näherungssystems, wo $\varepsilon = 0$ gesetzt wurde, wenn man darin die $\alpha$ um die aus 14) genommenen Ansdrücke $\varepsilon\chi_s(x_1, x_2 \dots x_n)$ vermehrt. Dies geschicht, wenn man aus den Gleichnngen 6) nnd 6a) die Werthe $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n, \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_1}, \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_2} \dots \frac{\partial f_0}{\partial \alpha_{n-1}}$ herechnet nnd dann die eben hezeichnete Suhstitntion vornimmt. Die Variation der Constanten macht hier also nnr $n$ Qnadraturen nöthig.

Uehrigens kann man den Gleichnngen 12) noch eine einfachere Form gehen.

Zn dem Ende hemerke man, dass $q = -\frac{1}{u_n}$ ist, also die Gleichnng 10) die Form annimmt:

15) $$\chi = 0, \quad \text{wo} \quad \chi = \psi \cdot u_n - \frac{\partial \varphi}{\partial p_n}$$

gesetzt ist. Denkt man nun $u_1, u_2 \dots u_{n-1}$ als nnabhängige Variahlen, so lassen sich die $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ durch diese und $x_n$ ansdrücken, und Gleichung 15) enthält nnr die $u$ und $x_n$. Gleichnng 11) ist dann durch ein System 2) nnd 2a) des vorigen Abschnittes zu integriren, welches die Gestalt annimmt:

16) $$du_s = 0, \quad d\lambda_s = -d\nu \frac{\partial \chi}{\partial u_s},$$

womit zu verbinden ist:

17) $$dx_n = -\Sigma u_s d\lambda_s = \sum_{p=1}^{p=n} u_p \frac{\partial \chi}{\partial u_p} d\nu.$$

Die ersten Gleichungen 16) zeigen, dass sämmtliche $u$ constant zu setzen sind, die letzten in Verbindung mit 17) geben:

$$\lambda_s = -\int \frac{\partial \chi}{\partial u_s} \frac{dx_n}{\Sigma \left(u_p \frac{\partial \chi}{\partial u_p}\right)},$$

wo die rechte Seite nur die Variable $x_n$ enthält. Nach der Integration kann man statt der $u$ wieder ihre in $x_1, x_2 \ldots x_n$ ausgedrückten Werthe nehmen.

12) Historisches über die partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung.

Lagrange hat zuerst den Zusammenhang zwischen partiellen Differenzialgleichungen und Systemen gleichzeitiger Differenzialgleichungen gezeigt, zunächst für die linearen durch ein Verfahren, welches ihm aber später die nöthigen Hülfsmittel gab, das allgemeine Integral einer partiellen Differenzialgleichung mit 2 unabhängigen Variablen zu ermitteln. Auch fand Lagrange den Zusammenhang zwischen dem allgemeinen und dem vollständigen Integral. (Siehe *Théorie de fonctions analytiques*).

Die Zurückführung einer Gleichung mit beliebig viel unabhängigen Variablen auf totale Differenzialgleichungen machte lange Zeit die grössten Schwierigkeiten, bis dieselbe Pfaff vollführte (Abhandlungen der Berliner Akademie für das Jahr 1814). Er ging von einer totalen Differenzialgleichung mit mehr als 2 Variablen aus, eine Methode, an die wir auch hier angeknüpft haben, da sie uns die natürlichste und einfachste zu sein scheint.

Jedoch war Pfaff's Methode nicht eigentlich die Erweiterung der von Lagrange, obgleich eine ihr nahe verwandte, und es liess sich nicht leugnen, dass für den speciellen Fall von 2 unabhängigen Variablen die Lagrange'sche Methode wesentliche Vortheile hatte. Jakobi hatte schon früher versucht, die Lagrange'sche Methode zu erweitern, ohne von den totalen Differenzialgleichungen auszugehen (Crelle, Bd. 2). Endlich gelang es ihm (Crelle, Bd. 17), zu zeigen, dass der besondere Fall der partiellen Differenzialgleichungen gegen die allgemeine von Pfaff gestellte Aufgabe wesentliche Vortheile habe, dass nämlich in diesem Falle von allen von Pfaff verlangten Systemen von Differenzialgleichungen die Integration des ersten Systems zur Lösung der Aufgabe hinreicht. (Hingewiesen wurde der grosse Mathematiker hierauf durch eine Arbeit von Hamilton, welcher die mechanischen Aufgaben auf die Lösung der partiellen Differenzialgleichungen zurückgeführt hat. In Hamilton's Formeln ist allerdings dies Resultat zum Theil enthalten, ohne dass jedoch derselbe hiervon irgendwie Kenntniss genommen.)

Die Theorie des successiven Integrirens und der daraus zu schöpfenden Vortheile ist in ihren Resultaten in einem Briefe an den Secretär der Berliner Academie (abgedruckt in Bd. 17 des Crelle'schen Journals) angegeben. Diese Resultate enthalten zugleich die wirkliche Erweiterung der Methode von Lagrange.

Die eigentliche Arbeit Jakobi's hierüber ist aber erst lange nach seinem Tode (Crelle, Bd. 59) veröffentlicht. Schon vor dieser Veröffentlichung hat der Verfasser dieses Wörterbuchs die ursprünglich Pfaff'sche Methode zur Erlangung der Jakobi'schen Resultate und zu ihrer Erweiterung auf die totalen Differenzialgleichungen eingeschlagen (Crelle, Bd. 58). Diesem Wege ist man auch hier gefolgt, da er eine grössere Kürze gestattet, als die andern Methoden.

Was die Theorien anbetrifft, die sich aus dem gleichzeitigen Bekanntsein zweier Integrale ergeben, so schöpft Jakobi die hier gegebenen Resultate aus einer von Poisson zu ganz andern Zwecken verwandten Formel, welche der Formel 3) des vorigen Abschnittes entspricht. — Noch ist eine Methode zur Auflösung der allgemeinen partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung von Cauchy

gegeben werden. Dieselbe enthält jedoch durchaus nicht die so reichhaltigen Resultate der Jakobi'schen. (*Comptes rendus de l'académie des Sciences de Paris.*)

Auf ihrem jetzigen Standpunkte bildet die Theorie der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung einen der schönsten, vollständigsten und abgeschlossensten Theile der Analysis. Vieles fehlt, dass man Gleiches auch von den partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnung sagen könnte.

13) Allgemeines über die partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnung.

Auch die partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnung können Integrale von ganz verschiedener Art haben, und namentlich sind hierbei vollständige und allgemeine Integrale zu unterscheiden. Betrachten wir z. B. eine Function von der Gestalt:

$$f(x_1, x_2 \dots x_n, z)=0,$$

welche eine Anzahl Constanten enthalten soll. Diese Gleichung hat $n$ Differenzialgleichungen erster Ordnung, $\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$ zweiter Ordnung, $\frac{n(n+1)(n+2)}{1\cdot 2\cdot 3}$ dritter Ordnung u. s. w., also $(n+p-1)_p$ $p$ter Ordnung, wenn $n_p$ der $p$te Binomialcoefficient ist. — Bildet man alle diese Gleichungen, so hat man, die gegebene mit inbegriffen, deren:

$$1+n_1+(n+1)_2+(n+2)_3+\dots+(n+p-1)_p,$$

aus denen sich also:

$$n_1+(n+1)_2+\dots+(n+p-1)_p$$

Constanten derart eliminiren lassen, dass man noch eine partielle Differenzialgleichung $p$ter Ordnung behält, deren Integral die gegebene Gleichung ist. Es folgt hieraus der Satz:

„Eine partielle Differenzialgleichung $p$ter Ordnung mit $n$ unabhängigen Variablen hat ein vollständiges Integral mit $n_1+(n+1)_2+(n+2)_3+\dots+(n+p-1)_p$ willkürlichen Constanten."

Z. B. bei einer Gleichung zweiter Ordnung ist die Anzahl dieser Constanten:

$$n+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+3)}{2}.$$

Was die allgemeinen Integrale anbetrifft, so kann man sich von ihrem Vorhandensein auf ganz ähnliche Weise wie bei den Gleichungen erster Ordnung überzeugen. Zu dem Ende wollen wir jedoch zunächst die allgemeine Form der partiellen Differenzialgleichungen einer Transformation unterziehen.

Bezeichnen wir zunächst durch das Symbol:

$$[\varphi(x, x_n, z_s)]$$

eine Function von $x, x_1, x_2 \dots x_n, z_1, z_2 \dots z_s$, und den Differenzialquotienten von $z_1, z_2 \dots z_s$ nach $x_1, x_2 \dots x_n$, aber nicht nach $x$, ohne dass über die Ordnung dieser Differenzialquotienten etwas vorgeschrieben sein soll, und betrachten wir die simultanen Gleichungen:

1)
$$\frac{\partial z_1}{\partial x}=[\varphi_1(x, x_n, z_s)],$$
$$\frac{\partial z_2}{\partial x}=[\varphi_2(x, x_n, z_s)]$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial z_s}{\partial x}=[\varphi_s(x, x_n, z_s)].$$

Seien nun:

$$z_p^{(0)}, z_p^{(1)}, z_p^{(2)} \dots z_p^{(x)}$$

continuirlich auf einander folgende Werthe einer der mit $z$ bezeichneten Grössen $z_p$, und mögen diese der continuirlichen Reihe von Werthen der Grösse $x$:

$$x^{(0)}, x^{(1)}, x^{(2)} \dots x^{(s)}$$

entsprechen, so hat man, während $x_1, x_2 \dots x_n$ willkürlich bleiben:

a) $$z_p^{(1)}=z_p^{(0)}+(x^{(1)}-x^{(0)})\,[\varphi_p(x^{(0)}x_n, z_s^{(0)})],$$

b) $$z_p^{(2)}=z_p^{(1)}+(x^{(2)}-x^{(1)})\,[\varphi_p(x^{(1)}x_n, z_s^{(1)})]$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

n) $$z_p^{(t)}=z_p^{(t-1)}+(x^{(t)}-x^{(t-1)})[\varphi_p(x^{(t-1)},\ x_n,\ z_s^{(t-1)})].$$

Da jede dieser Gleichungen $s$ andere vorstellt, welche den Werthen $p=1$, $p=2$ . . . $p=s$ entsprechen, so stellt dies System eine Reihe recurrenter Gleichungen vor. Die in den $s$ Gleichungen b) enthaltenen Werthe $z_1^{(1)}, z_2^{(1)} \ldots z_s^{(1)}$ und ihre Differenzialquotienten nach $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ sind nämlich durch die Gleichungen a) und ihre Differenzialquotienten nach den nämlichen Grössen bestimmt, welche sich bilden lassen, wenn man als bekannt voraus setzt die Grössen $z_1^{(0)}$, $z_2^{(0)} \ldots z_s^{(0)}$ und ihre Differenzialquotienten nach $x_1, x_2 \ldots x_n$. Indem man so fortfährt, gelangt man auf dieselbe Weise zu $z_p^{(t)}$ mittels der Gleichung n), ohne dass ausser den Grössen $z_1^{(0)}, z_2^{(0)} \ldots z_s^{(0)}$ eine neue Willkürlichkeit eintritt. Was diese letztern Grössen noch anbetrifft, so sind sie offenbar Functionen von $x_1, x_2 \ldots x_n$ und, da nichts Weiteres über sie bestimmt ist, willkürliche Functionen. Da ihre Differenzialquotienten nach $x_1, x_2 \ldots x_n$ nun gegeben sind, so sind sie über die einzigen Willkürlichkeiten in den allgemeinen Integralen der Gleichungen 1). Man hat somit folgenden Satz:

„Jedes System simultaner partieller Differenzialgleichungen von der Form 1), welches also $s$ abhängige und $n+1$ unabhängige Variable enthält, in Bezug auf die erste unabhängige Variable erster, in Bezug auf die andern von beliebiger Ordnung ist, hat soviel allgemeine Integrale, als Gleichungen gegeben sind, mit so viel willkürlichen Functionen, als abhängige Variable vorhanden sind, und wo jede dieser Functionen eine Variable weniger hat, als in den vorgelegten Gleichungen unabhängige Variable vorhanden sind."

Auf die Form des Systems 1) lässt sich aber eine partielle Differenzialgleichung höherer Ordnung stets bringen. Wir wollen dies nur mit der Gleichung zweiter Ordnung mit 3 unabhängigen Variablen darthun. Die Erweiterung auf beliebig hohe Ordnungen und beliebig viele Variablen ist nämlich nicht mit der geringsten Schwierigkeit verbunden. Gedachte Gleichung nimmt nämlich die Form an:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f\left(x,\ x_1,\ x_2,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x_1},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x_2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\right).$$

Wir setzen nun:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z_1,$$

und erhalten:

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}=f\left(x,\ x_1,\ x_2,\ z,\ z_1,\ \frac{\partial z}{\partial x_1},\ \frac{\partial z}{\partial x_2},\ \frac{\partial z_1}{\partial x_1},\ \frac{\partial z_1}{\partial x_2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2}\right).$$

Dies ist eine Gleichung von der Form der in System 1) enthaltenen, ebenso wie die Gleichung $\frac{\partial z}{\partial x}=z_1$, und diese beiden verbunden geben eben das verlangte System.

Man hat ein Integral mit 2 willkürlichen Functionen von 2 Variablen. Allgemein:

„Das Integral einer partiellen Gleichung $p$ter Ordnung mit $n$ unabhängigen Variablen enthält $p$ willkürliche Functionen von $n-1$ Variablen."

Diese Reduction der partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnung auf simultane erleidet jedoch eine bemerkenswerthe Ausnahme in dem Falle, wo die Differenzialquotienten der höchsten darin enthaltenen Ordnung nicht nach einer einzigen Variablen genommen sind. Dies ist z. B der Fall bei der Gleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x_1}=f\left(x,\ x_1,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x_1}\right).$$

Man sieht, dass die directe Anwendung der eben gegebenen Methode hier misslingt. Indess kann man durch eine leichte Transformation unsere Gleichung wieder auf die obige Form bringen. Setze man z. B.:

$$x_1=xy,$$

so hat man:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial x_1},$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = x\frac{\partial z}{\partial x_1}.$$

Die eingeklammerten Differenzialquotienten deuten hier das Differenziiren nach dem durch die Gleichung $x_1 = xy$ eingeführten Gesetze an. Es ist ferner:

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x_1} + xy\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial z}{\partial x_1},$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x_1} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2},$$

also:

$$\frac{\partial z}{\partial x_1} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{y}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x_1} = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) - \frac{y}{x^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) - \frac{1}{x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Wenn man diese Ausdrücke in die obige Gleichung einsetzt, so enthält dieselbe $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$, ist also nach der oben gegebenen Methode zu behandeln. – Indessen kann man sich einer directen Betrachtung der Differenzialgleichungen dieser Art doch nicht ganz entschlagen.

Durch eine Transformation der unabhängigen Variablen wird nämlich die Natur der behandelten Gleichung oft derart behandelt, dass das Integral als ein ganz anderes erscheint, wie es denn eine höchst schwierige Aufgabe ist, die willkürlichen Functionen, welche der einen Wahl der Variablen entsprechen, auf diejenigen zurückzuführen, welche bei einer andern Wahl sich ergeben. Fast immer ist es in solchen Fällen gerathener, die Integration in beiden Fällen von einander unabhängig zu bewerkstelligen.

In den Anwendungen auf Geometrie und Physik kommen dergleichen Fälle oft vor. Die willkürlichen Functionen stehen nämlich mit den Anfangszuständen oder Grenzbedingungen des behandelten Problems in Verbindung, und diese bestimmen wieder die Wahl der unabhängigen Variablen, so dass deren Auswahl eine gebotene ist, je nachdem das Problem sich modificirt. Man erhält auf diese Weise allgemeine Integrale von der verschiedensten Form, und ihre Beziehung zu einander wird eben nur durch die partielle Differenzialgleichung, welcher sie alle genügen, vermittelt.

Einiges über den Gegenstand enthält dieser Artikel, ein Mehreres sollen namentlich die Artikel: Akustik und Wärme bringen.

Unterziehen wir also die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial x_1} = f\left(x,\ x_1,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial x_1}\right)$$

noch einer directen Behandlung. Es seien:

$$x_1^{(0)},\ x_1^{(1)},\ x_1^{(2)}\ \dots\ x_1^{(i)}$$

eine Reihe von Werthen der Variablen $x_1$, welche continuirlich auf einander folgen,

$$z^{(0)},\ z^{(1)},\ z^{(2)}\ \dots\ z^{(i)}$$

die zugehörigen ebenfalls continuirlichen Werthe von $z$, die somit sämmtlich Functionen von $x$ allein sind. Man hat nun:

$$\frac{\partial z^{(1)}}{\partial x} = \frac{\partial z^{(0)}}{\partial x} + (x_1^{(1)} - x_1^{(0)}) f\left(x, x_1^{(0)},\ z^{(0)},\ \frac{\partial z^{(0)}}{\partial x},\ \frac{z^{(1)} - z^{(0)}}{x_1^{(1)} - x_1^{(0)}}\right),$$

$$\frac{\partial z^{(2)}}{\partial x}=\frac{\partial z^{(1)}}{\partial x}+(x_1^{(2)}-x_1^{(1)})f(x,x_1^{(1)},z^{(1)},\ \frac{\partial z^{(1)}}{\partial x},\ \frac{z^{(2)}-z^{(1)}}{x_1^{(2)}-x_1^{(1)}})$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\partial z^{(t)}}{\partial x}=\frac{\partial z^{(t-1)}}{\partial x}+(x_1^{(t)}-x_1^{(t-1)})f(x,x_1^{(t-1)},z^{(t-1)},\ \frac{\partial z^{(t-1)}}{\partial x},\ \frac{z^{(t)}-z^{(t-1)}}{x_1^{(t)}-x_1^{(t-1)}}).$$

Bestimmt man in der ersten Gleichnng $z^{(0)}$ als willkürliche Fnnction von $x$, so bildet diese Gleichnng eine totale Differenzialgleichnng erster Ordnnng, deren veränderliche $x$ nnd $z^{(1)}$ sind. Setzt man den durch sie bestimmten Werth von $z^{(1)}$ in die zweite Gleichnng ein, so bestimmt diese in gleicher Weise $z^{(2)}$ nnd so fort. Man hat also ein System von $t$ totalen Differenzialgleichnngen erster Ordnnng, deren Integrale jedes eine Constante enthalten. Es ist aber $t$ nnendlich gross, nnd folglich enthält das Integral nnserer partiellen Differenzialgleichnng zweiter Ordnnng ansser einer willkürlichen Fnnction $z_0^{(0)}$ mit einer Variablen noch nnendlich viel Constanten.

Aehnlichen Betrachtnngen nnterliegen die Differenzialgleichungen von beliebig hohem Grade.

Es bleibt übrigens auch bei den allgemeinen partiellen Differenzialgleichnngen $n$ter Ordnnng der Fall nicht ausgeschlossen, dass von den darin vorkommenden $n$ willkürlichen Fnnctionen sich einige vermöge ihrer Form in eine zusammenziehen lassen, so dass sich das Integral auf ein anderes mit weniger als $n$ willkürlichen Functionen ergibt. Auch kann man einer Gleichung, je nach der Art des Integrirens, mehr oder weniger willkürliche Fnnctionen geben.

Betrachten wir z. B. die Gleichnng:

$$f(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2})=0,$$

und bringen wir diese auf die Form:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\varphi\ (x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}),$$

oder auf die des Systems:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z_1,$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial x}=\varphi\ (x,\ y,\ z,\ z_1,\ \frac{\partial z}{\partial y}),$$

so enthält das Integral zwei willkürliche Fnnctionen. Setzt man dagegen:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\psi\,(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}),$$

so ist die Gleichnng nach $y$ erster Ordnnng nnd enthält also nnr eine willkürliche Function.

Oh nnd wann die beiden im ersten Falle gegebenen willkürlichen Fnnctionen sich in eine zusammenziehen, soll hier nicht erörtert werden.

14) Erste Integrationsmethode.

Am leichtesten zn integriren sind diejenigen partiellen Differenzialgleichnngen, welche nnr Differenzialqnotienten nach einer Variable $x$ genommen, enthalten. Offenbar sind dann bei der Integration die übrigen nnabhängigen Variablen $x_1$, $x_2$ . . . als Constanten zu betrachten. Die Rechnnng beschränkt sich also auf die Integration einer totalen Differenzialgleichung. Die eingehenden Integrationsconstanten aber sind willkürliche Functionen der Variablen $x_1$, $x_2$ . . ., da diese als constant betrachtet wurden.

Beispiele. Sei gegeben:

$$\frac{\partial^n z}{\partial x^n}=F(x,\ y),$$

so erhält man:

$$z=U+U_1x+U_2x^2+\ \ldots$$
$$+U_{n-1}x^{n-1}+\varphi\ (x,\ y),$$

wo:

$$\varphi\ (x,\ y)=\iiint\ \ldots\ F(xy)dx^n$$

nnd:

$$U,\ U_1,\ U_2\ \ldots\ U_{n-1}$$

willkürliche Functionen von $y$ sind.

Sei ferner gegeben:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + P\frac{\partial z}{\partial x} = Q,$$

wo $P$ und $Q$ Functionen von $x$ und $y$ allein sind.
Setzt man:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = v,$$

so hat man:

$$\frac{\partial v}{\partial y} + Pv = Q,$$

eine Gleichung, die sich leicht integriren lässt, da sie linear ist. Man erhält:

$$v = e^{-\int P dy}\left[\int e^{\int P dy} Q dy + C\right].$$

Für $C$ ist eine willkürliche Function von $x$, $\varphi(x)$ zu nehmen. Man hat also:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-\int P dy}\left[\int e^{\int P dy} Q dy + \varphi(x)\right].$$

also indem man abermals integrirt, und als Integrationsconstante eine beliebige Function von $y$ nimmt:

$$z = \int dx\, e^{-\int P dy}\left[\int e^{\int P dy} Q dy + \varphi(x)\right] + \psi(y).$$

Im Falle die Gleichung nicht von der angegebenen Art ist, so lässt sie sich zuweilen durch Transformation auf dieselbe bringen. Sei z. B. gegeben:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Wir setzen zunächst:

$$u = x + y, \qquad v = x - y,$$

und erhalten:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2},$$

also wenn man diese Werthe in die gegebene Gleichung einsetzt, wird diese:

$$(u+v)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Differenziiren wir diese Gleichung nochmals nach $u$, so kommt:

$$(u+v)\frac{\partial^3 z}{\partial u^2 \partial v} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$

und wenn man diese Gleichung nach $v$ differenziirt:

$$(u+v)\frac{\partial^4 z}{\partial u^2 \partial v^2} = 0, \quad \text{d. h.:} \quad \frac{\partial^4 z}{\partial u^2 \partial v^2} = 0.$$

Setzen wir zunächst:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = w,$$

so ist:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = 0,$$

also:

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \varphi''(u),$$

wo $\varphi''(u) = \frac{d^2 \varphi(u)}{du^2}$ eine beliebige Function von $u$ ist, und:

$$w = \varphi'(u) + \psi'(v).$$

Man hat also:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \varphi'(u) + \psi'(v),$$

woraus sich durch Integration nach $v$ ergibt:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = v\varphi'(u) + \psi(v) + \chi(u),$$

und durch Integration nach $u$:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \varphi(u) + u\psi'(v) + \vartheta(v).$$

Die Functionen $\varphi$, $\psi$, $\chi$, $\vartheta$ sind aber nicht völlig willkürlich, da sie der vorgelegten Gleichung genügen müssen:

$$(u+v)\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v},$$

welche sich jetzt verwandelt in:

$$(u+v)[\varphi'(u) + \psi'(v)] = \varphi(u) + \chi(u) + \vartheta(v) + \psi(v) + v\varphi'(u) + u\psi'(v),$$

oder:

$$u\varphi'(u) + v\psi'(v) = \varphi(u) + \chi(u) + \vartheta(v) + \psi(v).$$

Diese Gleichung kann offenbar nur erfüllt werden, wenn man setzt:

$$\chi(u) = u\varphi'(u) - \varphi(u) + \alpha,$$
$$\vartheta(v) = v\psi'(v) - \psi(v) - \alpha,$$

wo $\alpha$ eine willkürliche Constante ist. Man hat also:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = (u+v)\varphi'(u) - \varphi(u) + \psi(v) + \alpha,$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = (u+v)\psi'(v) - \psi(v) + \varphi(u) - \alpha.$$

Die Integration der ersten Gleichung gibt:

$$z = \int_0^u u\varphi'(u)\,du + v\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u)\,du + u\psi(v) + \alpha u + A,$$

oder wenn man das Hauptintegral $z_0$ bestimmt, indem man $u=0$ setzt:

$$z_0 = v\varphi(0) + A,$$

d. h.:

$$z_0 = v\varphi(0) - \int_0^u [u\varphi'(u) - \varphi(u)]\,du - v\varphi(u) - u[\alpha + \psi(v)] + z,$$

und wenn man in dem Werthe von $\frac{\partial z}{\partial v}$ setzt: $u=0$:

$$\frac{\partial z_0}{\partial v} = v\psi'(v) - \psi(v) + \varphi(0) - \alpha,$$

also durch Integration:

$$z_0 = \int_0^v [v\,\psi'(v) - \psi(v)]\,dv + v\,(\varphi(0) - \alpha) + \beta.$$

Dies in das erste Integral einsetzend, erhält man:

$$z = \int_0^v [v\,\psi'(v) - \psi(v)]\,dv + \int_0^u [u\,\varphi'(u) - \varphi(u)]\,du + (u - v)\,\alpha + v\,\varphi(u) + u\,\psi(v) + \beta.$$

Es ist dies das vollständige Integral und enthält in der That 2 willkürliche Functionen.

Man kann dies jedoch unter eine einfachere Form bringen. Man hat nämlich:

$$\int_0^v v\,\psi'(v)\,dv = v\,\psi(v) - \int_0^v \psi(v)\,dv,$$

$$\int_0^u u\,\varphi'(u)\,du = u\,\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u)\,du,$$

also wenn man setzt:

$$\int_0^u \varphi(u)\,du = \varphi_1(u),\quad \int_0^v \psi(v)\,dv = \psi_1(v),$$

$$z = v\,\psi_1'(v) - 2\,\psi_1(v) + u\,\varphi_1'(u) - 2\,\varphi_1(u) - (u - v)\,\alpha + v\,\varphi_1'(u) + u\,\psi_1'(v) + \beta,$$

oder da man $\beta$ schon in einer der willkürlichen Functionen $\varphi_1$ oder $\psi_1$ enthalten denken kann:

$$z = (u + v)\,[\psi_1'(v) + \varphi_1'(u)] - 2\,[\varphi_1(u) + \psi_1(v)] - (u - v)\,\alpha.$$

Da aber:

$$u = x + y,\qquad v = x - y$$

war:

$$z = x\,[\psi'(v) + \varphi'(u)] - \varphi(u) + \psi(v) - y\alpha,$$

wo die Indices wieder weggelassen, und für $2\,\psi_1(v)$, $2\,\varphi_1(u)$ geschrieben ist bezüglich: $\psi(v)$, $\varphi(u)$.

Es kann aber der Ausdruck $-\alpha y$ unbeschadet der Allgemeinheit auch weggelassen werden.

Denn schreibt man für $\varphi(u)$: $\varphi(u) - u\,\frac{\alpha}{2}$,

und für $\psi(v)$: $\psi(v) + v\,\frac{\alpha}{2}$,

so verwandelt sich:

$$\varphi'(u) \text{ in } \varphi'(u) - \frac{\alpha}{2},$$

$$\psi'(v) \text{ in } \psi'(v) + \frac{\alpha}{2}.$$

Es tritt dann dem Werthe von $z$ hinzu der Ausdruck:

$$(u - v)\,\frac{\alpha}{2} = y\,\alpha,$$

der sich mit $-y\alpha$ hebt, so dass man hat:

$$z = x\,[\varphi'(x + y) + \psi'(x - y)] - \varphi(x + y) - \psi(x - y).$$

15) **Zweite Integrationsmethode.** (Theorie der linearen Gleichungen).

Monge in seiner „*Application de l'analyse à la géometrie*" gibt eine Methode zur Auflösung der linearen partiellen Differenzialgleichungen zweiter Ordnung mit 2 unabhängigen Variablen, von der Gestalt:

1) $$A\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+B\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\varepsilon,$$

wo $A$, $B$, $C$, $\varepsilon$ Functionen von $x$, $y$, $z$, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ sind. — Wir entwickeln die Resultate seiner Betrachtungen in einer Weise, die sich den für die partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung hier gebrauchten Betrachtungen insofern anschliesst, als wir auch die partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnung unter die Form der totalen bringen.

Zunächst setzen wir der Kürze wegen:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=p,\ \frac{\partial z}{\partial y}=q,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=r,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=s,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=t,$$

dann ist:

2) $$dz=p\,dx+q\,dy,$$

3) $$dp=r\,dx+s\,dy,\qquad dq=s\,dx+t\,dy,$$

4) $$Ar+Bs+Ct=\varepsilon.$$

Das System 2), 3), 4) ist der Gleichung 1) vollständig identisch. Mittels 4) lässt sich $t$ aus der zweiten Gleichung 3) eliminiren. Die drei Gleichungen 2) und 3) enthalten dann nur noch die Variablen $x$, $y$, $z$, $p$, $q$, $r$, $s$.

Die zweite Gleichung 3) multipliciren wir mit einer unbekannten Grösse $\lambda$ und addiren sie zur ersten. Wir erhalten:

5) $$dp-r\,dx-s\,dy+\lambda\,dq-\lambda s\,dx-\lambda t\,dy=0.$$

Die Relation 2) beschränkt aber die in dieser Gleichung enthaltenen Grössen. Wir wollen diese Relation, sowie die Gleichung 4) als bestehend annehmen, vor der Hand aber davon absehen, dass die Relation 5) stattfinde, und den links in dieser letzten Gleichung enthaltenen Ausdruck einer identischen Transformation unterziehen. Um anzudeuten, dass wir von der Relation 5) absehen, ersetzen wir wieder die Differenziale $dp$, $dq$, $dx$, $dy$ durch $\partial p$, $\partial q$, $\partial x$, $\partial y$. Es ist nun wegen 4):

$$\partial p-r\partial x-s\partial y+\lambda\partial q-\lambda s\partial x-\lambda t\partial y=\partial p-r\partial x-s\partial y+\lambda\partial q-\lambda s\partial x-\frac{\lambda}{C}\partial y(\varepsilon-Ar-Bs).$$

Wenn man hierin die mit $r$ und $s$ multiplicirten Glieder besonders schreibt, erhält man:

6) $$\partial p-r\partial x-s\partial y+\lambda(\partial q-s\partial x-t\,\partial y)=\partial p+\lambda\partial q-\frac{\varepsilon\lambda}{C}\partial y+\frac{r}{C}(-C\partial x+A\lambda\partial y)$$
$$+\frac{s}{C}(-C\,\partial y-C\lambda\,\partial x+B\lambda\,\partial y),$$

wo die hierin enthaltenen Grössen noch verbunden sind durch die Gleichung:

7) $$\partial z=p\,\partial x+q\,\partial y.$$

Wir setzen nun:

$$-C\partial x+A\lambda\partial y=\triangle(u),$$
$$-C\partial y-C\lambda\partial x+B\lambda\partial y=\triangle(v),$$

wo $\triangle(u)$, $\triangle(v)$ eben nur Abkürzungen sind und keineswegs vollständige Differenziale andeuten sollen.

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $\lambda$ und zieht die zweite von ihr ab, so erhält man:

$$(A\lambda^2-B\lambda+C)\partial y=\triangle(v)-\lambda\triangle(u).$$

Die Grösse $\lambda$ war bisher willkürlich. Wir bestimmen sie jetzt, indem wir setzen:

8) $$A\lambda^2-B\lambda+C=0.$$

Es gibt also im Allgemeinen 2 Werthe $\lambda_1$ und $\lambda_2$, welche dieser Gleichung genügen, und welche bewirken, dass:

$$\triangle(v)=\lambda\triangle(u)$$

wird. Es ist dann also nach 6):

9) $$\delta p-r\,\delta x-s\,\delta y+\lambda(\delta q-s\,\delta x-t\,\delta y)=\delta p+\lambda\,\delta q-\frac{s\lambda}{C}\delta y+\frac{r+\lambda s}{C}(A\lambda\,\delta y-C\,\delta x),$$

eine Gleichung, welche in 2 andere serfällt, wenn man für $\lambda$ sowohl $\lambda_1$ als $\lambda_2$ setzt.

Setzen wir zunächst voraus, dass $\lambda_1$ nicht $=\lambda_2$ sei, so ist offenbar, damit die Gleichungen 3) erfüllt werden, d. h. damit man habe:

$$\delta p-r\,\delta x-s\,\delta y=0,$$

und:

$$\delta q-s\,\delta x-t\,\delta y=0,$$

nothwendig und ausreichend, dass auch die rechte Seite der Gleichung 9) für $\lambda=\lambda_1$ und $\lambda=\lambda_2$ Null gebe. Es fragt sich, wann und in welcher Weise dies in so allgemeiner Weise sich erreichen lässt, dass man das allgemeine Integral erhält.

Die Gleichung 9) schreiben wir mit Berücksichtigung von:

$$\lambda_1\;\lambda_2=\frac{C}{A}$$

auch folgendermaassen, je nachdem wir $\lambda=\lambda_1$, oder $\lambda=\lambda_2$ setzen:

10) $$\delta p-r\,\delta x-s\,\delta y+\lambda_1(\delta q-s\,\delta x-t\,\delta y)=\delta p+\lambda_1\,\delta q-\frac{s\lambda_1}{C}\delta y+\frac{r+\lambda_2 s}{\lambda_2}(\delta y-\lambda_2\,\delta x),$$

10a) $$\delta p-r\,\delta x-s\,\delta y+\lambda_2(\delta q-s\,\delta x-t\,\delta y)=\delta p+\lambda_2\,\delta q-\frac{s\lambda_2}{C}\delta y+\frac{r+\lambda_2 s}{\lambda_1}(\delta y-\lambda_1\,\delta x).$$

Nehmen wir nun an, es liesse sich aus den beiden Gleichungen:

$$dp+\lambda_1\,\delta q-\frac{s\lambda_1}{C}\,dy=0,\quad dy-\lambda_2\,dx=0,$$

nöthigenfalls in Verbindung mit Gleichung 2), wo die linken Seiten $r$ und $s$ nicht enthalten, zwei Integrale gewinnen von der Gestalt:

$$u=c,\qquad v=e,$$

so ist offenbar:

$$\delta p+\lambda_1\,\delta q-\frac{s\lambda_1}{C}\,\delta y=m\,\delta u+n\,\delta v,\qquad \delta y-\lambda_2\,\delta x=\mu\,\delta u+\nu\,\delta v,$$

und man hat:

11) $$\delta p-r\,\delta x-s\,\delta y+\lambda_1(\delta q-s\,\delta x-t\,\delta y)=M\,\delta u+N\,\delta v,$$

wo die Grössen $M$ und $N$ noch $r$ und $s$ enthalten.

Es ist aber das Vorhandensein dieser beiden Integrale an eine Integrabilitätsbedingung geknüpft, da die drei Gleichungen:

$$dz=p\,dx+q\,dy,\quad dp+\lambda_1\,dq=0,\quad dy-\lambda_2\,dx=0$$

nicht 4 Variable, wie dies der Fall sein muss, wenn immer 3 Integrale möglich sein sollen, sondern deren 5, $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ enthalten.

Diese Bemarkung beschränkt die allgemeine Gültigkeit dieser Methode.

Finde nun Aehnliches auch bei der Gleichung 10a) statt, und seien $u_1$, $v_1$ die entsprechenden Integrale, so dass man hat:

11a) $$\delta p-r\,\delta x-s\,\delta y+\lambda_2(\delta q-s\,\delta x-t\,\delta y)=M_1\,\delta u_1+N_1\,\delta v_1,$$

so werden die rechten Seiten gleich Null, wenn man $u$, $v$, $u_1$, $v_1$ gleich Constanten setzt. Indess führt diese Bestimmung nicht zu dem allgemeinen Integrale, da durch diese Gleichung $y$, $z$, $p$, $q$ als Functionen von $x$ gegeban sein würden, während doch $z$, $p$, $q$ als Functionen von $x$ und $y$ sich ergeben müssen. Nimmt man aber an:

12) $v=\varphi(u)$, $v_1=\psi(u_1)$,

wo $\varphi$ und $\psi$ willkürliche Functionen bedeuten, und setzt:

$$M+N\varphi'(u)=0,$$
$$M_1+N_1\psi'(u_1)=0,$$

so verschwinden ebenfalls die rechten Seiten. Die zuletzt geschriebenen beiden Gleichungen dienen zur Bestimmung von $r$ und $s$ kommen also nicht weiter in Betracht, die Gleichungen 12) lösen das Problem völlig. Man entwickelt aus ihnen $\frac{\partial z}{\partial x}=p$ und $\frac{\partial z}{\partial y}=q$, und erhält eine Gleichung von der Form:

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

wo $p$ und $q$ Functionen von $x$, $y$, $z$ sind, die zwei willkürliche Functionen $\varphi$ und $\psi$ enthalten, und natürlich der Integrationsbedingung genügen müssen. Nach Auflösung dieser totalen Differenzialgleichung hat man den Werth von $z$ mit zwei willkürlichen Functionen, also das allgemeine Integral.

Auch reicht eine der Gleichungen 12) zur völligen Integration hin. Da dieselbe nämlich $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ enthält, so ist sie eine partielle Differenzialgleichung erster Ordnung, deren vollständiges Integral man auf dem, Abschnitt 8) vorgeschriebenen Wege vermitteln, und aus diesem das allgemeine ableiten kann.

Die dritte und im Allgemeinen einfachste Methode ist jedoch die, dass man verbindet die Gleichungen:

13) $v=\varphi(u)$, $u_1=c$,

wo $c$ eine Constante ist. Damit die Ausdrücke rechts in Gleichung 11) und 11a) verschwinden, ist zu setzen:

$$M+N\varphi'(u)=0, \qquad N_1=0,$$

welche Gleichungen $r$ und $s$ bestimmen, und daher nicht weiter in Betracht kommen. Es ist aber zu beachten, ob auch $M$, $N$ und $N_1$ wirklich $r$ und $s$ enthalten, oder ob durch die Bestimmung dieser Grössen nicht die Allgemeinheit der Gleichungen 13) beschränkt wird; in letzterem Falle wäre dieses Verfahren nicht anzuwenden.

Aus den Gleichungen 13) erhält man wieder $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, also:

$$dz=p\,dx+q\,dy,$$

mit einer willkürlichen Function und einer Constante. Die Integration gibt eine zweite Constante, so dass man ein vollständiges Integral hat, aus dem sich das allgemeine ableiten lässt. Uebrigens ist diese Methode noch anzuwenden, wenn eine der beiden Gleichungen 10) oder 10a), z. B. die letztere, nicht sich auf die Form 11a) bringen lässt, sondern sich aus den Gleichungen $dp+\lambda_2\,dq=0$, $dy-\lambda_1\,dx=0$ nur ein Integral $u_1$ ergibt. Immer nämlich ist dann der Ausdruck rechts in 11a) von der Form:

$$M_1\,d(u_1)+N_1\triangle(v_1),$$

wo $\triangle(v_1)$ jedoch kein vollständiges Differenzial ist. Dies hindert indessen nicht die oben gemachte Annahme:

$$u_1=c,\quad N_1=0,$$

wenn nur die Gleichung 11) die vorgeschriebene Form hat.

Was schliesslich den Fall anbetrifft, wo $\lambda_1=\lambda_2$ ist, so bleibt nur die zweite Methode der Integration übrig, da die Gleichung 11a) wegfällt, und ist demgemäss zu verfahren.

In jedem Falle wird also die Integration unserer Gleichung:

$$Ar+Bs+Ct=\varepsilon$$

reducirt auf die Systeme:

I) $$dp+\lambda_1\,dq-\frac{\varepsilon\lambda_1}{C}\,dy=0,$$
$$dy-\lambda_2\,dx=0.$$

II) $$dp+\lambda_2\,dq-\frac{\varepsilon\lambda_2}{C}\,dy=0,$$
$$dy-\lambda_1\,dx=0,$$

verbunden mit: $dz-p\,dx-q\,dy=0$, wo $\lambda_1$ und $\lambda_2$ die Wurzeln der Gleichung:

III) $$A\lambda^2-B\lambda+C=0$$

vorstellen. — Der Fall, wo $\lambda_1=\lambda_2$ ist, entspricht offenbar der Annahme:

$$B^2=4AC,\quad \lambda=\frac{B}{2A},$$

und fällt dann das eine der Systeme ganz weg, während das andere die Gestalt hat:

$$B^2\,dq+2AB\,dp-4\varepsilon A\,dy=0,$$
$$A\,dy+B\,dx=0.$$

Die erste Gleichung nimmt auch mit Hülfe der zweiten die Form an:

$$B\,dq+2A\,dp-4\varepsilon\,dx=0.$$

I) Sind $A$, $B$, $C$ und $\varepsilon$ constant, so werden auch $\lambda_1$ und $\lambda_2$ Constanten sein. Das System I) gibt dann:

$$p+\lambda_1 q-\frac{\varepsilon\lambda_1}{C}\,y=\alpha,$$
$$y-\lambda_2 x=\beta,$$

also:

$$p+\lambda_1 q-\frac{\varepsilon\lambda_1}{C}y=\varphi(y-\lambda_2 x)$$

Setzt man:

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},$$

so zerfällt diese lineare Gleichung erster Ordnung in das System:

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1,$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\varepsilon\lambda_1}{C}y+\varphi(y-\lambda_2 x),$$

deren erste zum Integrale hat:

$$y-\lambda_1 x=a,$$

während die zweite, wenn man $y$ aus ihr mittels dieses Integrales eliminirt, die Gestalt annimmt:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\varepsilon\lambda_1}{C}(a+\lambda_2 x)+\varphi[a+(\lambda_1-\lambda_2)x].$$

Setzt man:

$$\int\varphi[a+(\lambda_1-\lambda_2)x]\,dx=\psi[a+(\lambda_1-\lambda_2)x],$$

so hat man:

$$z-\frac{\varepsilon\lambda_1 a x}{C}-\frac{\varepsilon\lambda_1^2 x^2}{2C}-\psi[a+(\lambda_1-\lambda_2)x]=b,$$

oder, wenn man für $a$ wieder setzt: $y-\lambda_1 x$:

$$z=\frac{\varepsilon\lambda_1 y x}{C}+\frac{\varepsilon\lambda_1^2 x^2}{2C}-\psi(y-\lambda_2 x)=b.$$

Also aus beiden Integralen ergibt sich das allgemeine:

$$z-\frac{\varepsilon\lambda_1 y x}{C}+\frac{\varepsilon\lambda_1^2 x^2}{2C}=\psi(y-\lambda_2 x)+\psi_1(y-\lambda_2 x),$$

Man kann indess setzen:

$$-\frac{\varepsilon\lambda_1 y x}{C}+\frac{\varepsilon\lambda_1^2 x^2}{2C}=\frac{\varepsilon}{2C}(\lambda_1^2 x^2-2\lambda_1 y x)=\frac{\varepsilon}{2C}(\lambda_1 x-y)^2-\frac{\varepsilon y^2}{2C},$$

und den Ausdruck $\frac{\varepsilon}{2C}(\lambda_1 x-y)^2$ mit der Function $\psi_2$ vereinigt denken, dann ist:

$$z=\frac{\varepsilon y^2}{2C}+\psi(y-\lambda_2 x)+\psi_1(y-\lambda_1 x).$$

II) Dasselbe Verfahren ist einzuschlagen, wenn $A$, $B$, $C$ Constanten, $\varepsilon$ aber eine beliebige Function von $x$ und $y$ ist. Das eine Integral bleibt fortwährend:

$$y-\lambda_2 x=\beta,$$

während das andere die Gestalt annimmt:

$$C(p+\lambda_1 q)-\lambda_1\int\varepsilon\,dy+u,$$

wo vor der Integration für $x$ in $\varepsilon$ sein Werth: $\frac{y-\beta}{\lambda_2}$ zu setzen, nach der Integration aber $\beta$, mittels der Gleichung $y-\lambda_2 x=\beta$ zu eliminiren ist.

Es ist nun zu integriren die Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial z}{\partial y}=\lambda_1\int\varepsilon\,dy+\varphi(y-\lambda_2 x).$$

Dies führt zu den Gleichungen:

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_1,$$

d. h.:

$$y-\lambda_1 x = a,$$

$$\frac{dz}{dx}=\lambda_1 U+\varphi(y-\lambda_2 x),$$

wo:

$$U=\int \varepsilon\, dy$$

eine Function von $x$ und $y$ ist.

In $U$ und $\varphi$ ist $y=a+\lambda_1 x$ vor der Integration zu setzen, und man erhält

$$z=\lambda_1 \int U\,dx+\int\varphi\,[a+(\lambda_1-\lambda_2)x]\,dx,$$

$$z=\lambda_1 \int U dx+\psi[a+(\lambda_1-\lambda_2)x]+b,$$

wo $\psi$ eine willkürliche Function und gleich $\int\varphi\,[a+(\lambda_1-\lambda_2)x]\,dx$ ist.

Nach der Integration wird $a$ wieder eliminirt. Es ergibt sich, wegen $a+\lambda_1 x=y$:

$$z=\lambda_1 V+\psi(y-\lambda_2 x)+b.$$

$$V=\int U\,dx$$

ist eine gegebene Function von $x$ und $y$. Diese Gleichung im Verein mit $y-\lambda_1 x=a$ gibt das allgemeine Integral:

$$z=\lambda_1 V+\psi(y-\lambda_2 x)+\psi_1(y-\lambda_1 x).$$

Ist z. B:

$$\varepsilon=0,$$

hat man also die Gleichung:

$$A\frac{d^2z}{dx^2}+B\frac{d^2z}{dxdy}+C\frac{d^2z}{dy^2}=0,$$

so wird das allgemeine Integral:

$$z=\psi(y-\lambda_2 x)+\psi_1(y-\lambda_1 x).$$

Ist auch:

$$B=0,\ \frac{C}{A}=-h,$$

so ergibt sich:

$$\frac{d^2z}{dx^2}-h\frac{d^2z}{dy^2}=0,$$

$$\lambda^2-h=0,\qquad \lambda=\pm\sqrt{h},$$

also:

$$z=\psi(y+x\sqrt{h})+\psi_1(y-x\sqrt{h}).$$

Diese Gleichung ist die der schwingenden Seite, der hier gegebene Ausdruck für $z$ ist von d'Alembert bereits gefunden.

Ist:

$$\frac{C}{A}=+h,$$

so erhält man:

$$z=\psi[y+x\sqrt{(-h)}]+\psi[y-x\sqrt{(-h)}].$$

Um diesem Ausdruck reelle Form zu geben, kann man folgendermaassen verfahren. Es sei:

$$\psi[y+x\sqrt{(-h)}]=\varphi[y+x\sqrt{(-h)}]+\varphi_1[y+x\sqrt{(-h)}],$$

$$\psi_1[y-x\sqrt{(-h)}]=\varphi[y-x\sqrt{(-h)}]+\varphi_1[y-x\sqrt{(-h)}],$$

wo $\varphi$ und $\varphi_1$ willkürliche Functionen sind.

Sei nun:

$$\varphi[y+x\sqrt{(-h)}]=G+Ki,$$

$$\varphi_1[y+x(\sqrt{-h})]=g+ki,$$

wo $G$, $K$, $g$, $k$ Functionen von $x$ und $y$ sind. Man hat dann:

$$z = 2G + 2g,$$

ein Ausdruck, der ebenfalls zwei willkürliche Functionen enthält,

III) Dies Verfahren aber gibt zunächst nicht das allgemeine Integral, wenn:

$$B^2 = 4AC$$

ist. Es wird dann $\lambda_1 = \lambda_2$, und der Ausdruck:

$$z = \lambda_1 V + \psi(y - \lambda_1 x) + \psi_1(y - \lambda_2 x)$$

enthält nur eine willkürliche Function. Um dies zu vermeiden, setzen wir zunächst:

$$\lambda_2 = \lambda_1 + \vartheta,$$

wo $\vartheta$ eine abnehmende Constante sein soll. Man hat dann, wenn $\vartheta$ sehr klein wird:

$$z = \lambda_1 V + \psi(y - \lambda_1 x) + \psi_1(y - \lambda_1 x) - \vartheta x \psi_1'(y - \lambda_1 x).$$

Setzt man nun:

$$\psi + \psi_1 = \varphi \quad \text{und} \quad -\vartheta \psi_1' = \varphi_1.$$

Letzteres erleidet nämlich darum kein Bedenken, weil man $\psi_1'$ von beliebiger Grösse, also $\vartheta \psi_1'$ immer endlich denken kann. Man hat:

$$z = \lambda_1 V + \varphi(y - \lambda_1 x) + x \varphi_1(y - \lambda_1 x),$$

ein Ausdruck, der zwei willkürliche Functionen enthält, und also das allgemeine Integral ist.

IV) Sei gegeben:

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0.$$

Die Gleichung 3) wird:

$$q^2 \lambda^2 - 2pq\lambda + p^2 = 0,$$

d. h.:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{p}{q},$$

und das System 1) wird:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q}, \quad q\,dy + p\,dx = 0,$$

Die erste hat zum Integral:

$$p = \alpha q.$$

Da nun gegeben ist:

$$dz = p\,dx + q\,dy,$$

so ist:

$$dz = 0. \qquad z = \beta.$$

Aus den beiden Integralen also ergibt sich:

$$\frac{p}{q} = \varphi(z), \qquad \text{oder:} \qquad p = q\,\varphi(z).$$

Diese Gleichung zerfällt in das System:

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi(z), \quad \frac{dz}{dx} = 0,$$

also $z = \beta$:

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi(\beta),$$

$$y + x\varphi(\beta) = \alpha,$$

oder wenn man $z$ für $\beta$ einsetzt:

$$y + x\varphi(z) = \alpha,$$

eine Gleichung, aus der man in Gemeinschaft mit $z = \beta$ das allgemeine Integral ableitet:

$$y+xq\,(s)=\psi(z).$$

V) Sei gegeben:

$$x^2 r+2xys+y^2 t=0.$$

Es ist:

$$x^2\lambda^2-2xy\lambda+y^2\lambda^2=0,$$

also:

$$\lambda_1=\lambda_2=\frac{y}{x},$$

$$x\,dp+y\,dq=0,$$

$$x dy=y dx.$$

Die zweite Gleichung hat zum Integral:

$$y=\alpha x.$$

Substituirt man dies in die erste, so kommt:

$$dp+\alpha\,dq=0,$$

$$p+\alpha q=\beta,$$

also wenn man $\alpha=\frac{y}{x}$, $\beta=\varphi\,(\alpha)$ setzt:

$$p+\frac{y}{x}q=\frac{x}{y}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Das noch zu integrirende System ist:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x},\quad \frac{ds}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right),$$

wenn:

$$f\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{x}{y}\,\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

gesetzt wird. Als Integral erhält man wieder:

$$y=\alpha x,\quad s=x\,f(\alpha)+\beta=x\,f\left(\frac{y}{x}\right)+\beta,$$

also das allgemeine Integral.

$$s=x\,f\left(\frac{y}{x}\right)+F\left(\frac{y}{x}\right).$$

VI) Schliesslich nehmen wir noch die Gleichung:

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0.$$

Ihr Integral gibt den Ausdruck für diejenigen Flächen, deren beide Krümmungen in jedem Punkte gleich, aber entgegengesetzt gerichtet sind, oder diejenigen Flächen, welche innerhalb eines gegebenen Umrings den kleinsten Inhalt ergeben. Man hat:

$$(1+q^2)\lambda^2+2pq\lambda+1+p^2=0,$$

oder:

A) $$1+\lambda^2+(p+q\lambda)^2=0.$$

Die Systeme 1) und 2), die wir hier beide brauchen, da wir die zweite Integrationsmethode anwenden wollen, lauten:

$$dp+\lambda_1\,dq=0,\qquad dy=\lambda_2\,dx,$$

$$dp+\lambda_2\,dq=0,\qquad dy=\lambda_1\,dx.$$

Die erste dieser Gleichungen wird erfüllt, wenn man $\lambda_1$ constant annimmt, hat also das Integral:

$$p+\lambda_1 q=\mu_1.$$

In der That, setzt man diesen Ausdruck in die Gleichung A) ein, wo man $\lambda=\lambda_1$ denkt, so ergibt sich:

B) $$1+\lambda_1^2+\mu_1^2=0.$$

Ebenso gibt die erste Gleichung des zweiten Systems:

$$p+\lambda_2 q=\mu_2,$$

und:

C) $$1+\lambda_2^2+\mu_2^2=0.$$

Mittels der Gleichungen B) und C), welche A) ersetzen, sind also $\lambda_1$ und $\lambda_2$ als willkürliche Constanten, $\mu_1$ und $\mu_2$ aber als durch diese Gleichungen bestimmt zu betrachten.

Wendet man jetzt die zweite Integrationsmethode an, so ist in dem Integral, welches dem zweiten System entnommen ist, und welches man auch unter die Form $F(p, q) = \lambda_2$ bringen kann, $\lambda_2$ in der That auch für die fernere Integration als constant zu betrachten, und unter dieser Voraussetzung hat die zweite Gleichung des ersten Systems ein Integral von der Gestalt:

$$y-\lambda_2 x=\alpha.$$

Aus diesem und dem ersten Integral $p+\lambda_1 q=\mu_1$ erhält man, wenn man die Constante $\lambda_1$ und folglich auch $\mu_1$, wie dies geschehen muss, als Function von $\alpha$ betrachtet:

D) $$p+q\,\varphi(y-\lambda_2 x)=\psi(y-\lambda_2 x).$$

Von diesen Functionen $\varphi$ und $\psi$ ist aber nur die erste willkürlich, die zweite ist bestimmt mittels der Gleichung B), welche jetzt die Gestalt hat:

E) $$1+[\varphi(y-\lambda_2 x)]^2+[\psi(y-\lambda_2 x)]^2=0.$$

Die Gleichung:

$$p+\lambda_2 q=\mu_2$$

zerfällt in das System:

$$\frac{dy}{dx}=\lambda_2,\quad \frac{dz}{dx}=\mu_2.$$

Dies hat die Integrale:

$$y-\lambda_2 x=\alpha,$$
$$z-\mu_2 x=\beta,$$

also das allgemeine Integral:

F) $$z=\mu_2 x+F(y-\lambda_2 x).$$

Die Function $F$ ist aber nicht willkürlich, da $z$ noch die Gleichung D) erfüllen muss. In der That erhält man aus $F$:

$$p=\mu_2-\lambda_2 F',$$
$$q=F',$$

und wenn man diese Werthe in D) einsetzt:

G) $$\mu_2-\lambda_2 F'+\varphi\cdot F'=\psi,$$

wodurch $F'$, also der Differenzialquotient von $F$, bestimmt, und $F$ also bis auf eine willkürliche Constante bekannt ist. Demgemäss setzen wir, wenn $\gamma$ diese Constante ist, statt der Gleichung F):

H) $$z=\mu_2 x+F(y-\lambda_2 x)+\gamma.$$

Dies ist das vollständige Integral. Es enthält nämlich die zwei willkürlichen Constanetn $\lambda_2$ und $\gamma$, da $\mu_2$ durch Gleichung C) bestimmt ist. $F(y-\lambda_2 x)$ ist durch Gleichung G) bedingt, und die darin vorkommenden Functionen $\varphi$ und $\psi$ müssen wieder die Relation E) erfüllen. Es bleibt also in H) noch eine willkürliche Function übrig.

Wir haben jetzt aus H) das allgemeine Integral herzuleiten. Dies geschieht in gewöhnlicher Weise, indem man setzt:

J) $$\lambda_2=\chi(\gamma),$$

und ausserdem den Differenzialquotienten der Gleichung H) nach $\gamma$ genommen der Null gleich setzt. — Um diesen zu bilden, bemerke man erst, dass die Func-

tion $F$ nud die Constante $\mu_2$ von $\lambda_2$ abhängig sind. Die Gleichung C) gibt für die letztere:

$$\frac{d\mu_2}{d\lambda_2} = -\frac{\lambda_2}{\mu_2}.$$

Was die Fnnction $F$ anbetrifft, so ist sie dnrch Gleichung G) gegeben, und enthält $\lambda_2$ sowohl involnte in den Fnnctionen $\varphi$ nnd $\psi$, als anch evolnte in den Grössen $\mu_2$ nnd $\lambda_2$, die in G) vorkommen. Man hat aber wegen der Gleichnng G):

$$F' = \frac{\psi - \mu_2}{\varphi - \lambda_2},$$

wo die Functionen $\psi$, $\varphi$ und $F$ die Variable $y - \lambda_2 x$ enthalten, die wir mit $u$ bezeichnen wollen; dann hat man:

K) $$F = \int \frac{\psi(u) - \mu_2}{\varphi(u) - \lambda_2}\, du.$$

Die nntere Grenze kann beliebig genommen werden, also gleich Null sein, da in Gleichung H) schon die entsprechende Integrationsconstante enthalten ist. Nnn hat man:

L) $$\frac{dF}{d\lambda_2} = -x\,\frac{\psi(u) - \mu_2}{\varphi(u) - \lambda_2} + \int \frac{\psi(u) - \mu_2}{[\varphi(u) - \lambda_2]^2}\, du + \frac{\lambda_2}{\mu_2} \int \frac{du}{\varphi(u) - \lambda_2}.$$

Differenziirt man nnn die Gleichnng H) in der That nach $\gamma$, so hat man:

M) $$\left(-\frac{\lambda_2 x}{\mu_2} + \frac{dF}{d\lambda_2}\right)\chi'(\gamma) + 1 = 0.$$

Das allgemeine Integral ist also enthalten in der Gleichung $H$, wenn man $\mu_2$ nnd $\lambda_2$ vermöge der Gleichungen C) nnd J) eliminirt denkt, und $F$ durch die Gleichnng K) bestimmt, in welcher $\varphi$ und $\psi$ wieder dnrch Gleichnng E) verbnnden sind. Es ist dann aus H) nur noch $\gamma$ zu eliminiren, was mittels der Gleichnng $M$) geschicht, wo $\frac{dF}{d\lambda_2}$ dnrch Gleichnng L) gegeben ist. $\varphi$ und $\chi$ sind die beiden willkürlichen Fnnctionen.

16) Erweiternng der Monge'schen Methode anf eine gewisse Klasse nicht linearer Gleichnngen von Ampère.

Die Monge'sche Methode gibt noch Resnltate für eine Klasse nicht linearer Gleichnngen. Dies sind die Gleichungen von der Form:

$$Ar + Bs + Ct + D(rt - s^2) = \varepsilon,$$

wo $A$, $B$, $C$, $D$, $\varepsilon$ Functionen von $x$, $y$, $z$, $p$, $q$ sind.

Diese Erweiternng rührt von Ampère her, nnd ist mitgetheilt im *Journal de l'école polytechnique, cahier* 18.

Geben wir znnächst von den Gleichnngen ans, welche die Fnnctionen $p$, $q$, $r$, $s$, $t$ definiren:

1) $$dz = p\,dx + q\,dy,$$

2) $$dp = r\,dx + s\,dy,$$

3) $$dq = s\,dx + t\,dy,$$

mnltipliciren die zweite mit $t$, die dritte mit $s$ nnd subtrahiren, so erhalten wir:

$$t\,dp - s\,dq = (rt - s^2)\,dx,$$

oder:

4) $$t\,dp - s\,dq = w\,dx,$$

wenn wir setzen:

5) $$rt - s^2 = w,$$

während die gegebene Gleichnng die Gestalt annimmt:

5a) $$Ar + Bs + Ct + Dw = \varepsilon.$$

Die Gleichungen 5) nnd 5a) sind der gegebenen vollständig gleichbedentend. Von den Gleichnngen 2), 3) und 4) ist jede eine notbwendige Folge der beiden andern.

Man kann also die Aufgabe such so anffassen, als wenn die Integration der gleichzeitigen linearen und totalen Gleichungen 1), 2), 3), 4) verlangt wäre, wo die Variablen durch die Bedingung 5) und 5a) verbunden sind. Untersuchen wir jetzt die Ausdrücke:

$$\delta p - r\,\delta x - s\,\delta y, \qquad \delta q - s\,\delta x - t\,\delta y, \qquad t\,\delta p - s\,\delta q - w\,\delta x,$$

und bemerken, dass, wenn dieselben alle drei gleich Null werden, und ausserdem:

$$\delta z - p\,\delta x - q\,\delta y = 0$$

diese Gleichungen mit dem gegebenen System übereinstimmen, man also jede Verbindung unter den Variablen, vermittelst deren man dies erreicht, als ein Integral unsers Systems betrachten kann. Es sind mithin auch 5) und 5a) als Integrale anzusehen.

Wir multipliciren die ersten beiden unserer Ausdrücke bezüglich mit den unbekannten $\lambda$ und $\mu$, und addiren sie zur dritten. Dies gibt, wenn man $w$ aus Gleichung 5a) bestimmt, folgende identische Relation:

6) $$t\,\delta p - s\,\delta q - w\,\delta x + \lambda(\delta p - r\,\delta x - s\,\delta y) + \mu(\delta q - s\,\delta x - t\,\delta y) = -\frac{\varepsilon}{D}\,\delta x + \lambda\,\delta p$$
$$+ \mu\delta q + r\left[\frac{A}{D}\,\delta x - \lambda\,\delta x\right] + s[-\delta q + \frac{B}{D}\,\delta x - \lambda\,\delta y - \mu\,\delta x] + t[\delta p + \frac{C}{D}\,\delta x - \mu\delta y].$$

Der mit $r$ multiplicirte Theil der rechten Seite wird gleich Null, wenn man $\lambda$ mittels der Gleichung bestimmt:

$$\lambda = \frac{A}{D}.$$

Die mit $s$ und $t$ multiplicirten Ausdrücke werden nun:

$$\triangle(\alpha) = -\delta q + \frac{B - \mu D}{D}\,\delta x - \frac{A}{D}\,\delta y,$$

$$\triangle(\beta) = \delta p + \frac{C}{D}\,\delta x - \mu\,\delta y.$$

$\triangle(\alpha)$ und $\triangle(\beta)$ sind blosse Symbole, und bedeuten nicht etwa vollständige Differenziale. Eliminirt man $\delta y$, so kommt:

$$\mu\,\triangle(\alpha) - \frac{A}{D}\triangle(\beta) = -\mu\,\delta q - \frac{A}{D}\,\delta p + \left[\frac{\mu}{D}(B - \mu D) - \frac{CA}{D^2}\right]\delta x.$$

Sei ferner:

$$\triangle(\gamma) = -\frac{\varepsilon}{D}\,\delta x + \frac{A}{D}\,\delta p + \mu\,\delta q$$

gleich dem von $r$, $s$, $t$ freien Theile der rechten Seite unserer Relation. Man erhält dann durch Addition der 2 letzten Gleichungen:

$$\triangle(\gamma) + \mu\triangle(\alpha) - \frac{A}{D}\triangle(\beta) = \delta x\left[\frac{\mu}{D}(B - \mu D) - \frac{CA}{D^2} - \frac{\varepsilon}{D}\right],$$

oder, wenn man das noch unbestimmte $\mu$ durch die Gleichung definirt:

$$\frac{\mu}{D}(B - \mu D) - \frac{CA}{D^2} - \frac{\varepsilon}{D} = 0,$$

so ist:

7) $$\triangle(\gamma) + \mu\triangle(\alpha) - \frac{A}{D}\triangle(\beta) = 0.$$

Die Bedingungsgleichung aber verwandeln wir in die folgende:

8) $$l^2 - Bl + AC + D\varepsilon = 0,$$

wo $l = \mu D$ gesetzt wurde.

Durch Einsetzen dieser Werthe ergibt sich:

$$\triangle(\alpha) = \frac{-D\,\delta q + (B - l)\,\delta x - A\,\delta y}{D},$$

$$\triangle(\beta)=\frac{D\,\delta p+C\delta x-l\,\delta y}{D},$$

während $\triangle(\gamma)$ aus der Gleichung 7) zu entnehmen ist. Die Gleichung 6) wird dann, wenn man erst die erste Wurzel $l_1$ der Gleichung 8), und dann die zweite $l_2$ nimmt:

9) $$t\delta p-s\delta q-w\delta x+\frac{A}{D}(\delta p-r\delta x-s\delta y)+\frac{l_1}{D}(\delta q-s\delta x-t\delta y)$$
$$=\frac{rD-l_1}{D^2}(-D\delta q+l_1\delta x-A\delta y)+\frac{tD+A}{D^2}(D\delta p+C\delta x-l_1\delta y),$$

9a) $$t\delta p-s\delta q-w\delta x+\frac{A}{D}(\delta p-r\delta x-s\delta y)+\frac{l_2}{D}(\delta q-s\delta x-t\delta y)$$
$$=\frac{rD-l_2}{D^2}(-D\delta q+l_1\delta x-A\delta y)+\frac{tD+A}{D^2}(D\delta p+C\delta x-l_2\delta y)$$

Setzt man also die Ausdrücke rechts in 9) und 9a) der Null gleich, so werden auch die Ausdrücke links der Null gleich werden, d. h. man wird haben:

10) $$dq-s\,dx-t\,dy=0,$$

und:

$$t\,dp-s\,dq-w\,dx+\frac{A}{D}(dp-r\,dx-s\,dy)=0.$$

Wenn man aber aus beiden Gleichung $dq$ eliminirt, erhält man:

$$tdp-s^2\,dx-ts\,dy-w\,dx+\frac{A}{D}(dp-rdx-s\,dy)=0,$$

und wenn man $w$ mittels der Gleichung 5) wegschafft:

$$\left(t+\frac{A}{D}\right)dp-r\left(t+\frac{A}{D}\right)dx-s\left(t+\frac{A}{D}\right)dy=0,$$

d. h.

$$dp-r\,dx-s\,dy=0,$$

und es ist dann wegen der zweiten Gleichung 10) auch:

$$t\,dp-s\,dq-w\,dx=0.$$

Das System 10) ist also mit den Gleichungen 2), 3), 4) völlig identisch. Setzt man noch voraus, dass:

$$dz=p\,dx+q\,dy$$

sei, wie wir dies ja von vorn herein angenommen haben, so kommt also die völlige Integration der Gleichungen 1), 2), 3), 4) darauf heraus, die rechten Seiten der Gleichungen 9) und 9a) der Null gleich zu machen. Dies geschieht nun ganz in der Weise, die wir bei Integration der Monge'schen Gleichung kennen gelernt haben, d. h. aus den Systemen:

I) $$-Ddq+l_2dx-A\,dy=0,$$
$$Ddp+C\,dx-l_1dy=0,$$

und:

II) $$-Ddq+l_1dx-Ady=0,$$
$$Ddp+C\,dx-l_2dy=0,$$

wo $l_1$ und $l_2$ die Wurzeln der Gleichung:

$$l^2-Bl+AC+Dt=0$$

sind. Leitet man ab je 2 Integrale $u$, $v$ und $u_1$, $v_1$, und setzt: A) $v=\varphi(u)$, $v_1=\psi(u_1)$, aus welchen man $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ bestimmt, und den allgemeinen Ausdruck für $z$ findet, oder B), man bedient sich nur der partiellen Differenzialgleichung erster Ordnung $v=\varphi(u)$, durch deren Integration man das vollständige und hieraus das allgemeine Integral ermittelt, auch kann man C) die Gleichungen

$v = \varphi(u)$, $v_1 = \text{const.}$, zu diesem Behufe gebrauchen, aus denen man wieder $p$ und $q$ ermittelt, das vollständige Integral mit einer willkürlichen Function und 2 Constanten, und aus diesem das allgemeine mit 2 willkürlichen Functionen findet.

Für den Ausnahmefall, wo $l_1 = l_2$, also:

$$B^2 = 4(AC + Dt),$$

und:

$$l = \frac{B}{2}$$

ist, kann man wie bei der Monge'schen Gleichung noch immer die Methode B) anwenden, indess kann man hierbei sich auch eines Verfahrens bedienen, welches grade im speciellen Falle der Monge-schen Gleichung illusorisch sein würde.

Setzt man nämlich die beiden Integrale:

$$u = a, \quad v = \varphi(a),$$

eine Annahme, die offenbar die rechte Seite unserer Gleichung der Null gleich macht, wenn $a$ eine willkürliche Constante ist, so hat man ebenfalls Ausdrücke für $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$, welche eine Constante $a$ und eine willkürliche Function $\varphi$ enthalten. Durch Integration dieser Gleichungen, die einer totalen mit 3 Variablen entsprechen, welche der Integrabilitäts-Bedingung genügt, erhält man also ein neues Integral mit 2 Constanten und einer willkürlichen Function:

$$f[x, y, z, a, \varphi(a), b] = 0,$$

aus der man das allgemeine Integral in der gewöhnlichen Weise ableitet, indem man:

$$b = \psi(a),$$

und:

$$\frac{df}{da} = 0$$

setzt.

Illusorisch wird diese Methode bei der Monge'schen Gleichung aus folgendem Grunde:

Von den beiden Gleichungen des Systems I) oder II), aus denen 2 Integrale abgeleitet wurden, war die eine ganz von $p$ und $q$ frei, während im allgemeinen Falle, wie er hier betrachtet wird, die eine $p$, die andere $q$ enthält. Im ersteren Falle misslingt es daher, für $p$ und $q$ oder $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ wirklich Werthe abzuleiten. Es waren nämlich die Gleichungen des Systems I) oder II) in Abschnitt 14) für den Fall, wo $\lambda_1 = \lambda_2$ ist:

$$dp + \lambda\, dq - \frac{t\lambda}{C}\, dy = 0, \quad dy - \lambda\, dx = 0,$$

also, falls $u$ und $v$ 2 Integrale dieser Gleichungen sind:

$$\partial p + \lambda\, \partial q - \frac{t\lambda}{C}\, \partial y = M\, \partial u + N\, \partial v,$$

$$\partial y - \lambda\, \partial x = M'\partial u + N'\partial v,$$

wo $M$, $N$, $M'$, $N'$ zu bestimmende Coefficienten sind.

Da diese Gleichungen identisch, d. h. unabhängig von den Relationen zwischen $x$, $y$, $z$, $p$ und $q$ stattfinden, so hat man:

$$M\frac{\partial u}{\partial p} + N\frac{\partial v}{\partial p} = 1, \quad M\frac{\partial u}{\partial q} + N\frac{\partial v}{\partial q} = \lambda,$$

$$M'\frac{\partial u}{\partial p} + N'\frac{\partial v}{\partial p} = 0, \quad M'\frac{\partial u}{\partial q} + N'\frac{\partial v}{\partial q} = 0.$$

Denkt man sich zunächst $x$, $y$, $z$ constant, so erhält man:

$$\frac{\partial u}{\partial p} = \frac{N'}{N'M - NM'}, \quad \frac{\partial u}{\partial q} = \frac{\lambda N'}{N'M - NM'},$$

$$\frac{\partial v}{\partial p} = -\frac{M'}{N'M - NM'}, \quad \frac{\partial v}{\partial q} = -\frac{\lambda M'}{N'M - NM'}.$$

Setzt man:

$$\frac{N'}{N'M - NM'} = a, \quad \frac{\lambda N'}{N'M - NM'} = b,$$

so ist also:

$$du = a\,dp + b\,dq, \qquad dv = = \frac{M'}{N}(a\,dp + b\,dq).$$

Erhält man also durch Integration der ersten Gleichung:

$$u = f(p, q) + \alpha,$$

wo sowohl die Function $f$ als die Constante $\alpha$ noch von $x$, $y$, $z$ abhängig ist, so wird auch sein:

$$dv = -\frac{M'}{N} d(f),$$

eine Gleichung, die nur integrabel ist, wenn $-\frac{M'}{N}$ einer Function von $f$ gleich ist, die wir mit $\varphi'(f)$ bezeichnen.

Mithin hat man:

$$v = \varphi(f) + \beta.$$

In dieser Gleichung enthält nur $f$ die Grössen $p$ und $q$, also ist es unmöglich, aus den Werthen von $u$ und $v$, die man Constanten gleichsetzt, $p$ und $q$ abzuleiten. Selbstverständlich ist diese Beschränkung bei der Ampère'schen Gleichung aber nicht vorhanden.

Beispiele.

I) Sei gegeben:

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t + \frac{w}{(1+p^2+q^2)^{\frac{1}{2}}} = -(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Die Gleichung zur Bestimmung von $l$ ist hier:

$$l^2 + 2pq\,l + (1+q^2)(1+p^2) - (1+p^2+q^2) = 0,$$

oder:

$$l^2 + 2pq\,l + p^2q^2 = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$l = -pq.$$

Da beide Wurzeln gleich sind, so findet die zuletzt gegebene Methode statt.

Das System I) oder II) ist nun:

$$\frac{dq}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} + pq\,dx + (1+q^2)\,dy = 0,$$

$$\frac{dp}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} + (1+p^2)\,dx + pq\,dy = 0$$

Wir eliminiren $dy$ und erhalten:

$$\frac{pq\,dq - (1+q^2)\,dp}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} + (p^2q^2) - (1+p^2)(1+q^2)\,dx = 0,$$

d. h.

$$dx = \frac{pq\,dq - (1+q^2)\,dp}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}.$$

Diese Gleichung erfüllt die Integrabilitäts-Bedingung. Es ist nämlich:

$$\frac{\partial\left(\frac{-p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\right)}{\partial p} = \frac{-(1+q^2)}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}},$$

$$\frac{\partial\left(\frac{-p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}}\right)}{\partial q} = \frac{pq}{\sqrt{(1+p^2+q^2)^3}}.$$

also:

$$x + \frac{p}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = a.$$

Ebenso erhält man, wenn man $dx$ eliminirt, in ganz derselben Weise:

$$y + \frac{q}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}} = b.$$

Aus diesen beiden Gleichungen sind $p$ und $q$ zu entwickeln. Man erhält:

$$(a-x)^2(1+p^2+q^2)=p^2,$$
$$(b-y)^2(1+p^2+q^2)=q^2,$$

mithin:

$$(a-x)^2(1+q^2)=p^2[1-(a-x)^2],$$
$$(b-y)^2+[(b-y)^2-1]q^2=-p^2(b-y)^2,$$

also:

$$q=\frac{b-y}{\sqrt{1-(x-a)^2+(y-b)^2}},$$

und ebenso:

$$p=\frac{a-x}{\sqrt{1-(x-a)^2+(y-b)^2}},$$

d. h.:

$$dz=\frac{(a-x)\,dx+(b-y)\,dy}{\sqrt{1-(x-a)^2-(y-b)^2}},$$

also durch Integration:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1.$$

Hieraus wird das allgemeine Integral gewonnen, wenn man: $b=\varphi(a)$, $c=\psi(a)$, und das Differenzial der obigen Gleichung gleich Null setzt, also:

$$(x-a)+[y-\varphi(a)]\varphi'(a)+[z-\psi(a)]\psi'(a)=0.$$

II) Es seien ferner in der allgemeinen Gleichung:

$$Ar+Bs+Ct+Dw=\varepsilon$$

die Grössen $A$, $B$, $C$, $D$, $\varepsilon$ sämmtlich constant. Nach Auflösung der Gleichung:

$$l^2-Bl+AC+D\varepsilon=0,$$

wo also $l_1$ und $l_2$ Constanten sind, hat man als Integrale des Systems I):

$$-Dq+l_2x-Ay=\alpha, \qquad Dp+Cx-l_1y=\beta,$$

aus welchen man bildet:

$$-Dq+l_2x-Ay=\varphi(Dp+Cx-l_1y).$$

Dem System II) entnehmen wir gemäss der mit C) bezeichneten Methode nur das Integral:

$$Dp+Cx-l_2y=a,$$

und aus beiden Gleichungen ergibt sich:

$$p=\frac{a-Cx+l_2y}{D},$$

$$q=\frac{l_2x-Ay-\varphi[a+(l_2-l_1)y]}{D}.$$

Die erste Gleichung integrirt gibt, indem man nur $x$ veränderlich denkt:

$$z=\frac{a}{D}x+\frac{l_2}{D}yx-\frac{1}{2}\frac{Cx^2}{D}+\text{const.},$$

also wenn man $x=0$ setzt, das Hauptintegral:

$$z'=z-\frac{a}{D}x+\frac{1}{2}\frac{Cx^2}{D}-\frac{l_2xy}{D},$$

und der Werth von $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ gibt, wenn man darin $x=0$, $z=z'$ setzt:

$$z'=-\frac{1}{2}\frac{Ay^2}{D}-\frac{\varphi[a+(l_2-l_1)y]}{D(l_2-l_1)}+b,$$

d. h. wenn man:

$$\frac{q}{l_2 - l_1} = f, \qquad \text{und:} \quad b = -\psi(a)$$

setzt:

$$z - \frac{a}{D}x + \frac{1}{2}\frac{Cx^2}{D} + \frac{1}{2}\frac{Ay^2}{D} - \frac{l_2 xy}{D} + \frac{f[a+(l_2-l_1)y]}{D} + \psi(a) = 0,$$

wo noch zur Bestimmung von $a$ das Differenzial nach $a$ gleich Null zu setzen ist, also:

$$-\frac{x}{D} + \frac{f'[a+(l_2-l_1)y]}{D} + \psi'(a) = 0.$$

Sowohl die Monge'sche als die Ampère'sche Methode beziehen sich nicht auf alle Gleichungen von der angegebenen Form, da immer eine Integrabilitätsbedingung zu erfüllen ist. Vielmehr verlangt die Anwendbarkeit dieser Methoden, dass die in Rede stehende Differenzialgleichung ein Integral erster Ordnung besitze, d. h. eine Beziehung zwischen $x$, $y$, $z$, $p$ und $q$, in welcher eine willkürliche Function enthalten ist. Eine solche ist nicht bei jeder partiellen Differenzialgleichung zweiter Ordnung vorhanden. So z. B. kann die in Abschnitt 13) behandelte, sehr einfache Gleichung:

$$r - t = \frac{2}{x}p$$

nicht auf diese Weise behandelt werden, obgleich sie ein Integral von einfacher Form mit 2 willkürlichen Functionen besitzt. In der That lässt sich, wenn man das Integral dieser Gleichung:

$$z = x[\varphi'(x+y) + \psi'(x-y)] - \varphi(x+y) - \psi(x-y),$$

nach $x$ und $y$ differenziirt, aus den beiden so erhaltenen und der Integral-Gleichung keine der willkürlichen Functionen $\varphi$ oder $\psi$ eliminiren.

17) Erweiterung der Monge'schen Methode auf Gleichungen von höherer als der zweiten Ordnung.

Die Erweiterung der Monge'schen und selbst der Ampère'schen Methode auf Gleichungen höherer als zweiter Ordnung, und auf solche von der zweiten Ordnung, die mehr als zwei unabhängige Variablen haben, hat bei der hier angewandten Entwickelungsweise keine Schwierigkeit. Indess werden die Grenzen ihrer Anwendbarkeit immer enger, da sich die Bedingungen der Brauchbarkeit vermehren. Jedoch scheint es der Vollständigkeit wegen angemessen, auch auf diese Erweiterungen einzugehen.

Hierbei beschränken wir uns jedoch auf den Fall einer Gleichung $n$ter Ordnung mit 2 unabhängigen Variablen und einer Gleichung zweiter Ordnung mit deren beliebig vielen, da jeder andere Fall, obgleich in der Ausführung nicht schwierig, doch einer allgemeinen algorithmischen Darstellung nur schwer zugänglich ist.

Sei also zunächst gegeben die Gleichung:

1) $$A_1 q_1 + A_2 q_2 + \ldots + A_s q_s + A_{s+1} q_{s+1} = A,$$

wo $q_1, q_2 \ldots q_{s+1}$ die $s$ten Differenzialquotienten einer Function $z$ von $x_1$ und $x_2$, also die Grössen:

$$\frac{\partial^s z}{\partial x_1^s}, \; \frac{\partial^s z}{\partial x_1^{s-1}\partial x_2}, \; \frac{\partial^s z}{\partial x_1^{s-2}\partial x_2^2} \; \ldots \; \frac{\partial^s z}{\partial x_2^s}$$

vorstellen, $A_1, A_2 \ldots A_{s+1}$, $A$ aber Functionen von $z$, $x_1$, $x_2$ und allen Differenzialquotienten sein sollen, welche von einer niedrigern als von der $s$ten Ordnung sind. Von diesen bezeichnen wir im Besondern noch die der $s-1$ten Ordnung, also:

$$\frac{\partial^{s-1} z}{\partial x_1^{s-1}}, \; \frac{\partial^{s-1} z}{\partial x_1^{s-2}\partial x_2} \; \ldots \; \frac{\partial^{s-1} z}{\partial x_2^{s-1}},$$

bezüglich durch:

$$p_1, p_2 \ldots p_s,$$

so haben wir zu der Gleichung folgendes System:

2)
$$\begin{aligned}
dp_1 &= q_1\, dx_1 + q_2\, dx_2,\\
dp_2 &= q_2\, dx_1 + q_3\, dx_2,\\
dp_3 &= q_3\, dx_1 + q_4\, dx_2,\\
&\;\;\vdots\\
dp_s &= q_s\, dx_1 + q_{s+1}\, dx_2.
\end{aligned}$$

Wir multipliciren diese Gleichungen 2) bezüglich mit den unbestimmten Factoren $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_s$, und addiren sie. Es kommt:

$$\sum_{t=1}^{t=s} (\lambda_t dp_t - \lambda_t q_t dx_1 - \lambda_t q_{t+1} dx_2) = 0,$$

und nach unserem früheren Verfahren sehen wir von der rechten Seite dieser Gleichung zunächst ganz ab, und unterwerfen die linke einer identischen Umformung, indem wir $q_1, q_2 \ldots q_s$ als Factoren betrachten und Gleichung 1) berücksichtigen. Wir erhalten:

3)
$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{t=s} (\lambda_t \partial p_t - \lambda_t q_t \partial x_1 = \lambda_t q_{t+1} \partial x_2) = \\
\sum_{t=1}^{t=s} (\lambda_t \partial p_t) - \lambda_s \frac{A}{A_{s+1}} \partial x_2 - q_1 (\lambda_1 \partial x_1 - \lambda_s \frac{A_1}{A_{s+1}} \partial x_2) \\
- q_2 (\lambda_2 \partial x_1 + \lambda_1 \partial x_2 - \lambda_s \frac{A_2}{A_{s+1}} \partial x_2) \\
- q_3 (\lambda_3 \partial x_1 + \lambda_2 \partial x_2 - \lambda_s \frac{A_3}{A_{s+1}} \partial x_2) \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\
- q_s (\lambda_s \partial x_1 + \lambda_{s-1} \partial x_2 - \lambda_s \frac{A_s}{A_{s+1}} \partial x_2).
\end{aligned}$$

Der Ausdruck rechts besteht aus $s+1$ Theilsätzen. Nehmen wir an, dass dieselben alle der Null gleich seien, so lässt sich aus der Gleichung:

$$\lambda_1 dx_1 - \lambda_s \frac{A_1}{A_{s+1}} dx_2$$

das Verhältniss $dx_2 : dx_1$ bestimmen, und indem man dieses in die mit $q_2, q_3 \ldots q_s$ multiplicirten Ausdrücke setzt, erhält man endliche Gleichungen zur Bestimmung der Verhältnisse: $\frac{\lambda_1}{\lambda_s}, \frac{\lambda_2}{\lambda_s} \ldots \frac{\lambda_{s-1}}{\lambda_s}$, nämlich:

$$\lambda_2 \lambda_s A_1 + \lambda_1^2 A_{s+1} - \lambda_s \lambda_1 A_2 = 0,$$
$$\lambda_3 \lambda_s A_1 + \lambda_2 \lambda_1 A_{s+1} - \lambda_s \lambda_1 A_3 = 0,$$

$$\lambda_4 \lambda_s A_1 + \lambda_s \lambda_1 A_{s+1} - \lambda_s \lambda_1 A_4 = 0,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\lambda_s^2 A_1 + \lambda_{s-1} \lambda_1 A_{s+1} - \lambda_s \lambda_1 A_s = 0.$$

Eine der Unbekannten $\lambda$, z. B. $\lambda_s$, kann der Einheit gleich gesetzt werden. Dies gibt:

4)
$$\lambda_2 A_1 + \lambda_1^2 A_{s+1} - \lambda_1 A_2 = 0,$$
$$\lambda_3 A_1 + \lambda_1 \lambda_2 A_{s+1} - \lambda_1 A_3 = 0,$$
$$\lambda_4 A_1 + \lambda_1 \lambda_3 A_{s+1} - \lambda_1 A_4 = 0$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$\lambda_{s-1} A_1 + \lambda_1 \lambda_{s-2} A_{s+1} - \lambda_1 A_{s-1} = 0,$$
$$A_1 + \lambda_1 \lambda_{s-1} A_{s+1} - \lambda_1 A_s = 0.$$

Wir multipliciren diese Gleichungen bezüglich mit:

$$(-1)^{s-2} \lambda_1^{s-2} A_{s+1}^{s-2},\ (-1)^{s-3} \lambda_1^{s-3} A_{s+1}^{s-3} A_1,$$
$$(-1)^{s-4} \lambda_1^{s-4} A_{s+1}^{s-4} A_1^2, \ldots -\lambda_1 A_{s+1} A_1^{s-3},\ A_1^{s-2}$$

und addiren sie sämmtlich; es ergibt sich dann:

$$(-1)^{s-2} \lambda_1^s A_{s+1}^{s-1}\ (-1)^{s-1} \lambda_1^{s-1} A_{s+1}^{s-2} A_2$$
$$(-1)^{s-2} \lambda_1^{s-2} A_{s+1}^{s-3} A_1\ A_3\ (-1)^{s-3} \lambda_1^{s-3} A_{s+1}^{s-4} A_1^2 A^4 \ldots$$
$$\ldots (-1)^2 \lambda_1^2 A_{s+1} A_1^{s-3} A_{s-1} - \lambda_1 A_1^{s-2} A_s + A_1^{s-1} = 0.$$

Dies ist eine Gleichung vom Grade $s$, welche zur Bestimmung von $\lambda_1$ dient. Wir schreiben sie jedoch lieber unter der Form:

5)
$$\lambda_1^s - \frac{A_2}{A_{s+1}} \lambda_1^{s-1} + \frac{A_1 A_3}{A_{s+1}^2} \lambda_1^{s-2} - \frac{A_1^2 A_4}{A_{s+1}^3} \lambda_1^{s-3} + \ldots$$
$$+ (-1)^{s-2} \frac{A_1^{s-3} A_{s-1}}{A_{s+1}^{s-2}} \lambda_1^2 + (-1)^{s-1} \frac{A_1^{s-2} A_s}{A_{s+1}^{s-1}} \lambda_1$$
$$+ (-1)^s \frac{A_1^{s-1}}{A_{s+1}^{s-1}} = 0.$$

Ist $\lambda_1$ bestimmt, so ergeben sich mittels der Gleichungen 4) die Grössen $\lambda_2$, $\lambda_3 \ldots \lambda_{s-1}$ als eindeutig. Die erste Gleichung bestimmt nämlich $\lambda_2$, die folgende dann $\lambda_3$ u. s. f. durch rationale Functionen von $\lambda_1$. Sonach stellt die Gleichung 3) ein System von $s$ Gleichungen vor, und hieraus folgt, dass die mit $\lambda_1$, $\lambda_2 \ldots \lambda_s$ multiplicirten Theile der linken Seite einzeln verschwinden, d. h. dass die Gleichungen 2) erfüllt sind, wenn in allen $s$ Gleichungen des Systems die rechten Seiten verschwinden. Dies aber findet statt, wenn man setzt:

6)
$$\sum_{t=1}^{t=s} (\lambda_t dp_t) - \frac{A}{A_{s+1}} dx_2 = 0,$$

$$\lambda_1 dx_1 - \frac{A_1}{A_{s+1}} dx_2 = 0.$$

Falls man nun für jede der $s$ Werthe von $\lambda_1$, welche die Gleichung 5) erfüllen, aus einem Systeme 6) entweder allein oder in Verbindung mit denjenigen Gleichungen, welche die Grössen $p$ (die $s-1$ ten Differenzialquotienten von $z$) definiren, 2 Integrale $u$ und $v$ ableiten kann, was natürlich die Erfüllung von Integrabilitätsbedingungen erfordert, so setzt man wie in den vorigen Abschnitten wieder $v = \varphi(u)$ und hat ein erstes Integral, welches allerdings noch die Differenzialquotienten von $z$ bis zu der $s-1$ ten Ordnung enthält; mit diesem Integrale aber kann man weiter die Integration fortsetzen, wenn es die Form 1) hat.

Leitet man aber aus jedem der $s$ Systeme 2 Integrale $u_t$ und $v_t$ und demgemäss eins von der Form $v_t = \varphi_t(u_t)$ ab, so kann man mittels dieser $s$ Gleichungen die $s-1$ ten Differenzialquotienten entwickeln. Sind nun deren 2:

$$\frac{\partial^{s-1}z}{\partial x_1{}^r dx_2{}^{s-1-r}} = \alpha, \quad \frac{\partial^{s-1}z}{\partial x_1{}^{r-1}\partial x_2{}^{s-1-r+1}} = \beta,$$

so erhält man durch Integration dieser Gleichungen, welche auf 2 totale Differenzialgleichungen mit 2 Variablen führen: $\frac{\partial^{s-2}z}{\partial x_1{}^{r-1} dx_2{}^{s-1-r}}$, also in derselben Weise alle $s-2$ten Differenzialquotienten. Mit diesen setzt man das Verfahren fort, bis man $z$ selbst erhält, und man hat dann das allgemeine Integral, da $s$ willkürliche Functionen $\varphi_1, \varphi_2 \dots \varphi_s$ darin enthalten sind.

Dass die Fälle, wo dies Verfahren angewandt erscheint, nicht so häufig sein können, wie bei der Monge'schen Gleichung liegt an der Allgemeinheit der Gleichungen 6), welche mit steigender Ordnung der Gleichung auch immer mehr Variable enthalten. Der Gleichung 5) kann man übrigens auch eine einfachere Form geben. Setzen wir nämlich:

$$\lambda_1 = -\frac{A_1 l}{A_{s+1}},$$

so wird Gleichung 5):

7) $$A_1 l^s + A_2 l^{s-1} + A_3 l^{s-2} + \dots + A_s l + A_{s+1} = 0,$$

während aus den Gleichungen 4) erhalten wird:

$$\lambda_t = l(\lambda_{t-1} - \frac{A_t}{A_{s+1}}),$$

wo $t$ alle Werthe von 1 bis $s$ annimmt, und $\lambda_s = 1$ ist, $\lambda_0$ aber $= 0$ ist.

Aus dieser Gleichung folgt aber:

8) $$\lambda_1 = -\frac{A_1 l}{A_{s+1}},$$

$$\lambda_2 = -\frac{A_1 l^2 + A_2 l}{A_{s+1}},$$

$$\lambda_3 = -\frac{A_1 l^3 + A_2 l^2 + A_3 l}{A_{s+1}},$$

$$\vdots$$

$$\lambda_t = -\frac{A_1 l^t + A_2 l^{t-1} + \dots + A_t l}{A_{s+1}} \text{ u. s. w.}$$

und die Gleichungen 6) nehmen die Form an:

$$l\,dx_1+dx_2=0,$$

$$\sum_{t=1}^{t=s}(\lambda_t dp_t)+\frac{A\,l\,dx_1}{A_{s+1}}=0.$$

Setzt man für die $s$ Werthe von $l$ entsprechend $l^{(1)}, l^{(2)} \ldots l^{(s)}$, und ebenso für die durch die Gleichungen 8) gegebenen Werthe von $\lambda_t$: $\lambda_t^{(1)}, \lambda_t^{(2)} \ldots \lambda_t^{(s)}$, so hat man statt der eben gefundenen Gleichungen deren $2s$ von der Form:

9)
$$l^{(r)}dx_1+dx_2=0,$$

$$\sum_{t=1}^{t=s}(\lambda_t^{(r)}dp_t)+\frac{A\,l^{(r)}}{A_{s+1}}dx_1=0.$$

Um das letztere System noch etwas zu vereinfachen, wollen wir setzen:

$$m_t=-\frac{A_s+t\lambda_t}{t},$$

also:

A)
$$m_1=A_1,$$
$$m_2=A_1\,l+A_2,$$
$$m_3=A_1\,l^2+A_2\,l+A_3$$
$$\vdots$$
$$m_t=A_1\,l^{t-1}+A_2\,l^{t-2}+\ldots+A_t,$$
$$\vdots$$

indem wir wieder je nach der Wahl der Wurzel $l$, auf welche sich die Grössen $m_t$ beziehen, dieselben mit:

$$m_t^{(1)}, m_t^{(2)} \ldots m_t^{(s)}$$

bezeichnen. Man hat dann das System:

10)
$$\sum_{t=1}^{t=s} m_t^{(r)}dp_t=A\,dx_1,$$

und jede Gleichung des Systems 9) ist mit der entsprechenden des Systems 10) zu verbinden und daraus, wenn dies möglich ist, 2 Integrale abzuleiten.

Beispiel.

Seien $A_1, A_2 \ldots A_{s+1}$ Constanten, $A$ aber eine Function von $x_1$ und $x_2$, so gibt jede der Gleichungen 9) und 10) ein Integral. Nämlich:

$$l^{(r)}x_1+x_2=\alpha,$$

$$\sum_{t=1}^{t=s} m_t^{(r)}\,p_t=B_r.$$

Die Grösse $B_r$ wird folgendermaassen gefunden. Man setzt in $A$ statt $x_2$ den aus dem ersten Integrale gewonnenen Werth $\alpha-l^{(r)}x_1$, dann ist:

$$B_r=\int A\,dx_1.$$

Nach Auffindung dieses Integrals ist für $\alpha$ wieder $l_1^{(r)}x_1+x_2$ zu setzen.

Jede Gleichung des Systems giebt also ein anderes $B_r$, da die Grössen $l^{(r)}$ verschieden sind.

Aus je 2 Integralen eines Systems erlangen wir nun eins, welches eine willkürliche Function enthält, nämlich:

$$\sum_{t=1}^{t=s} m_t^{(r)} p_t = B_r + \varphi_r\,(l^{(r)}x_1+x_2).$$

Die Coefficienten $m_t^{(r)}$ sind der Art, dass man leicht die Grössen $p_t$ entwickeln kann. Setzt man nämlich vor der Hand:

$$B_r+\varphi_r=\alpha_r,$$

so hat man $s$ Gleichungen von der Form:

$$\sum_{t=1}^{t=s} m_t^{(r)} p_t = \alpha_r,$$

wo $r$ alle Werthe von 1 bis $s$ annimmt.

Setzen wir jetzt:

$$p_t=\sum_{q=1}^{q=s} s_q \frac{\alpha_q}{l^{(q)\,t-1}},$$

wo die Grössen $s_q$ zu bestimmen sind, so hat man, wenn man in das System linearer Gleichungen einsetzt:

$$\alpha_r=\sum_{t=1}^{t=s}\frac{s_1\alpha_1 m_t^{(r)}}{l^{(1)\,t-1}}+\sum_{t=1}^{t=s}\frac{s_2\alpha_2 m_t^{(r)}}{l^{(2)\,t-1}}+\ldots\ldots+\sum_{t=1}^{t=s}\frac{s_q\alpha_q m_t^{(r)}}{l^{(q)\,t-1}}+\ldots$$
$$+\sum_{t=1}^{t=s}\frac{s_s\alpha_s m_t^{(r)}}{l^{(q)\,t-1}}.$$

Nun ist, da $s_q$ und $\alpha_q$ innerhalb jeder Summe unverändert bleiben:

$$\sum_{t=1}^{t=s}\frac{m_t^{(r)}}{l^{(q)\,t-1}}=A_1\left(1+\frac{l^{(r)}}{l^{(q)}}+\frac{l^{(r)2}}{l^{(q)2}}+\ldots+\frac{l^{(r)\,s-1}}{l^{(q)\,s-1}}\right)+\frac{A_2}{l^{(q)}}\left(1+\frac{l^{(r)}}{l^{(q)}}+\ldots\right.$$
$$\left.+\frac{l^{(r)\,s-2}}{l^{(q)\,s-2}}\right)+\ldots+\frac{A_{s-1}}{l^{(q)\,s-2}}\left(1+\frac{l^{(r)}}{l^{(q)}}\right)+\frac{A_s}{l^{(q)\,s-1}}.$$

Sind $r$ und $q$ von einander verschieden, so ergiebt sich hieraus:

$$\sum_{t=1}^{t=s}\frac{m_t^{(r)}}{l^{(q)\,t-1}}+\frac{1}{l^{(q)\,s-1}\,(l^{(q)}-l^{(r)})}[A_1(l^{(q)s}-l^{(r)s})+A_2\,(l^{(q)\,s-1}-l^{(r)\,s-1})$$
$$+\ldots+A_s(l^{(q)}-l^{(r)})],$$

und da $l^{(q)}$ und $l^{(r)}$ Wurzeln der Gleichung 7) sind, so ergiebt sich hierfür der Werth $A_{s+1}-A_{s+1}=0$.

Es verschwinden also auf der linken Seite unserer Gleichung alle Glieder, wo $q$ von $r$ verschieden ist. Für $q=r$ findet man direct:

$$\sum_{t=1}^{t=s} \frac{m_t^{(r)}}{l^{(r)t-1}} = (s A_1 l^{(r)s-1} + (s-1) A_2 l^{(r)s-2} + \dots$$

$$+ 2 A_{s-1} l^{(r)} + A_s) \frac{1}{l^{(r)s-1}}.$$

Bezeichnet man die linke Seite der Gleichung 7) mit $F(l)$, so ist also:

$$\sum_{t=1}^{t=s} \frac{m_t^{(r)}}{l^{(r)s-1}} = F'(l^{(r)}),$$

mithin:

$$\alpha_r = \frac{s_r \alpha_r F'(l^{(r)})}{l^{(r)s-1}},$$

und:

$$s_r = \frac{l^{(r)s-1}}{F'(l^{(r)})},$$

also:

$$p_t = \sum_{q=1}^{q=s} \frac{\alpha_q l^{(q)s-t}}{F'(l^{(q)})}.$$

Nun ist:

$$p_t = \frac{\partial^{s-1}(z)}{\partial x_1^{s-t} \partial x_2^{t-1}},$$

und:

$$p_{t+1} = \frac{\partial^{s-1} z}{\partial x_1^{s-t-1} \partial x_2^{t}}.$$

Vereinigen wir beide Ausdrücke, und bilden:

$$\int (p_t dx_1 + p_{t+1} dx_2) = \frac{\partial^{s-2} z}{\partial x_1^{s-t-1} \partial x_2^{t-1}},$$

so kommt dafür:

$$\frac{\partial^{s-2} z}{\partial x_1^{s-t-1} \partial x_2^{t-1}} = \sum_{q=1}^{q=s} \int \frac{\alpha_q l^{(q)s-t-1}}{F'(l^{(q)})} (dx_2 + l^{(q)} dx_1).$$

Dieser Ausdruck muss integrabel sein, wie dies das ganze Verfahren in jedem Falle verlangt. Nun war:

$$\alpha_q = B_q + \varphi_q (x_2 + l^{(q)} x_1).$$

Setzt man, wie dies doch immer geschehen kann:

$$d(x_2 + l^{(q)} x_1) = \varphi_q^{(1)},$$

wo $\varphi_q^{(1)}$ ebenfalls eine willkürliche Function von $x_2 + l^{(q)} x_1$ ist, so erhält man:

$$\frac{\partial^{s-2} z}{\partial x_1^{s-t-1} \partial x_2^{t-1}} = B_t^{(1)} + \sum_{q=1}^{q=s} \varphi_q^{(1)} (x_2 + l^{(q)} x_1) \frac{l^{(q)s-t-1}}{F'(l^{(q)})},$$

wo gesetzt ist:

$$B_t^{(1)} = \int \left[ \sum_{q=1}^{q=s} \frac{l^{(q)s-t-1}}{F'(l^{(q)})} B_q (dx_s + l^{(q)} dx_1) \right].$$

Den Bedingungen der Aufgabe gemäss ist die Function unter dem Summenzeichen integrabel.

Fährt man in derselben Weise fort, so erhält man durch successives Integriren:

$$\int \varphi_q^{(1)} d(x_s + l^{(q)} x_1) = \varphi_q^{(2)},$$

$$\int \varphi_q^{(2)} d(x_s + l^{(q)} x_1) = \varphi_q^{(3)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

ferner:

$$\int (B_t^{(1)} dx_1 + B^{(1)}_{t+1} dx_s) = B_t^{(2)},$$

$$\int (B_t^{(2)} dx_1 + B^{(2)}_{t+1} dx_s) = B_t^{(3)}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

schliesslich:

$$z = \sum_{q=1}^{q=s} \varphi_q^{(s-1)} (x_s + l^{(q)} x_1) + B_1^{(s-1)},$$

Die Functionen $\varphi_1^{(s-1)}, \varphi_2^{(s-1)} \ldots \varphi_s^{(s-1)}$ sind willkürlich, folglich ist der Ausdruck für $z$ das vollständige Integral und nur $B_1^{(s-1)}$ ist auf dem angegebenen successiven Wege zu ermitteln.

Werden 2 Wurzeln der Gleichung 7) $l^{(q)}$ und $l^{(r)}$ gleich, so enthält dieser Ausdruck zwar eine willkürliche Function weniger, indess kann man in diesem Falle genau wie in Beispiel III) des Abschnitt 15) verfahren.

Ist $A$ einer Constante gleich, so verschwindet die Grösse $B_1^{(s-1)}$ ganz, und man hat:

$$z = \sum_{q=1}^{q=s} \varphi_q (x_s + l^{(q)} x_1).$$

Diese Gleichung lässt sich auch leicht direct verificiren.

18) Erweiterung der Ampère'schen Methode.

Auch die Ampère'sche Methode lässt sich einer ähnlichen Erweiterung auf Gleichungen von höherer Ordnung unterziehen.

Zu dem Ende bemerke man, dass sich aus den Gleichungen 2) des vorigen Abschnittes, welche die Form haben:

$$dp_\alpha = q_\alpha dx_1 + q_{\alpha+1} dx_s,$$

$$dp_\beta = q_\beta dx_1 + q_{\beta+1} dx_s,$$

durch Elimination von $dx_s$ lineare Relationen von der Form:

$$q_{\beta+1} dp_\alpha - q_{\alpha+1} dp_\beta = (q_\alpha q_{\beta+1} - q_\beta q_{\alpha+1}) dx_1$$

bilden lassen. Setzt man nun:

A) $$q_\alpha q_{\beta+1} - q_\beta q_{\alpha+1} = u_{\alpha,\beta},$$

so kann man statt der Gleichung 1) sich die allgemeinere:

B) $$A_1 q_1 + A_2 q_2 + \ldots + A_{s+1} q_{s+1} + \Sigma_{\alpha,\beta} B_{\alpha,\beta} u_{\alpha,\beta} = A$$

bilden, wo die Grössen $B_{\alpha,\beta}$ wie die $A$ von $z$, $x_1$, $x_2$ und den Differenzialquotienten von $z$ bis inclusive zu denen von der $s-1$ten Ordnung abhängen, $\alpha$, $\beta$ beliebige Zahlen zwischen 1 und $s$ sein können. Die Gleichungen A) sind dann als Integrale zu betrachten, und zu dem System 2) kommen dann Gleichungen von der Form:

C) $$q_{\beta+1} dp_\alpha - q_{\alpha+1} dp_\beta = u_{\alpha,\beta} dx_1$$

hinzu. Diese Ausdrücke sind in die Form 3) mit aufzunehmen, indem man $\delta$ für $d$ schreibt, und die mit den $q$ und $u$ multiplicirten Ausdrücke, nachdem einer dieser Factoren durch Gleichung $B$ eliminirt ist, einzeln gleich Null zu setzen.

Es ergeben sich dann die zu integrirenden totalen Differenzialgleichungen ganz wie oben. In jedem speciellen Falle sind diese Betrachtungen leicht auszuführen, und thut man besser, dies bei jeder zur Integration vorliegenden Gleichung wirklich zu thun, als von der jedenfalls schwer zu bildenden allgemeinen algorithmischen Form auszugehen.

19) Lineare Gleichungen zweiter Ordnung mit mehr als 2 unabhängigen Variablen.

Wir betrachten als zweites Beispiel einer Erweiterung der Monge'schen Methode jetzt eine Gleichung von der Form:

1) $$\begin{aligned} &A_1 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + A_2 \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + \ldots\ldots + A_n \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_n}, \\ &+ A_2^{(1)} \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} + \ldots\ldots + A_n^{(1)} \frac{\partial^2 z}{\partial x_2 \partial x_n}, \\ &+ A_3^{(2)} \frac{\partial^2 z}{\partial x_3^2} + \ldots + A_n^{(2)} \frac{\partial^2 z}{\partial x_3 \partial x_n}, \\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &+ A_n^{(n-1)} \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2} = B. \end{aligned}$$

Die Grössen $A_1, A_2 \ldots A_n, A_2^{(1)} \ldots A_n^{(n-1)}$, $B$ sind Functionen von $z$, $x_1$, $x_2 \ldots x_n$ und den ersten Differenzialquotienten von $z$. Wir führen folgende Abkürzungen ein:

$$\frac{\partial z}{\partial x_s} = p_s, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x_s \partial x_t} = q_{s,t}.$$

Offenbar ist dann:

$$q_{s,t} = q_{t,s},$$

und die Gleichung 1) ist zu schreiben:

2) $$\begin{aligned} &A_1 q_{1,1} + A_2 q_{1,2} + \ldots + A_n q_{1,n}, \\ &+ A_2^{(1)} q_{2,2} + \ldots + A_n^{(1)} q_{2,n} \\ &\quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ &+ A_n^{(n-1)} q_{(n,n)} = B, \end{aligned}$$

mit welcher zu verbinden ist das System:

$$3)\qquad dp_s = q_{s,1} dx_1 + q_{s,2} dx_2 + \ldots + q_{s,n} dx_n,$$

wo $s$ alle Werthe von 1 bis $n$ annimmt.

Statt dessen untersuchen wir wieder den Ausdruck:

$$4)\qquad \triangle = \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_s (\delta p_s - q_{s,1}\delta x_1 - q_{s,2}\delta x_2 - \ldots - q_{s,n}\delta x_n),$$

wo $\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_{n-1}$ zu bestimmende Functionen sind, und wo $\lambda_n = 1$ ist, und denken uns $q_{n,n}$ durch Gleichung 2) eliminirt. Ordnen wir dann diejenigen Ausdrücke zusammen, welche mit gleichen $q$ multiplicirt sind, so erhalten wir:

$$5)\qquad \triangle = \sum_{s=1}^{s=n} (\lambda_s \delta p_s) - \frac{B}{A_n^{(n-1)}} \delta x_n + \sum_{s=1}^{s=n-1} q_{s,s} [-\lambda_s \delta x_s + \frac{A_s^{(s-1)}}{A_n^{(n-1)}} \delta x_n]$$

$$+ \Sigma_{s,t} q_{s,t} [-\lambda_s \delta x_t - \lambda_t \delta x_s + \frac{A_s^{(s-1)}}{A_n^{(n-1)}} \delta x_n],$$

wo in der letzten Summe $s$ und $t$ alle Werthe zwischen 1 und $n$ annehmen, die von einander verschieden sind.

Damit jedes Glied der Gleichung 5) der Null gleich sei, ist zu setzen:

$$A_n^{(n-1)} \sum_{s=1}^{s=n} \lambda_s dp_s - B\, dx_n = 0,$$

$$6)\qquad - A_n^{(n-1)} \lambda_s dx_s + A_s^{(s-1)} dx_n = 0,$$

$$- A_n^{(n-1)} \lambda_s dx_t - A_n^{(n-1)} \lambda_t dx_s + A_s^{(t-1)} dx_n = 0.$$

Aus der zweiten und dritten Gleichung eliminiren wir $dx_s$ und erhalten:

$$(A_s^{(s-1)} \lambda_t - A_s^{(t-1)} \lambda_s)\, dx_n + A_n^{(n-1)} \lambda_s^2 dx_t = 0.$$

Jedenfalls ist aber, wenn man in der zweiten Gleichung 6) $t$ für $s$ schreibt:

$$+ A_t^{(t-1)} dx_n - A_n^{(n-1)} \lambda_t dx_t = 0,$$

und aus dieser und der vorletzten Gleichung ergibt sich:

$$7)\qquad A_s^{(s-1)} \lambda_t^2 - A_s^{(t-1)} \lambda_s \lambda_t + A_t^{(t-1)} \lambda_s^2 = 0,$$

wo die Zahlen $s$ und $t$ von einander verschieden sein müssen.

Setzt man zunächst $s = n$, also $\lambda_s = 1$, so kann $t$ alle Werthe von 1 bis $n-1$ annehmen, und man hat $(n-1)$ quadratische Gleichungen von der Form:

$$8)\qquad A_n^{(n-1)} \lambda_t^2 - A_n^{(t-1)} \lambda_t + A_t^{(t-1)} = 0,$$

welche für jeden der Coefficienten $\lambda$ zwei Werthe geben.

Was die übrigen Gleichungen 7) anbetrifft, so kann nach dem Bildungsgesetz der $A$ nie $t$ grösser als $s$ sein, und da der Fall, wo $s = t$ ist, ausgeschlossen wurde, so ist stets $t < s$; deshalb wird die Anzahl dieser Gleichungen sein:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n - 2 = \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2}.$$

Da $\lambda_s$ und $\lambda_t$ aber vermöge der Gleichungen 8) bekannt sind, hat man es hier

mit Bedingungsgleichungen zwischen den $A$ zu thun, deren Anzahl $\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$ ist; also:

„Soll unsere Methode anwendbar sein, so können nur:

$$\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}-\frac{(n-1)(n-2)}{1\cdot 2}=2n-1$$

Coefficienten willkürlich gewählt werden, während die andern durch die Gleichungen 7) bestimmmt sind."

Dieselben schreiben wir mit Hülfe der Relationen 8) auch:

$$9)\qquad A_s^{(s-1)}A_n^{(t-1)}\lambda_t+A_t^{(t-1)}A_n^{(s-1)}\lambda_s+A_s^{(t-1)}A_n^{(n-1)}\lambda_s\lambda_t$$
$$=2A_s^{(s-1)}A_t^{(t-1)}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass wenn eine der Grössen $\lambda$, $\lambda_1$ gegeben ist, sich die übrigen eindeutig durch dieselbe und die Coefficienten $A$ ausdrücken lassen.

Man hat also nur Systeme von Gleichungen 6), welche den beiden Werthen eines der $\lambda$ entsprechen.

Was nun diese Gleichungen 6) anbetrifft, so werden vermöge der Relationen 7) und 8) davon:

$$n-1+\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$$

identisch. — Die zweite Gleichung 6) umfasst, da $s$ nicht gleich $n$ sein kann, $n-1$ Gleichungen; die dritte, wo $t$ kleiner als $s$ sein muss, und $s$ auch gleich $n$ sein kann, hat $\frac{n(n-1)}{2}$ Gleichungen, was mit Hinzunahme der ersten Gleichung 6) $\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$ Gleichungen gibt, von denen $\frac{n(n-1)}{2}$ ausfallen, so dass das System 6) aus $n$ Gleichungen besteht, in welchen jedenfalls aber die erste enthalten ist.

Jetzt sind ganz die früheren Schlüsse zu wiederholen. Lassen sich für ein System der Werthe $\lambda$ der Gleichungen 8) aus diesen $n$ Gleichungen 6) auch $n$ Integrale von der Form $u_1, u_2 \ldots u_n$ ableiten, so setzt man

$$u_n=\varphi(u_1, u_2 \ldots u_{n-1}),$$

und hat eine partielle Differenzialgleichung erster Ordnung, die man entweder direct integrirt, oder mit einem Integrale des zweiten Systems verbindet. Da man aber aus diesen beiden Gleichungen nicht sämmtliche ersten Differenzialquotienten von $z$ herleiten kann, so sind diese beiden Integrale eben nur als simultane unserer Gleichung zu betrachten, und aus ihnen die übrigen nach einer der bei den partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung gegebenen Methoden abzuleiten.

In ähnlicher Weise wie im vorigen Abschnitte könnte man auch die Ampère'sche Gleichung auf mehr Variablen erweitern. Wir unterlassen dies jedoch, da hierbei sich die Anzahl der Bedingungen noch vermehren würde und selbst das hier gegebene Verfahren nur in wenigen Fällen Anwendung findet. Dennoch haben wir geglaubt, da die Fälle, wo partielle Differenzialgleichungen integrirt werden können, überhaupt nur selten sind, diese Erweiterung nicht übergehen zu dürfen.

20) Integration der partiellen Differenzialgleichungen durch Reihen und durch bestimmte Integrale.

Da die Integration selbst linearer partieller Differenzialgleichungen, wie wir gesehen haben, durch die vorhin gegebenen Methoden nur in seltenen Fällen gelingt, so bleiben eben nur Reihenentwicklungen und bestimmte Integrale übrig, die wir als nahe verwandt hier gemeinschaftlich betrachten. Auch selbst wenn eine der Methoden, die wir vorhin angegeben haben, ausführbar wäre, zieht man bei der Behandlung bestimmter Probleme die Reihenentwicklung oft vor, da sie es möglich macht, die willkürlichen Functionen von Anfang an den gegebenen Grenzbedingungen gemäss zu wählen, weil, wie bereits an einer früheren Stelle gezeigt, im Allgemeinen die Specialisirung derselben eine der schwierigsten Aufgaben bildet.

Zunächst geben wir folgenden allgemeinen Satz, welcher oft gestattet, aus

particulären Integralen allgemeine abzuleiten.

Sei:

$$A_1 p_1 + A_2 p_2 + \ldots + Bz = 0$$

eine gegebene Differenzialgleichung, wo $z$ die abhängige Variable, $p_1, p_2 \ldots$ deren Differenzialquotienten nach den unabhängigen Variablen $x_1, x_2 \ldots x_s$ genommen vorstellen, ohne dass über die Ordnung derselben etwas festgesetzt wird, auch das nicht, dass sie etwa alle von gleicher Ordnung sein sollen; seien ferner die Coefficienten $A_1, A_2 \ldots B$ nur von den unabhängigen Variablen $x_1, x_2 \ldots$ abhängig. Sind dann $z', z'' \ldots$ Werthe von $z$, welche diese Gleichung erfüllen, also particuläre Integrale, so ist auch $z = m_1 z' + m_2 z'' \ldots$ ein Integral, wo $m_1, m_2$ beliebige Constanten sind, denn offenbar macht das Einsetzen dieses Werthes von $z$ in unsere Gleichung dieselbe identisch. Enthält das particuläre Integral $z_\alpha$ eine willkürliche Constante $\alpha$, so kann man also auch

$$z = \Sigma_\alpha m_\alpha z_\alpha$$

setzen, wo sich $\alpha$ in den einzelnen Gliedern nach einem beliebigen Gesetze ändert, und die Coefficienten $m_\alpha$ beliebige Constanten sind. Ferner sind wie leicht zu sehen, Integrale die Ausdrücke:

$$z = \frac{\partial z_\alpha}{\partial \alpha},$$

und:

$$z = \int z_\alpha d\alpha,$$

das letztere in beliebigen Grenzen und auf beliebigem Wege genommen, vorausgesetzt, dass $z_\alpha$ auf letzterem nicht discontinuirlich wird, welcher Fall eine besondere Untersuchung erfordern würde.

Was die Entwickelung in Reihen anbetrifft, so bedient man sich in der Regel der unbestimmten Coefficienten, einer Methode, welche jedoch zunächst nur particuläre Integrale liefert, auf welche dann der vorhergehende Satz anzuwenden ist, um sie den Bedingungen der Aufgabe gemäss zu verallgemeinern. Zuweilen gibt der Maclaurin'sche oder Taylor'sche Satz das allgemeine Integral unmittelbar.

I) Sei z. B. gegeben die Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

eine Gleichung, die nach $t$ hin erster Ordnung ist, und die daher ein allgemeines Integral mit einer willkürlichen Function hat. Sei für:

$$t = 0, \quad u = \varphi(x),$$

so ist nach dem Maclaurin'schen Satz:

$$u = \varphi(x) + t u_0' + \frac{t^2}{1 \cdot 2} u_0'' + \ldots$$

wo $u_0', u_0'' \ldots$ die Werthe von: $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \ldots$, für $u = 0$, andeuten.

Vermöge unserer Gleichung aber ist:

$$u_0' = a^2 \varphi''(x),$$
$$u_0'' = a^4 \varphi^{IV}(x)$$

u. s. w.

Es ist nämlich:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = a^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \ldots$$

also:

$$u = \varphi(x) + a^2 t \varphi''(x) + \frac{a^4 t^2 \varphi^{IV}(x)}{1 \cdot 2} + \frac{a^6 t^3 \varphi^{VI}(x)}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots$$

Diese Reihenentwicklung gilt natürlich nur so lange, als der gewählte Werth von $\varphi(x)$ bewirkt, dass dieselbe convergirt, wobei die allgemeinen Principien der Convergenz der Potenzreihen maassgebend sind.

Würde man aber dem Ausdruck $u$ einen Anfangswerth für $x = 0$ geben, so müsste das Integral zwei willkürliche Functionen enthalten, da die Gleichung nach $x$ von der zweiten Ordnung ist. Nehmen wir an, es sei gleichzeitig:

$$x = 0, \quad u = f(t),$$

und:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = F(t),$$

so hat man:

$$u = f(t) + x F(t) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} u_0'' + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} u_0''' + \ldots,$$

wo $u_0'', u_0''' \ldots$ die Differenzialquotienten von $u$ nach $x$ genommen bedeuten, wenn man $x = 0$ setzt. Nun ist:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{1}{a^4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \ldots$$

also:

$$u_0'' = \frac{1}{a^2} f'(t),$$

$$u_0''' = \frac{1}{a^3} F'(t),$$

$$u_0^{IV} = \frac{1}{a^4} f''(t),$$

$$\vdots$$

also:

$$u = f(t) + xF(t) + \frac{x^2}{1\cdot 2} f'(t) + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} F'(t) + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} F''(t) + \ldots$$

Um die Identität beider Reihenentwicklungen zu zeigen, entwickelt Poisson die Function $f(t)$ und $F(t)$ nach ganzen Potenzen von $t$, und setzt:

$$f(t) = A_0 + \frac{A_1}{1} t + \frac{A_2}{1\cdot 2} t^2 + \ldots$$

$$F(t) = B_0 + \frac{B_1}{1} t + \frac{B_2}{1\cdot 2} t^2 + \ldots$$

Man hat dann:

$$u = A_0 + B_0 x + A_1 \frac{x^2}{1\cdot 2} + B_1 \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + t(A_1 + B_1 x + A_2 \frac{x^2}{1\cdot 2}$$

$$+ B_2 \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots) + t^2 (A_2 + B_2 x + \ldots),$$

und setzt man die willkürliche Function:

$$A_0 + B_0 x + A_1 \frac{x^2}{1\cdot 2} + B_1 \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + A_2 \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots = \varphi(x),$$

so erhält man wieder die zuerst gegebene Reihenentwicklung für $u$.

Wir wollen jetzt die zuerst gegebene Entwicklung von $u$ in ein bestimmtes Integral verwandeln.

Man hat:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} d\alpha = \sqrt{\pi},$$

und:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} \alpha^{2i+1} d\alpha = 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} \alpha^{2i} d\alpha = \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots (2i-1)}{2^i} \sqrt{\pi}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichungen kann man dem Werthe von $u$ die Form geben:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x) + 2\alpha a \sqrt{t}\, \varphi'(x) + \frac{(2\alpha a\sqrt{t})^2}{1\cdot 2} \varphi''(x) + \frac{(2\alpha a\sqrt{t})^3}{1\cdot 2\cdot 3} \varphi'''(x)$$

$$+ \ldots] e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

d. h. mit Berücksichtigung des Taylor'schen Satzes:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x + 2\alpha a\sqrt{t})\, e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Eben so gut hätte man den mit ungraden Potenzen von $\sqrt{t}$ multiplicirten Gliedern, welche verschwinden, das negative Vorzeichen geben können, und somit erhalten:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x - 2\alpha a \sqrt{t}) e^{-\alpha^2} d\alpha,$$

Es ist also auch:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\varphi(x + 2\alpha a \sqrt{t}) + \varphi(x - 2\alpha a \sqrt{t})] e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Diese Form ist für negatives $t$ die angemessenste, da die beiden zuerst gegebenen Ausdrücke einen imaginären Theil enthalten, welcher in dem letzten Werthe von $u$ aber sich weghebt.

Betrachten wir jetzt die Gleichung:

II) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = u.$$

Sei für $t = 0$, $u = \varphi(x)$, so hat man:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int u\, dx,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \iint u\, dx^2,$$

$$\vdots$$

also:

$$u = \varphi(x) + t \int \varphi(x)\, dx + \frac{t^2}{1 \cdot 2} \iint \varphi(x)\, dx^2 + \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \iiint \varphi(x)\, dx^3 + \dots$$

In dieser Form ist allerdings zunächst nur eine willkürliche Function vorhanden, indess wird durch jedes Integral eine neue willkürliche Constante, also deren unendlich viel, eingeführt. Seien bezüglich:

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x) \dots$$

die Werthe von:

$$\varphi(x),\ \int \varphi(x)\, dx,\ \iint \varphi(x)\, dx^2,\ \iiint \varphi(x)\, dx^3,$$

wenn man Null als untere Grenze sämmtlicher Integrale nimmt, und in der Gleichung:

$$\varphi(x) = a + \varphi_0(x)$$

$a$ so bestimmt, dass $\varphi_0(0) = 0$ wird. Es ist dann allgemein:

$$\varphi(x) = a + \varphi_0(x),$$

$$\int \varphi(x)\, dx = a_1 + ax + \varphi_1(x),$$

$$\iint \varphi(x)\, dx^2 = a_2 + a_1 x + \frac{ax^2}{1 \cdot 2} + \varphi_2(x),$$

$$\iiint \varphi(x)\, dx^3 = a_3 + a_2 x + a_1 \frac{x^2}{1 \cdot 2} + a \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \varphi_3(x)$$

$$\vdots$$

Man hat nun:

$$u = a\left(1 + \frac{xt}{1^2} + \frac{x^2 t^2}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{x^3 t^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \dots\right),$$

$$+\varphi_0(x)+t\varphi_1(x)+\frac{t^2}{1\cdot 2}\varphi_2(x)+\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}\varphi_3(x)+\ldots$$

$$+a_1 t+a_2\frac{t^2}{1\cdot 2}+a_3\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$

$$+x\,(a_1\frac{t^2}{1\cdot 2}+a_2\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}+a_3\frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots)$$

$$+\frac{x^2}{1\cdot 2}(a_1\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}+a_2\frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+a_3\frac{t^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots)$$

$$+\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .$$

Setzen wir nun:

$$a_1 t+a_2\frac{t^2}{1\cdot 2}+a_3\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots=\psi_1(t),$$

$$a_1\frac{t^2}{1\cdot 2}+a_2\frac{t^3}{1\cdot 2\cdot 3}+a_3\frac{t^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\ldots=\int_0^t\psi_1(t)\,dt=\psi_2(t),$$

$$.\quad .\quad .\quad \int_0^t\psi_2(t)\,dt=\psi_3(t),$$

$$.\quad .\quad .\quad .$$

so kommt:

$$u=a\,[1+\frac{xt}{1^2}+\frac{x^2t^2}{(1\cdot 2)^2}+\frac{x^3t^3}{(1\cdot 2\cdot 3)^2}+\ldots]$$

$$+\varphi_1(x)+t\varphi_2(x)+\frac{t^2}{1\cdot 2}\varphi_3(x)+\ldots$$

$$+\psi_1(t)+x\psi_2(t)+\frac{x^2}{1\cdot 2}\psi_3(t)+\ldots,$$

ein Ausdruck, worin zwei willkürliche Functionen $\varphi_1(x)$ und $\psi_1(t)$ enthalten. Für:

$$x=0 \text{ und } t=0 \quad \text{wird} \quad u=a,$$

für

$$x=0 \quad \text{ist} \quad u=a+\psi_1(t),$$

für

$$t=0, \qquad u=a+\varphi_1(x).$$

Nach diesen Bedingungen lassen sich die Functionen $\varphi_1$ und $\psi_1$ mittels der Anfangszustände bestimmen.

Um diesen Werth von $u$ in ein bestimmtes Integral zu verwandeln, bemerke man, dass man hat:

$$\varphi_{s-1}(x)=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots s-1}\int_0^x(x-\alpha)^{s-1}\varphi_0'(\alpha)\,d\alpha,$$

$$\psi_{s-1}(t)=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots s-1}\int_0^t(t-\alpha)^{s-1}\psi_0'(\alpha)\,d\alpha,$$

wo $\varphi_1'$, $\psi_1'$ die Differenzialquotienten von $\varphi_1$ und $\psi_1$ sind. Offenbar gibt nämlich die $s$ mal wiederholte theilweise Integration:

$$\int(x-\alpha)^{s-1}\varphi_0'(\alpha)\,d\alpha=(x-\alpha)^{s-1}\varphi_0(\alpha)+(s-1)(x-\alpha)+\ldots$$

$$+(s-1)(s-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1\,\varphi_{s-1}(\alpha).$$

An der Grenze $\alpha=0$ aber verschwinden alle Functionen $\varphi_i(\alpha)$, und an der Grenze

$\alpha = x$ alle Glieder, welche mit $x - \alpha$ multiplicirt sind, d. h. alle bis aufs letzte. — Dies in den Werth von $u$ einsetzend, erhält man:

$$u = a\left(1 + \frac{x\,t}{1^2} + \frac{x^2\,t^2}{(1\cdot 2)^2} + \frac{x^3\,t^3}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \ldots\right)$$

$$+\int_0^x \left[1 + \frac{t\,(x-\alpha)}{1^2} + \frac{t^2\,(x-\alpha)^2}{(1\cdot 2)^2} + \ldots\right] \varphi_0{}'(\alpha)\,d\alpha,$$

$$+\int_0^t \left[1 + \frac{x\,(t-\alpha)}{1^2} + \frac{x^2\,(t-\alpha)^2}{(1\cdot 2)^2} + \ldots\right] \psi_0{}'(\alpha)\,d\alpha.$$

Es ist aber, wie leicht zu verificiren:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2s}\alpha\,d\alpha = \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2s-1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots 2s}\cdot\frac{\pi}{2},$$

d. h.:

$$\frac{\pi}{(1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\,s)^2} = \frac{2^{2s+1}}{1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\,2s}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2s}\alpha\,d\alpha.$$

Es kann also der erste Theil von $u$ auf die Form gebracht werden:

$$\frac{2}{\pi}a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 + \frac{2^2\,x\cdot t}{1\cdot 2}\sin^2\alpha + \frac{2^4\,x^2\,t^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\sin^4\alpha + \ldots\right)d\alpha = \frac{1}{\pi}a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[e^{2\sqrt{(x\,t)}\sin^2\alpha} + e^{-2\sqrt{(x\,t)}\sin^2\alpha}\right]d\alpha.$$

Für die beiden andern Theile von $u$, die ganz ähnliche Werthe annehmen, kann man die Exponentialgrössen in trigonometrische verwandeln, und erhält schliesslich:

$$u = \frac{A}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[e^{2\sqrt{(x\,t)}\sin^2\alpha} + e^{-2\sqrt{(x\,t)}\sin^2\alpha}\right]d\alpha$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\sqrt{t(\beta - x)}\,\sin^2\alpha\,\varphi_0{}'(\beta)\,d\alpha\,d\beta$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_0^{t}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2\sqrt{a\,(\beta - t)}\,\sin^2\alpha\,\psi_1{}'(\beta)\,d\alpha\,d\beta.$$

Die Gleichung:

III) $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

drückt den Schwingungszustand eines luftförmigen homogenen Körpers aus. — Um für $u$ einen möglichst bequemen Ausdruck abzuleiten, ist es jedoch zuvor nöthig, das Doppelintegral:

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} F[l\cos\vartheta + m\sin\vartheta\cos\psi + n\sin\vartheta\sin\psi]\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\psi$$

in ein einfaches zu verwandeln.

$l$, $m$, $n$ sind hier beliebige Constanten, $F$ eine ganz willkürliche Function.

Wir setzen:

$$l = k\cos\vartheta', \quad m = k\sin\vartheta'\cos\psi', \quad n = k\sin\vartheta'\sin\psi',$$

also:

$$k = \sqrt{(l^2+m^2+n^2)},$$

so hat unser Integral den Werth:

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F[k\cos\lambda]\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi,$$

wo:

$$\cos\lambda = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\psi-\psi').$$

Es ist nun bekanntlich: $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi$ das Element der Oberfläche einer Kugel, welche vom Anfangspunkt der Coordinaten mit Radius 1 beschrieben ist, $\lambda$ der Winkel, welchen 2 durch $\vartheta\,\psi$, $\vartheta'\,\psi'$ bestimmte grade Linien mit einander machen, vorausgesetzt, dass man unter 1, $\vartheta$, $\psi$ die Polarcoordinaten der Kugelfläche versteht.

Da sich vermöge der Grenzbedingungen unser Integral über die ganze Kugel erstreckt, so ist leicht ersichtlich, dass sein Werth von der Wahl der Axen ganz unabhängig ist, denn weder das Element der Kugelfläche, noch der Winkel $\lambda$ wird durch diese berührt. Man kann also als Axe der $x$ die durch die Winkel $\vartheta'$, $\psi'$ bestimmte, durch den Anfangspunkt der Coordinaten gehende Richtung nehmen, so dass man hat:

$$\vartheta' = 0, \quad \lambda = \vartheta,$$

also:

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} F(k\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi,$$

ein Ausdruck, der leicht nach $\psi$ integrirt werden kann. Man erhält:

$$2\pi\int_0^\pi F(k\cos\vartheta)\sin\vartheta\, d\vartheta,$$

oder wenn man:

$$\cos\vartheta = \mu$$

setzt:

$$2\pi\int_{-1}^{+1} F(k\mu)\, d\mu = 2\pi\int_{-1}^{+1} F(\mu\sqrt{l^2+m^2+n^2})\, d\mu.$$

Kommen wir jetzt auf unsere Gleichung zurück. Dieselbe ist nach jeder der Variablen zweiter Ordnung und enthält also auch zwei willkürliche Functionen. Um dieselben zu bestimmen, nehmen wir an, dass für:

$$t = 0, \quad u = f(x, y, z),$$

und:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x, y, z)$$

werden mögen.

Setzen wir voraus, dass:

$$u = e^{\alpha t + \beta x + \gamma y + \delta z}$$

ein particuläres Integral sei, und führen diesen Werth in die Differenzialgleichung ein, so verschwinden alle Variablen, und man erhält die Bedingungsgleichung zwischen den Constanten:

$$\alpha^2 = a^2(\beta^2+\gamma^2+\delta^2),$$

welche mithin ausreichend ist, damit die gegebene Exponentialgrösse wirklich ein particuläres Integral gebe.

Da diese Gleichung quadratisch ist, so gibt es also zwei Werthe von $u$, und ihre Differenz, mit einer Constanten multiplicirt:

$$\frac{M}{\alpha} e^{\beta x+\gamma y+\delta z} \frac{e^{\alpha t}-e^{-\alpha t}}{t}$$

ist ebenfalls ein Integral, welches sich auch sshreiben lässt:

$$M t e^{\beta x+\gamma y+\delta z} \int_{-1}^{+1} e^{\alpha t \mu} d\mu.$$

Wenn wir $e^{\alpha t \mu}$ statt der Fnnction $F[\mu \sqrt{l^2+m^2+n^2}]$ betrachten, so kann man das in den Grenzen $\int_{-1}^{+1}$ genommene Integral nach dem oben gegebenen Satze in ein Doppelintegral von den Grenzen 0 nnd $\pi$, 0 nnd $2\pi$ verwandeln, so dass man hat:

$$u = M t e^{\beta x+\gamma y+\delta z} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{\alpha\beta t \cos\vartheta + \alpha\gamma t \sin\vartheta \cos\psi + \alpha\delta t \sin\vartheta \sin\psi} \sin\vartheta d\vartheta d\psi,$$

oder:

$$u = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} M t e^{\beta(x+at\cos\vartheta)+\gamma(y+at\sin\vartheta\cos\psi)+\delta(z+at\sin\vartheta\sin\psi)} \sin\vartheta d\vartheta d\psi.$$

Eine Snmme von solchen Ausdrücken, in welchen $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $M$ sich nach irgend einem Gesetze ändern, muss ebenfalls der partiellen Differenzialgleichung genügen. Da man aber jede Fnnction von drei Variablen $u$, $v$, $w$ in eine Reihe:

$$\Sigma M e^{\beta u+\gamma v+\delta w}$$

nach dem Fonrrier'schen Satze verwandeln kann, so kann man setzen:

$$\Sigma M e^{\beta(x+at\cos\vartheta)+\gamma(y+at\sin\vartheta\cos\vartheta)+\delta(z+at\sin\vartheta\sin\psi)}$$
$$= F[x+at\cos\vartheta,\ y+at\sin\vartheta\cos\psi,\ z+at\sin\vartheta\sin\psi],$$

nnd man hat mithin:

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int^{2\pi} t \sin\vartheta d\vartheta d\psi F[x+at\cos\vartheta,\ y+at\sin\vartheta\cos\psi,\ z+at\sin\vartheta\sin\psi].$$

Der Factor $\frac{1}{4\pi}$ hat den Zweck, zu bewirken, dass für $t=0$, $\frac{\partial u}{\partial t} = F(x, y, z)$ werde, eine Bedingung, die man leicht verificiren kann, da $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin\vartheta d\vartheta d\psi$ gleich der Oberfläche einer Kngel mit Radins 1, also gleich $4\pi$ ist. Der gefundene Werth von $u$ erfüllt also die zweite der Grenzbedingungen, während für $t=0$, $u=0$ wird.

Kann man nun ein zweites Integral finden, welches für $t=0$, $u=f(x, y, z)$ gibt, während $\frac{\partial u}{\partial t}$ für $t=0$ verschwindet, so wird die Summe beider Integrale offenbar beiden Bedingungen genügen, nnd also das allgemeine Integral sein.

Diese Bemerknng, welche sich überhanpt auf lineare Differenzialgleichungen leicht anwenden lässt, gestattet gewissermaassen, die Grenzbedingungen zu theilen und so das allgemeine Integral aus einer Anzahl particulärer zusammenzusetzen. Ein solches zweites Integral ist hier leicht zu finden. Denn wenn irgend ein Ausdruck nnserer Differenzialgleichung genügt, so muss seine Ableitung nach $t$ derselben auch genügen, wie man ersieht, wenn man diese Gleichnng nach $t$ differenziirt, nnd

$$\frac{\partial u}{\partial t} = v,$$

setzt, wodnrch man die ganz gleiche Form:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)$$

erhält. Es ist also ein Integral:

$$u = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\, f(x + at\cos\vartheta,\ y + at\sin\vartheta\cos\psi,\ z + at\sin\vartheta\sin\psi),$$

wo die Function $F$ durch $f$ ersetzt wurde. Man sieht aber sogleich, dass dieser Ausdruck für $t=0$, $u=f(x, y, z)$ gibt, während sein Differenzialquotient in Bezug auf $t$ für diesen Werth verschwindet. Unsre Gleichung hat also das allgemeine Integral:

$$u = \frac{1}{4\pi}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\, F(x + at\cos\vartheta,\ y + at\sin\vartheta\cos\psi,\ z + at\sin\vartheta\sin\psi)$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\pi\int_0^{2\pi} t\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi\, f(x + at\cos\vartheta,\ y + at\sin\vartheta\cos\psi,\ z + at\sin\vartheta\sin\psi).$$

Dieser Werth von $u$ erfüllt die vorgeschriebenen Bedingungen, dass für $t=0$ wird:

$$u = f(x, y, z), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x, y, z).$$

Dieses Resultat ist von Poisson; es ist mitgetheilt in den *Nouveaux mémoires de l'académie des sciences, tome III.*

IV) Eine Methode, welche in vielen Fällen anwendbar ist, geben folgende Betrachtungen.

Gehen wir von der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

aus, welche ein besonderer Fall der vorigen ist, und aus dieser entsteht, wenn man $y$ und $z$ constant annimmt, also vorausgesetzt, dass die gesuchte Wellenbewegung nur parallel der Axe der $x$ stattfinde. Es sei für:

$$t = 0, \qquad u = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t} = F(x).$$

Es kommt zunächst darauf an, ein particuläres Integral zu gewinnen, und dieses ist offenbar:

$$u = \cos amt \cos m(x - b),$$

wo $m$, $b$ willkürliche Constanten sind.

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit einer willkürlichen, nur von den Constanten abhängigen Grösse, z. B. $\varphi(b)$, so hat man ebenfalls ein Integral, und auch das Integral dieser Grösse nach Constanten ist ein solches, was auch die Integrationsgrenzen seien.

Man kann also setzen:

$$u = \iint \varphi(b) \cos amt \cos m(x - b)\, dm\, db.$$

Für $t=0$ hat man:

$$u = \iint \varphi(b) \cos m(x - b)\, dm\, db,$$

es soll aber $u = f(x)$ für diesen Werth sein.

Nach der bekannten Fourrier'schen Formel (vergleiche den Artikel: „Quadraturen", Abschnitt 48) hat man:

$$f(b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(b) \cos m(x - b)\, dm\, db.$$

Vergleicht man dies mit dem oben gefundenen Werthe von $u$, so sind also $-\infty$, $+\infty$ als Grenzen beider Integrationen zu nehmen, und ausserdem zu setzen:

$$\varphi(b) = \frac{f(b)}{2\pi},$$

so dass man hat:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(b) \cos amt \cos m(x-b)\, dm\, db,$$

womit der ersten Bedingung genügt ist. $\frac{\partial u}{\partial t}$ wird $=0$ für $u=0$.

Nach der im vorhin behandelten allgemeinern Falle angewandten Methode ist nun ein ähnlicher Ausdruck zu finden, der für $t=0$ verschwindet, und $\frac{\partial u}{\partial t} = F(x)$ für diesen Fall gibt.

Ist $u$ ein Integral unserer Gleichung, so ist, wie sich unmittelbar verificiren lässt, auch $\int_0^t u\, dt$ ein solches. Wir könnten daher in der vorigen Formel, in welcher wir $f$ mit $F$ vertauschen, das Integral nach $t$ nehmen, und selbstverständlich wird dann den obigen Bedingungen genügt sein. Es ergibt sich:

$$u = \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(b) \frac{\sin amt}{m} \cos m(x-b)\, dm\, db,$$

und der allgemeine Werth von $u$ ist also:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(b) . \cos amt \cos m(x-b)\, dm\, db$$

$$+ \frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(b) \frac{\sin amt}{m} \cos m(x-b)\, dm\, db.$$

Da wir bereits früher ein Integral dieser Gleichung ohne Quadraturen gefunden haben, so muss dies hier gegebene damit übereinstimmen, was leicht zu verificiren ist.

V) Die schon betrachtete Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

welche ein völlig bestimmtes Integral hat, wenn man für:

$$t=0, \quad u=F(x)$$

setzt, wollen wir nach derselben Methode behandeln.

Ein particuläres Integral ist:

$$u = e^{-\alpha t} \cos m(x-b),$$

und durch Verification findet man, dass die Constanten der Bedingung genügen müssen:

$$\alpha = a^2 m^2;$$

ein allgemeines Integral also ist:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(b) e^{-m^2 a^2 t} \cos m(x-b)\, dm\, db,$$

und dies gibt für $t=0$:

$$u = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(b) \cos m(x-b)\, dm\, db = F(x),$$

nach dem Fourrier'schen Satze, womit die Aufgabe gelöst ist. Es fragt sich noch, in wiefern dieser Ausdruck sich vereinfachen lässt.

Es ist:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2u^2} \cos 2pu\, du = \frac{\sqrt{\pi}}{n}\, e^{-\frac{p^2}{n^2}},$$

und somit:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2m^2t} \cos m(x-b)\, dm = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\, e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}},$$

also:

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{(\pi t)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{y-b}{2a\sqrt{t}}\right)^2} F(b)\, db.$$

Früher hatten wir gefunden:

$$u = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [F(x+2\alpha a\sqrt{t}) + F(x-2\alpha a\sqrt{t})]\, d\alpha.$$

Auf diesen Ausdruck lässt sich das obige Resultat leicht zurückführen, wenn man setzt:

$$\alpha^2 = \left(\frac{x-b}{2a\sqrt{t}}\right)^2,$$

also:

$$b = x \pm 2a\alpha\sqrt{t}.$$

Nimmt man das obere oder untere Zeichen, so erhält man:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2} F(x \pm 2a\alpha\sqrt{t})\, d\alpha,$$

und die halbe Summe beider Werthe kann also für $u$ gesetzt werden, was mit der angeführten Formel übereinstimmt.

VI) In gleicher Weise lässt sich auch die Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

behandeln, sie drückt die Fortpflanzung der Wärme in einem homogenen Körper aus. Die vorhin behandelte Gleichung entspricht dem Falle, wo der Körper in allen der $(y\,z)$ Ebene parallelen Richtungen gleichmässig erwärmt ist.

Sei für:

$$t = 0, \qquad u = F(x, y, z).$$

Nehmen wir zunächst das particuläre Integral:

$$u = e^{-m^2t} \cos \alpha(x-\xi) \cos \beta(y-\eta) \cos \gamma(z-\zeta),$$

so erhält man durch Einsetzen in die Differenzialgleichung:

$$m^2 = a^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2).$$

Es ist nun nach dem Fourrier'schen Satze:

$$F(x, y, z) = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta, \zeta) \cos \alpha(x-\xi) \cos \beta(y-\eta) \cos \gamma(z-\zeta)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

wo das Integralzeichen eine sechsfache Integration, jede in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ anzeigt. Man erhält diese Formel, wenn man erst $y$, $z$ constant denkt und $F(x, y, z)$ durch ein doppeltes Integral nach dem Fourrier'schen Satze ausdrückt, in diesem Resultate $y$ variabel denkt, das Verfahren wiederholt, und endlich mit $z$ ebenso verfährt.

Somit wird der Ausdruck:

$$u = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, \eta, \zeta)\, e^{-(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)a^2t} \cos \alpha(x-\xi) \cos \beta(y-\eta)$$
$$\cos \gamma(z-\zeta)\, d\alpha\, d\beta\, d\gamma\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

der Grenzbedingung genügen und das allgemeine Resultat sein. — Durch dieselben Betrachtungen, welche wir in dem vorigen speciellen Falle angewendet haben, reduciren wir dies sechsfache Integral auf ein dreifaches. Es ergibt sich:

$$u=\frac{1}{\sqrt{\pi^3}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)} F(x+2a\lambda\sqrt{t},\ y+2a\mu\sqrt{t},\ z+2a\nu\sqrt{t})\,d\lambda\,d\mu\,d\nu.$$

VII) Die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}=0$$

drückt die Fortpflanzung des Tones in einem elastischen Stabe aus.

Sei für:

$$t=0,\quad u=f(x),\quad \frac{\partial u}{\partial t}=F(x).$$

Ein particuläres Integral ist:

$$u=\cos\alpha^2 at\cos\alpha(x-\xi),$$

und durch ganz dieselben Betrachtungen, wie bei der schwingenden Seite, erhält man:

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\alpha^2 at\cos\alpha(x-\xi)f(\xi)\,d\xi\,d\alpha,$$

einen Ausdruck, welcher der ersten Bedingung genügt, und dessen Differenzial für $t=0$ verschwindet. Das Integral dieses Ausdruckes nach $t$ in den Grenzen 0 und $t$, in welchem man $F$ statt $f$ schreibt, wird für $t=0$ verschwinden, und der Differenzialquotient davon den Werth $F(x)$ geben. Man hat also das allgemeine Integral:

$$u=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\alpha^2 at\cos\alpha(x-\xi)f(\xi)\,d\xi\,d\alpha$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha^2 at}{\alpha^2}\cos\alpha(x-\xi)F(\xi)\,d\xi\,d\alpha.$$

Nun hat man bekanntlich:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\alpha^2 at\cos\alpha(x-\xi)\,d\alpha=\left[\cos\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{(at)}}\right)^2+\sin\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{(at)}}\right)^2\right]\sqrt{\frac{\pi}{2at}}.$$

Setzt man also:

$$\xi=x+2\lambda\sqrt{(at)},$$

so nimmt der erste Theil unseres Integrals die Form an:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}[\sin(\lambda^2)+\cos(\lambda^2)]f(x+2\lambda\sqrt{at})\,d\lambda.$$

Es ist dies der Ausdruck für $u$ in dem Falle, wo die Anfangsgeschwindigkeit $\frac{\partial u}{\partial t}$ der Null gleich ist.

VIII) Einem ganz ähnlichen Verfahren können wir auch die Gleichung unterwerfen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+a^2\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)=0,$$

deren Grenzbedingungen seien:

$$t=0,\quad u=f(x,y),\quad \frac{\partial u}{\partial t}=0.$$

Es kommt also hier nur auf ein particuläres Integral mit einer willkürlichen Function an.

Man erhält als particuläres Integral zunächst:

$$u = \cos m^2 at \cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta),$$

und durch Einsetzen:

$$m^2 = \alpha^2 + \beta^2,$$

also:

$$u = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha^2+\beta^2)\, at \cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta) f(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta\, d\alpha\, d\beta.$$

Es ist aber:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\alpha^2+\beta^2)\, at \cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta)\, d\alpha\, d\beta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} [\cos\alpha^2 \, at \cos\beta^2 \, at - \sin\alpha^2 \, at \sin\beta^2 \, at],\ \cos\alpha(x-\xi)\cos\beta(y-\eta)\, d\alpha\, d\beta.$$

Integrirt man zunächst nach $\alpha$, was mittels der Ausdrücke für diejenigen in den Grenzen $-\infty$ und $+\infty$ genommenen bestimmten Integrale, welche den Cosinus oder Sinus eines Quadrates der Variablen enthalten, leicht geschehen kann, so erhält man:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\cos\alpha^2 \, at \cos\beta^2 \, at - \sin\alpha^2 \, at \sin\beta^2 \, at)\cos\alpha(x-\xi)\, d\alpha$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{at}}\left[\cos\beta^2 \, at \sin\left(\frac{\pi}{4}+\lambda^2\right) - \sin\beta^2 \, at \sin\left(\frac{\pi}{4}-\lambda^2\right)\right],$$

wo man wie in der vorigen Aufgabe setzt:

$$\xi = x + 2\lambda\sqrt{(at)}.$$

Das Doppelintegral erhält also den Werth:

$$\sqrt{\frac{\pi}{at}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\lambda^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\beta^2 \, at \cos\beta(y-\eta)\, d\beta$$

$$-\sqrt{\frac{\pi}{at}}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\lambda^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\beta^2 \, at \cos\beta(y-\eta)\, d\beta.$$

Man verrichtet die Integrationen in Bezug auf $\beta$ ganz in der obigen Weise; setzt man also:

$$\eta = y + 2\mu\sqrt{(at)},$$

so hat man den Werth:

$$\frac{\pi}{at}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}+\lambda^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\mu^2\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}-\lambda^2\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\mu^2\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{at}\sin(\lambda^2+\mu^2),$$

und also für den Werth von $u$:

$$u = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin(\lambda^2+\mu^2) f[x+2\lambda\sqrt{(at)},\ y+2\mu\sqrt{(at)}]\, d\lambda\, d\mu.$$

Ist:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(x,y) \qquad \text{für} \qquad u = 0,$$

so kann man ähnlich wie im vorigen Beispiele verfahren. Es findet aber eine Reduction des zu $u$ hinzukommenden Theiles nicht in der Weise wie die des ersten Theiles statt.

IX) Sei noch gegeben die Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu,$$

und für:

$$t=0, \qquad u=F(x).$$

Setzt man:

$$u=e^{bt}\cdot v,$$

so nimmt diese Gleichung die Gestalt an:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

und die Grenzbedingung wird:

$$t=0, \qquad v=F(x).$$

Man hat also ganz ein bereits angestelltes Verfahren zu wiederholen, und ist das Resultat:

$$v=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\beta^2}[F(x+2a\beta\sqrt{t})+F(x-2a\beta\sqrt{t})]\,d\beta,$$

mit $e^{bt}$ zu multiplieiren, wodurch $u$ gegeben ist.

X) Sei zu integriren die Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{mu}{x^2}\right).$$

Wir setzen als particuläres Integral:

$$u=Pe^{\alpha a^2 t},$$

wo $P$ nicht von $t$ abhängig sein soll, sonst indess unbestimmt ist. Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\alpha^2 P=\left(\frac{d^2 P}{dx^2}-\frac{mP}{x^2}\right).$$

Dies ist eine totale Differenzialgleichung zweiter Ordnung, deren Integral also zwei Constanten enthält, lässt man diese nach irgend einem Gesetze variiren, so ist:

$$u=\Sigma Pe^{\alpha^2 a^2 t}$$

auch ein Integral der partiellen Differenzialgleichung.

Man sieht, dass diese Methode der Zurückführung partieller Differenzialgleichungen mit zwei unabhängigen Variablen auf totale, ebenfalls von grosser Allgemeinheit ist. Es fragt sich aber, in wiefern man hierdurch zu dem allgemeinen Integrale gelangen kann.

Die Gleichung:

$$\frac{d^2 P}{dx^2}-\frac{m(m-1)}{x^2}P=hP,$$

welche mit unserer übereinstimmt, lässt sich leicht auf die Riccatische bringen, denn setzt man $P=x^m u$, so nimmt sie die Gestalt an:

$$\frac{d^2 u}{dx^2}+\frac{2m}{x}\frac{du}{dx}=hu,$$

welche durch die Substitution $t^{\frac{n}{2}+1}=x$ gibt:

$$\frac{d^2 u}{dt^2}=abut^n,$$

wenn man setzt:

$$2m=\frac{n}{n+2}, \qquad h=\frac{ab}{\left(\frac{n}{2}+1\right)^2}.$$

Die letzte Differenzialgleichung ist aber diejenige, auf welche man gewöhnlich die Riccatische zurückführt. Wendet man die Integrationsmethode der letzteren durch bestimmte Integrale an (vergleiche den Artikel: Zurückführung der totalen Differenzialgleichungen auf Quadraturen, Abschnitt 30), so ergibt sich:

$$P = A x^m \int_0^\pi e^{\alpha x \cos\lambda} \sin^{2m-1}\lambda\, d\lambda + B x^{1-m} \int_0^\pi e^{\alpha x \cos\lambda} \sin^{1-2m}\lambda\, d\lambda.$$

Es ist nun zu nehmen:

$$u = \Sigma P e^{\alpha^2 a^2 t}.$$

Man hat aber bekanntlich:

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 + 2\alpha a \sqrt{t} - \alpha^2 a^2 t} d\omega,$$

also:

$$e^{\alpha^2 a^2 t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 + 2 a \alpha \omega \sqrt{t}} d\omega,$$

und diesen Werth in den von $u$ einsetzend, erhalten wir:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^m \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi [\Sigma A e^{\alpha(x\cos\lambda + 2\omega a\sqrt{t})}] e^{-\omega^2} \sin^{2m-1}\lambda\, d\omega\, d\lambda$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{1-m} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi [\Sigma B e^{\alpha(x\cos\lambda + 2\omega a\sqrt{t})}] e^{-\omega^2} \sin^{1-2m}\lambda\, d\omega\, d\lambda.$$

Setzt man:

$$\varphi(x) = \frac{\Sigma A e^{\alpha x}}{\sqrt{\pi}}, \quad \psi(x) = \frac{\Sigma B e^{\alpha x}}{\sqrt{\pi}},$$

wo wegen der willkürlichen Coefficienten $A$ und $B$, auch $\varphi$ und $\psi$ willkürliche Functionen sind, so hat man:

$$u = x^m \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \varphi(x\cos\lambda + 2\omega a\sqrt{t})\, e^{-\omega^2} \sin^{2m-1}\lambda\, d\omega\, d\lambda$$

$$+ x^{1-m} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^\pi \psi(x\cos\lambda + 2\omega a\sqrt{t})\, e^{-\omega^2} \sin^{1-2m}\lambda\, d\omega\, d\lambda.$$

Dieses Integral enthält zwei willkürliche Functionen. In der That ist die partielle Differenzialgleichung in Bezug auf $x$ von zweiter Ordnung. Da sie aber in Bezug auf $t$ von der ersten ist, muss es auch möglich sein, ein allgemeines Integral mit einer einzigen willkürlichen Function zu bestimmen. Wir unterlassen dies, und die Anpassung der willkürlichen Functionen an die Anfangszustände. Es mag dies der Wärmetheorie, worin unsere Gleichung vorkommt, überlassen bleiben.

21) **Behandlung der partiellen Differenzialgleichungen, welche der Beschränkung unterliegen, nur so lange zu gelten, als ein Theil der Variablen oder gewisse Functionen derselben gegebene Grenzen nicht überschreiten.**

Wir haben in Abschnitt 12) gezeigt, dass jede partielle Differenzialgleichung $p$ter Ordnung auch ein allgemeines Integral mit $p$ willkürlichen Functionen habe, deren jede eine Variable weniger enthält, als unabhängige Variablen vorhanden sind.

Es hindert nicht, dass eine Gleichung in Bezug auf die Variablen verschiedener Ordnung sein kann, ihr Integral enthält dann eben mehr oder weniger willkürliche Functionen, je nach Auswahl derjenigen Variablen, nach welcher man die Anfangszustände bestimmt.

Die Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

z. B. bestimmt die Bewegung der Wärme in einem Stabe, den wir uns unendlich lang denken wollen. $t$ ist die Zeit, $x$ die Entfernung eines Punktes des Stabes vom Anfangspunkte.

Bestimmt man den Anfangszustand so, dass der Wärmezustand zu einer gewissen Zeit, für die man doch immer $t=0$ nehmen kann, in jedem Punkte des Stabes gegeben sei, also dass dann $u=\varphi(x)$ sei, so reicht diese Bedingung vollständig aus, um den Wärmezustand zu jeder Zeit zu bestimmen, da die Gleichung in Bezug auf $t$ erster Ordnung ist. Indess kann man die Sache auch so betrachten, dass der Wärmezustand in einem beliebigen Punkte des Stabes, also wo etwa $x=0$ ist, zu jeder Zeit gegeben sei, also dass in diesem Punkte $u=f(t)$ sei. Diese Bedingung reicht nicht hin, um die Aufgabe vollständig zu bestimmen, da die Gleichung in Bezug auf $x$ 2ter Ordnung ist. Es wird noch nöthig, eine zweite willkürliche Function einzuführen, z. B. diejenige $F(t)$, welche den Werth von $\frac{\partial u}{\partial x}$ im Punkte $x=0$ angibt.

Aber selbst dies ist nur so lange der Fall, als man sich $x$ bis ins Unendliche gehend denkt, also diese Variable beliebige reelle Werthe — denn um solche handelt es sich doch nur bei dergleichen Aufgaben — geben kann. In der Anwendung aber ist es nicht der Fall. Untersucht man z. B. die Bewegung der Wärme in einem Stabe von einer beliebigen Länge, also von $x=0$ bis $x=\alpha$, so reicht die Grenzbedingung, dass für $t=0$, $u=\varphi(x)$ sei, nicht mehr aus. Es wird nämlich die Gleichung dann nur für die Punkte des Stabes gelten. In der That haben wir in Abschnitt 12) dergleichen Betrachtungen nicht angestellt. Geben wir also von den recurrenten Gleichungen, in welche sich eine partielle Differenzialgleichung zerlegen lässt, in Bezug auf unser Beispiel wieder aus, nehmen aber an, dass unsere Gleichung nur so lange gelte, als $x$ zwischen den Grenzwerthen $x=\alpha$ und $x=\beta$ liegt, wo $\alpha<\beta$ sei.

Seien wieder:

$$u_0,\ u_1,\ u_2\ \ldots\ u_n$$

continuirliche Werthe von $u$, welche den continuirlichen Werthen:

$$t=0,\quad t=t_1,\quad t=t_2,\quad t=t_3\ \ldots\ t=t_n$$

entsprechen. Dann ist:

$$u_1 = u_0 + (t_1 - t_0) a^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2},$$

$$u_2 = u_1 + (t_2 - t_1) a^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$u_n = u_{n-1} + (t_n - t_{n-1}) a^2 \frac{\partial^2 u_{n-1}}{\partial x^2}.$$

Kennt man alle Werthe von $u_0$ $\frac{\partial u_0}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}$ . . . welche hierin enthalten sind, für jedes $x$, so bleibt allerdings nur $u_0$ willkürlich, und ist also dafür eine willkürliche Function von $x$ zu setzen. Nehmen wir indess an, $x$ sei gleich $\alpha$, so ist:

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = \frac{u_{(s,\alpha+\nu)} - 2u_{(s,\alpha)} + u_{(s,\alpha-\nu)}}{\nu^2},$$

wo man sich $\nu$ ins Unendliche abnehmend denkt, $u_{(s,\alpha)}$ aber den Werth von $u_s$ für $x=\alpha$ vorstellt. Von den drei hier vorkommenden Werthen von $u_s$ liegen aber nur die zwei ersten, $u_{(s,\alpha+\nu)}$, $u_{(s,\alpha)}$ in demjenigen Raume, für welchen die Differenzialgleichung gilt, nicht aber $u_{(s,\alpha-\nu)}$. Diese Grösse ist also völlig unbestimmt. Ebenso ist, wenn man $x=\beta$ setzt:

$$\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} = \frac{u_{(s,\beta+\nu)} - 2u_{(s,\beta)} + u_{(s,\beta-\nu)}}{\nu^2},$$

und $u_{(s,\beta+\nu)}$ ausserhalb des gegebenen Raumes also unbestimmt. — Soll also die Function $u$ völlig definirt sein, so müssen noch für beliebiges $t$ die Werthe $u_{(s,\beta+\nu)}$, $u_{(s,\alpha-\nu)}$ gegeben sein, d. h. da $\nu$ unendlich klein ist, es müssen zu der Bedingung:

$$t=0,\quad u=\varphi(x)$$

noch hinzutreten die beiden folgenden:

$$x=\alpha,\ u=f(t), \qquad x=\beta,\ u=F(t).$$

Die Function muss an beiden Endpunkten bestimmt sein.

Offenbar sind diese Schlüsse nicht von der besondern Gestalt unserer Differenzialgleichung abhängig, sondern nur von der Ordnung, die sie in Bezug auf $x$ hat. Wäre sie in Bezug auf diese Variable erster Ordnung, so würde der Werth $u_{(s,\beta+\nu)}$ nicht vorkommen, also

diejenige willkürliche Function von $t$ ausreichen, welche $x=\alpha$ entspricht. Wäre sie von dritter Ordnung, so reichten selbst diese beiden Grenzwerthe nicht hin, es müsste noch etwa der Werth von $\frac{\partial u}{\partial x}=\psi(t)$ für $x=\alpha$ oder $x=\beta$ hinzutreten.

Nehmen wir an, dass es sich statt einer Stange, die wir uns unendlich dünn dachten, um einen sich nach allen Richtungen gleichmässig ausdehnenden homogenen Körper handelte, und etwa die Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

gegeben sei, welche ebenfalls den Wärmezustand gibt.

Da man sich den Körper, wie auch seine Gestalt sei, in unendlich dünne Prismen getheilt denken kann, welche von einem beliebigen Punkte der Begrenzung bis zu einem andern gehen, von denen der erste dem Werthe von $\alpha$ im vorigen Beispiel, der zweite dem Werthe $\beta$ entspricht, so muss $u$ für alle diese $\alpha$ und $\beta$, d. h. für die ganze Begrenzung gegeben sein, und wir haben also einen Satz, den wir gleich in seiner Allgemeinheit hinstellten, da nur die Ordnung der Gleichung in Bezug auf $x$, $y$, $z$ eine Rolle spielt:

„Ist eine partielle Differenzialgleichung von vier unabhängigen Variablen abhängig, die wir mit $t$, $x$, $y$, $z$ bezeichnen, und denken wir uns der Veranschaulichung wegen unter $x$, $y$, $z$ rechtwinklige oder andere Coordinaten, nehmen wir ferner an, die Gleichung sei nur innerhalb eines völlig oder theilweise begrenzten Raumes gültig, so ist die Function $u$, welche durch die Differenzialgleichung ausgedrückt wird, nur dann völlig definirt, wenn man:

1) die Function $u$ von $x$, $y$, $z$ kennt, welche dem Anfangswerthe von $t$, also z. B. $t=0$ entspricht;

2) die Function $u$ von $x$, $y$, $z$ und $t$ kennt, welche auf der ganzen Begrenzung stattfindet, falls die Gleichung in Bezug auf $x$, $y$, $z$ zweiter Ordnung ist. Ist sie nur erster Ordnung in Bezug auf diese Variablen, so reicht ein Theil der Begrenzung hin, ist sie von höherer Ordnung, so sind noch mehr Bedingungen nöthig. Diese Function $u$ enthält übrigens nur drei Variablen, da zwischen $x$, $y$, $z$ eine Gleichung, die der Oberfläche, stattfindet.

Selbstverständlich ist, wenn die Gleichung sich über einen begrenzten Flächentheil erstreckt, die Linie, welche diese Grenze bildet, an die Stelle der eben betrachteten Oberfläche zu setzen.

Aber die Schwierigkeiten, welche die Anwendung der partiellen Differenzialgleichungen auf Physik und Mechanik darbieten, sind hiermit noch nicht ganz erschöpft. Es kommt nämlich oft, z. B. in der Wärmelehre, wenn man die Ausstrahlung der Körper berücksichtigt, vor, dass die der Gleichung genügende Function, welche auf der Oberfläche gegeben sein muss, nicht direct eingeführt ist, sondern durch eine andere totale oder partielle Differenzialgleichung bestimmt ist, die nur eben auf dieser Oberfläche stattfindet.

Diese der eigentlichen Theorie der partiellen Differenzialgleichungen allerdings nicht direct angehörigen Bedingungen machen die Aufgabe, selbst wenn es sich um lineare und einfache Gleichungen handelt, zu einer der complicirtesten der Analysis. Dennoch ist es Mathematikern wie Fourrier, Poisson, Lamé und Andern gelungen, selbst in allgemeinen Fällen Lösungen zu finden.

Wir verweisen hierbei namentlich auf die Artikel: Akustik, Schwingungen und Wärme. Dennoch wollen wir, ohne uns bei Speciellem zu verweilen, eine allgemeine, von Poisson herrührende Betrachtung geben, welche das Verfahren entwickelt, dessen man sich namentlich in allen Fällen, welche der Wärmelehre angehören, ausserdem aber in vielen andern mit Glück bedient hat, da es angemessen scheint, diese rein analytische Betrachtung diesem Artikel, welcher die Theorie der partiellen Differenzialgleichungen bis zu einem gewissen Grade vollständig geben soll, einzuverleiben.

Zum Schlusse dieses Abschnitts bemerken wir noch, dass die hier angestellten Untersuchungen recht geeignet sind, zu zeigen, welche wichtige Rolle die Begrenzungen und Anfangszustände in der Theorie der partiellen Differenzialgleichungen spielen. Es wird namentlich die Natur der Function, welche eine solche definirt, ganz verändert, wenn man den Raum, über den sie sich erstreckt, sich in seiner Begrenzung ändern lässt. — Diese Betrachtungen erstrecken sich übrigens nicht bloss auf lineare Differenzialgleichungen, jedoch sind die übrigen sehr schwierig selbst in besondern Fällen zu lösen, wenn sie von höherer Ordnung sind. Die Behandlung eines besondern Falles der hydrodyna-

mischen Gleichungen, welche von Dirichlet gefunden, und aus seinen hinterlassenen Papieren von Dedekind mitgetheilt ist (Crelle, Band 58), gehört daher zu den schönsten und wichtigsten Resultaten dieser Art.

22) Verfahren bei der Auflösung einer partiellen Differenzialgleichung, die den im vorigen Abschnitt untersuchten Beschränkungen unterliegt, in einem besondern Falle.

Die von Poisson behandelte Aufgabe ist rein analytisch dargestellt die folgende:

Es sei gegeben die partielle Differenzialgleichung:

$$1)\quad c\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial\left(k_1\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(k_2\frac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(k_3\frac{\partial u}{\partial z}\right)}{\partial z},$$

$c$, $k_1$, $k_2$, $k_3$ sind Functionen von $x$, $y$, $z$. Die Gleichung ist sehr allgemeiner Art. Sie drückt die Bewegung der Wärme in einem nicht homogenen Körper aus. Wenn $k_1$, $k_2$, $k_3$ nicht gleich sind, so ist anzunehmen, dass der Körper nach den verschiedenen Richtungen sich ungleich gegen die Erwärmung verhalte, wie dies in den Crystallen der Fall ist, welche nicht dem gleichaxigen System angehören. $x$, $y$, $z$ sind rechtwinklige Coordinaten.

Der Anfangszustand ist gegeben durch die Gleichung:

$$2)\quad t=0,\quad u=F(x,\ y,\ z),$$

wo $F$ eine willkürliche Function ist. — Es müsste jetzt noch der Wärmezustand des Körpers auf der ganzen Oberfläche gegeben sein, um die Function $u$ für den Körper völlig zu definiren. In der Natur aber tritt in der Regel statt dieser Bedingung die ein, dass von dem Körper aus Ausstrahlung in eine Gasart, also z. B. in die Atmosphäre, deren Temperatur man sich gegeben denkt, stattfindet. Diese Ausstrahlung ist bestimmt durch die Differenzialgleichung:

$$3)\quad k_1\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+k_2\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+k_3\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma +p(u-\zeta)=0,$$

eine Gleichung, die sich nur auf die Oberfläche erstreckt, deren Gleichung:

$$4)\quad \varphi(x,\ y,\ z)=0$$

sei. In den Anwendungen ist sogar $k_1=k_2=k_3$. $\zeta$ ist die Temperatur der Punkte, welche mit der Oberfläche in Wärmewechsel stehen. Es ist also im Allgemeinen $\zeta$ eine Function von $x$, $y$, $z$ und $t$, wo die Coordinaten wieder durch die Gleichung 4) verbunden sind.

Es lässt sich aber in den Anwendungen die allgemeine Lösung auf den Fall zurückführen, wo

$$\zeta=0$$

ist, was wir hier annehmen. $\alpha, \beta, \gamma$ sind die Winkel, welche die Normale an die Oberfläche mit den Axen macht.

Das hier zu gebende Verfahren ist übrigens nicht von dem Umstande abhängig, dass die Gleichung in Bezug auf $t$ erster Ordnung ist, und schliesst sich, wie man leicht sehen wird, auch dem Falle an, wo statt der linken Seite der Gleichung 1) gesetzt wird:

$$\sum_{s=0}^{s=n} c_s\frac{\partial^s u}{\partial t^s},$$

wo die Grössen $c_s$ nur von $x$, $y$, $z$ abhängig sein sollen.

Der Charakter der Gleichung ist eben hauptsächlich der, dass sie in Bezug auf $t$ linear, und in Bezug auf $x$, $y$, $z$ von der zweiten Ordnung ist.

Um zunächst ein particuläres Integral der Gleichung 1) zu haben, setzen wir:

$$5)\quad u=Pe^{-\lambda^2 t},$$

wo $\lambda$ eine willkürliche Constante, $P$ eine Function von $x$, $y$, $z$ ist. Durch Einsetzen in unsere Gleichung 1) erhalten wir dann:

$$6)\quad -\lambda^2 Pc=\frac{\partial\left(k_1\frac{\partial P}{\partial x}\right)}{\partial x}+\frac{\partial\left(k_2\frac{\partial P}{\partial y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(k_3\frac{\partial P}{\partial z}\right)}{\partial z}.$$

Diese Gleichung, welche nur drei unabhängige Variable enthält, ist zunächst aufzulösen. Wenn diese Gleichung in Bezug auf $x$ linear ist, so kann man das eben angestellte Verfahren wiederholen, d. h. setzen:

$$P=e^{-\mu^2 x}\,Q,$$

wo $Q$ nur von $y$ und $z$ abhängt. Die resultirende Gleichung würde also nur noch zwei unabhängige Variable enthalten. Ist diese auch in Bezug auf $y$ linear, so ist das Verfahren abermals zu wiederholen und man hat eine nur von $z$ abhängige Function, die einer totalen Differenzialgleichung genügt, welche schliesslich aufzulösen ist. Dies Verfahren findet immer Anwendung, wenn $k_1$, $k_2$, $k_3$ Constante sind, ausserdem aber in vielen Fällen, wo man durch Transformation der Coordinaten $x$, $y$, $z$ zu li-

nearen Gleichnngen gelangt. Wie dem aber anch sei, denken wir uns die Grösse $P$ dnrch diese Gleichung bestimmt, und es wird dann $P$ eine Fnnction der willkürlichen Constante $\lambda$ seio, also $=P_\lambda$. Damit der Werth von $u$ aber anch der Gleichnng 3) genüge, erhalten wir durch Einsetzen, nnd indem wir $\zeta=0$ nehmen:

7) $$k_1 \frac{\partial P}{\partial x}\cos\alpha + k_2 \frac{\partial P}{\partial y}\cos\beta + k_3 \frac{\partial P}{\partial z}\cos\gamma + pP = 0.$$

Ein Integral nnserer Gleichnng ist offenbar auch der Ausdruck:

8) $$u = \sum_\lambda A_\lambda P_\lambda e^{-\lambda^2 t},$$

wo die Grössen $A_\lambda$ beliebige Coefficienten sind, und diese, sowie $\lambda$ selbst, den Grenzhedingungen 2) und 7) gemäss zn bestimmen sind. Sei jetzt $P_\mu$ ein anderer Werth von $P$, welcher also die Gleichnng:

9) $$-\mu^2 P_\mu c = \frac{\partial\left(k_1 \frac{\partial P_\mu}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(k_2 \frac{\partial P_\mu}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(k_3 \frac{\partial P_\mu}{\partial z}\right)}{\partial z}$$

erfüllt.

Wir multipliciren diese Gleichnog mit $P_\lambda$, nnd integriren beide Seiten derselben, indem wir das Integral über den ganzen Körper ansdehnen, für welchen die Gleichnng 1) gilt. Es ergibt sich:

10) $$-\mu^2 \iiint P_\lambda P_\mu c\, dx\, dy\, dz = \iiint P_\lambda \frac{\partial k_1 \frac{\partial P_\mu}{\partial x}}{\partial x}\, dx\, dy\, dz + \iiint P_\lambda \frac{\partial k_2 \frac{\partial P_\mu}{\partial y}}{\partial y}\, dx\, dy\, dz + \iiint P_\lambda \frac{\partial k_3 \frac{\partial P_\mu}{\partial z}}{\partial z}\, dx\, dy\, dz.$$

Es ist nnn:

$$\int P_\lambda \frac{\partial\left(k_1 \frac{\partial P_\mu}{\partial x}\right)}{\partial x}\, \partial x = \left(k_1 P_\lambda \frac{\partial P_\mu}{\partial x}\right) - \left[k_1 P_\lambda \frac{\partial P_\mu}{\partial x}\right] - \int k_1 \frac{\partial P_\mu}{\partial x} \frac{\partial P_\lambda}{\partial x}\, dx.$$

Die Klammern ( ) sollen anzeigen, dass in dem darin enthaltenen Ausdruck diejenigen Werthe zn setzen sind, die der obern Grenze von $x$ entsprechen, die Klammern [ ] gehen auf die untere Grenze.

Der geometrischen Veranschaulichung wegen nehmen wir an, dass die Axe der $x$ vertical nnd der Schwere entgegengesetzt gerichtet sei; denken wir nos einen verticalen Cylioder, welcher die Oberfläche nnseres Körpers berührt, so theilt derselbe den Körper in zwei Theile, von denen wir den obern mit $A$, den nntern mit $B$ bezeichnen wollen. Alle Punkte, die den Klammern ( ) angehören, liegen dann in $A$, und alle den Klammern [ ] angehörigen in $B$.

Es ist nun ferner:

$$\int k_1 \frac{\partial P_\mu}{\partial x} \frac{\partial P_\lambda}{\partial x}\, dx = \left(k_1 P_\mu \frac{\partial P_\lambda}{\partial x}\right) - \left[k_1 P_\mu \frac{\partial P_\lambda}{\partial x}\right] - \int P_\mu \frac{\partial\left(k_1 \frac{\partial P_\lambda}{\partial x}\right)}{\partial x}\, dx.$$

Diese Ausdrücke sind noch nach den Variablen $dy$ nnd $dz$ zu integriren. Stellen wir nns aber unter $dw$ das Element der Oberfläche vor, so ist $dy\, dz$ die Projection desselben auf die Ebene der $yz$, nnd mithin:

$$dy\, dz = \pm\, dw \cos\alpha,$$

wo das obere Zeichen auf alle dem Theile $A$ des Körpers angehörigen Elemente, das untere auf die dem Theile $B$ angehörigen geht, und $\alpha$, wie schon angenommen wurde, der Winkel der Normale in $d\omega$ mit der Axe der $x$ ist. Diese Werthe in die eben gefundenen Formeln einsetzend, und nach $dy\,dz$ integrirend, erhält man also:

$$\iiint P_\lambda \frac{\partial\left(k_1 \frac{\partial P_\mu}{\partial x}\right)}{\partial x} dx\,dy\,dz = \int k_1 P_\lambda \frac{\partial P_\mu}{\partial x} \cos\alpha\,d\omega - \int k_1 P_\mu \frac{\partial P_\lambda}{\partial x} \cos\alpha\,d\omega$$
$$+ \iiint P_\mu \frac{\partial\left(k_1 \frac{\partial P_\lambda}{\partial x}\right)}{\partial x} dx\,dy\,dz.$$

Die beiden ersten Integrale rechts vom Gleichheitszeichen erstrecken sich über die ganze Oberfläche.

Ganz ähnliche Formeln erhalten wir für:

$$\iiint P_\lambda \frac{\partial k_2 \frac{\partial P_\mu}{\partial y}}{\partial y} dx\,dy\,dz, \qquad \iiint P_\lambda \frac{\partial k_3 \frac{\partial P_\mu}{\partial z}}{\partial z} dx\,dy\,dz,$$

und durch Addition dieser Ausdrücke in Verbindung mit Gleichung 10):

$$-\mu^2 \iiint P_\lambda P_\mu c\,dx\,dy\,dz = \int P_\lambda \left[k_1 \frac{\partial P_\mu}{\partial x}\cos\alpha + k_2 \frac{\partial P_\mu}{\partial y}\cos\beta + k_3 \frac{\partial P_\mu}{\partial z}\cos\gamma\right] d\omega$$
$$- \int P_\mu \left[k_1 \frac{\partial P_\lambda}{\partial x}\cos\alpha + k_2 \frac{\partial P_\lambda}{\partial y}\cos\beta + k_3 \frac{\partial P_\lambda}{\partial z}\cos\gamma\right] d\omega$$
$$+ \iiint P_\mu \left[\frac{\partial\left(k_1 \frac{\partial P_\lambda}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(k_2 \frac{\partial P_\lambda}{\partial y}\right)}{\partial y} + \frac{\partial\left(k_3 \frac{\partial P_\lambda}{\partial z}\right)}{\partial z}\right] dx\,dy\,dz.$$

Wegen der Gleichung 7), welche für $P_\lambda$ und $P_\mu$ gilt, verschwinden beide über die Oberfläche erstreckten Integrale, und wegen Gleichung 6) nimmt das letzte Integral rechts die Gestalt an:

$$-\lambda^2 \iiint P_\lambda P_\mu c\,dx\,dy\,dz,$$

so dass man hat:

$$\mu^2 \iiint P_\lambda P_\mu c\,dx\,dy\,dz = \lambda^2 \iiint P_\lambda P_\mu c\,dx\,dy\,dz.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn man hat:

$$\lambda = \mu,$$

oder:

11) $$\iiint P_\lambda P_\mu c\,dx\,dy\,dz = 0,$$

und die letztere Gleichung findet für alle Werthe von $\lambda$ und $\mu$ statt, die nicht unter einander gleich sind.

Aus diesem höchst wichtigen Resultat ziehen wir folgende Schlüsse:

Wir dachten uns die Grössen $P$ durch Gleichung 6) bestimmt bis auf die Constante $\lambda$, die Gleichung 7) ist dann eine im Allgemeinen transcendente Gleichung, welche zur Bestimmung von $\lambda$ dient. Sie wird unendlich viel Wurzeln haben.

Setzen wir nun gemäss der Gleichung:

$$u = \sum_\lambda A_\lambda P_\lambda e^{-\lambda^2 t},$$

wo wir unter $\lambda$ alle reellen Wurzeln der transcendenten Gleichung 7) verstehen, so ist noch Gleichung 2) zu erfüllen. Es muss also sein:

$$\sum_\lambda A_\lambda P_\lambda = F(x, y, z).$$

In der That lassen sich die Coefficienten $A_\lambda$ immer so bestimmen, dass dieser Gleichung genügt wird.

Multipliciren wir nämlich beide Seiten derselben mit $c P_\mu$ und integriren über den ganzen Körper, so kommt:

$$\iiint c P_\mu F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_\lambda A_\lambda \iiint c P_\lambda P_\mu\, dx\, dy\, dz.$$

Auf der rechten Seite aber fallen gemäss der Gleichung 11) alle Glieder aus, wo $\lambda$ und $\mu$ ungleich sind. Man hat daher:

$$\iiint c P_\mu F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_\mu A_\mu \iiint c P_\mu^2\, dx\, dy\, dz,$$

also:

$$12)\qquad A_\lambda = \frac{\iiint c P_\lambda F(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint c P_\lambda^2\, dx\, dy\, dz}.$$

Es ist somit die Gleichung 1) derart gelöst, dass zugleich den Bedingungen 2) und 3) genügt wird.

Gleichung 6) gibt nämlich die Werthe von $P$ als Functionen von $\lambda$, Gleichung 7) die $\lambda$ selbst, Gleichung 12) die Coefficienten $A_\lambda$, und 8) enthält dann den allgemeinen Werth von $u$.

Wir sagten vorhin, dass nur die reellen Wurzeln der Gleichung 7) zu nehmen sind. In der That lässt sich zeigen, dass diese Gleichung entweder keine imaginären Wurzeln enthält, oder dass dieselben doch in der Reihenentwickelung 8) nicht vorkommen.

Denn da diese Gleichung 7) nur reelle Grössen enthält, so muss jedem imaginären Werthe:

$$\lambda = \alpha + \beta i,$$

ein zweiter:

$$\lambda_1 = \alpha - \beta i$$

entsprechen. Mögen hierzu gehören die Werthe:

$$P_\lambda = Q + R i, \quad P_{\lambda_1} = Q - R i;$$

setzt man dieselben in die Gleichung 11) ein, so kommt:

$$\iiint c (Q^2 + R^2)\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Da aber alle Elemente $Q^2 + R^2$ positiv sind, und dasselbe von $c$ gilt, welcher Ausdruck die Dichtigkeit des betrachteten Körpers vorstellt, und daher nicht negativ wird, so kann diese Gleichung nicht erfüllt werden, wenn nicht $Q = R = 0$ wird. Es sind also imaginäre Werthe von $\lambda$ von vorn herein auszuschliessen.

Eine Schwierigkeit bei diesen Betrachtungen macht eben nur der Umstand, dass die Convergenz der Reihenentwicklung 8) im Allgemeinen fraglich ist. Wenn der Beweis dieser Convergenz auch in einzelnen sehr wichtigen Fällen gelungen ist, so ist dies doch im Allgemeinen bis jetzt nicht der Fall, eine Lücke, welche den so reichen Resultaten dieser Theorie allerdings noch den Stempel der Unfertigkeit aufdrückt.

23) Beschränkung der Grenzbestimmungen durch Einführung von Stetigkeitsbedingungen.

Durch Beschränkung des Umfanges, über den sich eine gegebene partielle Differenzialgleichung erstreckt, wird die Anzahl der Grenzbestimmungen oder der willkürlichen Functionen vermehrt.

Es kann dieselbe aber auch vermindert werden, wenn man gewisse Voraussetzungen, z. B. über die Stetigkeit der gesuchten Function macht. — Wir geben von diesem Falle ein Beispiel, welches

einen nicht allein in den Anwendungen der Mathematik auf Physik höchst wichtigen Satz enthält, sondern auch in der neuesten Zeit für die Analysis eine Bedeutung erhalten hat, welche es zu einem Fundamentalsatze für die Theorie der Functionen macht.

Es bezieht sich dies Beispiel auf die partielle Differenzialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

wo wir nur der Anschaulichkeit wegen unter $x$, $y$, $z$ rechtwinklige Coordinaten denken. Es möge sich die Gleichung über einen geschlossenen körperlichen Raum erstrecken. Es drückt dieselbe z. B. den Wärmezustand eines homogenen Körpers aus, welcher sich in Wärmegleichgewicht befindet, wo also kein Punkt dem andern Wärme abgibt; ausserdem aber ist durch sie die Anziehung bestimmt, welche ein Körper auf einen nicht in ihm liegenden Punkt nach dem Newton'schen Gesetze ausübt. Endlich, wenn wir $z$ constant annehmen, eine Annahme, wodurch sich unsere Gleichung in:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

verwandelt, so gibt dieselbe die Bedingung dafür, dass $u$ der reelle Theil einer Function $f$ der complexen Grösse $x+yi$ sei, so dass:

$$f(x+yi)=u+vi$$

gesetzt werden kann, während der mit $i$ multiplicirte Theil durch die Gleichungen bestimmt ist:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}.$$

In allen diesen Bestimmungen ist also nothwendig, dass $u$, $x$, $y$, $z$ reell seien. Die in Rede stehende partielle Differenzialgleichung ist in Bezug auf alle drei unabhängigen Variablen zweiter Ordnung; also zur völligen Definition von $u$ sind zwei willkürliche Functionen nöthig. Dieselben können z. B. durch die Bedingungen bestimmt sein, dass auf der ganzen Oberfläche

$$u=f(x,\ y,\ z)$$

sei, wo $f$ völlig willkürlich ist, und ausserdem:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\varphi\ (x,\ y,\ z)$$

ebenfalls auf der Oberfläche, wo $\varphi$ ebenfalls eine willkürliche Function, und $\frac{\partial u}{\partial r}$ der Differenzialquotient von $u$ ist, genommen in der Richtung der an irgend einen Punkt der Oberfläche gezogenen Normale.

Nimmt man aber zu der Differenzialgleichung die Bedingung hinzu, dass $u$ in dem ganzen Körperraume continuirlich sei, so fällt die zweite Grenzbedingung weg, und es bleibt nur die erste übrig, d. h. es findet folgender wichtige Satz statt:

„Eine Function $u$ ist völlig definirt für einen gegebenen begrenzten Raum, wenn sie: 1) auf der ganzen Begrenzung einen gegebenen continuirlichen Werth $u=f(x,\ y,\ z)$ hat, 2) innerhalb des ganzen Raumes continuirlich ist, und 3) daselbst der Differenzialgleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

genügt."

Wir gehen den Beweis dieses Satzes nach seinem Erfinder Dirichlet.

Es ist nachzuweisen, dass es für jede beliebige Function $f(x,\ y,\ z)$, die auf der Begrenzung gegeben ist, eine allgemeine $u$ gebe, welche den Bedingungen 2) und 3) genügt, und ausserdem, dass nur eine solche Function existire.

Zuvörderst ist klar, dass man die Function $f(x,\ y,\ z)$ auf der Grenze beliebig annehmen kann, dann, indem man die Grössen $x$, $y$, $z$ derart continuirlich ändert, dass die entsprechenden Punkte in den Körper hineinfallen, dass man die Function $u$ auch nach einem beliebigen Gesetze continuirlich ändern kann, so dass sie im ganzen Raume continuirlich bleibt. Man erhält auf diese Weise also unendlich viele Functionen, welche continuirlich aus einander entstehen und den Bedingungen 1) und 2) genügen. Es fragt sich, welche von denselben auch die Bedingung 3) erfüllen. Zu dem Ende betrachten wir das dreifache Integral:

$$\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz=V,$$

welches sich über den ganzen Körper erstrecken soll. Jeder der unendlich vielen Functionen $u$ entspricht ein $V$, alle diese $V$ entstehen continuirlich aus einander. Da aber das jedenfalls reelle und continuirliche Argument von $V$, $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$

$+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ wesentlich positiv ist, so kann die Grösse $V$ nicht unter ein gewisses Minimum sinken. Es ist hierbei indess zunächst der Fall nicht ausgeschlossen, dass mehr und selbst unendlich viele aus einander entstehende Functionen von $u$ dem entsprechenden $V$ diesen kleinsten Werth gehen Suchen wir jetzt die Bedingung, der ein solcher dem kleinsten $V$ entsprechende Werth von $u$ genügt.

Zu dem Ende mögen sich $V$ und $u$ auf das Minimum, $V_1$ und $u+aw$ auf einen beliebigen anderen Werth dieser Grössen beziehen. $a$ ist hier eine beliebige Constante, $w$ eine Function von $x$, $y$, $z$. Man hat dann offenbar:

$$V_1=V+2a\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz$$
$$+a^2\int\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]dx\,dy\,dz.$$

Es ist nun aber:

$$\int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\int w\left(\frac{\partial u}{\partial x}dy\,dz+\frac{\partial u}{\partial y}dx\,dz+\frac{\partial u}{\partial z}dx\,dy\right)$$
$$-\int w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz.$$

In das erste Integral kann man einsetzen:

$$dy\,dz=\cos\alpha\,d\omega,\quad dx\,dz=\cos\beta\,d\omega,\quad dy\,dx=\cos\gamma\,d\omega,$$

wo $d\omega$ das Element der Oberfläche, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ die Winkel der Normale an dieselbe mit den Axen vorstellen; das erste Integral nimmt dann die Gestalt an:

$$\int w\,d\omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)$$

und erstreckt sich über die ganze Oberfläche. Der Definition von $u$ und $w$ wegen ist aber auf derselben:

$$u=f(x,y,z)\quad\text{und}\quad u+aw=f(x,y,z),$$

also $w=0$. Es verschwindet somit dieses Oberflächenintegral, und man hat:

$$V_1=V-2a\int w\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz$$
$$+a^2\int\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 dx\,dy\,dz.$$

Da $V$ ein Minimumswerth war, so müssen wenigstens für die $u$ benachbarten Functionen $u+aw$ das zweite und dritte Glied rechts nicht negativ sein. Indess kann man $a$ beliebig klein machen, und es fällt somit das letzte Glied ausser Betracht. Es müsste also das zweite Glied für sehr kleine $a$ positiv sein. Es kann indess $a$ stets positiv gedacht und $w$ so genommen werden, dass, falls $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$ positiv sein sollte, $w$ negativ, im entgegengesetzten Falle $w$ positiv ist. Dann ist dieses Glied aber stets negativ, wenn nicht:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

ist. Da es nun immer ein dem kleinsten $V$ entsprechendes $u$ gibt, so muss wenigstens eine der Functionen $u$ der Bedingung 3) genügen. Es würde dies auch selbst dann stattfinden, wenn unendlich viele auf einander continuirlich folgende Werthe von $u$ dem kleinsten $V$ entsprächen. Es würde dann beim Uebergang von $u$ zu einem solchen nächsten Werthe der Zuwachs von $V$ verschwinden, und somit auch die Bedingung 3) erfüllt sein. Wir beweisen aber jetzt, dass es nur ein Minimum von $V$ gehe, und mithin nur eine Function $u$ den Bedingungen 1), 2) und 3) genügt. In der That seien jetzt $u$ und $u+aw$ dergleichen Minimumswerthe, so ist:

$$V_1 = V + a^2 \int \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 dx\, dy\, dz,$$

da das erste Integral verschwindet. Es kann nun entweder $V = V_1$ sein, oder einer dieser beiden Minimumswerthe $V$ oder $V_1$ ist grösser als der andere. Wäre letzteres der Fall, und hätte man $V_1 > V$, so müsste, da auch $u_1 = u + aw$ einem Minimum entspricht, und:

$$u = u_1 - aw$$

gesetzt werden kann, in unserer Formel sich vertauschen lassen:

$$a \text{ mit } -a, \qquad V \text{ mit } V_1,$$

also:

$$V = V_1 + a^2 \int \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] dx\, dy\, dz,$$

was unmöglich ist, wenn nicht das Integral verschwindet, also $V = V_1$ ist. Findet letzteres aber statt, so ist:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

denn unter andern Umständen kann das wesentlich positive Integral nicht verschwinden. Es wäre also $w$ eine Constante. $w$ aber war, wie wir gesehen haben, auf der Oberfläche gleich Null, so dass $w$ überhaupt verschwindet, und es mithin nur einen Werth von $u$ giebt, welcher unsern drei Bedingungen genügt. Hiermit ist unser Satz bewiesen. Um demselben eine physikalische Deutung zu geben, so enthält er z. B. das Resultat, dass ein Körper, welcher sich im Wärmegleichgewicht befindet, seinem Wärmezustande nach völlig gegeben ist, wenn derselbe auf der Oberfläche bekannt ist.

Allgemein bemerken wir noch, dass diese Betrachtungen nicht voraussetzen, dass der Körper nur eine einfache Begrenzung habe. Es könnte derselbe z. B. auch eine Hohlkugel sein, oder sonst sich beliebig begrenzen. Diese Bemerkung gibt eine höchst wichtige Erweiterung unseres Satzes, die von Riemann herrührt (Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen, Göttingen, 1851), und welche sich auf die Fälle erstreckt, wo die Functionen $u$ in gewissen Punkten oder selbst Strecken oder Flächenstücken innerhalb des gegebenen Raumes unstetig wird. Man kann dann nämlich diese Unstetigkeitsstellen sich von beliebig wenig von ihnen entfernten, aber völlig geschlossenen Oberflächen umgeben, und so aus dem Körper herausgenommen denken. Sind die Unstetigkeitsstellen Punkte, so werden diese Umgebungen kleine Kugelschalen sein können, sind es Strecken, so kann man dieselben mit geschlossenen Röhren oder Kanälen umgeben denken, und sind es Flächenstücke, so ist ihnen von beiden Seiten eine flache Bedeckung zu geben. Diese Begrenzungen kommen dann zur Oberfläche hinzu, und die Function $u$ ist also nach dem Obigen völlig gegeben, wenn man ausser den drei Bedingungen noch die vierte hinzufügt, dass sie auch an diesen neuen Grenzstücken bekannt sei, d. h. dass man weiss, welchen Werthen sich die Function beim Uebergange an die Unstetigkeitsstellen von allen Seiten nähern soll. An allen übrigen Stellen ist die Function nämlich nun stetig. Unser Satz heisst also in seiner ganzen Allgemeinheit:

„Eine Function ist innerhalb eines begrenzten Raumes bestimmt, wenn sie innerhalb desselben unserer partiellen Differenzialgleichung genügt, auf der ganzen Begrenzung gegeben ist, und wenn man die Werthe kennt, denen sie sich in denjenigen Stellen nähert, wo sie aufhört stetig zu sein."

Dieser Satz gilt natürlich unverändert für die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

nur sind unter den Begrenzungen geschlossene Linien zu verstehen. Geht man nun von der analytischen Bedeutung dieser Gleichung aus, wie wir sie oben hingestellt haben, dass sie also den reellen Theil einer Function von einer complexen Variablen darstelle, und verbinden wir damit die Gleichungen:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

welche den imaginären Theil definirt, indem wir die Bemerkung machen, dass somit:

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$$

ist, und $v$ durch Quadratur gefunden werden kann, wenn $u$ bekannt ist, also nur eine willkürliche Constante enthält, welche bestimmt wird, wenn man $v$ in irgend einem Punkte des begrenzten Ebenentheils kennt, wo Discontinuitäten jedoch ausgeschlossen sind, so kommen wir auf den von Riemann in der angeführten Abhandlung gegebenen Satz, welcher in der Functionentheorie von der grössten Wichtigkeit geworden ist:

„Stellt man sich unter $x$ und $y$ rechtwinklige Coordinaten vor, und will man eine beliebige Function $f(x+yi)$ für ein gewisses Gebiet untersuchen, welches wir uns als völlig (einfach oder mehrfach) begrenzt denken, so braucht deshalb nicht die Function $f$ für dies ganze Gebiet in jedem Punkte gegeben zu sein, vielmehr sind folgende Bedingungen zu ihrer Bestimmung ausreichend und nothwendig:

1) Der reelle Theil der Function muss für jeden Punkt der ganzen Begrenzung gegeben sein, und es kann dies auf eine ganz willkürliche, jedoch continuirliche Weise geschehen,

2) der imaginäre Theil muss für irgend einen Punkt des betrachteten Raumes oder seiner Begrenzung gegeben sein, und kann hier einen willkürlichen Werth haben.

3) Es muss angezeigt sein, in welchen Punkten die Function aufhöre stetig zu sein, und welchen Werthen sie sich in diesen Punkten annähere."

Eine Schwierigkeit in der Anwendung dieses Satzes könnte entstehen aus der Betrachtung, dass ja Functionen auch mehrdeutig sein können; fraglich werden dann die Werthe sein, welche man in jedem Punkte zu nehmen hat. Diese Schwierigkeit vermeidet Riemann, indem er sich bei mehrdeutigen Functionen statt einer Ebene deren eben so viel übereinandergelegte denkt, als die Function Mehrdeutigkeiten hat. Diese Ebenen oder Blätter werden als von einander getrennt gedacht in allen Punkten, wo die entsprechenden Werthe der Function ungleich sind, da wo dieselben gleich sind, aber als zusammenhängend. Ein solcher Zusammenhang fände also bei der $n$deutigen Function $\sqrt[n]{(x+yi)}$ für den Werth $x=y=0$, also im Anfangspunkt der Coordinaten statt. Die mehrdeutige Function ist bei dieser Betrachtungsweise gewissermaassen zu einer eindeutigen geworden, da jedem Werthe derselben für gegebenes $x$ und $y$ ein anderes Blatt entspricht. Zur Bestimmung derselben müssen die Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen also auch für alle 2 Blätter, die hier betrachtet werden, gegeben sein. (Vergleiche auch: Theorie der Abel'schen Functionen, von B. Riemann, besonders abgedruckt aus Crelle's Journal, Berlin 1857; sowie hier den Artikel: Quantität.)

24) Geschichtliche Bemerkungen über die partiellen Differenzialgleichungen höherer Ordnung.

Wir haben oben einige Worte über die Geschichte der partiellen Differenzialgleichungen gesagt. Es soll dies hier noch in Bezug auf die höherer Ordnung ergänzt werden.

Dass die Integrale der partiellen Differenzialgleichungen überhaupt willkürliche Functionen enthalten, hat zuerst d'Alembert bei Behandlung der Gleichung der schwingenden Saite:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

gezeigt, deren Integral wir oben fanden:

$$u=f(x+at)+\varphi(x-at).$$

Früher kannte man nur specielle Auflösungen dieser Gleichung. So einfach dies Resultat auch ist, so machte dessen Behandlung doch wegen der Grenzbestimmungen grosse Schwierigkeiten. Da die Saite nämlich begrenzt ist, so geben die Anfangszustände derselben nur gewisse Theile der Functionen $f$ und $\varphi$ als willkürlich, im Uebrigen sind diese Functionen bestimmt, und man kann daher nicht in Bezug auf diese Aufgabe annehmen, dass $f$ und $\varphi$ für jeden Werth der Variable irgend einem vorgeschriebenen Gesetze folgen sollen. Bisher hatte man angenommen, dass zwei Functionen, welche in einem gewissen Raume übereinstimmen, überhaupt identisch sein müssten. Später hat man bewiesen, dass sich durch bestimmte Integrale, Reihenentwicklungen u. s. w. leicht 2 Functionen herstellen lassen, die in gewissen Räumen übereinstimmen, sonst aber verschieden sind. So z. B. ist der Ausdruck:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-z},$$

wo das Integral sich auf eine beliebige geschlossene Linie erstreckt, $\lambda=u+vi$, $z=x+yi$, unter $uv$, $xy$ rechtwinklige Coordinaten verstanden werden, innerhalb des ganzen von dieser Linie begrenzten Raumes $=f(z)$, ausserhalb desselben aber

gleich Null. d'Alemberts Lösung ist enthalten in der Schrift: *Recherches sur les cordes vibrantes*. (1748.)

Diese Schwierigkeiten scheinen Lagrange veranlasst zu haben, eine zweite Lösung durch Reihenentwickelung zu suchen, welche die Eigenschaft hat, eine allgemeine Form von $u$ für jeden Werth der Variablen zu geben. Es ist indess zweifelhaft, ob Lagrange diese Eigenschaft seiner Reihenentwickelung bereits völlig gekannt habe. Die Principien, auf welche sie sich stützt, sind die in Abschnitt 22) gegebenen. Es war Fourrier vorbehalten, in seinem Werke: *Théorie analytique de chaleur* die Eigenschaften und die ungemein weit reichende Anwendbarkeit dieser und ähnlicher Entwicklungen zu zeigen. Es werden daher die von Lagrange benutzten Reihen, die übrigens schon Euler bei anderer Gelegenheit anwandte, gewöhnlich nach Fourrier genannt. Die Resultate Fourrier's in Bezug auf die Gleichungen, welche die Verbreitung der Wärme anzeigen, sind noch vermehrt worden durch Poisson (*Théorie mathématique de Chaleur*), Lamé und wenige Andere.

Allgemeinere Betrachtungen über lineare partielle Gleichungen, namentlich von der zweiten Ordnung mit $s$ Variablen, hat Monge aus geometrischen Betrachtungen geschöpft (*Application de l'analyse à la géometrie*). Wir haben seine Methode, die Erweiterung derselben durch Ampère und die Anwendung derselben auf Gleichungen mit mehr Variablen und von höherer Ordnung hier aus einer Theorie abgeleitet, die an die Behandlung der partiellen Differenzialgleichungen erster Ordnung sich anschliesst. Auf die Lücken der Theorie der partiellen Differenzialgleichungen haben wir bereits hingewiesen. Für nicht lineare Gleichungen von höherer als der ersten Ordnung ist fast noch gar nichts gethan. Eben so erliegt der Uebergang vom vollständigen zum allgemeinen Integral, den allerdings Lagrange angedeutet hat, und welcher bei den Gleichungen erster Ordnung so wichtig ist, hier den grössten Schwierigkeiten. Einen Theil derselben für specielle Fälle zu überwinden, ist nach einem Berichte der französischen Akademie Edmond Bour in einer Preisschrift gelungen. Jedoch ist gerade dieser Theil der Bour'schen Abhandlung noch nicht veröffentlicht.

Wir schliessen diesen Artikel mit der Bemerkung, dass hierher Gehöriges in den Artikeln: „Schwingung" und „Wärme" zu finden sein wird, wo namentlich diejenigen Betrachtungen, zu welchen die Anwendung der partiellen Differenzialgleichungen auf bestimmte Probleme der Physik führt, ihre Erledigung finden werden.

## Quadraturen (Astronomie).

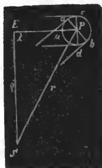
Ein Himmelskörper befindet sich in den Quadraturen, wenn die von der Erde nach ihm gezogene Linie mit der Verbindungslinie von Erde und Sonne einen rechten Winkel macht. — Da die Himmelskörper vermöge der Drehung der Erde um ihre Axe im Laufe eines Sterntages den ganzen Himmelskreis zurücklegen, so wird der bezeichnete Stern, der sich in den Quadraturen befindet, $\frac{1}{4}$ Tag oder 6 Stunden vor oder nach der Sonne sich im Zenith befinden. Beziehen wir dies nur auf die Planeten, welche sich alle fast in derselben Ebene der Ekliptik bewegen, so heisst in ersterem Falle, d. h. wenn der Planet der Sonne vorangeht, die Quadratur westlich, und wenn er ihr nachfolgt, östlich, da die scheinbare Bewegung des Himmelsgewölbes von Osten nach Westen gerichtet ist. Da sich aber in der nördlichen gemässigten Zone die Sonne immer auf der südlichen Hälfte des Himmels befindet, und für den nach Süden Blickenden die östliche Seite die linke ist, so befindet sich im Falle der westlichen Quadratur der Planet rechts, im Falle der östlichen links von der Sonne.

Die Erde beschreibt um die Sonne bekanntlich eine Ellipse, die fast einem Kreise gleich kommt, in dessen Mittelpunkt die Sonne steht. Die Linie, welche Erde und Planet verbindet, muss also im Falle der Quadratur eine Tangente an die Erdbahn bilden, und somit können ausser dem Monde nur die obern Planeten sich in den Quadraturen befinden, denn von den untern, welche sich innerhalb der Erdbahn bewegen, lässt sich offenbar keine Tangente an dieselbe ziehen.

Um die Zeit der Quadraturen ist bei den obern Planeten der sichtbare Theil kleiner als zu jeder andern Zeit, bei dem Monde findet dann das erste oder das letzte Viertel statt.

Denn möge sich zu irgend einer Zeit die Sonne in $S$ (Fig. 58), die Erde in $E$, der Planet in $P$ befinden. Dann kann man wegen der grossen Entfernung dieser Weltkörper von einander bekanntlich annehmen, dass die an den als kugelförmig zu denkenden Körper $P$ von $S$ und $E$ aus gezogene Tangenten alle un-

Fig. 58.



ter sich parallel sind. Die Berührungspunkte der von $S$ gezogenen bilden dann eine auf $SP$ senkrechte, die von $E$ gezogene eine auf $EP$ senkrechte Ebene. $ab$ und $cd$ seien bezüglich die Durchschnitte dieser Ebenen mit $SEP$. $ab$ aber schneidet diejenige Hälfte von $P$ ab, welche von der Sonne erleuchtet wird, $cd$ diejenige, welche von der Erde aus gesehen werden kann. $ab$ und $cd$ aber machen denselben Winkel $EPS = \mu$, den ihre Normalen machen. Sei noch $SEP = \lambda$, $SE = \varrho$, $SP = r$. Ist Winkel $\mu = 0$, so ist die volle Scheibe von der Erde zu sehen, ist $\mu = 180$, so ist $P$ unsichtbar, und ist $\mu = 90$, so sieht man die halbe Scheibe, und allgemein sieht man desto weniger, je grösser $\mu$ ist. Offenbar aber ist:

$$\frac{r}{\sin\lambda} = \frac{\varrho}{\sin\mu}, \quad \sin\mu = \varrho\frac{\sin\lambda}{r}.$$

Betrachten wir zunächst den Mond, so kann man $\varrho = r$ setzen, da die Sonne fast gleich weit von Mond und Erde entfernt ist, dann ist $\mu = \lambda$. Zur Zeit der Conjunction ist nun $\lambda = 0$, zur Zeit der Opposition $\lambda = 180$, zur Zeit der Quadratur $\lambda = 90$; es ist also in der That die halbe Scheibe zu sehen, es findet also das erste oder letzte Viertel statt.

Bei den obern Planeten dagegen kann $\lambda$ nie ein spitzer Winkel sein, da sonst der Planet sich innerhalb der Erdbahn befände, $\mu$ ist also nie stumpf und am grössten, wenn $\lambda = 90°$ also $\sin\mu = \frac{\varrho}{r}$ ist. Dies findet zur Zeit der Quadraturen offenbar statt.

Wir wollen jetzt noch den Winkel $\mu$ für Mars und Jupiter berechnen. Um den grössten Werth von $\mu$ zu haben, müssen wir für $r$ die kleinste Entfernung des Sterns von der Sonne setzen, diese ist für Mars gleich 1,38 Erdhalbmesser, also $\sin\mu = \frac{1}{1{,}38} = 0{,}73$, $\mu = 47°$. Dies ist der Theil der vollen Scheibe (180°), welcher unsichtbar ist, und es sind daher beim Mars immer $\frac{3}{4}$ der vollen Scheibe sichtbar, d. h. die Phasen desselben sind nur gering. Jupiter beschreibt fast einen Kreis um die Sonne, dessen Halbmesser fünfmal so gross als der der Erdbahn ist. Es ist also:

$$\sin\mu = 0{,}2 \quad \mu = 12°,$$

so dass $\frac{14}{15}$ der vollen Scheibe stets sichtbar sind. Jupiter hat also unmerkliche Phasen. In höherem Maasse ist dies noch bei den Planeten der Fall, welche sich hinter Jupiter befinden.

## Quadratwurzel (Arithmetik und Algebra).

1) Allgemeine Sätze.

Quadratwurzel aus $a$, geschrieben $\sqrt{a}$, heisst diejenige Zahl, welche mit sich selbst multiplicirt $a$ gibt. Die Gleichung:

$$\sqrt{a} = b$$

ist also identisch mit:

$$a = b^2,$$

und aus der Vereinigung beider folgt:

$$b = \sqrt{b^2}.$$

Satz A. Ist $b$ eine Quadratwurzel aus $a$, so ist auch $-b$ eine solche. Denn es ist:

$$a = b^2 = (-b)^2,$$

also:

$$-b = \sqrt{a}.$$

D. h.:

Hat eine Zahl wirklich eine Quadratwurzel, so hat sie auch eine zweite, die mit der ersten gleichen absoluten Werth, aber das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Es ist also auch:

$$\sqrt{b^2} = \pm b.$$

Satz B. Keine Zahl kann mehr als 2 Quadratwurzeln haben.

Denn sei $b$ eine Quadratwurzel aus $a$, so muss der Ausdruck $\frac{x^2-a}{x-b}$ eine ganze Function sein. Gäbe nämlich die Division den Quotienten $x+c$ und den Rest $r$, so wäre:

$$x^2 - a = (x-b)\left(x+c+\frac{r}{x-b}\right)$$

$$(x-b)(x+c)+r.$$

Setzt man nun $x=b$, also nach der Annahme $x^2=a$, so kommt $r=0$.

Hierans folgt, dass $x-b$ ein Factor von $x^2-a$ ist. Es kann aber dieser letztere Ausdruck nur zwei Factoren von der Form $x-b$ haben, es sind also auch nur zwei Quadratwurzeln möglich. Also:

Jede Zahl hat entweder keine oder 2 Quadratwurzeln, die sich nur durchs Vorzeichen unterscheiden.

2) Quadratwurzeln der ganzen Zahlen.

Denkt man sich die ganzen Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge in einer Reihe, und darunter in einer zweiten ihre Quadrate geschrieben, also:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 . . . .
1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 . . . .

so enthält die obere Reihe die positiven Quadratwurzeln der bezüglichen Zahlen der unteren Reihe.

Die letzteren werden Quadratzahlen genannt.

„Die Quadratzahlen haben die Eigenschaft, dass ihre Quadratwurzeln ganze Zahlen sind."

Keine andere ganze Zahl hat eine ganze Quadratwurzel. — Betrachten wir z. B. die Zahl 7, die zwischen den Quadratzahlen 4 und 9 liegt, so müsste ihre Quadratwurzel auch zwischen deren Wurzeln 2 und 3 liegen, und kann daher keine ganze Zahl sein.

„Eine Nichtquadratzahl kann aber auch keinen Bruch zur Wurzel haben."

Denn sei etwa:

$$\sqrt{7}=\frac{a}{b},$$

wo $a$ und $b$ ganze Zahlen sind, und keinen gemeinschaftlichen Factor haben. Es lässt sich derselbe nämlich, wenn ein solcher vorhanden sein sollte, immer durch Heben entfernen. Nach der Definition der Quadratwurzeln wäre dann auch:

$$7=\frac{a^2}{b^2};$$

$a$ und $b$ hatten keinen gemeinschaftlichen Factor, also eben so wenig:

$$a^2=a\cdot a \quad \text{und} \quad b^2=b\cdot b.$$

Es kann also $\frac{a^2}{b^2}$ unmöglich gleich einer ganzen Zahl 7 sein, was zu beweisen war. Obgleich aber die Wurzeln der Nichtquadratzahlen weder ganze Zahlen noch Brüche sind, darf man nicht sagen, dass dieselben keine Quadratwurzeln hätten. Vielmehr wird durch dieselben ein neues Element, „die Irrationalzahl", in die Arithmetik eingeführt.

3) Von den Irrationalzahlen.

Satz I. „Es lässt sich immer ein Bruch $a$ finden, dessen Quadrat sich nur um eine beliebig kleine Grösse von einer gegebenen Nichtquadratzahl unterscheidet."

Beweis. Sei z. B. 7 die gegebene Zahl, die zwischen den Quadratzahlen 4 und 9 liegt.

Es ist also:

$$2^2<7, \quad 3^2>7.$$

Fügt man also zur 2 irgend eine Anzahl Zehntel hinzu, so kann das Quadrat der entstehenden Zahl entweder kleiner oder grösser als 7 sein. Jedenfalls aber muss es 2 auf einander folgende Zahlen, etwa 6 und 7 geben, derart, dass:

$$(2,6)^2<7, \quad (2,7)^2>7$$

ist.

In der That ist:

$$2{,}6^2=6{,}76, \quad 2{,}7^2=7{,}29.$$

Fügt man also zu 2,6 noch Hundertel hinzu, so wird es wieder zwei auf einander folgende Zahlen geben, hier 4 und 5, die bewirken, dass:

$$2{,}64^2<7, \quad 2{,}65^2>7$$

ist, und es ist klar, dass man auf diese Weise fortfahrend und immer mehr Ziffern nehmend, sich auch immer mehr an die Zahl 7 annähern muss. Schreite man z. B. bis zur 7. Bruchstelle vor, so ist:

$$2{,}6457513^2<7.$$

Will man den Unterschied dieses Quadrates von 7 wissen, so merke man, dass eine Einheit der 7ten Stelle hinzugefügt, dasselbe schon grösser als 7 macht, es ist also:

$$(2{,}6457513+0{,}0000001)^2>7,$$

d. h.:

$$2{,}6457513^2+2\cdot 0{,}0000001\cdot 2{,}6457513 + 0{,}0000001^2>7.$$

Die beiden letzten Glieder links werden immer kleiner, und können unter jede Grenze sinken, je mehr Stellen man dem ersten Gliede giebt, und somit lässt sich immer eine Zahl $a$ finden, derart, dass der Unterschied $r=7-a^2$ unter eine gegebene noch so kleine Grenze sinkt, was zu beweisen war.

Satz II. „Die Quadratwurzeln der Nichtquadratzahlen können nicht vollständig bestimmt werden. Man kann

sich aber an dieselben derart annähern, dass der Unterschied kleiner als jede gegebene noch so kleine Zahl ist."

Beweis. Wenn $b$ eine Nichtquadratzahl ist, so lässt sich also immer eine Zahl $a$ finden, derart, dass:

$$b - a^2 = \nu,$$

und $\nu$ beliebig klein ist. Daher hat man auch:

$$a^2 = b - \nu,$$

und:

$$a = \sqrt{(b-\nu)}.$$

Der Ausdruck $\sqrt{(b-\nu)}$ aber geht in $b$ über, wenn $\nu$ immer mehr sinkt. Ganz strenge erfolgt dieser Uebergang allerdings erst dann, wenn $\nu$ gleich Null ist. Dies kann hier allerdings nicht stattfinden, jedoch mit zunehmender Anzahl der Bruchziffern von $a$ nähert sich $\nu$ der Null immer mehr und also $a$ dem Ausdrucke $\sqrt{7}$. Man kann sich also die Wurzeln der Nichtquadratzahlen als Decimal- oder gemeine Brüche denken, deren Zähler und Nenner unendlich viel Stellen haben.

„Grössen, die man nicht vollständig genau, aber bis zu einer beliebig kleinen Grenze angeben kann, heissen Irrationalzahlen."

Die Wurzeln der Nichtquadratzahlen sind dergleichen.

4) Quadratwurzeln aus Brüchen.

Satz. „Die Quadratwurzel eines Bruches ist gleich der Quadratwurzel des Zählers dividirt durch die des Nenners," d. h.:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

In der That, sei:

$$\sqrt{a} = \alpha, \quad \sqrt{b} = \beta,$$

so ist:

$$a = \alpha^2, \quad b = \beta^2,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\alpha^2}{\beta^2} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2,$$

woraus dann folgt:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

oder:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}},$$

womit unser Satz bewiesen ist.

Sind also Zähler und Nenner des Bruches Quadratzahlen, so erhält man als Quadratwurzeln wieder einen Bruch, z. B.:

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}.$$

Ist einer von beiden oder beide eine Nichtquadratzahl, so wird die Wurzel eine Irrationalzahl. Jedoch lässt sich aus jedem Bruche die Wurzel derart ausziehen, dass der Nenner eine ganze Zahl ist. Denn sei z. B. gegeben der Bruch $\frac{11}{84}$, so lässt sich der Nenner $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$ durch Hinzufügen der Factoren $3 \cdot 7$ in eine Quadratzahl umwandeln. Man hat also, wenn man den Bruch mit $3 \cdot 7$ erweitert:

$$\frac{11}{84} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 7}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = \frac{11 \cdot 3 \cdot 7}{(2 \cdot 3 \cdot 7)^2} = \frac{231}{42^2},$$

und daher:

$$\sqrt{\frac{11}{84}} = \frac{\sqrt{231}}{\sqrt{42^2}} = \frac{\sqrt{231}}{42}.$$

Sonach lässt sich die Ausziehung der Quadratwurzel aus Brüchen immer auf die aus ganzen Zahlen und eine Division zurückführen.

5) Ausziehung der Quadratwurzeln aus ganzen Zahlen und Decimalbrüchen.

Obgleich die Ausziehung der Wurzeln aus Decimalbrüchen auf die aus ganzen Zahlen nach dem vorigen Abschnitt zurückgeführt werden kann, so ist das directe Verfahren wegen seiner Einfachheit doch vorzuziehen. — Wir betrachten jedoch zunächst den Fall, wo die gegebene Zahl eine ganze und zwar eine Quadratzahl sei, wo sich also die Wurzel völlig bestimmen lässt.

Fall A). Sei eine ganze und zwar eine Quadratzahl gegeben.

Sei z. B. diese Zahl $= 7241481$.

Das Verfahren ist folgendes:

```
 √7|24,14|81 = 2691
  4
 ----------
 4|   324      |  24
      276      |   36
    ------     | ----
52|   4814     |  276
      4761     | ----
    -------    |  468
538|    5381   |    81
        5381   | -----
      -------  | 4761
               | -----
               |   538
               |     1
```

Man theilt zunächst die Zahl von der ersten Ziffer rechts, also von der nie-

drigsten an in Klassen von je 2 Ziffern. Ist die Ziffernanzahl ungrade, so wird also die letste oder höchste Klesse aus nur einer Ziffer bestehen. Die Klassen sind also hier von der linken zur rechten gezählt 7, 24, 14, 81. Man sucht nun diejenige ganze Zahl, deren Quadrat der ersten Klasse 7 am nächsten kommt, jedoch kleiner als dieselbe ist. Diese Zahl 2 (da $3^2$ schon gleich 9, also grösser als 7 ist), bildet die höchste Stelle der Wurzel. Ihr Quadrat 4 wird von der entsprechenden Klasse 7 abgezogen, und an den Rest 3 schreibt man rechts die nächste Klasse 24, so dass man 324 hat. Der doppelte Werth des bis jetzt vorhandenen Theils der Wurzel, also $2 \cdot 2 = 4$ dividirt in diese Zahl, jedoch mit Ausschluss der letzten Ziffer 4. 4 in 32 ist 8 mal enthalten. Jedoch kann man aus einem gleich anzuführenden Grunde nicht 8, sondern nur 6 als Quotient nehmen; derselbe bildet die zweite Ziffer der Wurzel. Man bildet nun das Quadrat von 6, also 36, und multiplicirt den Divisor 4 mit 6, was 24 gibt. Beide Zahlen werden so unter einander geschrieben, wie dies in unserm Beispiele rechts geschehen ist, die erstere 36 also mit ihrer letzten Ziffer eine Stelle nach rechts gegen die 24 ausgerückt, und so die Summe gebildet. Dieselbe 276 wird von 324 abgezogen. Hätte man statt der Wurzelziffer 6 etwa 7 genommen, so wären 28 und 49 die zu addirenden Zahlen gewesen, und der Subtrahendus, also die Summe beider, 329, welche grösser als der Minnendus 324; es war also die nächst kleinere Zahl zu nehmen. Zum Rest 48 kommt die nächste Klasse 14, und das ganze Verfahren wiederholt sich. Das Doppelte des bis jetzt vorhandenen Wurzeltheils 26, also 52, dividirt in 481. Der Quotient 9 ist die nächste Wurzelziffer. Man bildet: $9 \cdot 52 = 468$

$9^2 = 81.$

Die Summe 4761, die man offenbar auch leicht ohne Weiteres hinschreiben kann, wird von 4819 abgezogen. Dem Reste 53 noch die Ziffern der letzten Klasse 81 hinzugefügt. Divisor ist nun: $2 \cdot 269 = 538$. Derselbe in 538 dividirt gibt 1 und man bildet: $1 \cdot 538 = 538$

$1^2 = 1.$

Die Summe 5381 von 5381 abgezogen, gibt Null als Rest. Die Rechnung ist beendet, und $\sqrt{7241481} = 5381$.

Die Gründe dieses Verfahrens sind die folgenden.

Bezeichnen wir die Ziffern der Wurzel nach der Reihe mit $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, so sind dieselben ihrem wahren Werthe nach, der sich aus der Stellung ergibt: $1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta$. Die Zahl 7241481, deren Wurzel wir ausziehen, sei gleich $A$; es wurde nun $\alpha^2$ von der ersten Klasse von $A$ abgezogen. Da diese Klasse aber Millionen enthält, so ist die abzuziehende Zahl in der That $\alpha^2 \cdot 1000000 = (1000\alpha)^2$. Der Rest war:

$$A - (1000\alpha)^2 = 3241481.$$

Dividirt wurde mit $2\alpha$ oder vielmehr mit $2 \cdot 1000 \cdot \alpha$, und es ergab sich $100\beta$ als Quotient; wir bildeten dann das Product: $2 \cdot 1000 \cdot \alpha \cdot 100\beta$ und $(100\beta)^2$, und es ist leicht zu sehen, dass das Einrücken des Quadrats um eine Stelle rechts eben dem Werthe derselben (Zehntausende) gegen die des Products, welches Hunderttausende enthält, entsprach. Nun wurde von der noch übrigen Zahl $A - (1000\alpha)^2$ abgezogen:

$$2 \cdot 1000\alpha \cdot 100\beta + (100\beta)^2,$$

und der Rest war:

$$A - (1000\alpha)^2 - 2 \cdot 1000\alpha \cdot 100\beta - (100\beta)^2 = 481481.$$

Divisor ist nun:

$$2(1000\alpha + 100\beta),$$

Quotient $10\gamma$; abgezogen wird:

$$2(1000\alpha + 100\beta)\,10\gamma + (10\gamma)^2;$$

man erhielt:

$$A - (1000\alpha)^2 - 2 \cdot 1000\alpha \cdot 100\beta - (100\beta)^2 - 2(1000\alpha + 100\beta)\,10\gamma - (10\gamma)^2 = 5381.$$

Divisor ist jetzt:

$$2(1000\alpha + 100\beta + 10\gamma),$$

Quotient $\delta$, Subtrahendus:

$$2(1000\alpha + 100\beta + 10\gamma)\,\delta + \delta^2,$$

der Rest:

$$A - (1000\alpha)^2 - 2 \cdot 1000\alpha \cdot 100\beta - (100\beta)^2 - 2(1000\alpha + 100\beta)\,10\gamma - (10\gamma)^2 - 2(1000\alpha + 100\beta + 10\gamma)\,\delta - \delta^2 = 0,$$

also:

$$A = (1000\alpha)^2 + 2 \cdot 1000\alpha \cdot 100\beta + (100\beta)^2 + 2(1000\alpha + 100\beta)\,10\gamma + (10\gamma)^2 + 2(1000\alpha + 100\beta + 10\gamma)\,\delta + \delta^2.$$

Nach der Formel:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

gehen die drei ersten Glieder rechts:

$$(1000\alpha + 100\beta)^2;$$

dies verbunden mit dem 4ten und 5ten Gliede nach derselben Formel:

$$(1000\alpha + 100\beta + 10\gamma)^2.$$

Verhindet man hiermit endlich die beiden letzten Glieder, so kommt:

$$A = (1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta)^2,$$

also:

$$\sqrt{A} = 1000\alpha + 100\beta + 10\gamma + \delta,$$

was zu beweisen war.

Fall B). Sei ein Decimalbruch gegeben, dessen Quadratwurzel sich jedoch vollständig ausziehen lässt.

Wir gehen der Einfachheit wegen dem Decimalbruch dieselben Ziffern, welche in unserm vorigen Beispiele die Quadratzahl hatte, und suchen daher $\sqrt{724{,}1481}$ zu bestimmen. Offenbar ist aber:

$$724{,}1481 = \frac{7241481}{10000},$$

also:

$$\sqrt{724{,}1481} = \frac{\sqrt{7241481}}{\sqrt{10000}} = \frac{2691}{100} = 26{,}91.$$

„Die Wurzel aus dem Decimalbruche wird also aus der seines Zählers gefunden, wenn man das Komma um halb so viel Stellen von rechts an einrückt, als der Bruch hinter dem Komma hat, also hier um 2 Stellen."

Vorausgesetzt ist hierbei, dass die Anzahl der Bruchstellen grade ist. Dies ist bei Quadratzahlen immer der Fall, und kann im Uebrigen stets erreicht werden, wenn man links eine Null hinzufügt, wodurch sich der Decimalbruch nicht ändert.

Gleiches wird offenbar erreicht, wenn man folgendermaassen, und dies ist die gewöhnliche Methode, verfährt. Man theilt den Bruch 724,1481 ebenfalls in Klassen von je zwei Ziffern, aber nicht von rechts an nach links, sondern vom Komma an nach beiden Seiten. Es stehen dann halb so viel Klassen hinter dem Komma, als der Bruch Stellen hinter demselben hat. Das Komma der Wurzel kommt dann, wenn man bei der Zahl, deren Wurzel gesucht wird, bis dahin gelangt ist. Auf diese Weise erreicht man in der That, dass die Wurzel halb so viel Stellen hinter dem Komma als das Quadrat hat, da in ersterer jeder Klasse eine Stelle entspricht. Das Schema ist also folgendes:

```
 √7|24,|14,81 = 26,91
  4
4| 324
   276
52| 4814
    4761
538| 5381
```

Fall C). Sei eine Nichtquadratzahl oder ein beliebiger Decimalbruch gegeben.

Das Verfahren ist ganz das obige, nur wird beim Abziehen niemals Null erhalten. Man bricht dann die Rechnung bei irgend einer Stelle ab, und es wird dann der Fehler nie so gross sein, als eine Einheit der letzten Stelle der Wurzel, die man erhalten hat. Ist die Zahl eine ganze, so wird, nachdem die Ziffern erschöpft sind, in der Wurzel ein Komma geschrieben, und weiter fortgerechnet, indem man statt der 2 Ziffern jeder Klasse dem Reste 2 Nullen hinzufügt. Bei Decimalbrüchen findet Gleiches statt, wenn die Ziffern des Bruches erschöpft sind.

Beispiel I.

```
 √7|31 = 27,037 ...
  4
4|  331
    329
54|  200
540|  20000
      16209
5406|  379100
       378469
          631.
```

Beispiel II.

```
 √7|31,|54|60 = 27,047 ...
  4
4| 331
   229
54| 254
540| 25460
     21616
5408| 384400
      378609
        5791.
```

Im letzten Beispiel ist der 6 rechts eine Null hinzugefügt, da sich sonst keine vollständige Klasse, die aus 2 Ziffern besteht, ergäbe.

Die Gründe des Verfahrens sind folgende.

Wenn im letzten Beispiel $A$ die Zahl ist, deren Wurzel man auszieht, so bemerkt man, dass wenn $r$ der Rest (5791) ist, offenbar: $(27{,}047)^2 = A - r$ ist, also genau: $27{,}047 = \sqrt{(A-r)}$.

Offenbar nämlich gelten die oben in Fall A) gemachten Schlüsse auch für die Zahl $A - r$, da, wenn dieselbe an der Stelle von $A$ stände, die Subtraction Null geben würde. Die Grösse $r$ ist aber ihrem wahren Werthe nach: 0,005791, denn man ist in der Rechnung bis zur

sechsten Stelle nach dem Komma vorgerückt, und allgemein, wenn man $n$ Klassen nach dem Komma noch berücksichtigt, oder wie hier durch Nullen ergänzt hat, wird der Nenner von $r$ sein $10^{2n}$. Man kann aber auch leicht eine Grenze für den wahren Werth von $r$ finden. Zu dem Ende wollen wir den bis dahin gewonnenen Wurzeltheil mit $\alpha$ und die durch die nächste Division sich ergebende Zahl mit $\frac{\beta}{10^{n+1}}$ bezeichnen, wo $\beta$ eine ganze Zahl und kleiner als 10 ist. Es wird dann:

$$\frac{2\alpha\beta}{10^{n+1}}+\frac{\beta^2}{10^{2n+2}}$$

von $r$ abgezogen. Es ist nämlich, da man bis zur $n$ten Klasse vorgerückt ist, $\frac{1}{10^n}$ der Nenner der letzten Wurzelziffer und $\frac{1}{10^{n+1}}$ der der folgenden. Man hat aber $\beta$ so gross genommen, als dies geschehen kann, ohne dass der Rest negativ wird. Vermehrte man $\beta$ um eine Einheit, also um $\frac{1}{10^{n+1}}$, so würde also letzteres eintreten, und es ist somit:

$$r<\frac{2\alpha(\beta+1)}{10^{n+1}}+\frac{(\beta+1)^2}{10^{2n+2}};$$

für $\beta$ nehmen wir seinen grössten Werth 9, also wird gewiss sein:

$$r<\frac{2\alpha\cdot 10}{10^{n+1}}+\frac{10^2}{10^{2n+2}},$$

d. h.:

$$r<\frac{2\alpha}{10^n}+\frac{1}{10^{2n}}.$$

Es war nun:

$$\alpha^2=A-r,$$

also:

$$\alpha^2+r=A,$$

$$\alpha^2+\frac{2\alpha}{10^n}+\frac{1}{10^{2n}}>A,$$

oder was dasselbe ist:

$$\left(\alpha+\frac{1}{10^n}\right)^2>A,$$

$$\alpha+\frac{1}{10^n}>\sqrt{A},$$

also in der That, wenn man $\alpha$ um eine Einheit seiner letzten Stelle vermehrt, so würde man schon über $\sqrt{A}$ hinausgekommen sein, und mithin ist $\alpha$ diejenige Zahl, welche unter allen mit gleich viel Stellen, welche kleiner als $\sqrt{A}$ sind, dieser Grösse am nächsten kommt.

Selbstverständlich vermehrt man aber die letzte Ziffer von $\alpha$ um eine Einheit, wenn die nächstfolgende grösser als 5 sein würde, wie bei allen Rechnungen mit Decimalbrüchen.

5) **Abkürzung des Verfahrens beim Ausziehen der Quadratwurzeln.**

Die eben gegebene Methode der Wurzelausziehung hat den Uebelstand, dass die Divisionen und Subtractionen mit immer grösseren Zahlen geschehen, und daher desto weitläufiger und schwieriger werden, je weiter man in der Bestimmung der Wurzelziffern vorrückt. Andererseits aber sieht man leicht, dass wenn man es mit irrationalen Wurzeln zu thun hat, nicht einmal alle Ziffern der Divisoren einen Einfluss auf das Resultat ausüben. So z. B. würde im zweiten Beispiele des vorigen Abschnittes dasselbe Resultat 27,047 erhalten worden sein, wenn man, nachdem man bis zum Divisor 540 gelangt, mit 540 in die noch übrigen Ziffern 2546 in der gewöhnlichen Weise dividirt, ohne den Divisor zu ändern. In der That ist:

```
540 | 2546|471 ...
      2160
      ----
       3860
       3780
       ----
        800
```

und die Ziffern 47 des Quotienten stimmen mit den letzten der Wurzel 27,047... überein.

Es fragt sich nun, von welcher Stelle an man diese Division mit unverändertem Divisor beginnen könne. Zuvörderst wollen wir jedoch untersuchen, welche Genauigkeit überhaupt bei einer Wurzelausziehung zu verlangen ist.

Die Zahlen, deren Wurzeln man bestimmen will, sind bei irgend einer Anwendung offenbar durch andere Rechnungen oder durch Messungen gegeben. Ihre Verlässlichkeit hat also eine gewisse Grenze, die man im Allgemeinen, wenn es Decimalbrüche sind, eben durch die Anzahl Stellen andeutet, die man dem Decimalbruche gibt. Soll man nun also z. B. aus $A$ die Wurzel ausziehen, so ist $A$ eine Zahl, die einen Fehler $\nu$ hat, wo $\nu$ kleiner ist als eine Einheit der

niedrigsten Stelle von $A$. Die Zahlenwerthe von $\sqrt{A}$ und $\sqrt{(A+\nu)}$ werden nun auf eine Anzahl von Stellen übereinstimmen, dann aber von einander abweichen, und nur bis zu dieser Stelle wird man die Wurzelausziehung fortsetzen, da die folgenden Stellen eben falsch sind. Suchen wir also diese Stelle, d. h. beantworten wir die Frage: Wie viel richtige Stellen kann man für $\sqrt{A}$ gewinnen, wenn $A$ ein abgekürzter Decimalbruch ist?

Es sei:

$$\sqrt{A}=\alpha, \quad \sqrt{(A+\nu)}=\alpha+\lambda,$$

so ist die höchste Ziffer von $\lambda$ diese Grenze der Genauigkeit. Man hat aber:

$$\alpha^2=A, \quad (\alpha+\lambda)^2=A+\nu,$$

also:

$$\nu=2\alpha\lambda+\lambda^2, \quad 2\alpha\lambda<\nu, \quad \lambda<\frac{\nu}{2\alpha}.$$

Möge $A$ nun nach dem Komma $n$ Stellen haben — sind selbst die Einer oder mehr ganze Stellen nicht mehr vorhanden, so ist $n$ negativ — während die höchste Ziffer von $A$ $2s$ oder $2s-1$ Stellen vor dem Komma stehe. (Hat man es mit einem echten Bruch zu thun, so denkt man $s$ negativ). Es hat dann $A$ im ganzen $n+2s$ oder $n+2s-1$ richtige Decimalstellen, und es ist $\nu<\frac{1}{10^n}$

folglich:

$$\lambda<\frac{1}{2\alpha\cdot 10^n}.$$

Was nun $\alpha$ anbetrifft, so entsprechen je zwei Stellen, d. h. eine Klasse von $A$ einer Ziffer von $\alpha$, mit Ausnahme der höchsten Klasse, welche auch eine Ziffer haben kann, und die höchste Ziffer von $\alpha$ steht also $s$ Stellen vor dem Komma, und es ist:

$$\alpha<10^{s+1}.$$

Die Grenze von $\lambda$ hat $\alpha$ nur im Nenner; setzt man also $10^{s+1}$ für $\alpha$, so wird diese Grenze vergrössert, und man hat:

$$\lambda<\frac{1}{2\cdot 10^{n+s+1}},$$

d. h. der Fehler $\lambda$ enthält höchstens Ziffern, die $n+s+1$ Stellen nach dem Komma stehen. $\alpha$ hat also $n+s$ richtige Bruchstellen, wozu noch die $s$ Stellen vor dem Komma kommen, so dass die Anzahl der richtigen Decimalstellen $2s+n$ ist. Diese Zahl ist gleich der der Decimalstellen von $A$ oder höchstens um eine Einheit grösser. Daraus folgt:

„Der Wurzel einer abgekürzten Zahl kann man soviel richtige Decimalstellen geben (bezüglich eine mehr, wenn die Ordnung der höchsten Ziffer der Zahl eine ungrade Potenz von 10 ist), als die Zahl selbst hat."

Wir wollen jetzt sehen, wie sich die Bestimmung der richtigen Wurzelziffern mit möglichst weniger Rechnung erreichen lasse. Zu dem Ende suchen wir die Wurzel von 7934,6815, welche Zahl 8 Decimalstellen hat.

```
 √79|34,|6815 = 89,076829 . . .
   64
16|   1534
      1521
178|    1368
1780|   136815
        124649
17814|   121660
          106884
            147760
            142512
              52480
              35628
              168520.
```

Das eingeschlagene Verfahren ist folgendes:

Es ist in der gewöhnlichen Weise die Wurzel ausgezogen bis zur Erreichung der ersten 4 Ziffern: 89,07, die wir, ihrem Werthe nach genommen, mit $p$ bezeichnen. Dann ist aber mit $2p$ weiter dividirt, und zwar nach gewöhnlicher Art, indem man immer nach jeder Theildivision eine Stelle, hier also wo die Stellen erschöpft sind, eine Null dem Reste zufügt. Ebensogut hätte die Division in der gewöhnlichen abgekürzten Weise stattfinden können, was hier der Uebersichtlichkeit wegen nicht geschehen ist. Es fragt sich: Wie viel richtige Ziffern erhält der Quotient noch bei dieser Division? Wir wollen diese letzteren Ziffern ihrem wahren Werthe nach genommen durch $q$ bezeichnen. Sei $A$ die Zahl, deren Wurzel man sucht, so hat man zunächst gefunden:

$$A-\mu=p^2,$$

wo $\mu$ der Rest 12166 ist, welcher erhalten wird, wenn man die letzte Ziffer von $p$, also 7 gewonnen hat, und den Abzug nach der gewöhnlichen Art des Wurzelziehens verrichtet hat.

In $\mu$ wird dann mit $2p$ dividirt, und $q$ ist der Quotient, so dass man hat:

$$2pq=\mu,$$

also:

$$A=p^2+2pq=(p+q)^2-q^2,$$

und folglich:

$$p+q=\sqrt{(A+q^2)}.$$

Sei die höchste Ziffer von $A$ von $2s-1$ter oder $2s$ter Ordnung, die von $q^2$ von $n-1$ter Ordnung, wo $n$ positiv oder negativ ist, je nachdem diese Ziffer vor oder nach dem Komma steht. Die Ausdrücke $A$ und $A+q^2$ stimmen also in den ersten $2s-n$ bezüglich $2s-1-n$ Ziffern überein, und sonach werden dies auch die beiden Quadratwurzeln $\sqrt{A}$ und $\sqrt{(A+q^2)}$ in den ersten $2s-n$ Ziffern übereinstimmen, wie wir oben gezeigt haben.

Die höchste Ziffer von $\sqrt{A}$ oder $\sqrt{(A+q^2)}$ ist $s$ter Ordnung.

$$q^2 \text{ war } <\frac{1}{10^n}, \text{ also } q<\frac{1}{10^{\frac{n}{2}}},$$

also die höchste Ziffer von $q$ von der Ordnung $\frac{n}{2}-1$, bezüglich $\frac{n-1}{2}$, jenachdem $n$ grade oder ungrade ist. Man hatte also, als man die abgekürzte Division begann, bereits $s-\frac{n}{2}$ oder $s-\frac{n-1}{2}$ Ziffern, und da eben so viel genaue Ziffern gewonnen werden können, als deren vorhanden sind, in welchen $\sqrt{A}$ und $\sqrt{(A+q^2)}$ übereinstimmen, d. h. $2s-n$, „so kann man bei der abgekürzten Division grade so viel genaue Ziffern der Wurzeln erhalten, als man deren vorher hatte“. In unserem Beispiele sind in der That vier Ziffern auf die gewöhnliche Weise, vier durch Division gewonnen.

„Hat das Quadrat $2t$ oder $2t-1$ genaue Ziffern, so muss man also die halbe Anzahl von Ziffern der Wurzel, also $t$ auf gewöhnliche Art berechnen, und kann die andere Hälfte durch das abgekürzte Verfahren finden, wenn man diese Wurzel so genau haben will, als es die Genauigkeit des Quadrates gestattet.“

Auch selbst die abgekürzte Methode verlangt sehr lange und zwar an Länge immer zunehmende Divisionen, wenn man viele Ziffern verlangt. In letzterm Falle würden also andere Methoden anzuwenden sein, die aber besser beim allgemeinen Wurzelausziehen mitgetheilt werden. (Vergleiche den Artikel: Quantität.)

Ueber die Berechnung der Quadratwurzeln durch Kettenbrüche vergleiche man den Artikel: Quadratische Gleichungen.

6) **Imaginäre Zahlen.**

Es ist somit dargethan, dass jede positive Zahl eine positive Quadratwurzel habe, welche sich entweder genau, oder bis zu einer beliebigen Grenze der Genauigkeit bestimmen lässt. Zu dieser Wurzel kommt noch eine zweite negative von gleichem absoluten Betrage.

„Was nun die negativen Zahlen anbetrifft, so können deren Quadratwurzeln weder positiv noch negativ sein.“

Denn sei:

$$\sqrt{(-a)}=b,$$

wo $b$ eine positive Zahl ist, so wäre also:

$$-a=b^2;$$

das Quadrat einer positiven Zahl kann aber nicht negativ sein. Auch wenn $b$ negativ wäre, müsste sein Quadrat positiv sein, also ist auch hier die Gleichung $-a=b^2$ unmöglich.

Der Ausdruck $\sqrt{-A}$ bildet ein neues Element in der Arithmetik, und heisst imaginäre Zahl, während man die positiven und negativen als reelle Zahlen bezeichnet.

Da alle Zahlen, welche aus der Einheit durch Abziehen und Zuzählen, Vervielfältigen und Theilen entstehen, positiv oder negativ sind, so gelangt man durch keine dieser Operationen mit reellen Zahlen zu den imaginären. Bei der Anwendung auf Raum oder Zeitgrössen entsprechen sie also nie einem wirklichen Gegenstande, da man immer durch eine dieser Operationen von einer Grösse zu einer anderen gleichartigen gelangt. Jedoch entstehen alle imaginären Zahlen durch dergleichen Operationen aus einer einzigen $\sqrt{-1}$, die man auch mit $i$ bezeichnet; nur muss dieselbe nöthigen Falls mit einer reellen Zahl verbunden werden. Der Ausdruck $a+bi$, wo $a$ und $b$ reelle Zahlen sind, ist also der allgemeinste in der Analysis vorkommende. Was die Rechnung mit dem Imaginären betrifft, so verfährt man so, als wenn $i$ oder $\sqrt{-1}$ eine unbestimmte reelle Zahl wäre, indem man nur mit diesem Verfahren die Gleichung verbindet:

$$i^2=-1;$$

es ist nämlich nach der Definition:

$$i^2=(\sqrt{-1})^2=-1.$$

So z. B. ist:

$$\sqrt{(-A)}=\sqrt{(i^2A)}=i\sqrt{A},$$

womit wenigstens für die Quadratwurzeln der negativen Zahlen dargethan ist, dass sie Vielfache von $i$ oder $\sqrt{-1}$ sind.

Ein Mehreres über die Natur und die Eigenschaften der imaginären Zahlen gehört nicht in diesen Artikel. (Man vergleiche den Artikel: Quantität.)

Wir bemerken noch, dass wenn

$$\sqrt{(-1)} = i$$

gesetzt wird, eine zweite Wurzel von $-1$ auch $-i$ sein muss, da:

$$(-i)^2 = (-1)^2 i^2 = -1$$

ist, und eben so gibt es zwei Wurzeln von einer beliebigen negativen Zahl $-A$, nämlich $+i\sqrt{A}$ und $-i\sqrt{A}$.

„Die negativen Zahlen haben ebenso wie die positiven 2 Quadratwurzeln."

Es entsteht aber jetzt die Frage, wie man aus einer imaginären Zahl die Quadratwurzel finde. Die Beantwortung derselben gehört in die Theorie der allgemeinen Wurzelausziehung und Potenzrechnung. Jedoch kann einiges Elementare darüber schon hier gegeben werden.

Sei:

$$\sqrt{(a+bi)} = c + di,$$

wo $a$, $b$ gegebene reelle Zahlen sind, $c$ und $d$ dergleichen, welche aber gefunden werden sollen. Erhebt man beide Seiten dieser Gleichung ins Quadrat, so erhält man:

$$a + bi = (c+di)^2 = c^2 + 2cdi + d^2 i^2,$$

oder da:

$$i^2 = -1$$

ist:

$$a + bi = c^2 - d^2 + 2cdi.$$

Da nun der reelle Theil rechts $c^2 - d^2$ nur dem reellen Theile $a$ links gleich sein kann, so zerfällt diese Gleichung in die beiden andern:

$$a = c^2 - d^2, \quad b = 2cd,$$

welche zur Bestimmung von $c$ und $d$ dienen. Nach Elimination von $d$ hat man:

$$a = c^2 - \frac{b^2}{4c^2}, \text{ d. h. } c^4 - ac^2 = \frac{b^2}{4},$$

woraus folgt:

$$c^2 = \frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}.$$

In ähnlicher Weise ergibt sich:

$$d^4 + ad^2 = \frac{b^2}{4},$$

also:

$$d^2 = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}.$$

Da $c$ und $d$ reell sein sollen, sind jedoch nur die obern Zeichen der Wurzeln zu nehmen, im entgegengesetzten Falle würden nämlich offenbar $c^2$ und $d^2$ negativ, also $c$ und $d$ imaginär sein. Man hat also:

$$c = \pm\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}},$$

$$d = \pm\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

Den neuen Wurzeln ist natürlich das doppelte Vorzeichen zu geben.

Es fragt sich nun noch, welche Zeichen von $c$ man mit denen von $d$ combiniren müsse, da, wenn man sie beliebig verbände, vier Werthe von $\sqrt{(a+bi)}$ sich ergeben würden, während dieser Ausdruck doch deren nur zwei hat. Zu dem Ende gehe man wieder von der Formel:

$$a + bi = c^2 - d^2 + 2cdi$$

aus. Ist $b$ positiv, so muss dies sonach auch mit $cd$ der Fall sein, d. h. es müssen beide Wurzeln gleiche Zeichen haben; ist $b$ dagegen negativ, so haben sie immer ungleiche Zeichen, und es ist, wenn jetzt $b$ eine immer positive, $a$ eine positive oder negative Zahl vorstellt:

$$\sqrt{(a+bi)} = \pm\left[\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}} + i\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}}\right],$$

$$\sqrt{(a-bi)} = \pm\left[\sqrt{\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}} - i\sqrt{-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)}}\right],$$

wo alle Wurzeln rechts mit dem positiven Zeichen zu denken sind.

Beispiel. Sei gesucht:

$$\sqrt{(5 \pm 12i)}, \quad a = 5, \quad b = 12, \quad \sqrt{(a^2+b^2)} = \sqrt{169} = 13,$$

also:

$$\sqrt{(5+12i)} = \pm\left[\sqrt{\frac{5+13}{2}} + i\sqrt{\frac{-5+14}{2}}\right] = \pm(\sqrt{9} + i\sqrt{4}),$$

d. h.:

$$\sqrt{(5+12i)} = \pm(3+2i),$$
$$\sqrt{(5-12i)} = \pm(3-2i).$$

7) Quadratwurzeln aus Buchstabenausdrücken, namentlich aus Potenzreihen.

Irgend ein Buchstabenausdruck ist ein vollständiges Quadrat, wenn er aus einem

ähnlicheu durch Erhchung ins Quadrat gewonnen ist; so z. B. ist $a^2+2ab+b^2$ ein vollständiges Quadrat und $a+b$ die Wurzel davon.

Ist ein Buchstabenausdruck nicht auf diese Weise gewonuen, so kann auch seine Wnrzel durch keine ähnliche Formel dargestellt werden. So z. B. ist $\sqrt{(a^2+b^2)}$ nicht in solcher Weise darstellbar. Der Ansdruck $\sqrt{x}$ gibt ebeu den Werth der gesuchten Wurzel an, nnd kann mit ihm in gewöhnlicher Weise gerechnet werden. Es gibt aber auch Darstellungen von Quadratwnraeln nuvollständiger Quadrate in der Gestalt nuendlicher Reihen, die jedoch nur so lange ihre Bedeutnng nnd überhanpt einen Sinn behalten, als sie couvergiren, d. h. einer bestimmteu Greuae sich annähern.

Wir geben zunächst die Art, wie man die Quadratwurzel ans einem Bnchstabenausdrucke, der ein vollständiges Quadrat ist, berechnet. Die Methode ist genan die bei Zahleuausdrücken angewandte. — Sei gesncht die Quadratwurzel aus:

$$A=16x^4+4-7x^2-24x^3+12x.$$

Die Zahl ist zunächst nach absteigenden oder aufsteigeuden Potenzen einer Grösse zu orduen, also:

$$\sqrt{16x^4-24x^3-7x^2+12x+4}=\overset{\alpha}{4x^2}-\overset{\beta}{3x}-\overset{\gamma}{2}$$

$$\begin{array}{lll}
 & 16x^4 & \\
\hline
8x^2 \mid & -24x^3-7x^2+12x+4 & \\
 & -24x^3+9x^2 & \\
\hline
8x^2-6x & & -16x^2+12x+4 \\
 & & -16x^2+12x+4.
\end{array}$$

Man sncht zunächst die Wurzel des höchsten Gliedes $16x^4$, also $4x^2=\alpha$, da $(x^2)^2=x^4$ ist, zieht das Quadrat $16x^4$ von der ganzen zu nntersnchenden Quadratzahl ab; in das erste Glied der Differenz wird mit $2\alpha$ dividirt und der Quotient $-3x$ sei $\beta$; mau bildet $2\alpha\beta+\beta^2$ nnd zieht wieder ab, in das erste Glied der Differenz $-16x^2$ dividirt man mit $2(\alpha+\beta)$ nnd der Qnotieut $-2$ sei gleich $\gamma$; es wird dann $2(\alpha+\beta)\gamma+\gamma^2$ abgezogen. Die Differenz ist Null. In der That hat man also:

$$A-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2-2(\alpha+\beta)\gamma-\gamma^2=0,$$

d. h.:

$$A-(\alpha+\beta+\gamma)^2=0, \qquad A=(\alpha+\beta+\gamma)^2,$$

nnd:

$$\alpha+\beta+\gamma=\sqrt{A},$$

was zn beweisen war.

Bei dreigliedrigen Ausdrücken kann man einfacher nach der Formel:

$$a\pm b=\sqrt{(a^2\pm 2ab+b^2)}$$

verfahren, d. h. die Grösse ist ein vollständiges Quadrat, wenn zwei Glieder vollständige Quadrate mit positivem Zeichen, das dritte aber das doppelte Product beider ist, die Summe, bezüglich Differenz der Wurzeln beider Quadrate ist die gesnchte Wurzel der Grössen.

Beispiel.

$$\sqrt{(9x^4\pm 12ax^3+4a^2x^2}=3x^2\pm 2ax.$$

Es ist nämlich $9x^4$ das Quadrat von $3x^2$, $4a^2x^2$ das von $2ax$, $12ax^3$ aber das doppelte Prodnct von $2ax$ nnd $3x^2$.

Gehen wir noch ein Beispiel der Entwicklnng einer Quadratwurzel einer nicht quadratischen Grösse in eine nnendliche Reihe.

$$\sqrt{9x^2-4y^2} = 3x - \frac{2y^2}{3x} - \frac{2y^4}{27x^3} - \frac{4y^6}{243x^5} - \ldots$$

$$\begin{array}{l} 9x^2 \\ \hline 6x \,|\, -4y^2 \\ \quad -4y^2 + \frac{4y^4}{9x^2} \\ \hline 6x - \frac{4y^2}{3x} \,\Big|\, -\frac{4y^4}{9x^2} \\ \qquad -\frac{4y^4}{9x^2} + \frac{8y^6}{81x^4} + \frac{4y^8}{729x^6} \\ \hline 6x - \frac{4y^2}{3x} - \frac{4y^4}{27x^3} \,\Big|\, -\frac{8y^6}{81x^4} - \frac{4y^8}{729x^6}. \end{array}$$

Das Verfahren ist ganz das obige, nur dass der Rest nie Null bleibt.

Das Gesetz der unendlichen Reihe rechts ist leicht zu erkennen. Offenbar ist dieselbe gleich:

$$3x\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2y}{3x}\right)^2 - \frac{1}{2\cdot 2}\left(\frac{2y}{3x}\right)^4 - \frac{1\cdot 3}{2^3}\left(\frac{2y}{3x}\right)^6 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^4}\left(\frac{2y}{3x}\right)^8 - \ldots\right].$$

Die Identität dieses Ausdruckes mit $\sqrt{(9x^2-4y^2)}$ findet aber nur so lange statt, als diese Reihe convergirt, oder was dasselbe ist, die Differenz, welche beim fortgesetzten Dividiren und Abziehen entsteht, sich der Null nähert. Es ist dies beiläufig gesagt so lange der Fall, als $2y < 3x$ ist. Siehe ein Mehreres unter dem Artikel: Reihen.

8) **Einige Formeln und Sätze über Quadratwurzeln.**

„Die Wurzel aus einem Product ist gleich dem Producte der Wurzeln der Factoren."

$$\sqrt{(abc\ \ldots)} = \sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c}\ \ldots$$

Offenbar ist nämlich:

$$(\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c})^2 = \sqrt{a^2}\ \sqrt{b^2}\ \sqrt{c^2} = a\,b\,c,$$

also indem man auf beiden Seiten die Wurzeln bildet:

$$\sqrt{a}\sqrt{b}\sqrt{c} = \sqrt{(abc)}.$$

„Die Wurzel eines Quotienten ist gleich der Wurzel des Dividendus, dividirt durch die des Divisors."

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Wir haben diesen Satz schon oben bewiesen, indem wir $\frac{a}{b}$ als Bruch bezeichneten.

„Die Wurzel einer graden Potenz wird erhalten, wenn man den Exponenten durch 2 dividirt."

$$\sqrt{a^{2n}} = a^n.$$

Offenbar ist:

$$(a^n)^2 = a^{2n},$$

also wenn man auf beiden Seiten die Wurzel anszieht:

$$a^n = \sqrt{a^{2n}}.$$

**Beispiele.**

Es sei zu vereinfachen der Ausdruck:

$$\sqrt{63} + \sqrt{700} - \sqrt{175} - \sqrt{28}.$$

Man zerlegt die einzelnen Zahlen unter dem Wurzelzeichen wo möglich in Factoren, deren einer quadratisch ist; dies gibt:

$$\sqrt{7\cdot 3^2} + \sqrt{7\cdot 10^2} - \sqrt{7\cdot 5^2} - \sqrt{7\cdot 2^2} = 3\sqrt{7} + 10\sqrt{7} - 5\sqrt{7} - 2\sqrt{7} = (3+10-5-2)\sqrt{7}$$
$$= 6\sqrt{7}.$$

Sei ferner zu vereinfachen:

$$\sqrt{(9a^3b^2+18a^2b^3)}-2bc\sqrt{\left(\frac{a^3}{4c^2}+\frac{a^2b}{2c^2}\right)}+3ab\sqrt{\frac{4c^3}{a}+\frac{8bc^3}{a^2}}.$$

Man erhält durch Zerlegnug der Factoren und Vereinigung der Nenner:

$$\sqrt{9a^2b^2(a+2b)}-2bc\sqrt{\frac{a^2(a+2b)}{4c^2}}+3ab\sqrt{\frac{4c^3(a+2b)}{a^2}}=3ab\sqrt{(a+2b)}$$

$$-\frac{2bca}{2c}\sqrt{(a+2b)}+\frac{6abc}{a}\sqrt{(a+2b)}=3ab\sqrt{(a+2b)}$$

$$-ab\sqrt{(a+2b)}+6bc\sqrt{(a+2b)}=(2ab+6bc)\sqrt{(a+2b)}=2b(a+3c)\sqrt{(a+2b)}.$$

Schliesslich geben wir noch die Lösung folgender Aufgabe:

„Es soll $\sqrt{(x\pm\sqrt{y})}$, also ein Ausdruck, der unter dem Wurzelzeichen noch eine zweite Wurzel hat, in eine Summe, bezüglich Differenz von zwei Wurzeln verwandelt werden.“

**Auflösung.** Wir setzen:

$$\sqrt{(x\pm\sqrt{y})}=\sqrt{u}\pm\sqrt{v},$$

und erhalten, wenn wir ins Quadrat erheben:

$$x\pm\sqrt{y}=u+v\pm\sqrt{(uv)}.$$

Da $u$ und $v$ nur durch eine Gleichung bestimmt sind, so können sie noch einer zweiten willkürlichen Bedingung unterliegen. Wir setzen daher:

$$x=u+v,$$

und erhalten dann:

$$\sqrt{y}=2\sqrt{(uv)}, \qquad \text{d. h:}\quad y=4uv.$$

Diese beiden Gleichungen bestimmen $u$ und $v$ völlig. Es ist:

$$x^2=u^2+2uv+v^2,$$
$$y=4uv,$$

also:

$$x^2-y=u^2-2uv+v^2=(u-v)^2,$$

und:

$$u-v=\sqrt{(x^2-y)}.$$

Diese Gleichung zu

$$u+v=x$$

addirt, gibt:

$$u=\tfrac{1}{2}[x+\sqrt{(x^2-y)}],$$

und davon subtrahirt:

$$u=\tfrac{1}{2}[x-\sqrt{(x^2-y)}],$$

also:

$$\sqrt{x\pm\sqrt{y}}=\sqrt{\frac{x+\sqrt{(x^2-y)}}{2}}\pm\sqrt{\frac{x-\sqrt{(x^2-y)}}{2}}.$$

**Beispiel.**

Sei zu bestimmen:

$$\sqrt{8+\sqrt{60}}.$$

Es ist dann:

$$x=8,\quad y=60,\quad \sqrt{(x^2-y)}=\sqrt{4}=2,$$

also:

$$\sqrt{8+\sqrt{60}}=\sqrt{\frac{8+2}{2}}+\sqrt{\frac{8-2}{2}}=\sqrt{5}+\sqrt{3}.$$

9) Tafel der Quadratwurzeln der ersten 1000 ganzen Zahlen.

| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,0000 | 10,0499 | 14.1774 | 17,3494 | 20,0250 | 22,3830 | 24,5153 | 26,4764 | 28,3019 | 30,0167 |
| 2 | 1,4142 | 10,0995 | 14,2127 | 17,3781 | 20,0499 | 22,4054 | 24,5357 | 26,4953 | 28,3196 | 30,0333 |
| 3 | 1,7321 | 10,1489 | 14,2478 | 17,4069 | 20,0749 | 22,4277 | 24,5561 | 26.5141 | 28,3373 | 30,0500 |
| 4 | 2,0000 | 10,1980 | 14.2829 | 17,4356 | 20,0998 | 22,4499 | 24.5764 | 26.5330 | 28,3549 | 30,0666 |
| 5 | 2,2361 | 10.2470 | 14,3178 | 17,4642 | 20.1246 | 22.4722 | 24,5967 | 26,5518 | 28.3725 | 30,0832 |
| 6 | 2.4495 | 10 2956 | 14.3527 | 17,4929 | 20,1494 | 22.4944 | 24,6171 | 26,5707 | 28,3901 | 30,0998 |
| 7 | 2,6458 | 10,3441 | 14.3875 | 17.5214 | 20,1742 | 22.5167 | 24 6374 | 26,5895 | 28,4077 | 30,1164 |
| 8 | 2,8284 | 10 3923 | 14,4222 | 17.5499 | 20,1990 | 22.5389 | 24,6577 | 26,6083 | 28,4253 | 30,1330 |
| 9 | 3,0000 | 10,4403 | 14.4568 | 17,5784 | 20,2237 | 22,5610 | 24,6779 | 26,6271 | 28,4429 | 30,1496 |
| 10 | 3,1623 | 10.4881 | 14,4914 | 17,6068 | 20.2485 | 22.5832 | 24,6982 | 26.6458 | 28,4605 | 30,1662 |
| 11 | 3.3166 | 10,5357 | 14,5258 | 17,6352 | 20.2731 | 22,6053 | 24,7184 | 26,6646 | 28.4781 | 30,1828 |
| 12 | 3,4641 | 10,5830 | 14.5602 | 17,6635 | 20,2978 | 22,6274 | 24,7386 | 26,6833 | 28,4956 | 30,1993 |
| 13 | 3,6056 | 10,6301 | 14.5945 | 17,6918 | 20,3224 | 22,6495 | 24,7588 | 26,7021 | 28,5132 | 30,2159 |
| 14 | 3.7417 | 10,6771 | 14.6287 | 17,7200 | 20,3470 | 22,6716 | 24,7790 | 26,7208 | 28,5307 | 30,2324 |
| 15 | 3,8730 | 10,7238 | 14,6629 | 17,7482 | 20.3715 | 22.6936 | 24,7992 | 26,7395 | 28.5482 | 30,2490 |
| 16 | 4,0000 | 10,7703 | 14,6969 | 17,7764 | 20,3961 | 22.7156 | 24,8193 | 26,7582 | 28,5657 | 30,2655 |
| 17 | 4,1231 | 10,8167 | 14,7309 | 17.8045 | 20,4206 | 22.7376 | 24,8395 | 26,7769 | 28,5832 | 30,2820 |
| 18 | 4.2426 | 10,8628 | 14.7648 | 17,8326 | 20.4450 | 22,7596 | 24.8596 | 26,7955 | 28,6007 | 30,2985 |
| 19 | 4,3589 | 10,9087 | 14.7986 | 17,8606 | 20,4695 | 22.7816 | 24,8797 | 26,8142 | 28.6182 | 30,3150 |
| 20 | 4 4721 | 10,9545 | 14.8324 | 17,8885 | 20,4939 | 22,8035 | 24.8998 | 26,8328 | 28.6356 | 30.3315 |
| 21 | 4,5826 | 11,0000 | 14.8661 | 17,9165 | 20 5183 | 22.8254 | 24,9199 | 26.8514 | 28,6531 | 30.3480 |
| 22 | 4.6904 | 11,0454 | 14,8997 | 17,9444 | 20,5426 | 22,8473 | 24,9399 | 26,8701 | 28,6705 | 30,3645 |
| 23 | 4.7958 | 11,0905 | 14,9332 | 17,9722 | 20,5670 | 22,8692 | 24,9600 | 26.8887 | 28,6880 | 30,3809 |
| 24 | 4.8990 | 11,1355 | 14.9666 | 18.0000 | 20.5913 | 22.8910 | 24 9800 | 26,9072 | 28,7054 | 30,3974 |
| 25 | 5,0000 | 11,1803 | 15,0000 | 18.0278 | 20,6155 | 22,9129 | 25,0000 | 26,9258 | 28,7228 | 30,4138 |
| 26 | 5,0990 | 11.2250 | 15,0333 | 18,0555 | 20,6398 | 22,9347 | 25,0200 | 26,9444 | 28,7402 | 30,4302 |
| 27 | 5,1962 | 11,2694 | 15,0665 | 18,0831 | 20,6640 | 22,9565 | 25,0400 | 26.9629 | 28,7576 | 30,4467 |
| 28 | 5,2915 | 11,3137 | 15,0997 | 18,1108 | 20,6882 | 22,9783 | 25,0599 | 26,9815 | 28,7750 | 30,4631 |
| 29 | 5,3852 | 11,3578 | 15,1327 | 18,1384 | 20,7123 | 23,0000 | 25,0799 | 27,0000 | 28,7924 | 30,4795 |
| 30 | 5,4772 | 11.4018 | 15.1658 | 18,1659 | 20,7364 | 23,0217 | 25,0998 | 27,0185 | 28,8097 | 30,4959 |
| 31 | 5,5678 | 11,4455 | 15,1987 | 18,1934 | 20,7605 | 23,0434 | 25,1197 | 27,0370 | 28,8271 | 30,5123 |
| 32 | 5,6569 | 11,4891 | 15.2315 | 18.2209 | 20,7846 | 23,0651 | 25,1396 | 27,0555 | 28,8444 | 30,5287 |
| 33 | 5,7446 | 11,5326 | 15,2643 | 18,2483 | 20,8087 | 23,0868 | 25,1595 | 27,0740 | 28,8617 | 30,5450 |
| 34 | 5,8310 | 11,5758 | 15,2971 | 18,2757 | 20,8327 | 23,1084 | 25,1794 | 27,0924 | 28,8791 | 30,5614 |
| 35 | 5,9161 | 11,6190 | 15,3297 | 18,3030 | 20.8567 | 23,1301 | 25,1992 | 27,1109 | 28,8964 | 30,5778 |
| 36 | 6,0000 | 11,6619 | 15,3623 | 18,3303 | 20,8806 | 23,1517 | 25,2190 | 27,1293 | 28,9137 | 30,5941 |
| 37 | 6,0828 | 11,7047 | 15,3948 | 18,3576 | 20,9045 | 23,1733 | 25,2389 | 27,1477 | 28,9310 | 30,6105 |
| 38 | 6,1644 | 11,7473 | 15,4272 | 18,3848 | 20,9284 | 23,1948 | 25,2587 | 27,1662 | 28.9482 | 30,6268 |
| 39 | 6.2450 | 11,7898 | 15,4596 | 18,4120 | 20,9523 | 23.2164 | 25,2784 | 27,1846 | 28,9655 | 30,6431 |
| 40 | 6,3246 | 11,8322 | 15,4919 | 18,4391 | 20,9762 | 23,2379 | 25,2982 | 27,2029 | 28,9828 | 30,6594 |
| 41 | 6,4031 | 11,8743 | 15,5242 | 18.4662 | 21,0000 | 23.2594 | 25,3180 | 27.2213 | 29.0000 | 30,6757 |
| 42 | 6,4807 | 11,9164 | 15,5563 | 18,4932 | 21,0238 | 23,2809 | 25,3377 | 27,2397 | 29,0172 | 30,6920 |
| 43 | 6,5574 | 11,9583 | 15,5885 | 18,5203 | 21,0476 | 23,3024 | 25.3574 | 27,2580 | 29,0345 | 30,7083 |
| 44 | 6.6332 | 12,0000 | 15,6205 | 18,5472 | 21,0713 | 23,3238 | 25,3772 | 27,2764 | 29,0517 | 30,7246 |
| 45 | 6,7082 | 12,0416 | 15,6525 | 18,5742 | 21,0950 | 23,3452 | 25,3969 | 27.2947 | 29.0689 | 30,7409 |
| 46 | 6,7823 | 12,0830 | 15,6844 | 18,6011 | 21,1187 | 23,3666 | 25,4165 | 27.3130 | 29,0861 | 30,7571 |
| 47 | 6.8557 | 12,1244 | 15,7162 | 18,6279 | 21,1424 | 23,3880 | 25,4362 | 27.3313 | 29,1033 | 30,7734 |
| 48 | 6.9282 | 12,1655 | 15,7480 | 18,6548 | 21,1660 | 23,4094 | 25,4558 | 27,3496 | 29,1204 | 30,7896 |
| 49 | 7,0000 | 12 2066 | 15,7797 | 18,6815 | 21,1896 | 23,4307 | 25.4755 | 27,3679 | 29,1376 | 30,8058 |
| 50 | 7,0711 | 12,2474 | 15,8114 | 18,7083 | 21,2132 | 23,4521 | 25,4951 | 27,3861 | 29,1548 | 30,8221 |

| | 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 | 800 | 900 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 51 | 7,1414 | 12,2882 | 15,8430 | 18,7350 | 21.2368 | 23,4734 | 25,5147 | 27,4044 | 29,1719 | 30,8383 |
| 52 | 7,2111 | 12.3288 | 15 8745 | 18,7617 | 21,2603 | 23.4947 | 25,5343 | 27.4226 | 29,1890 | 30.8545 |
| 53 | 7,2801 | 12.3693 | 15.9060 | 18,7883 | 21.2838 | 23 5160 | 25.5539 | 27.4408 | 29,2062 | 30,8707 |
| 54 | 7,3485 | 12,4097 | 15.9374 | 18,8149 | 21,3073 | 23,5372 | 25,5734 | 27,4591 | 29.2233 | 30,8869 |
| 55 | 7,4162 | 12,4499 | 15,9687 | 18,8414 | 21,3307 | 23.5584 | 25.5930 | 27,4773 | 29,2404 | 30,9031 |
| 56 | 7,4833 | 12,4900 | 16,0000 | 18,8680 | 21.3542 | 23,5797 | 25.6125 | 27,4955 | 29,2575 | 30,9192 |
| 58 | 7,5498 | 12.5300 | 16.0312 | 18 8944 | 21.3776 | 23.6008 | 25,6320 | 27,5136 | 29.2746 | 30,9354 |
| 58 | 7.6158 | 12.5698 | 16,0624 | 18.9209 | 21,4009 | 23,6220 | 25,6515 | 27.5318 | 29 2916 | 30.9516 |
| 59 | 7,6811 | 12,6095 | 16,0935 | 18 9473 | 21,4243 | 23,6432 | 25,6710 | 27.5500 | 29.3087 | 30.9677 |
| 60 | 7,7460 | 12,6491 | 16,1245 | 18 9737 | 21,4476 | 23.6643 | 25.6905 | 27.5681 | 29.3258 | 30,9839 |
| 61 | 7,8102 | 12,6886 | 16,1555 | 19,0000 | 21,4709 | 23 6854 | 25,7099 | 27,5862 | 29.3428 | 31,0000 |
| 62 | 7,8740 | 12,7279 | 16,1864 | 19,0263 | 21,4942 | 23,7065 | 25,7294 | 27,6043 | 29.3598 | 31,0161 |
| 63 | 7,9373 | 12,7671 | 16,2173 | 19,0526 | 21,5174 | 23,7276 | 25,7488 | 27,6225 | 29,3769 | 31,0322 |
| 64 | 8,0000 | 12,8062 | 16,2481 | 19.0788 | 21,5407 | 23,7487 | 25,7682 | 27,6405 | 29,3939 | 31,0483 |
| 65 | 8,0623 | 12,8452 | 16.2788 | 19.1050 | 21,5639 | 23,7697 | 25,7876 | 27,6586 | 29 4109 | 31,0644 |
| 66 | 8,1240 | 12.8841 | 16,3095 | 19,1311 | 21,5870 | 23.7908 | 25.8070 | 27,6767 | 29,4279 | 31,0805 |
| 67 | 8,1854 | 12.9228 | 16,3401 | 19,1572 | 21,6102 | 23,8118 | 25,8263 | 27,6948 | 29,4449 | 31,0966 |
| 68 | 8,2462 | 12.9615 | 16,3707 | 19,1833 | 21,6333 | 23.8328 | 25,8457 | 27,7128 | 29,4618 | 31,1127 |
| 69 | 8,3066 | 13,0000 | 16,4012 | 19.2094 | 21,6564 | 23.8537 | 25,8650 | 27,7308 | 29,4788 | 31,1288 |
| 70 | 8,3666 | 13.0384 | 16,4317 | 19.2354 | 21,6795 | 23,8747 | 25,8844 | 27.7489 | 29,4958 | 31,1448 |
| 71 | 8,4261 | 13,0767 | 16,4621 | 19,2614 | 21,7025 | 23,8956 | 25,9037 | 27,7669 | 29,5127 | 31,1609 |
| 72 | 8,4853 | 13,1149 | 16,4924 | 19.2873 | 21,7256 | 23,9165 | 25,9230 | 27,7849 | 29,5296 | 31,1769 |
| 73 | 8,5440 | 13,1529 | 16,5227 | 19,3132 | 21,7486 | 23,9374 | 25,9422 | 27.8029 | 29,5466 | 31,1929 |
| 74 | 8,6023 | 13,1909 | 16.5529 | 19,3391 | 21.7715 | 23.9583 | 25,9615 | 27.8209 | 29,5635 | 31,2090 |
| 75 | 8.6603 | 13,2288 | 16,5831 | 19,3649 | 21,7945 | 23,9792 | 25,9808 | 27.8388 | 29,5804 | 31,2250 |
| 76 | 8,7178 | 13,2665 | 16,6132 | 19,3907 | 21,8174 | 24,0000 | 26,0000 | 27,8568 | 29.5973 | 31,2410 |
| 77 | 8,7750 | 13,3041 | 16,6433 | 19,4165 | 21,8403 | 24,0208 | 26,0192 | 27,8747 | 29,6142 | 31,2570 |
| 78 | 8,8318 | 13,3417 | 16,6733 | 19,4422 | 21,8632 | 24,0416 | 26,0384 | 27,8927 | 29,6311 | 31 2730 |
| 79 | 8,8882 | 13,3791 | 16,7033 | 19,4679 | 21,8861 | 24,0624 | 26,0576 | 27,9106 | 29,6479 | 31,2890 |
| 80 | 8,9443 | 13.4164 | 16,7332 | 19,4936 | 21,9089 | 24,0832 | 26,0768 | 27.9285 | 29,6648 | 31,3050 |
| 81 | 9,0000 | 13,4536 | 16,7631 | 19,5192 | 21,9317 | 24,1039 | 26.0960 | 27,9464 | 29,6816 | 31,3209 |
| 82 | 9,0554 | 13,4907 | 16,7929 | 19,5448 | 21,9545 | 24,1247 | 26,1151 | 27 9643 | 29,8985 | 31,3369 |
| 83 | 9,1104 | 13,5277 | 16,8226 | 19,5704 | 21,9773 | 24,1454 | 26,1343 | 27,9821 | 29,7153 | 31,3528 |
| 84 | 9,1652 | 13,5647 | 16,8523 | 19,5959 | 22,0000 | 24,1661 | 26,1534 | 28,0000 | 29,7321 | 31,3688 |
| 85 | 9,2195 | 13,6015 | 16,8819 | 19,6214 | 22,0227 | 24,1868 | 26,1725 | 28.0179 | 29,7489 | 31,3847 |
| 86 | 9,2736 | 13,6382 | 16,9115 | 19,6469 | 22,0454 | 24.2074 | 26,1916 | 28,0357 | 29,7658 | 31,4006 |
| 87 | 9,3274 | 13,6748 | 16,9411 | 19,6723 | 22,0681 | 24,2281 | 26.2127 | 28,0535 | 29,7825 | 31,4166 |
| 88 | 9,3808 | 13,7113 | 16,9706 | 19,6977 | 22,0907 | 24,2487 | 26,2298 | 28,0713 | 29.7993 | 31,4325 |
| 89 | 9,4340 | 13,7477 | 17,0000 | 19,7231 | 22,1133 | 24.2693 | 26,2488 | 28,0891 | 29,8161 | 31,4484 |
| 90 | 9,4868 | 13,7840 | 17,0294 | 19,7484 | 22,1359 | 24,2899 | 26,2679 | 28,1069 | 29,8329 | 31,4643 |
| 91 | 9,5394 | 13,8203 | 17,0587 | 19,7737 | 22,1585 | 24,3105 | 26,2869 | 28,1247 | 29.8496 | 31,4802 |
| 92 | 9,5917 | 13,8564 | 17,0880 | 19,7990 | 22,1811 | 24,3311 | 26,3059 | 28,1425 | 29,8664 | 31,4960 |
| 93 | 9,6437 | 13,8924 | 17,1172 | 19,8242 | 22,2036 | 24,3516 | 26,3249 | 28,1603 | 29,8831 | 31,5119 |
| 94 | 9,6954 | 13,9284 | 17,1464 | 19,8494 | 22,2261 | 24.3721 | 26,3439 | 28,1780 | 29,8998 | 31,5278 |
| 95 | 9,7468 | 13,9642 | 17,1756 | 19,8746 | 22.2486 | 24,3926 | 26,3629 | 28,1957 | 29,9166 | 31,5436 |
| 96 | 9,7980 | 14,0000 | 17,2047 | 19,8997 | 22,2711 | 24,4131 | 26,3818 | 28,2135 | 29,9333 | 31,5595 |
| 97 | 9,8489 | 14,0357 | 17,2337 | 19,9249 | 22,2935 | 24,4336 | 26,4008 | 28,2312 | 29,9500 | 31,5753 |
| 98 | 9,8995 | 14,0712 | 17,2627 | 19,9499 | 22,3159 | 24,4540 | 26,4197 | 28,2489 | 29,9666 | 31,5911 |
| 99 | 9,9499 | 14,1067 | 17,2916 | 19,9750 | 22,3383 | 24,4745 | 26,4386 | 28,2666 | 29,9833 | 31,6070 |
| 100 | 10,0000 | 14,1421 | 17,3205 | 20,0000 | 22,3607 | 24,4949 | 26,4575 | 28,2843 | 30,0000 | 31,6228 |

**Quadratzahl.**

So wird eine ganze oder gebrochene Zahl genannt, welche eine rationale Quadratwurzel hat. Vergleiche die Artikel: Quadrat und Quadratwurzel.

**Quadriren.**

Ins Quadrat erheben.

**Quantität (allgemeine).**

Die Quantität oder Grösse bildet den Gegenstand der Mathematik, sowohl der reinen als der angewandten. Wie alle Begriffe ist auch der der Quantität von den Dingen der Aussenwelt abstrahirt, und ist darunter deren Eigenschaft verstanden, dass andere gleichartige Dinge mit ihnen vereinigt, oder von ihnen hinweggenommen werden können, oder mit andern Worten:

„Quantität ist die Eigenschaft der Dinge, dass sie vermehrt oder vermindert werden können."

Der Quantität gegenüber setzt man die Qualität, sie umfasst diejenigen Eigenschaften, durch die sich irgend ein Ding von andern nicht als gleichartig gedachten unterscheidet. Es können also die Qualitäten unendlich verschieden sein, während die Quantität nur ein Begriff ist. Dabei ist zu merken, dass die Gleichartigkeit oder Nichtgleichartigkeit der Dinge eben etwas nur dem Denken, nichts der Aussenwelt Entsprechendes ist. Wir können Gegenstände als gleichartig betrachten, wenn wir gewisse Qualitäten, welche sie von einander unterscheiden, unberücksichtigt lassen, und dann haben sie nur einen quantitativen Unterschied von einander, sind also der Mathematik zugänglich. Wenn man z. B. von der Bevölkerungsmenge eines Staates oder Landes spricht, und deren Berechnung gewissen mathematischen Betrachtungen unterwirft, so bestehen die gleichartigen Dinge, die man verbindet, in den einzelnen Bewohnern. Man sieht also von der vielfachen qualitativen Verschiedenheit derselben, z. B. ob sie männlichen oder weiblichen Geschlechtes seien u. s. w., ganz ab.

Strenge genommen findet dieser Abstractionsprozess bei jeder Anwendung der Mathematik, selbst bei Geometrie und Mechanik statt. Linien z B. sind insofern von einander qualitativ unterschieden, als jede einen andern Raum einnimmt. Misst man sie nun, d. h. vergleicht man sie, so sieht man von diesem Raume, den sie gerade einnehmen, ganz ab.

Da die mathematischen Wissenschaften nur die Quantität betrachten, die letztere aber eine einheitliche ist, so fragt sich, wie noch ein Unterschied in diesen Wissenschaften selbst, z. B. zwischen Zahlenlehre und Geometrie oder Mechanik stattfinden könne.

Diese Frage ist folgendermaassen zu beantworten.

Die Zahlenlehre ist die Lehre von den Grössen oder Quantitäten an sich. Sie nimmt keinerlei qualitative Bestimmungen auf, alle andern mathematischen Wissenschaften aber thun dies, wenn auch nur in dem Sinne, dass sie zwei oder mehrere verschiedene Begriffe voraussetzen, welche nicht durch Vermehren oder Vermindern aus einander entstehen können. So z. B. in der Geometrie bewirken die drei Ausdehnungen des Raumes, dass man verschiedene Begriffe einführen muss, deren jede für sich als Quantität betrachtet werden kann, die aber unter einander qualitativ verschieden sind, wie z. B. Linien und Winkel. Kein Winkel entsteht aus einer Linie durch Vermehren oder Vermindern, und umgekehrt, obgleich beides Raumgrössen sind.

In der Mechanik braucht man ausser den Raumgrössen, welche die Geometrie kennt, noch die Zeitgrössen, und zur Bestimmung der Bewegung eines Punktes z. B. sind immer drei qualitativ verschiedene Raumgrössen nöthig, welche den drei Dimensionen entsprechen. Seien dies nun drei verschieden gerichtete Coordinaten, welche eben wegen ihrer verschiedenen Richtung von einander völlig zu trennen sind, und nicht durch Vermehrung oder Verminderung aus einander hervorgehen können, oder (bei welcher Bestimmung sich der qualitative Unterschied noch schärfer ausprägt) eine Linie, ein Linienwinkel und ein Ebenenwinkel; zugleich aber muss eine Zeitbestimmung gegeben sein.

Wenn sich in der Astronomie, in der mathematischen Physik u. s. w. Rechnungen ergeben, so beziehen sich dieselben immer auf mechanische Vorstellungen. Von der reinen Mechanik aber unterscheiden diese Wissenschaften sich dadurch, dass über die qualitative Natur der bewegten Punkte oder Körper gewisse Voraussetzungen gemacht werden, z. B. dass sie einander anziehen oder abstossen, und das Gesetz, nach welchem dies geschieht, dass sie in irgend einer Art mit einander verbunden seien u. s. w.

Die Zahlenlehre ist also die reine Quantitätslehre in ihrem weitesten Um-

fange, sie geht eben nur von einem völlig bestimmungslosen Dinge, Einheit genannt, aus; je mehr Eigenschaften oder Qualitäten man dagegen diesem als Einheit betrachteten Dinge gibt, je mehr entfernt man sich von mathematischen Vorstellungen. So ist die Mechanik eine reiner mathematische Wissenschaft als die Astronomie, aus dem angeführten Grunde, diese mehr als die Statistik, deren Einheit der einzelne Mensch ist, ein höchst complicirtes Ding, von dessen Eigenschaften dabei nicht gänzlich abgesehen werden kann.

Die reine Quantitäts- oder Zahlenlehre hat es mit allen möglichen Operationen zu thun, die mit der Einheit oder der aus ihr entstehenden Zahlengrösse vorgenommen werden können, ohne zu fragen, in wieweit diese Operationen in der Anwendung zur wirklichen Erscheinung kommen, also in der Uebertragung auf die Begriffe, von welchen die Einheit abstrahirt ist, auch wirklichen Dingen entsprechen. In der That kann die Qualität eines Dinges auch darin bestehen, dass bei ihm gewisse Eigenschaften nicht real werden, die der Zahl im Allgemeinen anhaften.

Man kennt z. B. in der Zahlenlehre die Operation der Theilung der Einheit. Spricht man nun z. B. von Bevölkerungsmengen, deren Einheit das Individuum ist, so ist hier eine Theilung unmöglich, weil die Qualität eines Individuums eben zum Theil in der Untheilbarkeit besteht.

Andere Grössen sind wieder der Vervielfältigung unzugänglich; z. B. in der Wahrscheinlichkeitslehre ist die Einheit der Ausdruck für die Gewissheit, und jeder Theil der Einheit entspricht einer bestimmten Wahrscheinlichkeit (vergleiche den Artikel: Wahrscheinlichkeit), es ist also ein Vervielfältigen der Einheit unmöglich, da eine Wahrscheinlichkeit doch nie die Gewissheit übertreffen kann.

Die Zahlenlehre setzt ferner der positiven Zahl die negative gegenüber. Negative Grössen einer gewissen Art kommen oft zur wirklichen Erscheinung, z. B. bei Zeitgrössen, wo man von einer bestimmten Zeit ausgeht, z. B. von der Geburt Christi in der Chronologie; die Jahre nach Christi Geburt sind positive Grössen, die vorhergehenden negative. Dies tritt überall ein, wo der Anfangspunkt oder Nullpunkt der Rechnung ein willkürlicher ist, und die Grösse sich nach zwei Richtungen von ihm aus ins Unendliche erstreckt. In der Geometrie handelt es sich auch bekanntlich in gewissem Sinne um negative Grössen, jedoch ist dies in andern geometrischen Betrachtungen wieder nicht der Fall. Die Untersuchung, in wiefern und unter welchen Voraussetzungen Raumgrössen negativ werden, wird jedoch erst später gegeben werden können.

Bei andern Grössen, man denke z. B. an die Statistik, kommt überhaupt das Negative nicht zum Erscheinen. Man muss aber hierbei nicht in den Irrthum verfallen, dass, wenn z. B. die Mathematik auf letztere Wissenschaft angewendet wird, das Negative und der Bruch gar nicht angewendet werden dürfe. Denn so lange man in rein mathematischen Betrachtungen verweilt, ist dies sehr wohl möglich, nur das letzte Resultat der Rechnung, womit man wieder in die betrachtete Disciplin zurücktritt, schliesst natürlich solche Quantitäten aus, die derselben abgehen. Man kann Bevölkerungsmengen, wenn sie einmal in Rechnung gebracht sind, natürlich theilen, andere von ihnen abziehen, d. h. Negatives damit vereinen und so fort, aber das Resultat soll schliesslich kein Bruch, und auch nicht negativ sein. Im entgegengesetzten Falle würde es auf etwas Unmögliches hindeuten.

Ein höchst wichtiger Theil der reinen Zahlenlehre, die Theorie des Imaginären, kommt sogar in keiner Anwendung zur wirklichen Erscheinung. Diese Theorie vermittelt aber nichts destoweniger die gegebenen Daten mit dem Resultat.

Das Imaginäre kann sich während der Rechnung einstellen, und am Schluss muss es wieder verschwinden, wenn nicht eben durch dessen Verbleiben angedeutet wird, dass das Resultat ein unmögliches oder nicht vorhandenes sei.

Wir geben hier die Zahlenlehre oder die Lehre von den reinen Quantitäten in ihren einfachsten Elementen. Die Anwendungen auf Geometrie und Mechanik sind in den entsprechenden Artikeln zu suchen.

**Quantität (reine oder Zahl).**

1) Einheit, Null, ganze Zahl, Addition.

Die Zahlenlehre geht von dem Begriffe der Einheit aus. Dieselbe wird definirt, als irgend ein Ding, von dessen Eigenschaften man vollständig abstrahirt. Sie ist also gänzlich bestimmungslos, und jeder Begriff ist unter dem der Einheit enthalten, mithin selbstverständlich auch diejenigen, auf welche man im Verlauf unserer Betrachtungen gelangen wird.

Die Einheit bezeichnen wir durch das Zeichen 1, und wir können von ihr zunächst weiter nichts aussagen, als dass sie entweder vorhanden ist oder nicht.

Das Nichtvorhandensein der Einheit wird durch das Zeichen 0 (Null) angedeutet. Auf irgend eine Weise wird die Einheit entstehen, oder aus der Null hervorgehen; sie ist mithin, und dies ist ja das Wesen eines jeden Begriffes, das Resultat einer Thätigkeit. Auch diese Thätigkeit wird völlig bestimmungslos sein, da ja ihr Resultat ein bestimmungsloses ist; wir bezeichnen sie durch den Ausdruck: addiren, und durch das Zeichen + (plus). Die Formel:

$$0+1=1$$

deutet also an, dass durch die Thätigkeit des Addirens die Eins aus der Null entsteht.

Es kann nun aber diese Thätigkeit wiederholt werden, d. h. man kann bilden 1+1, einen Ausdruck, für dessen Resultat wir das Zeichen 2 nehmen. Man hat also 1+1=2, und wenn man so fortfährt:

$$2+1=3,\ 3+1=4,\ 4+1=5\ \ldots$$

Hier sagt man, man habe 1 bezüglich zu 2, 3, 4 addirt.

Dieser Prozess des Addirens in der Gedankenthätigkeit kann unendlich oft wiederholt werden. Er würde nur dann eine Grenze haben, wenn man statt der bestimmungslosen Einheit von irgend einem näher definirten Begriffe ausgeht, also in gewissen Anwendungen.

Wir erhalten also unendlich viel neue Formen, die wir als ganze positive Zahlen, oder kurz als Zahlen bezeichnen.

1) „Ganze positive Zahlen entstehen aus der Addition oder Zusammenfügung von Einheiten."

Die Addition wird nämlich gewöhnlich als ein Zusammenfügen aufgefasst, und man kann dies thun, wenn man erst die Einheit entstehen lässt, dann diesen Prozess wiederholt u. s. f.; es sind dann die Einheiten zusammengefügt oder zu einander addirt. Indessen ist die zuerst gegebene Definition der Addition, wie wir gleich sehen werden, die allgemeinere:

„Man kann jetzt auch beliebige Zahlen addiren, denn da nach dem Obigen jede Zahl als Einheit aufgefasst wird, so kann man jede derselben auch aus der Null entstehen lassen."

Es ist also z. B. 5+3 definirt durch die Thätigkeiten:

$$5+1=6,\ 6+1=5+1+1=7,$$
$$7+1=5+1+1+1=8.$$

Ebenso können mehrere Zahlen addirt werden, indem man erst zwei zusammenfügt, dann die dritte damit verbindet u. s. f.

„Zahlen, welche addirt werden, heissen Glieder oder Posten, das Resultat der Addition bezeichnet man als Summe."

Jedes der Glieder besteht aus einer Zusammenfügung oder Anzahl von Einheiten, und die Gesammtzahl der Einheiten aller Posten bestimmt den Ausdruck der Summe. Es ist also z. B.:

$$5+3=1+1+1+1+1+1+1+1=8,$$

und:

$$3+5=1+1+1+1+1+1+1+1=8.$$

Es kommt also auf die Ordnung, in der die Einheiten entstanden, nicht an, und man hat den Hauptsatz der Addition:

I. „Man kann beim Addiren die Ordnung der Glieder beliebig vertauschen."

$$a+b+c=a+c+b=b+c+a\ \ldots$$

Hier bedeuten $a$, $b$, $c$ beliebige Zahlen.

Wie immer in der Zahlenlehre bedienen wir uns der Buchstaben, um diese Willkürlichkeit auszudrücken. Diese Ausdrucksweise ist sehr wichtig für diese Wissenschaft, weil sie gestattet, zufällige, also einzelnen Zahlen angehörige, und allgemeine Eigenschaften aus einander zu halten, und dies in aller Kürze anzudeuten.

Es ist ausserdem in dem Obigen noch eine zweite Bezeichnung enthalten. Betrachten wir den Ausdruck:

$$5+3=8,$$

so bedeutet das Gleichheitszeichen =, dass die rechts und links geschriebenen Formen identisch sind. Als wir nämlich die Bezeichnung 2 für 1+1, 3 für 2+1 einführten, gelangten wir bereits dazu, für dasselbe Resultat zwei verschiedene Formen zu haben.

„Die Verbindung von solchen Formen mit der Andeutung ihrer Identität durch das Gleichheitszeichen nennen wir Gleichung,"

und wir haben für die Gleichungen bereits den wichtigen und selbstverständlichen Satz:

II. „Wenn man mit beiden (identischen) Seiten einer Gleichung dasselbe vornimmt, so erhält man wieder Identisches auf beiden Seiten."

Als Beispiel nehmen wir die Addition, da sich auf diese allein jetzt unsere Kenntniss beschränkt.

Es sei:

$$a+b=c,$$

so ist auch:

$$a+b+x=c+x.$$

Man hat nämlich Gleiches, nämlich $x$, auf beiden Seiten addirt.

Noch ist ein Begriff zu definiren, der von hoher Wichtigkeit ist, der des Grössern und Kleinern. Es kann dies jedoch nur in beschränkter Weise für die uns bis jetzt bekannten Zahlen geschehen.

„Eine ganze positive Zahl $a$ heisst grösser als eine andere $b$, wenn zu $b$ eine Anzahl Einheiten addirt werden muss, um $a$ zu bilden, dagegen kleiner als $b$, wenn zu $a$ Einheiten zugezählt werden müssen, um $b$ zu bilden."

Es folgt hieraus unmittelbar:

„Null ist kleiner als jede ganze positive Zahl."

Denn nach der Definition des Addirens ist:

$$0+a=a.$$

Es müssen also zu 0 noch Einheiten hinzugefügt werden.

2) Multipliciren, Potenziren, Bedeutung der Klammern.

„Die Wiederholung irgend einer Thätigkeit hat nach dem Obigen ihren Zahlenausdruck."

Möge irgend eine Thätigkeit nicht an der bestimmungslosen Einheit, sondern an irgend einem Ausdrucke $a$ führen, so kann man diese Thätigkeit wiederholen, d. h. $a+a$ bilden, und wir setzen

$$a+a=2\times a \text{ oder } =2\cdot a,$$

$$2\times a+1\times a=3\cdot a$$

u. s. w. Es ist also auch:

$$1\times a=a, \quad 0\cdot a=0,$$

denn hier ist die Thätigkeit gar nicht vorgenommen.

In $n\times a$ zeigt also $n$ an, dass wenn man für $a$ die Einheit setzt, aus dieser Operation die Zahl $n$ hervorgehen würde, oder:

„Irgend eine Thätigkeit wird $n$mal wiederholt, wenn das Resultat dieser Wiederholung dann zur Zahl $n$ führen würde, wenn die ursprüngliche Thätigkeit, wie man dies ja immer annehmen kann, diejenige ist, welche zur Einheit führt."

„Ist namentlich $a$ eine ganze Zahl, so ist also $n\times a$ diejenige Zahl, welche entsteht, wenn man $a$ $n$mal (zur Null) addirt. Man nennt dies $a$ mit $n$ multipliciren."

Das Multipliciren ist also eine Wiederholung der Thätigkeit des Addirens.

„Es heisst hierbei $a$ Multiplicandus, $n$ Multiplicator, das Resultat der Multiplication wird Product genannt."

Das Zeichen der Multiplication, ein liegendes Kreuz oder ein Punkt, kann auch weggelassen werden, wenn einer der beiden Grössen, welche man multiplicirt, ein Buchstabe ist. Also: $ab=c$, gleichbedeutend mit $a\times b=c$, ebenso: $3\times a=3a$, aber $3\times 7=21$.

„Es ist ersichtlich, dass das Product zweier ganzen Zahlen wieder eine solche ist."

Z. B.: $2\cdot 3=3+3=6$.

Ehe wir die beiden Hauptsätze der Multiplication ableiten, muss auf die Bedeutung der Klammern eingegangen werden.

Da wir jetzt zwei Operationen, Addiren und Multipliciren kennen, so wird es auch möglich, die Resultate einer Operation, also der Form nach zusammengesetzte Ausdrücke, weiteren Operationen zu unterziehen.

Soll z. B. $3+7$ oder $a+b$ mit 5 multiplicirt werden, so ist es hierbei nöthig, auf irgend eine Art anzudeuten, dass $3+7$ und $a+b$ als eine Grösse gefasst und als solche der folgenden Operation unterworfen wird. Dies geschieht, indem man diese Summen in Klammern einschliesst. Es heisst also:

$$(3+7)\times 5=50, \text{ oder } (a+b)5=c,$$

man soll zuerst die Summe $3+7=10$ oder $a+b$ bilden und mit dieser die Zahl 5 multipliciren, wodurch man 50 oder $c$ erhält. Bliebe die Klammer weg, so hätte man:

$$3+7\times 5,$$

d. h. es soll 3 zu $7\times 5=35$ addirt werden, welches 38 gibt.

Multipliciren wir jetzt eine Summe mit irgend einer Zahl:

$$4\cdot(3+7+5).$$

Nach der Erklärung der Multiplication muss $3+7+5$ viermal addirt werden. Man erhält:

$$3+7+5+3+7+5+3+7+5+3+7+5,$$

oder da es beim Addiren auf die Ordnung der Glieder nicht ankommt:

$$3+3+3+3+7+7+7+7+5+5+5+5$$
$$=4\cdot 3+4\cdot 7+4\cdot 5,$$

oder allgemein:

$$n(a+b+c)=na+nb+nc.$$

I. „Eine Summe wird mit einer Zahl multiplicirt, wenn man jedes Glied einzeln mit derselben multiplicirt, und alle Producte addirt."

Aus diesem Satze folgt leicht der folgende nicht weniger wichtige:

II. „Wenn zwei Zahlen mit einander multiplicirt werden, so kann man Multiplicator und Multiplicandus vertauschen, ohne dass sich das Product ändert."

Also:

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ oder } 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4 = 12.$$

Es ist nämlich:

$$4 \cdot 3 = 4 \cdot (1+1+1),$$

und indem man den vorigen Satz anwendet:

$$4 \cdot 3 = 4+4+4 = 3 \cdot 4.$$

Man kann aber auch mehr als zwei Zahlen mit einander multipliciren. Man versteht nämlich z. B. unter dem Producte: $4 \cdot 3 \cdot 7$ den Ausdruck 4 mit $3 \cdot 7$ oder 21 multiplicirt, also $4 \cdot 3 \cdot 7 = 84$. Nach dem vorigen Satze ist hiernach:

$$4 \cdot 3 \cdot 7 = 4 \cdot 7 \cdot 3.$$

Es ist aber auch:

$$4 \cdot 3 \cdot 7 = 3 \cdot 4 \cdot 7.$$

Denn:

$$4 \cdot 3 \cdot 7 = 4(7+7+7) = 4 \cdot 7 + 4 \cdot 7 + 4 \cdot 7 = 3 \cdot 4 \cdot 7.$$

Man kann auch für beliebig viel zu multiplicirende Zahlen leicht dasselbe zeigen, und hat also den Satz:

III. „Beim Multipliciren kommt es auf die Ordnung der zu multiplicirenden Zahlen nicht an."

Die letzteren, welche sich also in Bezug auf das Product ganz gleich verhalten, werden mit dem gemeinschaftlichen Namen Factoren benannt.

Seien jetzt zwei mehrgliedrige Ausdrücke mit einander zu multipliciren, also:

$$(a+b+c)\,(d+e+f).$$

Durch Anwendung des Satzes I. erhält man:

$$(a+b+c)\,d + (a+b+c)\,e + (a+b+c)f + \ldots,$$

und wenn man Satz II. anwendet, also beide Factoren vertauscht, ergibt sich:

$$d(a+b+c) + e(a+b+c) + f(a+b+c),$$

und mit abermaliger Anwendung des Satzes I.:

$$(a+b+c)(d+e+f) = da+db+dc + ea+eb+ec+fa+fb+fc,$$

d. h.:

„Ein mehrgliedriger Ausdruck wird mit einem ebensolchen multiplicirt, indem man jedes Glied des einen Factors mit jedem des andern multiplicirt, und alle Theilproducte addirt."

Mit Bezug auf die Sätze 1) und 2) machen wir noch eine für die Methode, deren sich die Mathematik bedient, wichtige Bemerkung. — Das Resultat dieser Sätze lässt sich als Gleichung angeben, und da eine solche in einer völligen Identität der Ausdrücke auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens besteht, so lassen sich nicht allein solche Anwendungen machen, wo die linke Seite in die rechte verwandelt wird, sondern auch umgekehrt. Sei z. B. gegeben der Ausdruck:

$$4a \cdot b + 2a \cdot c + 6a \cdot d,$$

so sind, wenn man $4a = 2 \cdot a \cdot 2$, $6 \cdot a = 2a \cdot 3$ schreibt, sämmtliche Glieder mit $2a$ multiplicirt, und mit Anwendung des Satzes I. kann man dafür schreiben:

$$2a(2b+c+3d).$$

In der That würde man durch Anwendung dieses Satzes von dem letzteren Ausdrucke wieder zu dem ursprünglich gegebenen gelangen.

Man hat hier also eine Summe von Theilproducten in das Product einer Summe und einer Zahl verwandelt, indem man erstere innerhalb einer Klammer schreibt. Man pflegt dies so auszudrücken: „der Ausdruck $2a$ sei aus einer Klammer herausgezogen worden."

Wie aus der Addition die Multiplication, so entsteht aus dem Multipliciren das Potenziren. Es sei nämlich:

$1 \cdot a = a = a^1$, $1 \cdot a \cdot a = a^2$, $1 \cdot a \cdot a \cdot a = a^3$ u. s. w.

Die oben geschriebene Zahl 1, 2, 3 deutet an, wie oft $a$ mit sich selbst, oder genauer genommen mit der Einheit multiplicirt sei. Die Zahlen $a^1$, $a^2$, $a^3$ . . . $a^n$ heissen 1, 2, 3 . . . $n$te Potenz von $a$; also:

„Eine Zahl $a$ zur $n$ten Potenz erheben, heisst, sie $n$ mal mit der Einheit multipliciren."

Die Zahl $n$, welche die Wiederholung der Thätigkeit des Multiplicirens anzeigt, wird Exponent genannt, die zu potenzirende Zahl $a$ heisst Basis. Das Resultat des Potenzirens, also $a^n$, wird Potenz genannt. Man sieht sogleich, dass die Potenz immer eine ganze Zahl sein wird, wenn $a$ und $n$ ganze Zahlen sind. Auch ist die Bedeutung des Zeichens $a^0$ klar, denn da $a^n$ anzeigt, dass 1 $n$ mal mit $a$ multiplicirt ist, so wird $a^0$ sagen, dass 1 gar nicht mit einer andern Zahl

multiplicirt sei, also unverändert bleibt; es ist also $a^0 = 1$, was auch $a$ sei.

Wird die Einheit $n$mal, dann $p$mal u. s. w. mit $a$ multiplicirt, so hat man sie im Ganzen $n+p$ mal multiplicirt; d. h. in einer Formel:

$$a^n \cdot a^p \ldots = a^{n+p+\ldots}$$

oder in Worten:

V. „Potenzen derselben Basis werden multiplicirt, indem man die Exponenten addirt."

Geht man von der Formel:

$$a^{n+p+q} = a^n a^p a^q$$

aus, und setzt $n = p = q$, so hat man links $a^{3n}$, rechts $a^n \cdot a^n \cdot a^n$, d. h. die dritte Potenz von $a^n$ oder $(a^n)^3$, wo die Klammer ihrer allgemeinen Bedeutung nach anzeigt, dass erst $a^n$ berechnet, und dann hiervon wieder die dritte Potenz gebildet werden soll. Man hat also:

$$(a^n)^3 = a^{3n},$$

oder da die Zahl 3 ganz willkürlich gewählt war und von jeder dasselbe gilt:

$$(a^n)^p = a^{pn},$$

d. h. in Worten:

VI. „Eine Potenz wird zu einer andern Potenz erhoben, indem man beide Exponenten mit einander multiplicirt."

Seien jetzt gleiche Exponenten, aber ungleiche Basen gegeben.

$$(abc)^3 = abc\, abc\, abc,$$

oder da die Ordnung der Factoren willkürlich ist:

$$(abc)^3 = aaa\, bbb\, ccc = a^3\, b^3\, c^3.$$

Die Anzahl der Factoren $abc$ und der Exponent 3 ist willkürlich gegeben, also:

$$(abc\ldots)^n = a^n b^n c^n \ldots,$$

d. h. in Worten:

VII. „Ein Product wird zu einer Potenz erhoben, indem man jeden Factor zu derselben Potenz erhebt, und das Product dieser Potenzen bildet."

Addiren, Multipliciren, Potenziren nennt man auch „directe Operationen".

Man sieht, keine derselben bringt an sich eine andere Form als die ganze positive Zahl hervor. Auch könnte man, indem man das Potenziren wiederholt, eine neue und immer neue Operationen entstehen lassen. Wie leicht zu sehen, würde dies jedoch keinen sonderlichen Nutzen gewähren; auch wäre die Bedeutung der neuen Operationen nicht ganz die der gegebenen.

Ein wesentlicher Unterschied stellt sich nämlich beim Potenziren gegen das Addiren und Multipliciren heraus. Während nämlich bei diesen beiden Operationen mit Posten und Factoren operirt wurde, Grössen, welche sich nach gegebenen Sätzen beliebig mit einander vertauschen lassen, wird beim Potenziren mit der Basis und dem Exponenten operirt, Grössen, die durchaus nicht vertauscht werden können, ohne das Resultat zu ändern. Diese Eigenschaft der Potenzen namentlich ist die Ursache, dass man bei der Wiederholung des Potenzirens nicht etwas ähnliches wie $n$ gleiche Posten oder $n$ gleiche Factoren hat. Man begnügt sich daher mit diesen drei directen Operationen und schliesst an dieselben die indirecten an, welche zu neuen Zahlformen führen.

3) Bedeutung der indirecten Operationen. Vom Subtrahiren und von den negativen Zahlen.

Einer jeden Thätigkeit, die von irgend einem Ausgangspunkte zu einem Resultate führt, können wir entgegenstellen die entgegengesetzte oder „negative" Thätigkeit, welche von diesem Resultate zum Ausgangspunkt wieder zurückführt. D. h.: Wird eine Zahl $a$ irgend einer Thätigkeit unterworfen, welche zu einer andern Zahl $b$ führt, und man unterwirft diese der entsprechenden negativen Thätigkeit, so muss diese zu $a$ zurückführen.

Dem Addiren stellen wir entgegen die negative Thätigkeit des Subtrahirens oder Abziehens. Also da $4+5=9$ ist, so muss 4 von 9 abgezogen wieder 5 geben nach der Erklärung.

Das Zeichen der Subtraction ist — (gelesen minus), und wir schreiben:

$$9-4=5.$$

Allgemein:

„Ist $a+b=c$, so ist auch $c-b=a$."

Es folgt aber aus dem blossen Begriffe der negativen Operation, „dass Addiren und Subtrahiren sich aufheben".

Z. B.:

$$5+4-4=5,$$

aber auch:

$$5-4+4=5,$$

da in beiden Fällen von der 5 zu einer andern Zahl übergegangen, von dieser aber zur 5 zurückgegangen ist.

Es ist also auch:

$$a-a=0,$$

denn $a$ entsteht aus 0 durch Hinzufügen von $a$ Einheiten.

Die Zahl, von der abgezogen wird, nennen wir Minuendus, die abgezogene Zahl den Subtrahendus, das Resultat der Subtraction Differenz oder Rest.

Das Subtrahiren bezeichnen wir dem Addiren gegenüber auch als indirecte Operation.

Eine Zahl, z. B. 4, kann von jeder andern abgezogen werden, vorausgesetzt, dass dieselbe mehr als 4 Einheiten enthält; also kann man diese 4 auch als abgezogene Einheiten für sich betrachten, indem man mit dieser Bezeichnung Zahlen versteht, die der Thätigkeit des Subtrahirens unterworfen werden sollen. Dergleichen Zahlen wollen wir negative nennen.

Absoluten Werth einer negativen Zahl, z. B. $-5$, nennen wir die Anzahl der negativen Einheiten, also hier 5, die sie enthält.

Wir erhalten über negative Zahlen sogleich unmittelbar aus ihrer Definition mehrere Sätze.

Zunächst kann eine negative Zahl zu einer andern addirt werden, denn abgezogene Einheiten hinzufügen, heisst ja eben, sie abziehen. Es ist also:

$$4+-3=4-3=1,$$

und allgemein:

$$a+-b=a-b.$$

D. h.:

I. „Eine negative Zahl wird zu einer andern Zahl addirt, indem man ihren absoluten Werth abzieht."

Werden gewisse Einheiten abgezogen, z. B. 5, und dann eine andere Anzahl 9, so hat man im Ganzen 5+9 Einheiten abgezogen. Es ist also:

$$-5+-9 \text{ oder } -5-9=-(5+9)=-14,$$

oder allgemein:

$$-a-b=-(a+b).$$

II. „Zwei negative Zahlen werden addirt, indem man die Summe ihrer absoluten Werthe negativ nimmt."

Man kann auch eine negative Zahl von einer andern positiven oder negativen abziehen.

Zu dem Ende bemerke man, dass $-(-a)$ die dem Zusetzen oder Addiren von $-a$ entgegengesetzte Thätigkeit, welche nach dem Vorigen also mit dem Setzen von $a$ oder $+a$ Einheiten identisch ist. Hieraus erhält man:

$$-(-a)=+a.$$

III. „Zwei negative Zeichen geben ein positives."

Es folgt hieraus leicht:

$$-(-(-a))=-a, \quad -(-(-(-a)))=+a,$$

u. s. w.

An diesen Satz lässt sich folgende Betrachtung knüpfen.

Wird z. B. 5 zu irgend einer Zahl addirt und 7 abgezogen, wo also die abgezogenen Einheiten die grössere Zahl bilden, so ist dies somit dasselbe, als wenn man $-5$ abzöge und $-7$ addirte, es sind also 7 negative Einheiten hinzugefügt und 5 negative Einheiten abgezogen, d. h:

$$5-7=-(7-5)=-2,$$

oder:

$$a-b=-(b-a).$$

Da im Uebrigen $7-5=2$ ist, so hat man folgenden Satz:

„Ist irgend eine Zahl von einer andern abzuziehen, gleichviel ob die letztere die kleinere sei, so zieht man den absoluten Werth der kleinern von dem der grössern ab, und gibt dem Rest das Zeichen + oder — der grössern."

Dieser Satz und Satz II. enthalten die Addition und Subtraction negativer Zahlen.

Da das Subtrahiren auf das Addiren negativer Zahlen zurückgeführt ist, so kann man von den erstern Operationen ganz absehen, wenn man an ihrer Stelle das Addiren negativer Zahlen einführt. Die früher gefundenen, durch Addition aus der Null entstandenen Zahlen wollen wir den negativen gegenüber jetzt immer als positive bezeichnen und ihnen das Zeichen + geben; aber Addiren und Subtrahiren positiver und negativer Zahlen haben wir jetzt folgende Regeln, die sich aus den Sätzen I., II., III. und IV. ergeben.

V. „Jede 2 Zahlen werden addirt,

a) wenn ihre Vorzeichen gleich sind, durch Zusammenzählen, indem man der Summe das gemeinschaftliche Zeichen lässt. (Dies ist für positive Zahlen selbstverständlich, und folgt für negative aus Satz II.)

b) wenn ihre Vorzeichen ungleich sind, indem man die kleinere von der grösseren abzieht und dem Rest das Zeichen der letzteren gibt (es ist dies in Satz IV. ausgesprochen)."

VI. „Eine Zahl wird von einer andern abgezogen, indem man ihr Vorzeichen ändert (minus in plus, plus in minus verwandelt) und dann addirt, also nach Regel V. verfährt."

Es folgt dies daraus, dass Subtrahiren und Addiren von Negativen identisch ist, wenn der Subtrahendus positiv ist; ist derselbe negativ, also gegeben: $a-(-b)$, so ist dies nach Satz III. mit $a+b$ identisch.

Im Wesen der Subtraction liegt es noch begründet, dass, wenn eine Zahl zu einer andern addirt und eine andere dann abgezogen werden soll, z. B. $5+7-3$, auch zuerst 3 von 5 abgezogen und dann 7 addirt werden kann. Denn man hat ja:

$$5+7-3=5+4+3-3=5+4,$$

und:

$$5-3+7=5-3+3+4=5+4,$$

also:

VII. „Sind beliebig viel Zahlen zu addiren und zu subtrahiren, so kommt es nicht auf die Ordnung an, in der dies geschieht."

Wir haben in dem Früheren schon den Gebrauch der Klammer definirt. Es ist sonach leicht einzusehen, was eine Klammer mit negativem Vorzeichen bedeutet. Offenbar soll in:

$$-(a-b+c-d)$$

jedes in der Klammer enthaltene Glied von irgend einer Zahl abgezogen, also mit negativem Zeichen genommen werden. Man hat also:

$$-a-(-b)-(+c)-(-d)=-a+b-c+d.$$

VIII. „Eine negative Klammer wird aufgelöst, indem man das Vorzeichen jedes Gliedes derselben ändert."

Und umgekehrt:

„Eine Summe oder Differenz wird in eine negative Klammer eingeschlossen, wenn man innerhalb derselben das Vorzeichen jedes Gliedes ändert."

Also z. B.:

$$a-b-c+d=-(-a+b+c-d).$$

Es ist jetzt noch eine Bemerkung über die negativen Zahlen zu machen.

Wir haben dieselben lediglich als abzuziehende oder abgezogene Einheiten aufgefasst; ihre Realität besteht also lediglich in einer Thätigkeit, die allerdings immer zu einem Resultate führen muss, wenn das Abziehen möglich ist. Beim Abziehen aber gingen wir zunächst nur von der Betrachtung aus, dass die abgezogene Zahl kleiner sei, als die, von welcher man sie abzieht, weil dies allein zu den uns bis jetzt bekannten positiven Zahlen führt. So lange man also das Abziehen an sich betrachtet, kann man mit negativen Zahlen rechnen.

Verschieden von diesen Betrachtungen ist aber die Frage, ob negative Zahlen an sich zur Erscheinung kommen, d. h.: Kann ebenso, wie die positive Zahl aus der Wiederholung einer Thätigkeit entstand, die, weil sie bestimmungslos war, immer zu einem Begriffe führte, dem man beliebige Bestimmungen oder Qualitäten ertheilen kann, auch das Setzen von negativen Einheiten an sich, ohne dass man sie von grössern Zahlen abziebt, zu Resultaten führen? Die Beantwortung dieser Frage ist allerdings für die Zahlenlehre völlig unerheblich, da es sich hierbei um Anwendung auf bestimmt qualificirte Begriffe nicht handelt. Um so wichtiger aber ist diese Frage eben für die Anwendungen, Mechanik, Geometrie u. s. w. Zu dem Ende bemerken wir: Die negative Einheit ist offenbar diejenige, welche durch Addition mit der positiven zur Null führt. Die negative Einheit, und mithin die negative Zahl kömmt also dann zur Erscheinung, wenn die Null aus irgend einer gegebenen Grösse durch dieselbe Thätigkeit (Addition) entstehen kann, wie die Eins aus der Null selbst, und diese erstere Grösse ist dann eben $-1$. Es ist dies also dann der Fall, wenn die Null nicht den absoluten Anfangspunkt der Thätigkeiten bildet, mit denen wir operiren, sondern einer vom Unendlichen aus bis ins Unendliche sich erstreckenden Reihe angehört. Es ist dies z. B. bei Bewegungen der Fall, also wenn man für die Einheit eine gewisse Geschwindigkeit nimmt. Der Null entspricht dann die Ruhe. Jede Geschwindigkeit kann dann aus der Null auf irgend eine Art entstehen und bis ins Unendliche dem Begriffe nach zunehmen. Eben so aber kann die Ruhe aus einer Geschwindigkeit entstehen, indem man die entgegengesetzte, aber im Uebrigen gleiche Geschwindigkeit hinzufügt. Die Geschwindigkeiten erstrecken sich also nach zwei Richtungen ins Unendliche, und haben keinen eigentlichen Anfangspunkt.

Setzen wir aber z. B. für die Einheit ein Individuum, so giebt es zu der Entstehung desselben zwar eine entgegengesetzte Operation, das Verschwinden oder Vergehen desselben. Diese letztere aber setzt eben das Individuum voraus, und keinenfalls giebt es ein Verfahren, welches durch Setzen von Individuen zur Null führt. Die Reihe der Thätigkeiten erstreckt sich also nur in einer Richtung von der Null, hier dem natürlichen Anfangspunkte, ins Unendliche.

Da indess die Zahlenlehre es mit allen

möglichen Operationen zu thun hat, die von der bestimmungslosen Einheit ausgehen, so kann man in ihr immer als Schlussresultat zu negativen Zahlen gelangen. Gleiches ist z. B. in der Mechanik der Fall, da dieselben hier wirklich vorhanden sind. Dagegen wird etwa bei einer statistischen Rechnung allerdings mit negativen Zahlen gerechnet werden können. Das Schlussresultat, falls die Frage einer Antwort überhaupt fähig ist, wird aber eine positive Zahl sein, da nur solche Zahlen innerhalb dieser Wissenschaft überhaupt eine Bedeutung haben.

Der Begriff der negativen Zahl muss jetzt auch mit dem des Multiplicirens verbunden werden.

Augenblicklich ist ersichtlich, dass eine negative Zahl mit einer positiven multiplicirt werden kann.

Wir fassten das Multipliciren nämlich als eine Wiederholung des Addirens auf. Es ist also z. B.:

$$3\times(-a)=-a+-a+-a=-(a+a+a)$$
$$=-3a.$$

„Eine negative Zahl wird mit einem positiven Multiplicator multiplicirt, wenn man das Product der absoluten Werthe negativ nimmt."

Es fragt sich aber nach der Bedeutung des Multiplicirens mit negativem Multiplicator.

Es ist dieselbe durch den Begriff der negativen Operation gegeben.

Zu dem Ende bemerken wir, dass das von den Zahlen Gesagte allgemein gültig auf die Thätigkeit des Rechnens selbst übertragen werden kann. Da also z. B. $5+(-5)=0$ ist, so bedeutet das 5 und das $-5$mal Nehmen einer Zahl soviel als das gar nicht Nehmen derselben, und es ist also:

$5\cdot a+(-5)\cdot a=0$ oder: $(-5)\cdot a=-5a$.

Verbindet man diese Betrachtung mit der vorigen, so kann man auch zwei negative Zahlen multipliciren. Es ist nämlich nach der letztern Betrachtung:

$$(-5)\cdot(-a)=-(5\cdot(-a)),$$

und da nach der erstern:

$$5\cdot(-a)=-5\cdot a$$

ist:

$$(-5)\cdot(-a)=-(-5a)=5a.$$

Aus diesen Sätzen folgt der allgemeine:

IX. „Zwei Zahlen, positive oder negative, werden multiplicirt, indem man ihre absoluten Werthe multiplicirt, und dem Product das positive oder negative Zeichen gibt, je nachdem beide Zahlen gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen haben."

Auch ergibt sich, da es, abgesehen vom Zeichen, nur auf das Product der absoluten Werthe ankommt, die Ausdehnung des Satzes III. Abschnitt 2) auf negative Zahlen. Dasselbe gilt von den Sätzen I. und IV. des nämlichen Abschnittes.

Man hat nämlich z. B.:

$$\begin{aligned}3(a-b+c-d)= {}& a-b+c-d\\ &+a-b+c-d\\ &+a-b+c-d\\ \hline &3a-3b+3c-3d\end{aligned}$$

und:

$$-3(a-b+c-d)=-(3a-3b+3c-3d)$$
$$=-3a+3b-3c+3d,$$

d. h. Summen oder Differenzen werden mit negativen oder positiven Zahlen multiplicirt, indem man jedes Glied mit Berücksichtigung seines Vorzeichens mit dem Multiplicator multiplicirt, und die Theilproducte addirt. Satz IV. des Abschnitts 2) ist hiervon die unmittelbare Folge.

4) Vom Dividiren und von den Brüchen.

Wie dem Addiren als indirecte Operation das Subtrahiren, so wird dem Multipliciren das Dividiren entgegengestellt.

Da also z. B. von 5 zur 20 durch Multiplication mit 4 übergegangen wird, so können wir von der 20 zur 5 durch Division mit 4 zurückgehen, oder:

„20 durch 4 dividiren, heisst diejenige Zahl finden, welche mit 4 multiplicirt 20 gibt."

Das Zeichen der Division ist ein Querstrich oder 2 Punkte, also:

$$4\cdot\frac{20}{4}=5,\quad\text{oder:}\quad 4\cdot(20:4)=5,$$

allgemein:

$$a\cdot\frac{b}{a}=b.\quad\text{Aber auch:}\quad\frac{a\cdot b}{a}=b.$$

Denn in welcher Ordnung man die Division und Multiplication verrichtet, immer kommt man zu $b$ zurück. Die zu dividirende Zahl $b$ wird Dividendus oder Zähler, die dividirende Zahl Divisor oder Nenner, endlich das Resultat Quotient oder Bruch genannt.

Eine Zahl, z. B. 50, welche eine andere 5 als Factor enthält, heisst Vielfaches derselben. Dividirt man das Vielfache $5\cdot10$ durch den Factor 5, so

erhält man eine ganze Zahl 10; es ist aber leicht zu sehen, dass sich nur bei solchen Divisionen ganze Zahlen ergeben. Dennoch hat in der Rechnung, worin ein Bruch $\frac{1}{b}$ vorkommt, dessen Zähler also etwa 1 ist, immer einen Sinn. Denn da der Einheit beliebige Bestimmungen gegeben werden können, so kann ihr in irgend einem Falle diejenige gegeben werden, ein Vielfaches von $b$ zu sein. An sich kommt dem Bruche $\frac{1}{b}$, was auch $b$ sei, dann eine Realität an, wenn die Grössen, mit welchen man rechnet, einer neuen Bestimmung der Theilung bis ins Unendliche oder der Continuität theilhaftig sind. Ist nämlich die Einheit nichts Bestimmtes, sich von selbst Darbietendes, sondern lässt sich die Art ihrer Entstehung als Wiederholung eines andern Prozesses auffassen, so dass man eine andere Einheit wählen kann, von der sie ein Vielfaches bildet, so wird diese neue Einheit natürlich mit $\frac{1}{b}$ bezeichnet werden, wenn die alte das $b$fache davon ist, und $\frac{1}{b}$ ist ein Theil der Einheit $b\cdot\frac{1}{b}=1$. Lässt sich diese Theilung ins Unendliche verfolgen, so schreiben wir eben der behandelten Art der Grösse Continuität zu. Raum- und Zeitgrössen sind continuirlich, Volksmengen z. B. nicht, da hier die Einheit untheilbar ist.

Der Ausdruck $\frac{a}{b}$ ist definirt durch die Gleichung:

$$b\left(\frac{a}{b}\right)=a.$$

Wie man $\frac{1}{b}$ den $b$ten Theil von 1 nannte, so kann man $\frac{a}{b}$ den $b$ten Theil von $a$ nennen. Dabei kann dieser Ausdruck wieder eine ganze Zahl geben, z. B. $\frac{20}{5}=4$, oder einen wirklichen Bruch, als welchen wir jedes nicht ganze Vielfache von $\frac{1}{b}$, wo $b$ eine ganze Zahl ist, verstehen. $a$ heisst Zähler, $b$ Nenner. Summen von Brüchen bedürfen keiner Definition, da man die Grössen $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ ... immer vereinen kann. Der Satz, dass: $n(a+b+\ldots)=na+nb+\ldots$ sei, ist noch dann richtig, wenn $a$, $b$ ... Brüche, $n$ aber eine ganze Zahl ist, da die oben gemachten Schlüsse hier noch anwendbar sind. Hieraus ergibt sich auch leicht der Werth von $a\cdot\frac{1}{b}$.

Sei z. B.:

$$a=3,$$

so ist:

$$a\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}.$$

Dieser Ausdruck $b$mal genommen, gibt:

$$b\cdot\frac{1}{b}+b\cdot\frac{1}{b}+b\cdot\frac{1}{b}=3 \text{ oder } a,$$

es ist also:

$$b\cdot\left(a\cdot\frac{1}{b}\right)=a,$$

und also nach der Definition $a\cdot\frac{1}{b}$ mit $\frac{a}{b}$ identisch.

Der Zähler eines Bruches kann auch negativ sein, denn auch die negative Einheit kann ja getheilt werden. Offenbar aber ist:

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}\right)b=a-a=0,$$

also auch:

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=0,$$

da aber $a\cdot\frac{1}{b}-a\cdot\frac{1}{b}$ gleich Null ist, nach der Erklärung der Multiplication mit negativen Zahlen, so hat man:

$$\frac{-a}{b}=-a\cdot\frac{1}{b}.$$

Aus diesen Betrachtungen folgt leicht die Addition der Brüche, welche gleiche Nenner haben.

Da nämlich $\frac{a}{c}=a\cdot\frac{1}{c}$ und $\frac{b}{c}=b\cdot\frac{1}{c}$ ist, so kann man sich $\frac{1}{c}$ als Einheit von $a$ und $b$ denken, wie dies die Multiplication erfordert, und setzen:

$$\frac{a}{c}\pm\frac{b}{c}=(a\pm b)\,\frac{1}{c}=\frac{a\pm b}{c}.$$

I. „Brüche mit gleichem Nenner werden addirt oder subtrahirt, indem man ihre Zähler addirt, beziehlich subtrahirt, und das Resultat mit dem gemeinschaftlichen Nenner verbindet.“

Hierans ergibt sich anch leicht der Begriff des negativen Bruches. Da nämlich:

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{0}{b}=0$$

ist, nnd dasselbe Resnltat Nnll anch durch die Snhtraction $\frac{a}{b}-\frac{a}{b}=0$ gefnnden wird, so ist $-\frac{a}{b}$ nnd $\frac{-a}{b}$ identisch.

Wir kommen jetzt anf die Mnltiplication nnd Division der Brüche. Setzen wir dieselben znnächst als positiv voraus.

Wir hahen aher folgenden Satz:

II. „Ein Bruch bleiht nagcändcrt, wenn man Zähler nnd Nenner mit derselben Zahl multiplicirt."

Offenhar ist, wenn man $\frac{a}{b}=x$ setzt, nach der Erklärung der Division $a=bx$, also auch $an=bnx$, nnd folglich:

$$\frac{an}{bn}=x=\frac{a}{b}.$$

Dieser Satz gilt natürlich anch nmgekehrt, d. h.:

„Sind Zähler nnd Nenner Vielfache von $n$, so kann man beide durch $n$ dividiren."

Wie ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt wird, ergiht uns die Formel:

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b};$$

es ist sonach anch:

$$a\cdot\frac{b}{c}=ab\cdot\frac{1}{c}=\frac{ab}{c}.$$

III. „Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl mnltiplicirt, indem man seinen Zähler mnltiplicirt"

Sei jetzt ein Brnch mit einer ganzen Zahl zu dividiren. Sei:

$$\frac{\frac{a}{b}}{c}=x,$$

so ist:

$$\frac{a}{b}=xc.$$

Sei ferner:

$$\frac{a}{b\cdot c}=y,$$

so ist:

$$\frac{a}{b\cdot c}\cdot c=\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}=yc,$$

also:

$$xc=yc \text{ nnd } x=y, \text{ oder: } \frac{\frac{a}{b}}{c}=\frac{a}{bc},$$

d. h.:

IV. „Ein Bruch wird dnrch eine ganze Zahl dividirt, indem man den Nenner mnltiplicirt."

Es kommt jetzt auf die Bedeutnng derjenigen Mnltiplicationen an, deren Multiplicator ein Bruch ist. Wir erhalten dieselbe, indem wir die Entstehnng des Bruches ans der Einheit auf die Thätigkeit der Multiplication übertragen.

Da $\frac{1}{b}\cdot b$ gleich Eins ist, so kann man sagen:

„Die Thätigkeit, eine Zahl $\frac{1}{b}$ mal zu nehmen, $b$ mal wiederholt, giht die Zahl einmal."

Es ist also:

$$b\cdot\frac{1}{b}\cdot a=a,$$

nnd da anch:

$$b\cdot\frac{a}{b}=a$$

ist, so ist $\frac{1}{b}\cdot a$ mit $\frac{a}{b}$ identisch, und es heisst $a$ mit $\frac{1}{b}$ mnltipliciren nichts anderes, als $a$ dnrch $b$ dividiren.

Sei jetzt der Multiplicator ein Bruch mit beliebigem Zähler. Es ist:

$$\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b},$$

also:

$$\frac{a}{b}\cdot c=a\cdot\frac{1}{b}\cdot c=a\cdot\frac{c}{b}=\frac{ac}{b},$$

nnd ebenso:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=a\cdot\frac{1}{b}\cdot\frac{c}{d}=a\cdot\frac{c}{bd}=\frac{ab}{bd}.$$

V. „Zwei Brüche werden mnltiplicirt, wenn man die Zähler nnd die Nenner mnltiplicirt."

Tritt an die Stelle eines Bruches eine ganze Zahl, so ist ihr der Nenner Eins zu gehen.

Die allgemaine Regel des Dividirens mit Brüchen folgt aus der Definition des Dividirens selbst. Es ist nach derselben:

$$\left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)\frac{c}{d}=\frac{a}{b}.$$

Andererseits aber auch:

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d}=\frac{adc}{bcd}=\frac{a}{b},$$

(Satz II) also:

$$\frac{ad}{bc}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d},$$

d. h.:

VI. „Soll ein Bruch dnrch einen andern dividirt werden, so vertanscht man im Divisor Zähler nnd Nenner, nnd verfährt dann wie beim Multipliciren."

Es bleibt noch übrig, die in Satz I. gegebene Regel der Addition nnd Subtraction der Brüche zn vervollständigen, wenn dieselben nicht gleiche Nenner haben.

Nach Satz II. kann man aber beliebige Brüche anf gleichen Nenner bringen, also $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$, indem man jedem Nenner $d$ die Factoren der andern $b$ nnd $f$ hinzufügt, welche er nicht enthält, mit diesen Factoren aber auch den Zähler multiplicirt, so dass dann die Brüche ihrem Werthe nach nngeändert bleiben; da sie nun denselben Nenner (Generalnenner) haben, so ist Satz I. ohne Weiteres anwendbar.

Was das Multipliciren der Brüche anbetrifft, von denen einer oder beide negative Zeichen haben, so ist natürlich die allgemeine Regel hierbei anzuwenden, dass gleiche Zeichen ein positives, nngleiche ein negatives Product geben, denn die bei derselben gemachten Schlüsse behalten ihre volle Gültigkeit.

Wir haben aber noch die Divisionen zu erwägen, wo der Nenner negativ ist. Es ist nach der Definition, wenn die Zähler oder Nenner ganze Zahlen oder Brüche sind:

$$\frac{a}{-b}\cdot(-b)=a,$$

aber auch:

$$-\frac{a}{b}\cdot(-b)=-(-a)=a,$$

also:

$$\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}.$$

Es war ferner:

$$\frac{-a}{b}=-\frac{a}{b},$$

nnd endlich ist:

$$\frac{-a}{-b}\cdot(-b)=-a,$$

aber auch:

$$\frac{a}{b}\cdot(-b)=-a,$$

also:

$$\frac{-a}{-b}=\frac{a}{b}.$$

Diese Sätze vereinigen sich in dem einen folgenden:

VII. „Haben Divisor nnd Dividendus gleiche Vorzeichen, so ist der Quotient positiv, haben sie nngleiche Vorzeichen, so ist er negativ."

Wir fügen zum Schlusse dieses Abschnittes noch hinzu, dass die Sätze I. und II. des Abschnittes 2) nnd die sich nnmittelbar aus ihnen ergebenden Sätze III. nnd IV. desselben Abschnittes auch für Brüche gelten.

Offenbar ist nämlich:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}=\frac{ac}{bd}.$$

„Es können also Multiplicator und Multiplicandus mit einander vertauscht werden."

Es ist ferner:

$$\left(\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}\pm\frac{e}{f}\right)\frac{g}{h}=\left(\frac{adf\pm bcf\pm ebd}{bdf}\right)\frac{g}{h}$$
$$=\frac{adfg}{bdfh}\pm\frac{bcfg}{bdfh}\pm\frac{ebdg}{bdfh}$$
$$=\frac{ag}{bh}\pm\frac{cg}{dh}\pm\frac{eg}{fh},$$

d. h.: Jedes Glied des Multiplicandus kann mit dem Multiplicator verbnnden werden.

Wir kommen jetzt zum Schlnsse dieser flüchtigen Skizze der Grundoperationen anf das Potenziren nnd die ihm entsprechenden indirecten Operationen, nm noch die Entstehnng der irrationalen nnd imaginären Quantitäten zu verfolgen.

5) Negative nnd gebrochene Potenzen. Wnrzelansziehnng.

Wir haben bis jetzt nur von solchen Potenzen gesprochen, deren Basis und Exponent ganze positive Zahlen waren. Die Sätze, welche wir von denselben fanden, waren die folgenden:

I. „Potenzen derselben Basis werden mit einander multiplicirt, wenn man die Exponenten addirt."

In Zeichen:

$$a^n\cdot a^p=a^{n+p}.$$

II. „Eine Potenz wird zu einer Potenz erhoben, wenn man die Exponenten multiplicirt."

$$(a^n)^p = a^{np}.$$

III. „Das Product von Zahlen wird zu einer Potenz erhoben, wenn man jede an der entsprechenden Potenz erhebt, und diese Potenzen multiplicirt."

$$(abc\ldots)^n = a^n b^n c^n \ldots$$

Es ist aber ersichtlich, dass diese drei Sätze ihre volle Gültigkeit behalten, wenn die Basis negativ oder ein Bruch werden sollte. Denn da das Potenziren ein wiederholtes Multipliciren ist, so behält dasselbe seine volle Bedeutung, abgesehen von dem Werthe der Basis, denn was dies auch für eine Zahl sei, so ist sie nach dem Vorigen der Operation des Multiplicirens zugänglich, und die Schlüsse, welche zu diesen drei Sätzen führten, behalten ihre Kraft.

Dem ersten Satze stellen wir nun einen zweiten gegenüber, welcher sich auf die Division der Potenzen bezieht.

Soll eine Zahl zur $(n-p)$ten Potenz erhoben, also die Einheit $(n-p)$mal mit $a$ multiplicirt werden, so kann dies zunächst $n$mal geschehen, und dann $p$ Factoren $a$ weggeschafft werden, was offenbar geschieht, wenn man das Resultat durch ihr Product, d. h. durch die $p$te Potenz von $a$ dividirt. Man hat also:

$$a^{n-p} = \frac{a^n}{a^p},$$

d. h.:

IV. „Eine Potenz wird durch eine andere derselben Basis dividirt, wenn man die Exponenten derselben subtrahirt."

In $a^{n-p}$ ist nun $n-p$ so lange positiv, als $p$ kleiner als $n$ ist. Indess behält der Ausdruck $a^{n-p}$ noch einen Sinn, wenn auch $n$ kleiner als $p$, also $n-p$ negativ ist. Denn übertragen wir die Thätigkeit, welche zum Subtrahiren und somit zum Begriff der negativen Zahl führte, auf den Begriff des Potenzirens, immer steht der Thätigkeit des Hinzufügens von Factoren $a$ zur Einheit die des Wegschaffens von Factoren, d. h. des Dividirens derselben entgegen, und es bedeutet somit $a^{-n}$ nichts anderes, als dass die Einheit durch $n$ Factoren $a$ dividirt werden soll. Somit ist:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

„Eine negative Potenz ist ein Bruch, dessen Zähler die Einheit, dessen Nenner die positive Potenz bildet."

Dieser Satz bildet die Definition der negativen Potenzen. Man sieht leicht, dass für solche alle bisher entwickelten Sätze gelten. Denn es ist:

$$a^{-n} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^p} \cdot \frac{1}{a^{n+p}}$$
$$= a^{-n-p},$$

womit Satz I. bewiesen ist; ebenso folgt Satz IV.

Satz II. ist selbstverständlich, wenn der erste Exponent negativ ist, denn:

$$(a^{-n})^p = \left(\frac{1}{a^n}\right)^p = \frac{1}{a^n \cdot a^n \ldots} = \frac{1}{a^{np}}$$
$$= a^{-np}.$$

Ist der erste positiv und der zweite negativ, so hat man:

$$(a^n)^{-p} = \frac{1}{(a^n)^p} = \frac{1}{a^{np}} = a^{-np},$$

aber auch:

$$(a^{-n})^{-p} = \frac{1}{(a^{-n})^p} = a^{np},$$

so dass Satz II. für alle Fälle gilt.

Satz III. erhalten wir eben so leicht, da:

$$(a \cdot b)^{-n} = \frac{1}{(a\,b)^n} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{b^n} = a^{-n} b^{-n}$$

ist. Wir verbinden aber mit diesem Satze jetzt noch einen andern, der sich auf den Fall bezieht, wo die Basis ein Bruch ist.

Man hat dann z. B.:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3},$$

und:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-3} = \frac{1}{\frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b}} = \frac{b^3}{a^3} = \frac{a^{-3}}{b^{-3}}.$$

V. „Ein Bruch wird zu einer Potenz erhoben, indem man die entsprechende Potenz des Zählers durch die des Nenners dividirt."

Die negativen Potenzen entstehen aus der Betrachtung, dass dem Hinzufügen von Factoren ein Wegnehmen entgegensteht. Man kann aber auch nach der Operation fragen, welche dem Potenziren selbst so entgegensteht, wie das Subtrahiren dem Addiren. Sei:

$$a^n = b,$$

so ist durch Potenziren mit $n$ von $a$ zu $b$ übergegangen worden. Geht man auf demselben Wege von $b$ nach $a$ zurück, d. h. mittels der Operation, die von $b$ zu $a$ führt, so nennt man dieselbe Ausziehen der $n$ten Wurzel. Es ist also $a$ die $n$te Wurzel aus $b$, und:

„Aus einer Zahl $b$ die $n$te Wurzel ausziehen, heisst diejenige $a$ finden, welche zur $n$ten Potenz erhoben $b$ gibt."

Es ist somit, wenn man mit $\sqrt[n]{\ }$ die $n$te Wurzel bezeichnet, immer wenn:

$$a^n = b$$

ist, auch:

$$\sqrt[n]{b} = a,$$

und:

$$b = (\sqrt[n]{b})^n.$$

$b$ heisst hier Radicand, $n$ Wurzelexponent, und $a = \sqrt[n]{b}$ Wurzel.

Wurzeln führen immer an schon bekannten Zahlen, positiven oder negativen, ganzen oder Brüchen, wenn $b$ wirklich die $n$te Potenz einer gegebenen $a$ ist. Immer aber lässt sich zeigen, dass wenn $b$ positiv ist, ein Ausdruck gefunden werden kann, der sich mit beliebig kleiner Abweichung dem Werthe von $\sqrt[n]{b}$ annähert.

Man sehe hierüber den Artikel: Quadratwurzel, da die dort angestellten Betrachtungen sich auf gleiche Weise auf höhere Wurzeln erstrecken.

Continuirlichkeit der Grössen, mit denen man operirt, vorausgesetzt, führen also die Wurzeln der positiven Zahlen auf etwas wirklich Vorhandenes, denn wenn das Gebiet, mit dem man sich beschäftigt, die Eigenschaft der Theilbarkeit bis ins Unendliche besitzt, so kann man $\sqrt[n]{b}$, obgleich man den wahren Werth davon nie völlig erreicht, doch als in diesem Gebiete vorhanden annehmen. Dies führt an dem Begriffe der Irrationalzahlen, oder der Zahlen, denen man sich nur annähern kann, wo dies aber mit beliebiger Genauigkeit geschieht.

Alles, was von Brüchen gilt, gilt jedoch auch von Irrationalzahlen. Man setzt nämlich für dieselben die Brüche, welche ihnen auf ein beliebig Kleines nahe kommen, und Alles, was sich aus den Rechnungen mit denselben ergibt, kann als dem Rechnen mit den irrationalen Zahlen selbst angehörig betrachtet werden.

Das Rechnen mit Wurzeln führt aber auch noch auf zwei andere höchst wichtige Begriffe; zunächst auf eine neue Zahlenart, die imaginären Zahlen, von denen nachher die Rede sein soll, und die sich schon beim Ausziehen der Quadratwurzeln ergeben. Das andere aber ist der Begriff der mehrdeutigen Operation.

Im Artikel Quadratwurzel ist gezeigt, dass $\sqrt{a}$ sowohl positiv als negativ sein kann, also zwei Werthe hat. Aus der Betrachtung, dass jede Gleichung $n$ten Grades $n$ Wurzeln hat, also auch die Gleichung $x^n = a$, d. h.: $x = \sqrt[n]{a}$ $n$ Werthe, folgt, dass jede $n$te Wurzel $n$ Werthe hat, also $n$deutig ist, wobei jedoch auch imaginäre Werthe hinzukommen. Es kann jedoch bei diesen Gegenständen hier, wo wir nur die Entstehung der Quantitäten aus den Grundoperationen verfolgen, nicht verweilt werden.

Wir kehren also zum Begriff der Wurzel zurück, und schliessen an denselben den der Potenz mit gebrochenem Exponenten an.

Zunächst gibt es über die Wurzeln, Sätze, die den mit II., III. und V. bezeichneten dieses Abschnittes entsprechen. Es ist nach der Definition:

$$\left(\sqrt[n]{ab}\right)^n = ab,$$

zugleich aber:

$$\left(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\right)^n \text{ nach Satz III. } = \sqrt[n]{a}^n \sqrt[n]{b}^n = ab,$$

also:

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b},$$

oder:

VI. „Aus einem Producte wird eine Wurzel ausgezogen, indem man sie aus jedem Factor auszieht, und diese Wurzelgrössen multiplicirt."

Eben so hat man:

$$\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n = \frac{a}{b},$$

aber auch nach Satz V.:

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{\sqrt[n]{a}^n}{\sqrt[n]{b}^n} = \frac{a}{b},$$

also:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

VII. „Aus einem Bruche wird eine Wurzel ausgezogen, indem man die entsprechende Wurzel des Zählers durch die des Nenners dividirt."

Für die Operationen des Wurzelausziehens und des Potenzirens, wenn sie nach einander mit derselben Zahl verrichtet werden, merke man noch den Satz:

VIII. „Potenziren und Wurzelausziehung kann in beliebiger Ordnung verrichtet werden."

In Zeichen heisst dieser Satz:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{(a^p)},$$

Offenbar ist nämlich:

$$\sqrt[n]{(a^p)^n} = a^p,$$

und auch:

$$\left(\sqrt[n]{(a)^p}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{np} = a^p,$$

somit also diese beiden Ausdrücke mit $\sqrt[n]{a^p}$ und also einander gleich.

Mit diesem Satze verbinden wir folgenden, der auf wiederholtes Wurzelausziehen geht und sich dem Satze II. über Potenzen anschliesst.

Es ist offenbar:

$$\sqrt[n]{\left(\sqrt[p]{a}\right)^n} = \sqrt[p]{a},$$

und also:

$$\sqrt[n]{\left(\sqrt[p]{a}\right)^{np}} = \sqrt[p]{a^p} = a,$$

es ist also der Definition gemäss:

$$\sqrt[n]{\left(\sqrt[p]{(a)}\right)} = \sqrt[np]{a},$$

oder:

IX. „Eine Wurzel wird aus einer Wurzel ausgezogen, indem man die Wurzelexponenten multiplicirt."

Ergänzt wird dieser Satz durch den folgenden, der sich wieder auf Potenziren und Wurzelausziehen bezieht.

X. „Haben eine Wurzel und ein Potenzexponent derselben Grösse einen gemeinschaftlichen Factor, so kann derselbe weggelassen, gehoben, werden."

D. h. in Zeichen:

$$\sqrt[mp]{a^{mn}} = \sqrt[p]{a^n},$$

Offenbar nämlich ist nach dem Vorigen:

$$\sqrt[mp]{a^{mn}} = \sqrt[m]{\left(\sqrt[p]{a^n}\right)^m} \text{ also: } \sqrt[p]{a^n}.$$

Namentlich ist auch:

$$\sqrt[m]{a^{mp}} = a^p.$$

Es ist dies die Anwendung des letzten Satzes auf den Fall, wo der Wurzelexponent ein Factor des Potenzexponenten ist. In gleicher Weise hat man aber auch, wenn das Umgekehrte stattfindet:

$$\sqrt[mp]{a^m} = \sqrt[p]{a},$$

Schreibt man in der Formel:

$$\sqrt[m]{a^{mp}}, \qquad mp = q,$$

so erhält man:

$$\sqrt[m]{a^q} = a^{\frac{q}{m}}.$$

Hier steht im Potenzexponenten ein Bruch $\frac{q}{m}$, der jedoch nur der Form nach ein solcher ist, da $\frac{q}{m} = p$, also gleich einer ganzen Zahl ist. Untersuchen wir, ob Potenzen mit einem wirklichen Bruch als Exponenten noch eine Bedeutung haben.

Wir wollen demnach in der Erklärung des Bruches $\frac{1}{m}$, wonach dies diejenige Zahl ist, die $m$ mal genommen die Einheit gibt, dem Begriffe der Einheit, wie wir Aehnliches schon öfter gethan, die Thätigkeit des Potenzirens substituiren. Da nun $a^s$ nichts anders ist als die Einheit wiederholt, und zwar $s$ mal mit $a$ multiplicirt, so heisst die Potenz $a^{\frac{1}{m}} = a$ bilden nichts anders, als die Einheit mit einer Zahl multipliciren, welche so beschaffen ist, dass wenn dies Verfahren $m$ mal wiederholt wird, die Einheit einmal mit $a$ multiplicirt ist. Es ist also:

$$a^{\frac{m}{m}} = a, \text{ oder: } \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^m = a,$$

und da $\sqrt[m]{(a)^m}$ ebenfalls gleich ist, so ist $a^{\frac{1}{m}}$ nichts anders als die $m$te Wurzel aus $a$.

„Eine Potenz mit gebrochenem Exponenten, dessen Zähler 1 ist, bedeutet nichts anders als diejenige Wurzel, welche der Nenner anzeigt."

Sei jetzt der Zähler beliebig, also $a^{\frac{p}{m}}$ die gesuchte Potenz. Da man hat $\frac{p}{m} = p \cdot \frac{1}{m}$, so ist das Erheben zur Potenz $\frac{p}{m}$ nichts anders, als die Erhebung zur Potenz $\frac{1}{m}$ $p$ mal wiederholt, d. h.:

$$a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p}.$$

„Eine Potenz mit beliebigen gebrochenen Exponenten gibt diejenige Wurzel an, welche der Nenner, und diejenige Potenz, welche der Zähler anzeigt."

Dass sich in den Bruchpotenzen Zähler und Nenner heben lassen, folgt schon aus Satz X. Indess ist hierbei noch eine Bemerkung zu machen. Jede Wurzel hat, wie oben bemerkt, so viel Werthe als ihr Exponent anzeigt. Beim Heben wird nun die Anzahl dieser Werthe kleiner, und daher ist die Identität zwischen $\sqrt[mp]{(a^{mn})}$ und $\sqrt[p]{a^n}$ nur derart vorhanden, dass jeder Werth der letztern Grösse einem Werthe der erstern gleich ist, nicht aber umgekehrt.

So ist z. B. die Gleichung:

$$\sqrt[2]{a^4} = a^2$$

zu verstehen. Es kann $\sqrt[2]{a^4} = a^2$ und gleich $-a^2$ sein, während der Ausdruck $a^2$ rechts eindeutig ist.

Die Bedeutung von Bruchpotenzen mit negativem Exponenten erliegt keiner Schwierigkeit, da hier nur beide Definitionen der negativen und der Bruchpotenz zu combiniren sind. Immer ist:

$$a^{-\frac{p}{q}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{(a)^p}}.$$

Die Allgemeingültigkeit der mit II., III. und V. bezeichneten Sätze auch für Bruchpotenzen folgt unmittelbar aus den für Wurzeln gegebenen Sätzen VI. bis X., und ist nur ein anderer Ausdruck für dieselben.

Was die Sätze I. und IV. anbetrifft, so haben wir für sie keine Analogie in Bezug auf Wurzeln gegeben. Indess sind diese Sätze vollständig gültig, wenn auch die Exponenten Brüche sind. Man hat nämlich offenbar, mit Anwendung früherer Sätze:

$$a^{\frac{m}{n}} \, a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[n]{a^m} \, \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \, \sqrt[nq]{a^{pn}}$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq} \cdot a^{pn}} = \sqrt[nq]{a^{mq+pn}} = a^{\frac{mq+pn}{nq}}$$

$$= a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}},$$

also:

$$a^{\frac{m}{n}} \, a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}},$$

was der Satz I. in Bezug auf Bruchpotenzen ist, und ebenso:

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[q]{a^p}} = \frac{\sqrt[nq]{a^{mq}}}{\sqrt[nq]{a^{pn}}} = \sqrt[nq]{\frac{a^{mq}}{a^{pn}}}$$

$$= \sqrt[nq]{a^{mq-pn}} = a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}},$$

also:

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}},$$

was mit Satz IV. übereinstimmt.

Mit Hülfe der Definitionen der negativen und Bruch-Potenzen kann nun der Begriff der Wurzel ganz durch den der Bruchpotenz ersetzt werden, und die Theorie derselben ist in den Sätzen I. bis V. völlig enthalten.

Dem Potenziren steht nicht, wie dem Addiren und Multipliciren, nur eine indirecte Operation, sondern deren zwei, nebst dem Wurzelausziehen noch das Auffinden der Logarithmen entgegen. Da diese Uebersicht aber hauptsächlich den Zweck hat, die Zahlformen aufzufinden, die sich bei den verschiedenen Rechnungen ergeben, so übergehen wir diese Operation hier, da sie nicht zu neuen Zahlformen führt, indem wir das auf die Logarithmen Bezügliche dem entsprechenden Artikel überlassen.

Der Erörterung der imaginären Quantitäten aber wollen wir einen eigenen Artikel widmen, da die genauere Untersuchung dieser Grössen weiter in das Gebiet der Analysis hineinführt, als wir

bei den Betrachtungen, welche diesem Artikel zu Grunde liegen, zu schreiten im Stande sind.

Noch bemerken wir, dass die Begriffe der negativen und irrationalen Zahl schon den Griechen bekannt war, welche namentlich durch geometrische Betrachtungen auf sie geführt wurden. Die Theorie der Potenzen, namentlich der gebrochenen und negativen gehört dagegen in ihren Anfängen den Arabern, in ihrer Vollendung erst der neueren Zeit, bis hinein in das vorige Jahrhundert, an. Namentlich hat das Verfolgen der Vieldeutigkeit der Wurzeln und gebrochenen Potenzen lange Zeit die Mathematiker auf Irrwege geführt.

**Quantität (imaginäre).**

1) Entstehung der imaginären Zahlen.

Indem wir an den vorigen Artikel hier zunächst anknüpfen wollen, erinnern wir daran, dass wir von der Einheit in demselben ausgehend, und dieselben verschiedenen Rechnungs-Operationen unterwerfend, nach und nach zu allen übrigen reellen Zahlen gelangten. Ein Nachweis ihrer Realität, dass sie also wirklich zur Erscheinung kommen, ist darum unnöthig, weil alle diese Zahlen sich dem gänzlich bestimmungslosen Begriffe der Einheit selbst jedenfalls unterordnen lassen. Auf diesem Wege fortschreitend, wird hier das Imaginäre entwickelt.

Indess ist, wie doch vorläufig bemerkt werden muss, noch ein zweiter Weg möglich. Man kann, statt bloss die Einheit vorauszusetzen, von continuirlichen Grössen ausgehen. Dann sind Brüche und Irrationalzahlen, wenn man die Continuität sich nach beiden Richtungen ins Unendliche fortgesetzt denkt, auch die negativen Zahlen gegeben. Wie durch Erweiterung dieser Betrachtung zu dem Imaginären ebenfalls gelangt werden kann, soll der Verfolg dieses Artikels zeigen.

Das Imaginäre verdankt seine Einführung in die Analysis zunächst der Auflösung der Gleichungen, und zwar kann es auf die quadratischen Gleichungen allein zurückgeführt werden. Schon die Auflösung der Gleichung:

$$x^2+a^2=0$$

führt auf die Form:

$$x^2=\sqrt{(-a^2)},\ \text{oder: } x=a\sqrt{-1},$$

und man sieht leicht, wenn man einen dieser Ausdrücke in die gegebene Gleichung einführt, die darin vorkommenden Quadratwurzel gemäss der Definition so behandelt, dass $(\sqrt{-a^2})^2=-a^2$, und $(\sqrt{-1})^2=-1$ gesetzt wird, die Gleichung identisch wird. Eben so führt die Auflösung der quadratischen Gleichung:

$$x^2+2ax+b=0$$

zu der Wurzel:

$$x=-a\pm\sqrt{(a^2-b)},$$

und es ist leicht ersichtlich, dass, wenn $b$ positiv und grösser als $a^2$, also etwa $a^2-b=-\alpha^2$ ist, man immer einen Ausdruck erhält:

$$x=-a\pm\alpha\sqrt{-1}=-a\pm\sqrt{(-\alpha^2)},$$

welcher in die Gleichung eingesetzt, und nach den gewöhnlichen Regeln des Rechnens mit der Maassgabe behandelt, dass $\sqrt{(-\alpha^2)}=\alpha\sqrt{-1}$ ins Quadrat erhoben $-\alpha^2$ gibt, diese Gleichung identisch macht.

Wir definiren daher eine imaginäre Grösse als die Wurzel einer negativen Zahl. Eine solche lässt sich immer zurückführen auf den Ausdruck $\alpha\sqrt{-1}$, worin $\alpha$ positiv oder negativ ist. Eine solche Grösse nennen wir jetzt im Gegensatz zu den imaginären reelle Grössen. Den Ausdruck $a+\alpha\sqrt{-1}$, der sich beim Auflösen der allgemeinen quadratischen Gleichungen ergibt, nennen wir complexe Grösse. Er besteht aus einer reellen und imaginären Grösse, die durch das Additions- (oder Subtractions-) Zeichen verbunden sind. Bezeichnen wir noch den Ausdruck $\sqrt{-1}$ durch $i$, so ist $\alpha i$ der Ausdruck für eine imaginäre, $a+\beta i$ für eine complexe Grösse, und der Definition gemäss ist $i^2=-1$.

Die Nothwendigkeit, mit Imaginärem zu rechnen, und die Art, wie dies geschieht, sieht man ohne Weiteres ein. Ist z. B. eine quadratische Gleichung mit Buchstaben-Coefficienten, über deren numerische Werthe und Vorzeichen man mithin keine weitere Kenntniss hat, gegeben, so kann die Nothwendigkeit vorhanden sein, dieselbe aufzulösen, und zwar in ihrer Allgemeinheit, während die Werthe erst gelegentlich specialisirt werden sollen. Man verfährt dann so, dass man nur diejenigen Sätze anwendet, welche sowohl für positiv als negativ ganze oder gebrochene Zahlen gleichmässig gelten; also z. B. dass man die Factoren eines Products vertauschen kann, oder einen gleichen Factor in Zähler und Nenner wechselt.

Alle diese Sätze kann man anwenden und hat sie bereits angewandt, wenn

eine Specialisirung der Aufgabe zeigt, dass deren Auflösung eine imaginäre Zahl gibt. Hieraus folgt:

I. „Das Rechnen mit imaginären und complexen Zahlen geschieht derart, dass man in dem Ausdrucke $\alpha+\beta i$ $i$ behandelt wie eine reelle und unbestimmte Buchstabengrösse, aber der Definition und der Rechnungsregel gemäss:

$$i^2 = \sqrt{(-1)}^2 = -1$$

setzt, also immer, wo sich das Quadrat von $i$ einstellt, dies mit der negativen Einheit vertauscht."

Es ist also sonach z. B., indem man $i$ sich als willkürlich denkt und einen Satz vom Multipliciren anwendet:

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i) = \alpha\gamma + (\beta\gamma+\alpha\delta)i + \beta\delta i^2$$
$$= \alpha\gamma - \beta\delta + (\beta\gamma+\alpha\delta)i.$$

Es ist aber bereits in dem Artikel „Quadratwurzel" gezeigt worden, dass eine negative Zahl weder eine positive noch eine negative Quadratwurzel haben kann. Da nun alle Zahlen, welche durch Vermehren oder Vermindern aus der Einheit entstehen, entweder negativ oder positiv (ganz oder gebrochen) sind, so steht der Ausdruck $\sqrt{(-1)}$ oder $\sqrt{(-\alpha^2)}$ in keiner Grössenbeziehung zur Einheit; er kann nicht im eigentlichen Sinne als Grösse oder Quantität bezeichnet werden. Wesentlich unterscheidet sich hierdurch das Imaginäre von allen den Ausdrücken, negativen Zahlen, Brüchen, Irrationalzahlen, welche sich beim indirecten Operiren ergeben. Während nämlich bei gewissen Anwendungen diesen Grössen möglicherweise die Realität nicht zukommt, so ist dies doch (siehe den vorigen Artikel) bei gewissen andern Anwendungen jedesmal der Fall, und namentlich in der allgemeinen Grössen- oder Zahlenlehre kommt ihnen diese Realität zu, indem sie immer eine an sich einen Sinn habende Operation anzeigen, z. B. die negative Zahl die des Abziehens, der Bruch die des Theilens. Beim Imaginären ist dies nie der Fall. Es kann keine Grösse geben, welche durch Ausziehen der Wurzel aus $-1$ entstände. Sprechen wir daher von imaginären Grössen oder Quantitäten, so ist dies ein uneigentlicher Ausdruck, den wir eben nur des Gebrauchs wegen annehmen. Der Ausdruck imaginäre Zahl ist richtiger, weil wir bei dem Worte Zahl in seiner allgemeinen Bedeutung eben nur an die Resultate von Rechnungsoperationen, gleichviel, ob dieselben auf reelle Grössen führen oder nicht, zu denken veranlasst sind.

Es scheint sonach, wenn man nur das eben Gesagte berücksichtigt, das Rechnen mit dem Imaginären nur die Bedeutung zu haben, dass wenn ein Resultat einer Aufgabe auf solche oder complexe Zahlen führt, damit angedeutet ist, dass die Aufgabe des Resultates entbehre, dass derselben aber an sich nichts Widersinniges zu Grunde liege, sondern dass nur die gewählten Grössenverhältnisse so getroffen sind, dass sie keine Lösung zulassen. Z. B. sollte man den Flächeninhalt eines Dreiecks berechnen, dessen Seiten 9, 5 und 2 Fuss sind, so würde die Lösung auf einen imaginären Ausdruck führen, welcher andeutet, dass zwar aus drei Seiten eines Dreieckes sich der Flächeninhalt desselben ergebe, dass aber ein solches Dreieck unmöglich sei bei den gewählten Maassverhältnissen, da in keinem Dreiecke die Summe zweier Seiten kleiner als die dritte sein kann.

Aber schon diese beschränkte Auffassung des Rechnens mit imaginären Grössen als blosser Nachweis, dass eine Aufgabe unmöglich sei, zeigt die Nothwendigkeit, sich mit diesen Grössen zu beschäftigen, und die Art, wie dies geschehen muss, nämlich der gegebenen Regel I. gemäss. Namentlich aber muss man wissen, wann durch Verbindung imaginärer Ausdrücke sich ein reelles Resultat ergibt, wie dies ja geschehen kann, in welchem Falle dann die Aufgabe einer Lösung zugänglich ist. Es kommt daher darauf an, mit Benutzung der Regel I. die Resultate der Rechnung mit complexen und imaginären Zahlen auf ihre einfachsten Formen zurückzuführen, und ist dabei ein Erwägen der Bedeutung der einzelnen Operationen in Bezug auf das Imaginäre nöthig. Das Resultat dieser Erwägung ist dann in dem sogleich zu begründenden, höchst wichtigen Satze enthalten:

II. „Alles Rechnen mit complexen Zahlen von der Form $\alpha+\beta i$ führt immer auf eine ähnliche Form zurück."

Aber noch von einem andern Gesichtspunkte aus zeigt sich die Nothwendigkeit des Operirens mit complexen Zahlen, wenngleich dieser Gesichtspunkt sich nicht *a priori* ergibt, sondern erst mit dem Fortschreiten der mathematischen Wissenschaften gefunden werden konnte. Es finden nämlich zwischen verschiedenen Functionen und Grössen, auf die man von ganz verschiedenen Betrachtungen aus gekommen ist, Beziehungen statt, welche erst durch den Gebrauch des Imaginären vermittelt und aufgefun-

den werden kann. Als Beispiel diene die Beziehnng zwischen den Exponential-Grössen und den trigonometrischen, welche bestimmt ist durch die Gleichnng:

$$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i \sin\alpha.$$

Ferner lassen sich gewisse Sätze erst beqnem aussprechen, wenn man das Imaginäre einführt, z. B der Satz, dass jede Gleichung *n*ten Grades auch *n* Wurzeln habe, die Beziehung zwischen quadratischen Factoren eines Polynoms und den Wnrzeln einer Gleichnng (siehe den Artikel: qnadratischer Factor) würde aber ganz wegfallen, wenn das Imaginäre nicht in Betracht käme. Dass dieser Gesichtspnnkt von Wichtigkeit ist, zeigt der Umstand, dass er auch in anderer Weise sich bewährt hat. Ganz ähnlichen Betrachtnngen, auf Congruenzen angewendet, verdanken das Galois'sche Imaginäre in der Zahlenlehre nnd die Knmmer'schen idealen Zahlen ihre Entstehnng, von denen namentlich die letzteren so wichtig geworden sind. — Endlich, nnd dieser Gesichtspunkt ist namentlich in der neuesten Zeit eröffnet worden, sind gewisse Gesetze der Fnnctionen nur zu finden, wenn man neben dem Reellen auch das Imaginäre berücksichtigt. Die Mehrdeutigkeit der Integrale hat nnr bei dessen Gebrauch einen Sinn. Die Grenzen der Convergenz einer Potenzreihe kann nur gefunden werden, wenn man neben den reellen Werthen der Variablen auch die complexen in Betracht sieht u. s. f.

Es ist somit nothwendig, die Zahl $i = \sqrt{-1}$ als neues Element in die Rechnung einzuführen, ohne sich nm die Bedeutnng dieses Ausdruckes zu kümmern. Der mit I. bezeichnete Satz gewährt die Möglichkeit des Rechnens mit $i$.

Es bleibt noch übrig, den Sinn und die Bedeutung der verschiedenen Operationen mit Bezug auf complexe Zahlen zu prüfen, nnd den mit II. bezeichneten Satz zu beweisen.

2) Die Operationen mit complexen Zahlen.

Zunächst bemerken wir, dass die Gleichung:

$$\alpha + \beta i = 0$$

nur die Bedeutung haben kann, dass sowohl $\alpha$ als $\beta$ einzeln gleich Null sind, oder:

I. „Eine complexe Zahl kann nur dann der Null gleich sein, wenn dies mit dem reellen und dem imaginären Theile einzeln stattfindet.“

In der That würde bei Anwendnng der gewöhnlichen Rechnungsgesetze diese Gleichnng die Form annehmen:

$$\alpha = -\beta i,$$

und wenn man auf beiden Seiten ins Quadrat erhebt:

$$\alpha^2 = \beta^2 i^2 = -\beta^2.$$

Es würde also, da $\alpha^2$ und $\beta^2$ nicht negativ sind, diese Gleichnng auf den Widersinn führen, dass eine positive Zahl einer negativen identisch ist, nnd diesem ist nur zu entgehen, wenn man $\alpha = \beta = 0$ setzt.

„Wir können also jede Gleichung von der Form $\alpha + \beta i = 0$ lediglich als ein Symbol fassen, welches nnter einer gemeinschaftlichen Form die beiden Gleichungen:

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0$$

umfasst.“

Die Anwendnng der Additions- und Subtractionsregel auf complexe Zahlen macht keine Schwierigkeit. Denken wir uns nach Satz I. des vorigen Abschnittes znnächst $i$ als eine willkürliche Grösse, so ist:

$$\alpha + \beta i \pm (\gamma + \delta i) = \alpha \pm \gamma + (\beta \pm \delta) i,$$

und somit hat man immer folgenden Satz, der die Summen nnd Differenzen complexer Zahlen so finden lehrt, dass sich Satz II. des vorigen Abschnittes dabei bestätigt.

II. „Zwei complexe Zahlen werden addirt nnd subtrahirt, wenn man im ersten Falle die Summe, im zweiten Falle die Differenz des reellen nnd des mit $i$ multiplicirten Theils einzeln bildet.“

Es folgt hieraus auch, dass man die Gleichung:

$$\alpha + \beta i = \gamma + \delta i$$

auf die Form:

$$(\alpha - \gamma) + (\beta - \delta) i = 0$$

bringen kann, woraus sich nach Satz I. ergibt:

$$\alpha = \gamma, \quad \beta = \delta,$$

d. h.:

„Zwei complexe Zahlen können nur dann gleich sein, wenn die reellen und imaginären Theile einzeln gleich sind.“

Seien jetzt die Ausdrücke $\alpha + \beta i$ nnd $\gamma + \delta i$ zu multipliciren.

Denkt man wieder znnächst $i$ allgemein, so hat man:

$$(\alpha + \beta i) \cdot (\gamma + \delta i) = \alpha\gamma + i(\beta\gamma + \alpha\delta) + i^2 \beta\delta,$$

und wenn man:

$$i^2 = -1$$

setzt:

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)=\alpha\gamma-\beta\delta+i(\beta\gamma+\alpha\delta).$$

Dies gibt folgenden Satz, der allerdings besser durch die eben hingeschriebene Formel als durch Worte ausgedrückt wird:

III. „Das Product zweier complexen Zahlen ist gleich einer andern complexen Zahl, deren reeller Theil aus der Differenz der Producte der reellen und imaginären Theile, und dessen imaginärer Theil aus der Summe der Producte der imaginären Theile jedes Factors in die reellen des andern Factors besteht."

Namentlich ist hiernach:

$$i^3=-i,\quad i^4=+1,\quad i^5=i,\quad i^6=-1\ \ldots$$

Auch hier findet also Satz II. des vorigen Abschnittes statt. Ebenso bei der Division. Denn es kann $\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}$, wenn wir $i$ allgemein denken und den Satz anwenden, dass Zähler und Nenner eines Bruches beide mit derselben, aber ganz beliebigen Zahl multiplicirt werden können, auf die Form gebracht werden:

$$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{(\alpha+\beta i)(\gamma-\delta i)}{(\gamma+\delta i)(\gamma-\delta i)},$$

und dies gibt nach vorigem Satze:

$$\frac{(\alpha\gamma+\beta\delta)+(\beta\gamma-\alpha\delta)i}{\gamma^2+\delta^2},$$

d. h.:

IV. $$\frac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i}=\frac{\alpha\gamma+\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}+\frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2+\delta^2}i.$$

Durch diese Formel ist das Dividiren mit complexen Zahlen völlig definirt.

Grössere Schwierigkeiten macht die Definition des Potenzirens, des Wurzelausziehens und des Berechnens der Logarithmen von imaginären Zahlen. Dagegen führen aber auch diese Rechnungen zu den wichtigsten Resultaten.

Wir werden zunächst mit Zuhülfenahme des Satzes I. des vorigen Abschnittes diese Operationen definiren.

Es sind dazu jedoch einige Hülfsbetrachtungen nöthig.

2) Ueber Exponentialgrössen mit reellen und imaginären Exponenten.

Entwickeln wir die Grösse $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ nach dem Binomialsatze, indem wir voraussetzen, $n$ sei eine positive ganze Zahl. Es ergibt sich:

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+x+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$
$$+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{s-1}{n}\right)}{1\cdot 2\ldots s}x^s+\ \ldots\ +x^n.$$

Mit wachsendem $n$ wächst die Gliederanzahl dieser Reihe. Es wird behauptet, dass sie sich trotzdem einer gewissen, von $n$ unabhängigen Grenze nähert, mit andern Worten, dass die Reihe convergire, wenn $n=\infty$ wird.

Eine bekannte Regel für die Convergenz ist die, dass der Quotient eines Gliedes dividirt durch das Vorhergehende sich einer Grenze nähert, die kleiner als 1 ist, wenn die Ordnung dieses Gliedes wächst (siehe den Artikel: Reihen).

Es ist nun, wenn wir mit $A_s$ das ste Glied bezeichnen:

$$\frac{A_{s+1}}{A^s}=\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{s-1}{n}\right)\left(1-\frac{s}{n}\right)x^{s+1}\,1\cdot 2\ \ldots\ s}{1\cdot 2\ \ldots\ s\,(s+1)\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{s-1}{n}\right)x^s},$$

d. h.:

$$\frac{A_{s+1}}{A_s} = \frac{1-\frac{s}{n}}{s+1} x.$$

In diesem Ausdrucke ist immer $s$ kleiner als $n$, also $1-\frac{s}{n}$ ein echter Bruch, $s+1$ wächst über jede Grenze, so dass sich $\frac{A_{s+1}}{A_s}$ der Null nähert, was auch $x$ sei.

Man hat also:

$$1) \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1+x+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots$$

indem man die Grössen $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots$ vernachlässigt, da dieselben gegen 1 verschwinden, so lange $s$ gegen $n$ unendlich klein ist, die Glieder aber, wo dies nicht der Fall ist, nach dem oben Gesagten auf die Summe der Reihe keinen Einfluss ausüben. Da der Werth von $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ unabhängig ist von $n$, vorausgesetzt, dass man diese Grösse positiv ganz und ins Unendliche wachsend sich vorstellt, so ist unter dieser Bedingung offenbar:

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{x}{m}\right)^m.$$

Ist jetzt $x=\frac{u}{v}$ ein beliebiger positiver Bruch, so gibt es immer unendlich viel Zahlen $m$, die so beschaffen sind, dass $\frac{m}{x}=\frac{mv}{u}$ einer ganzen Zahl gleich ist, man braucht eben nur $m$ als theilbar durch $u$ anzunehmen. Lässt man nun in $x=\frac{u}{v}$ Zähler und Nenner wachsen, so kann man sich diesen Bruch immer als bis auf eine beliebige Grenze mit einer gegebenen Irrationalzahl zusammenfallend denken, da eine solche ja immer die Form eines Bruches mit wachsendem Zähler und Nenner annimmt. Immer dann aber kann $m$ so gewählt werden, dass der Ausdruck $\frac{mv}{u}$ sich nur um eine beliebig kleine Grösse von einer ganzen Zahl unterscheidet, jedoch muss die ganze Zahl $m$, welche den Factor $u$ enthält, aus diesem Grunde im Wachsen sein. Wie dem auch sei, es lässt sich also setzen:

$$\frac{m}{x}=s,\quad \frac{x}{m}=\frac{1}{s},\quad m=sx,$$

wo $x$ positiv aber beliebig und $s$ unendlich gross ist. Also:

$$\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\left(1+\frac{1}{s}\right)^{sx}$$
$$= \left[\lim\left(1+\frac{1}{s}\right)^s\right]^x.$$

Wir setzen nun:

$$\lim\left(1+\frac{1}{s}\right)^s = e,$$

wo $e$ eine bestimmte Irrationalzahl ist, deren Werth sich aus Gleichung I) ergibt, wenn man daselbst $x=1$ setzt, und man hat:

$$\text{II)}\quad e=1+1+\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\cdots,$$

oder durch numerische Berechnung:

$$e=2{,}718281828459\ldots$$

$$\text{III)}\quad \lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x,$$

also mit Benutzung von Formel I.:

$$\text{III a.}\quad e^x = 1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot2}+\frac{x^3}{1\cdot2\cdot3}+\cdots$$

Sei jetzt $x$ eine beliebige negative Zahl, so ist, wenn man $x=-y$ setzt:

$$\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = \left(1-\frac{y^2}{n^2}\right)^n.$$

Der Werth für den Ausdruck rechts ergibt sich aus Formel I., wenn man in derselben $x$ mit $-\frac{y^2}{n}$ vertauscht, wodurch, wenn $n$ wächst, alle Glieder bis auf das erste verschwinden, und man hat daher:

$$\lim\left(1-\frac{y}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n = 1,$$

d. h.:

$$\lim\left(1-\frac{y}{n}\right)^n = \lim\frac{1}{\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}$$
$$= \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-yn},$$

oder:

$$\lim\left(1-\frac{y}{n}\right)^n = e^{-y}.$$

Damit sind die Formeln III. und III a. auch erwiesen, wenn $x$ negativ ist. Die-

selben gelten also für jeden reellen Werth von $x$. Ueber die Formel III a. ist aber eine wichtige Bemerkung zu machen. Bruchpotenzen sind, wie wir im vorigen Artikel gesehen haben, mehrdeutige Grössen, und Potenzen mit irrationalen Exponenten sogar unendlich vieldeutig, da der Nenner des Exponenten unendlich gross zu denken ist. Definirt man dagegen die Grösse $e^x$ immer durch Formel III., so ist $e^x$ eindentig, da $n$ eine ganze Zahl ist und daher nur einen Werth gibt. Gleiches folgt, wenn man $e^x$ durch Reihe III a. definirt.

„Der Ausdruck $e^x$ wird also immer als eine eindeutige Function von $x$ aufgefasst, welchen reellen Werth auch $x$ habe, und ist durch Formel III a. völlig bestimmt. Dieser Werth von $e^x$ ist aber immer positiv, so lange $x$ reell bleibt.“ In der That sind: $\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ und $\lim\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$ beide positiv, wenn man $n$ wachsend und positiv denkt. Da nun jede Wurzel nur höchstens einen reellen und positiven Werth hat, so ist, falls $x$ ein Bruch ist, leicht aus der Reihe der Werthe von $e^x$, welche man bei einer andern Definition dieser Grösse erhalten würde, der zu bestimmen, welcher der jetzigen Definition entspricht.

Um nun die Definition von $e^x$ auf imaginäres $x$ auszudehnen, bemerken wir, dass zunächst der Ausdruck $(\alpha+\beta i)^s$ immer eine Bedeutung hat, wenn $s$ eine positive ganze Zahl ist, denn in diesem Falle hat man es ja mit einem wiederholten Multipliciren zu thun, und kann die Regel III. des vorigen Abschnittes anwenden. Auch kann $s$ eine negative ganze Zahl sein; man setzt dann:

$$(\alpha+\beta i)^{-s}=\frac{1}{(\alpha+\beta i)^s}$$

und die Sätze III. und IV. des vorigen Abschnittes geben das Nöthige, so dass in diesen Fällen

$$(\alpha+\beta i)^s \text{ oder } (\alpha+\beta i)^{-s}$$

sich immer wieder auf complexe Grössen $a+bi$ zurückführen lassen.

Diese Betrachtungen machen es möglich, die Grösse $e^x$ für complexes $x$ zu definiren, indem wir sagen: „dass $e^x$ für beliebiges $x$ durch die Formel III. oder III a. gegeben sein soll.“ Da die Formel III a. nur Potenzen von $x$ enthält, so gibt sie nach dem Obigen wieder eine complexe Grösse. Die Identität beider Definitionen ergibt sich daraus, dass die Entwicklung von $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ nach dem Binomischen Satze richtig bleibt, wenn auch $x$ imaginär ist. Denn wenn man $n$ als ganze Zahl denkt, so drückt ja der Binomische Satz nur die Regel für ein wiederholtes Multipliciren von $1+\frac{x}{n}$ mit sich selbst aus, welche Regel ihre volle Anwendung auch für imaginäres $x$ nach dem Obigen findet.

Es ist jedoch noch zu zeigen, dass die Entwicklung von $e^x$ in III a. noch einen bestimmten Werth gebe, also convergire, wenn $x$ imaginär wird. Dieser Beweis lässt sich so führen:

Setzt man in III a. für $x$ $a+bi$, so ergibt sich:

$$e^{a+bi}=1+\frac{a+bi}{1}+\frac{(a+bi)^2}{1\cdot 2}+\frac{(a+bi)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\dots$$

Haben $a$ und $b$ die absoluten Werthe $\alpha$ und $\beta$, so dass $\alpha$ und $\beta$ positive Grössen sind, so ist offenbar sowohl der reelle als der imaginäre Theil von $(a+bi)^s$, abgesehen vom Vorzeichen, kleiner als $(\alpha+\beta)^s$. Denn die einzelnen Glieder des erstern Ausdruckes, wie sie der Binomische Satz ergibt, unterscheiden sich von den entsprechenden des letztern nur durch das Zeichen oder durch den Umstand, dass sie noch mit $i$ multiplicirt sind. Diese letzteren Glieder bleiben im reellen Theile ganz weg. Denkt man sie also positiv genommen zu demselben hinzugefügt, so wird derselbe vergrössert, und dasselbe geschieht, wenn man die negativen Glieder mit verändertem Zeichen nimmt. Im imaginären Theil dagegen, wo die nicht mit $i$ multiplicirten Glieder wegbleiben, werden diese hinzugefügt und ebenfalls alle Glieder positiv genommen. Setzen wir also:

$$(a+bi)^s=p+qi,$$

so ist:

$$p<(\alpha+\beta)^s \text{ und } q<(\alpha+\beta)^s,$$

also wenn man setzt:

$$e^{a+bi}=P+Qi,$$

so ist auch:

$$P<1+\alpha+\beta+\frac{(\alpha+\beta)^2}{1\cdot 2}+\frac{(\alpha+\beta)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots,$$

und:

$$Q<1+\alpha+\beta+\frac{(\alpha+\beta)^2}{1\cdot 2}+\frac{(\alpha+\beta)^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots$$

Da nun die Reihen rechts convergiren, so müssen auch die für $P$ und $Q$ convergiren. Denn die Convergenz einer Reihe besteht ja darin (siehe den Artikel: Reihen), dass die Summe aller Glieder von einem, dem $s$ten, an mit wachsendem $s$ verschwindet, und dies wird natürlich noch der Fall sein, wenn der absolute Werth aller dieser Glieder verringert wird. Nachdem also der Ausdruck $e^x$ für complexes $x$ vollständig definirt ist, bleibt es noch übrig, die Regeln des Potenzirens für diesen Ausdruck zu beweisen; denn da die Entstehung desselben eine andere als bei reellen Zahlen ist, fragt es sich, welche Sätze von Potenzen für solche Ausdrücke noch gelten. Während bei den vier ersten Operationen die Gültigkeit der allgemeinen Gesetze für reelle Zahlen auch für die complexen einfach aus der Definition folgt. Die Gleichungen, welche diese Sätze ausdrücken, sind immer richtig, wenn man $i$ als beliebige reelle Zahl denkt; es findet also auch Gleichheit zwischen den Coefficienten der gleichen Potenzen von $i$ statt, und diese wird nicht aufgehoben, wenn man $i^2$ mit $-1$, also $i^3$ mit $-i$, $i^4$ mit $+1$ u. s. w. vertauscht.

Für die Potenzen beweisen wir zunächst die Sätze:

$$e^x e^y = e^{x+y},\quad \frac{e^x}{e^y}=e^{x-y},$$

für complexe $x$ und $y$. Man hat:

$$e^x e^y=\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n=\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)\left(1+\frac{y}{n}\right)\right]^n=\left(1+\frac{x}{n}+\frac{y}{n}+\frac{xy}{n^2}\right)^n$$

$$=\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n\left(1+\frac{\frac{xy}{n^2}}{1+\frac{x+y}{n}}\right)^n=e^{x+y}\left(1+\frac{xy}{n(n+x+y)}\right)^n.$$

Diese Gleichung gilt für complexes $x$ und $y$ auch. Man sieht aber leicht, wenn man den Ausdruck:

$$\left(1+\frac{xy}{n(n+x+y)}\right)^n=e^{\frac{xy}{n+x+y}}$$

nach dem Satze III a. entwickelt, alle Glieder, bis auf das erste, welches gleich der Einheit ist, für wachsendes $n$ verschwinden. Es ist somit:

$$e^x e^y = e^{x+y}.$$

Was den Ausdruck $\frac{e^x}{e^y}$ anbetrifft, so bemerken wir, dass die Betrachtungen, welche die Formel $\left(1-\frac{y}{n}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{y}{n}\right)^n}$ oder $e^{-y}=\frac{1}{e^y}$ ergaben, auch für imaginäres $y$ gültig sind, und somit hat man:

$$\frac{e^x}{e^y}=e^x e^{-y},$$

nach dem vorigen Satze:

$$e^x e^{-y}=e^{x-y},$$

so dass beide Formeln erwiesen sind.

Wenden wir uns jetzt zu den Formeln:

$$(e^x)^s = e^{sx}, \quad \sqrt[s]{e^x} = e^{\frac{x}{s}},$$

wo $s$ zunächst eine reelle ganze Zahl, $x$ beliebig sein soll.

Es ist:

$$(e^x)^s = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]^s.$$

Da $n$ auch eine ganze Zahl ist, so stellt die Formel, was auch $x$ sei, nur ein wiederholtes Multipliciren vor, und da die Sätze über diese Rechnung allgemein gelten:

$$(e^x)^s = \left(1+\frac{x}{n}\right)^{ns} = e^{sx}.$$

Was den Ausdruck $\sqrt[s]{e^x}$ anbetrifft, so ist er definirt durch die Gleichung:

$$\left(\sqrt[s]{e^x}\right)^s = e^x.$$

Offenbar aber ist $\left(e^{\frac{x}{s}}\right)^s$ nach dem Obigen $= e^{\frac{sx}{s}} = e^x$, also:

$$\sqrt[s]{e^x} = e^{\frac{x}{s}}.$$

Es ist aber wohl zu bemerken, dass $e^{\frac{x}{s}}$ eine eindeutige Function ist, und daher von den $s$ Wurzeln, welche $\sqrt[s]{e^x}$ haben kann, nur eine ganz bestimmt durch diese Gleichung gegeben ist.

Sei jetzt $s = \frac{p}{q}$ ein positiver reeller Bruch, für den auch eine Irrationalzahl gesetzt werden kann, wenn man Zähler und Nenner gleichzeitig zunehmen lässt.

Immer ist der Ausdruck: $(e^x)^{\frac{p}{q}}$ zu definiren durch die Gleichung:

$$\left[(e^x)^{\frac{p}{q}}\right]^q = (e^x)^p = e^{px},$$

und da auch: $\left(e^{\frac{px}{q}}\right)^q = e^{px}$ ist, so hat man:

$$(e^x)^{\frac{p}{q}} = e^{\frac{px}{q}},$$

also den obigen Satz auch für diesen Fall bewiesen.

Da wir den Begriff der Wurzeln mit gebrochenen Exponenten nicht eingeführt haben und derselbe mittels der Potenzen mit gebrochenen Exponenten immer umgangen werden kann, so ist der Formel: $\sqrt[s]{e^x} = e^{\frac{x}{s}}$ keine Allgemeingültigkeit beizulegen.

Sei nun $-s$ immer eine beliebige negative Zahl, so ist noch immer $(e^x)^{-s}$ zu definiren durch die allgemein gültige Gleichung:

$$(e^x)^{-s} = \frac{1}{(e^x)^s},$$

und da:

$$\frac{1}{(e^x)^s} = \frac{1}{e^{xs}} = e^{-xs}$$

ist, so ist unsere Formel für jeden reellen Werth von $s$ bewiesen.

Sei jetzt $s$ imaginär, so verlieren alle diese Definitionen von $(e^x)^s$ ihre Bedeutung. Es steht uns daher frei, diesen Ausdruck neu zu definiren durch die Gleichung:

$$(e^x)^s = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]^s = \left(1+\frac{sx}{n}\right)^n.$$

Die völlig bestimmte, in convergirender Reihe zu entwickelnde Grösse rechts bestätigt dann die Gleichung $(e^x)^s = e^{sx}$ auch für diesen Fall.

Wir haben bisher nur solche Potenzen betrachtet, wo entweder der Exponent reell, oder der Exponent eine beliebige complexe Zahl, die Basis aber gleich der gegebenen Zahl e ist. Es bleibt jetzt noch übrig, den Uebergang auf eine beliebige Potenz $a^x$ zu machen, wo $a$ und $x$ complexe Zahlen sind. Ehe wir dies jedoch thun, sind die Potenzen von e etwas genauer zu untersuchen. — Sei zunächst in:

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots$$

$x$ reell und positiv, so sind alle Glieder der Reihe rechts ebenfalls positiv, und nehmen mit wachsendem $x$ zu. $e^x$ wird also immer grösser werden, wenn $x$ wächst:

$$\text{für } x=0 \text{ ist } e^x=1, \text{ für } x=\infty, \quad e^x=\infty.$$

Also:

„Für positives $x$ wächst der Ausdruck $e^x$ gleichzeitig mit $x$, und zwar von Null bis unendlich."

Sei jetzt $x=-y$ negativ, so ist:

$$e^{-y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{1+y+\frac{y^2}{1\cdot 2}+\frac{y^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots}.$$

Da der Nenner positiv ist, wird auch $e^{-y}$ positiv sein, für $y=0$ den Werth 1, für $y=\infty$ den Werth Null haben, und je grösser der absolute Werth von $y$ wird, desto kleiner wird $e^{-y}$ werden, also:

„Für negatives $x$ fällt $e^x$ von 1 bis 0, bleibt somit immer positiv."

Und allgemein:

„Durchschreitet $x$ alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$, so wird $e^x$ alle positiven Werthe von 0 bis $\infty$ annehmen, jeden nur einmal, und immer im Wachsen bleiben, wenn $x$ algebraisch genommen zunimmt."

4) Einführung der trigonometrischen Functionen in die Analysis.

Sei jetzt $x=\alpha i$ eine rein imaginäre Zahl, so hat man:

$$e^{\alpha i} = 1+\alpha i-\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}-\frac{\alpha^3 i}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{\alpha^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{\alpha^5 i}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\ldots$$

Die Reihe rechts zerfällt in einen reellen und einen imaginären Theil. Den ersteren bezeichnet man mit dem Ausdrucke Cosinus von $\alpha$ ($\cos\alpha$), den letztern mit dem Ausdrucke Sinus von $\alpha$ ($\sin\alpha$). Diese Bezeichnungen sind mit denen, welche in der Trigonometrie vorkommen, identisch. Jedoch ist diese Identität in letzterer Wissenschaft zu beweisen, nicht hier, wo es uns auf die geometrische Bedeutung der definirten Functionen nicht ankommt. Es ist nun:

IV. $$e^{\alpha i} = \cos\alpha + i\sin\alpha,$$

IV a. $$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1\cdot 2} + \frac{\alpha^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{\alpha^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \dots$$

IV b. $$\sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\alpha^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \dots$$

Die Ausdrücke für $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ convergiren immer. Sie selbst genügen verschiedenen Gleichungen. Zunächst wird sich der Werth von $e^{-\alpha i}$ nur von $e^{\alpha i}$ dadurch unterscheiden, dass die mit $i$ multiplicirten Glieder negativ sind. Es ist also:

V. $$e^{-\alpha i} = \cos\alpha - i\sin\alpha.$$

Multiplicirt man diesen Ausdruck mit dem in IV., so kommt:

$$e^{\alpha i} e^{-\alpha i} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\alpha - i\sin\alpha),$$

oder:

VI. $$1 = \cos\alpha^2 + \sin\alpha^2.$$

Es ist ferner:

$$e^{\alpha i} e^{\beta i} = e^{(\alpha+\beta)i} = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta),$$

und gleichzeitig:

$$e^{\alpha i} e^{\beta i} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta),$$

woraus sich die beiden Grundformeln der Trigonometrie ergeben:

VII. $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

VII a. $$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Da man ferner der Definition gemäss auch setzen kann:

$$e^{-\alpha i} = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha),$$

so hat man wegen Formel V.:

VIII. $$\cos(-\alpha) = \cos\alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Die Formel VI. gibt uns zunächst das Resultat, dass von den Grössen $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$, so lange $\alpha$ reell bleibt, keine grösser als $+1$ werden kann, und keine unter $-1$ sinken wird. D. h.:

„Cosinus und Sinus reeller Zahlen sind immer echte positive oder negative Brüche."

Kennt man von beiden Functionen die eine, so ist die andere bis auf das Vorzeichen gegeben durch die Formel VI.

Was nun die Aenderung dieser Functionen, wenn $\alpha$ seinen Werth ändert, anbetrifft, so bemerken wir zunächst, dass nach den Formeln IV a. und IV b.:

$$\cos(0) = 1, \quad \sin(0) = 0$$

sich ergibt, und man für kleine Werthe von $\alpha = \nu$ setzen kann:

$$\cos(\nu) = 1, \quad \sin(\nu) = \nu,$$

indem man alle Potenzen, die höher als die erste sind, gegen 1, bezüglich $\nu$, vernachlässigt.

Bekannt ist ferner der Satz, dass jede Reihe:

$$S = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5 - \dots,$$

deren Glieder abwechselnd positiv und negativ sind, und wo immer das nächste Glied kleiner ist als das vorhergehende, den Bedingungen genügt:

$$S > A_1 - A_2 + \dots - A_{2n}, \quad S < A_1 - A_2 + \dots + A_{2n+1},$$

denn offenbar ist der ersten Reihe rechts noch zuzuzählen, um $S$ zu erhalten:

$$(A_{2n+1} - A_{2n+2}) + (A_{2n+3} - A_{2n+4}) + \dots,$$

wovon alle Glieder in den Klammern positiv sind, während von der zweiten Reihe rechts abzuziehen ist die Reihe mit ebenfalls positiven Gliedern:

$$(A_{2n+2}-A_{2n+3})+(A_{2n+4}-A_{2n+5})+\dots$$

Dies angewandt auf die Reibe IV h. zeigt, dass deren Werth wenigstens so lange positiv ist, als $\alpha$ positiv und kleiner als 2 ist. Offenhar nämlicb kann man setzen:

$$\tfrac{1}{2}\sin\alpha=\frac{\alpha}{2}-\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3}{\frac{3}{2}}+\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^5}{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{2}}-\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^7}{\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{7}{2}}+\dots$$

Die Nenner dieser Glieder sind alle grösser als 1, die Zähler bilden die Reihe:

$$\left(\frac{\alpha}{2}\right),\ \left(\frac{\alpha}{2}\right)^3,\ \left(\frac{\alpha}{2}\right)^5,\ \left(\frac{\alpha}{2}\right)^7,$$

wo $\frac{\alpha}{2}$ kleiner als 1 ist; sie nehmen also ab, und somit ist, wenn man in den Grenzwerthen für $S$, $S=\frac{1}{2}\sin\alpha$, $s=1$ setzt:

$$\tfrac{1}{2}\sin\alpha<\frac{\alpha}{2} \text{ nnd } \tfrac{1}{2}\sin\alpha>\frac{\alpha}{2}-\frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3}{\frac{3}{2}},$$

d. h.:

$$\sin\alpha<\alpha \text{ nnd } \sin\alpha>\alpha-\frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3},$$

und da $\alpha$ nach der Annahme positiv ist, so wird dies anch mit $\sin\alpha$ der Fall sein. Es ist nämlich für $\alpha=2$, $\alpha-\frac{\alpha^3}{1\cdot 2\cdot 3}=2-\frac{4}{3}$ noch positiv.

Untersnehen wir jetzt den Cosinus von $\alpha$, nnd vergleichen wir zwei Wertbe $\cos\alpha$ nnd $\cos(\alpha+\nu)$, wo $\alpha$ nnd $\nu$ positiv, also $\alpha+\nu>\alpha$, keiner dieser Werthe aber grösser als 2 ist.

Man hat:

$$\cos(\alpha+\nu)=\cos\alpha\cos\nu-\sin\alpha\sin\nu.$$

Der Ausdruck $\sin\alpha\sin\nu$ ist nach dem Ohigen immer positiv, also:

$$\cos(\alpha+\nu)<\cos\alpha\cos\nu.$$

$\cos\nu$ wird nie grösser als 1 sein, nnd sich übrigens mit abnehmendem $\nu$ bis auf jede Grenze der Einheit nähern, worans dann folgt, dass man hat, wenn $\nu$ eine gewisse Grenze nicht überschreitet:

$$\cos(\alpha+\nu)<\cos\alpha,\ \cos(\alpha+2\nu)<\cos\alpha+\nu\dots,$$

es wird also mit znnehmendem $\alpha$ der Ausdrnck $\cos\alpha$ immer kleiner im analytiscben Sinne, nnd dies wird wenigstens so lange danern, als $\alpha$ den Werth 2 nicht überscbreitet.

Es ist nnn, wie wir gesehen haben:

$$\cos(0)=1,$$

also für $\alpha=0$ ist der Cosinus positiv. Dies findet für jeden Werth zwiseben Null und Eins statt, da die Glieder der Reibe abwechselnd positiv und negativ sind und abnehmen. Somit bat man:

$$\cos\alpha>1-\frac{\alpha^2}{1\cdot 2},$$

was für $\alpha=1$ noch giht:

$$\cos\alpha>\tfrac{1}{2}.$$

Setzt man nnn aber $\alpha=2$, so ist:

$$\cos\alpha=1-\frac{2^2}{2}+\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{2^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\dots$$

$$=-1+\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(1-\frac{2^2}{5\cdot 6}+\frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dots\right).$$

Die Reihe in der Klammer besteht offenhar aus ahnehmenden Gliedern; es ist also:

$$\cos\alpha < -1 + \frac{2^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}.$$

Der Ausdruck rechts ist aber gleich $-\frac{1}{3}$, also negativ. Da nun $\cos\alpha$ zwischen $\alpha=1$ und $\alpha=2$ mit zunehmendem $\alpha$ immer abnimmt, an der einen Grenze aber positiv, an der andern negativ ist, so folgt hieraus:

„Es muss einen Werth von $\alpha$, und zwar nur einen geben, welcher zwischen 1 und 2 liegt, für den der Cosinus gleich 0 ist."

Wir bezeichnen diesen Werth von $\alpha$ dem einmal eingeführten Gebrauche gemäss mit $\frac{\pi}{2}$. Wir haben also:

IX. $$\cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar wegen Gleichung IV.:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = 1,$$

und da der Sinus von $\frac{\pi}{2}$ positiv sein muss, da $\frac{\pi}{2} < 2$ ist:

IX a. $$\sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

ferner:

IX b. $$e^{\frac{\pi i}{2}} = i.$$

Ist nun $s$ eine beliebige ganze Zahl, so hat man:

$$\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{4s} = e^{2s\pi i} = i^{4s} = 1,$$

$$\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{4s+2} = e^{(2s+1)\pi i} = i^{4s+2} = -1,$$

$$\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{4s+1} = e^{2s\pi i} e^{\frac{\pi}{2}i} = i,$$

$$\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{4s+3} = e^{2s\pi i}\left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^3 = -i,$$

oder allgemein:

X. $$e^{\frac{\pi}{2}i(4s+\alpha)} = 1,\ i,\ -1,\ -i,$$

wo der erste, zweite, dritte oder vierte Werth gilt, je nachdem $\alpha = 0$, 1, 2 oder 3 ist.

Durch Trennung des Reellen vom Imaginären hat man noch:

X a. $$\cos\frac{\pi}{2}(4s+\alpha) = 1,\ 0,\ -1,\ 0,$$

X b. $$\sin\frac{\pi}{2}(4s+\alpha) = 0,\ 1,\ 0,\ -1,$$

wo ebenfalls $\alpha = 0$, 1, 2, 3 zu setzen ist. Hieraus folgen aber auch die höchst wichtigen Formeln, die sich aus Gleichung:

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

ergeben, wenn man für $y$ ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ setzt:

$$e^{x+2s\pi i} = e^x,\quad e^{x+(2s+1)\pi i} = -e^x,$$

$$e^{x+(4s+1)\frac{\pi}{2}i} = ie^x,\ e^{x+(4s+3)\frac{\pi}{2}i} = -ie^x,$$

und wenn man in diesen Formel $x$ mit $xi$ vertauscht, und das Reelle vom Imaginären trennt:

XII. $\cos(x+2s\pi)=\cos x,\ \cos(x+(2s+1)\pi)=-\cos x,$

$\cos(x+(4s+1)\frac{\pi}{2})=-\sin x,\ \cos(x+(4s+3)\frac{\pi}{2})=\sin x.$

XII a. $\sin(x+2s\pi)=\sin x,\ \sin(x+(2s+1)\pi)=-\sin x,$

$\sin(x+(4s+1)\frac{\pi}{2})=\cos x,\ \sin(x+(4s+3)\frac{\pi}{2})=-\cos x.$

In diesen Formeln stecken wichtige Eigenschaften der Exponentialgrössen und der trigonometrischen Functionen.

Unter einer periodischen Function $f(x)$ versteht man eine solche, welche die Eigenschaft hat, dass sie für jeden Werth von $x$ die Gleichung:

$$f(x+\alpha)=f(x)$$

erfüllt, wo $\alpha$ eine gegebene Constante ist. Aus dieser Formel folgt leicht, dass jede periodische Function auch die Gleichung:

$$f(x+s\alpha)=f(x)$$

verificirt, wo $s$ eine beliebige ganze positive oder negative Zahl ist. Die Zahl $\alpha$ heisst „Periode der Function." — Die erste Formel XI. zeigt nun, dass die Exponentialgrösse $e^x$ eine periodische Function ist und die Periode $2\pi i$ hat. Die letztere ist also imaginär. Dagegen zeigen die ersten Formeln XII. und XII a., dass die Functionen $\cos x$ und $\sin x$ die reelle Periode $2\pi$ haben.

Führt man noch analog den trigonometrischen Betrachtungen ein die Function Tangens von $x$ $(\operatorname{tg} x)$ durch die Gleichung:

$$\operatorname{tg}(x)=\frac{\sin x}{\cos x},$$

so hat man, wenn man in der zweiten Formel XII. und XII a. $s=0$ setzt:

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)}=\frac{\sin x}{\cos x},$$

also:

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg}(x).$$

Die Function $\operatorname{tg}(x)$ hat also $\pi$ zur Periode, d. h. die Hälfte der Periode von $\sin x$ und $\cos x$.

Im vorigen Abschnitte hatten wir den Gang der Function $e^x$ untersucht für jeden reellen Werth von $x$. Diese Betrachtungen setzen uns in den Stand, Gleiches in Bezug auf die Function $e^{xi}$ zu thun, wo $x$ reell ist, oder was dasselbe ist in Bezug auf die beiden Functionen $\cos x$ und $\sin x$, und zwar ohne diejenigen geometrischen Betrachtungen, welche man in der Trigonometrie anfängt. Wir wissen bereits, dass beide Ausdrücke immer zwischen $-1$ und $+1$ liegen.

$$\cos(0) \text{ war } =+1,\quad \cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Zwischen diesen beiden Werthen 0 und $\frac{\pi}{2}$ war der Cosinus immer im Fallen.

Ist nun $x$ grösser als $\frac{\pi}{2}$ aber kleiner als $\pi$, also $x=\pi-y$, wo $y$ kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, so giebt die zweite Formel XII., wenn man $s=0$ und $x=-y$ setzt:

$$\cos(\pi-y)=-\cos(-y)=-\cos y,$$

da nach Formel VIII.:

$$\cos(-y)=\cos y$$

war. Es wird also, wenn $x$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$ liegt, der Cosinus immer noch abnehmen, also negativ werden; für $x=\pi$ also $y=0$, erhält man:

$$\cos\pi=-1.$$

Liegt $x$ zwischen $\pi$ und $2\pi$, ist also $x=\pi+y$, und $y$ kleiner als $\pi$, so giebt die zweite Formel XI., wenn man $s=0$ setzt:

$$\cos(\pi+y)=-\cos y.$$

Der Cosinus durchläuft also die oben durchschriebene Werthreihe mit umgekehrtem Vorzeichen, er wird also wachsen von $\cos\pi=-1$ bis zu $\cos 2\pi=-\cos\pi=+1$. Hier ist die Periode $2\pi$ eingetreten, und die Werthe des Cosinus werden sich also einfach wiederholen.

Ist $x$ negativ, so hat man die Formel:

$$\cos(-x)=\cos x,$$

also die Cosinus von negativen Variablen haben dieselben Werthe als die

entsprechenden positiven. Was den Sinus anbetrifft, so gibt z. B. die dritte Formel XII., wenn man $s=0$ setzt, das Nöthige; es ist:

$$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x,$$

also:

$$\sin x=-\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

d. h.: Der Sinus wächst von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ von den Werthen $\sin(0)=0$, $\sin\frac{\pi}{2}=1$, sinkt von $\frac{\pi}{2}$ bis $\pi$ bis auf 0, von $\pi$ bis $\frac{3\pi}{2}$ sinkt er weiter bis $-1$, von $\frac{3\pi}{2}$ bis $2\pi$ steigt er bis Null, und wegen der eingetretenen Periode wiederholen sich diese Werthe, wenn $x$ grösser als $2\pi$ ist. Für negative Variablen gibt die Formel:

$$\sin(-x)=-\sin x$$

das Nöthige.

Untersuchen wir noch die Function $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ in derselben Weise.

Man hat:

$$\operatorname{tg}(0)=0,$$

da zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ der Zähler von $\operatorname{tg}(x)$ immer grösser, der Nenner aber kleiner wird, so wird in diesen Grenzen $\operatorname{tg}(x)$ immer wachsen, und wenn $x$ sich der Grenze $\frac{\pi}{2}$ nähert, da dann $\cos(x)$ sich der Null nähert, positiv unendlich werden. Wir bemerken noch, dass, wenn man in die dritte Formel XII. setzt, $x=-\frac{\pi}{4}$, $s=0$; man erhält:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

also:

$$\cos\frac{\pi}{4}=\sin\frac{\pi}{4},$$

und daher:

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1,$$

also unterhalb $\frac{\pi}{4}$ wird die Tangente kleiner, zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$ aber grösser als 1 sein. Sei jetzt $x=\pi-y$, und $y$ kleiner als $\frac{\pi}{2}$, also $x$ kleiner als $\pi$, so hat man:

$$\operatorname{tg}(\pi-x)=\frac{\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}=-\frac{\sin x}{\cos x},$$

also:

$$\operatorname{tg}(\pi-x)=-\operatorname{tg} x.$$

Die Tangente wird von $\frac{\pi}{2}$ bis $-\pi$ negativ sein, und von $-\infty$ bis 0 wachsen, wobei:

$$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}=-1$$

wird. Da $\pi$ die Periode ist, wiederholen sich diese Werthe. — Es folgt hieraus Folgendes:

„Jede reelle Zahl kann einem Werthe und nur einem von $\operatorname{tg}(x)$ gleichgesetzt werden, wo $x$ zwischen 0 und $\pi$ liegt. Ist die gegebene Zahl positiv, so liegt $x$ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, ist sie kleiner als 1 zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$, sonst zwischen $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{\pi}{2}$. Ist die gegebene Zahl negativ, so liegt $x$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$, und zwar zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{4}$ oder zwischen $\frac{3\pi}{4}$ und $\pi$, je nachdem die Zahl zwischen 0 und $-1$ und zwischen $-1$ und $-\infty$ liegt."

Für die Grösse $e^{xi}$ folgt, dass dieselbe immer gleich einem Ausdruck $A+Bi$ ist, wo $A$ und $B$ zwischen $+1$ und $-1$ liegen, und die Gleichung:

$$A^2+B^2=1$$

erfüllen. Es ist nämlich:

$$A=\cos\alpha,\ B=\sin\alpha$$

Leicht einzusehen ist auch, dass, wenn zwei Zahlen $A$ und $B$ diese beiden Bedingungen erfüllen, man immer setzen kann:

$$A+Bi=e^{xi},$$

wo $x$ einen ganz bestimmten, zwischen 0 und $2\pi$ liegenden Werth hat, und nur einen solchen haben kann.

5) Von den Logarithmen reeller und complexer Grössen.

Sei gegeben die Gleichung:

$$e^{x}=y,$$

so kann man sich $x$ als abhängig von $y$, also als Function dieser Grösse denken. Man nennt $x$ den natürlichen Logarithmus von $y$ oder kurz den Logarithmus dieser Grösse. Es ist also:

$$x = \lg y \text{ oder } e^{\lg y} = y.$$

In der Analysis kommen nämlich in der Regel keine andern als die natürlichen Logarithmen vor, während beim praktischen Rechnen die künstlichen Logarithmen herrschend sind. *)

Ueber die Logarithmen lassen sich nun folgende Betrachtungen anstellen:

„Ist $y$ reell und positiv, so hat $x = \lg y$ immer einen und nur einen reellen Werth, welcher positiv ist, wenn $y$ grösser als 1, negativ, wenn $y$ kleiner als 1 ist. Wir haben nämlich zu Schluss des Abschnittes 3) gezeigt, dass der Ausdruck $e^x = y$ von 0 bis $+\infty$ geht, während $x$ von $-\infty$ bis $+\infty$ sich ändert, und jeder dieser Werthe von $y$ nur einmal berührt wird."

Sei jetzt $x = \alpha + \beta i$ eine beliebige reelle (positive oder negative), imaginäre oder complexe Zahl, Fälle, welche alle in diesem Werthe enthalten sind, wenn man die, wo $\alpha$ oder $\beta$ gleich Null sind, mit einschliesst. Man kann dann immer setzen:

$$e^{\alpha + \beta i} = A + Bi,$$

und es ist dann:

$$\alpha + \beta i = \lg(A + Bi).$$

Wir behaupten nun: „dass jedem reellen Werthe von $A$ und $B$ ein Werthpaar, und zwar nur eins $\alpha$ und $\beta$ entspricht, welche beide reell sind, und wo $\beta$ zwischen 0 und $2\pi$. oder wenn man will zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt." (Es ist nämlich $e^{-\beta i} = e^{(2\pi - \beta)i}$, und somit entspricht jedem negativen Werthe des Exponenten, der zwischen 0 und $-\pi$ liegt, einer zwischen $\pi$ und $2\pi$.)

Man hat nämlich:

$$e^{\alpha + \beta i} = e^{\alpha} e^{\beta i} = e^{\alpha}(\cos\beta + i \sin\beta),$$

es ist also, wenn man noch $e^{\alpha} = r$ setzt:

$$A = r\cos\beta, \quad B = r\sin\beta,$$

wo $r$ positiv ist und jeden Werth von 0 bis $\infty$ annehmen kann, und $\beta$ immer als zwischen 0 und $2\pi$ liegend betrachtet werden kann.

Erhebt man beide Gleichungen ins Quadrat und addirt sie, so erhält man:

$$A^2 + B^2 = r^2.$$

Durch diese Formel ist $r$ völlig bestimmt, und was auch $A$ und $B$ seien, immer lässt sich ein und nur ein entsprechender positiver Werth von $r$ finden, so dass mittels der Gleichung $e^{\alpha} = r$, sich ein reeller Werth von $\alpha$, und zwar ebenfalls nur ein einziger, ergibt. Was nun $\beta$ anbetrifft, so hat man:

$$\sin\beta = \frac{A}{r}, \quad \cos\beta = \frac{B}{r}.$$

Diese Ausdrücke sind immer echte Brüche, da $r$ grösser als $A$ und $B$ ist. Das Zeichen der Ausdrücke rechts kann beliebig sein, da $A$ und $B$ positiv und negativ sein können, $r$ immer positiv ist. Ferner realisiren die Ausdrücke rechts die Gleichung:

$$\sin\beta^2 + \cos\beta^2 = \frac{A^2 + B^2}{r^2} = 1.$$

Die Bedingungen, dass sich ein zwischen 0 und $2\pi$ (oder zwischen $-\pi$ und $\pi$) liegender Werth von $\beta$ ergebe, wie sie am Schlusse des vorigen Abschnittes gegeben wurden, sind also erfüllt.

„Für jede Zahl $y$ lässt sich also ein complexer Werth von:

$$\lg(y) = \alpha + \beta i$$

finden, und zwar ist in demselben: A) $\beta = 0$, wenn $y$ reell und positiv ist, B) $\alpha = 0$, wenn $y = A + Bi$ ist und $A$ und $B$ beide echte Brüche sind, welche die Gleichung $A^2 + B^2 = 1$ erfüllen. In jedem Falle sind $\alpha$ und $\beta$ völlig bestimmt, wenn man die Bedingung hinzufügt, dass $\beta$ nicht kleiner als $-\pi$ und nicht grösser als $+\pi$ sein soll."

Nur wenn $-y$ eine reelle und negative Zahl ist, hat man, wegen der Formel:

$$e^{x + (2s+1)\pi i} = -e^{x},$$

---

*) Die Formeln:

$$e^x e^y = e^{x+y}, \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y},$$

$$(e^x)^s = e^{sx}, \quad \sqrt[s]{e^x} = e^{\frac{x}{s}},$$

gestaltet man dann leicht in die bekannten Formeln um:

$$\lg(uv) = \lg u + \lg v, \quad \lg\frac{u}{v} = \lg u - \lg v,$$

$$\lg(u^s) = s\lg u, \quad \lg\left(\sqrt[s]{u}\right) = \frac{1}{s}\lg u,$$

wenn man $e^x = u$, $e^y = v$ setzt.

also wenn $e^x = y$ ist:

$$e^{x+(2s+1)\pi i} = -y,$$

also wenn $s=0$ und $s=-1$ gesetzt wird:

$$e^{x+\pi i} = e^{x-\pi i} = -y,$$

d. h.:

$$\lg(-y) = x + \pi i,$$

und:

$$\lg(-y) = x - \pi i;$$

es sind also hier zwei Logarithmen von $-y$ gegeben, welche an dem Endpunkte des bezeichneten Gebietes liegen. Um diesen Fall aber nicht auszuschliessen, sagen wir: C) $\alpha$ und $\beta$ sind immer völlig bestimmt, wenn man annimmt, dass beide reell, und $\beta$ grösser als $-\pi$ und nicht grösser als $+\pi$ sei.

Nach diesen Betrachtungen können wir jetzt dem Ausdruck: $a^s$, wo $a$ und $s$ beliebige reelle, imaginäre oder complexe Zahlen sind, immer einen ganz bestimmten Sinn unterlegen. Wir haben nämlich immer:

$$e^{\lg a} = a,$$

und $\lg a$ hat in jedem Falle wenigstens einen genau zu bestimmenden Werth. Also:

$$a^s = (e^{\lg a})^s = e^{s \lg a}.$$

Da nun der Ausdruck $e^x$ immer einen Sinn hat, so hat auch $a^s = e^{s\lg a}$ einen solchen, und zwar ist:

$$a^s = \lim\left(1 + \frac{s \lg a}{n}\right)^n,$$

oder:

$$a^s = 1 + s\lg a + \frac{s^2(\lg a)^2}{1\cdot 2} + \frac{s^3(\lg a)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$$

und somit sind die Potenzen mit beliebiger Basis und beliebigem Exponenten immer auf die Grösse $e^x$ zurückgeführt. Alle darüber ausgesagten Sätze gelten auch hier. Namentlich ist:

$$a^s a^t = e^{s\lg a} e^{t \lg a} = e^{(s+t)\lg a},$$

also:

$$a^s a^t = a^{s+t}.$$

$$\frac{a^s}{a^t} = \frac{e^{s\lg a}}{e^{t\lg a}} = e^{(s-t)\lg a},$$

also:

$$\frac{a^s}{a^t} = a^{s-t}.$$

$$(a^s)^p = (e^{s\lg a})^p = e^{sp\lg a},$$

also:

$$(a^s)^p = a^{ps},$$

und wenn man für $p$ $\frac{1}{p}$ setzt:

$$(a^s)^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{s}{p}}.$$

Ferner:

$$(ab)^s = (e^{\lg a} e^{\lg b})^s = e^{s(\lg a + \lg b)},$$

also:

$$(ab)^s = a^s b^s,$$

und ebenso:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^s = \left(\frac{e^{\lg a}}{e^{\lg b}}\right)^s = e^{s\lg a - s\lg b},$$

also:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^s = \frac{a^s}{b^s}.$$

Indess ist die Theorie der Exponentialgrössen und der Logarithmen hiermit aus dem Grunde noch nicht erschöpft, weil in der Bedingung, dass der imaginäre Theil von $\lg(A+Bi)$ innerhalb gewisser Grenzen liegen solle, eine nicht nothwendige Beschränkung gegeben ist. In der That hat der Logarithmus einer Zahl unendlich viel Werthe, und somit wenigstens im Allgemeinen auch die Exponentialgrösse:

$$a^x = e^{x\lg a},$$

Wir kommen hierauf sogleich zurück, bemerken jedoch noch Folgendes.

Wir haben gesehen, dass sich jede complexe Grösse $A$ und $Bi$ auf die Form bringen liess:

$$A + Bi = r e^{\varphi i},$$

wo $r$ und $\varphi$ reell, $r$ positiv ist, $\varphi$ grösser als $-\pi$ und nicht grösser als $\pi$ war. Diese Verwandlung kommt oft vor, man nennt $r$ den Modul der imaginären Grösse, $\varphi$ das Argument derselben.

$r$ und $\varphi$ sind gegeben durch die Gleichungen:

$$r^2 = A^2 + B^2, \quad \cos\varphi = \frac{A}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{B}{r}.$$

Die letzteren beiden lassen sich auch ersetzen durch die eine:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}.$$

In dieser Formel ist aber nicht angegeben, ob $\varphi$ negativ oder positiv sei; da $\operatorname{tg}(-\alpha) = \operatorname{tg}(\pi - \alpha)$ ist, also sich für jedes negative Argument, welches hier in Betracht kommt, ein positives finden lässt, welches dieselbe Tangente hat. Indess weiss man, dass in $\sin\varphi = \frac{B}{r}$ zu negativem $B$ auch negatives $\varphi$ gehört.

„Es wird sich also das Vorzeichen von $\varphi$ immer nach dem von $B$ richten." Das Auffinden von $\varphi$ kann im Uebrigen mittels einer trigonometrischen Tafel geschehen, und bedient man sich in diesem Falle lieber der Formeln:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{B}{A}, \quad r = \frac{A}{\cos\varphi} = \frac{B}{\sin\varphi}.$$

Beispiel. Es sei in der angegebenen Weise darzustellen:

$$x = 7{,}491236 + i\,5{,}123847,$$

und:

$$x = 5{,}210099 - i\,3{,}277161.$$

Indem wir beide Rechnungen vereinen, ist:

| im ersten: | zweiten Falle: |
|---|---|
| $\lg B = 0{,}7095961$ | $0{,}5154977$ |
| $\lg A = 0{,}8745535$ | $0{,}7168460$ |
| $\lg \operatorname{tg}\varphi = 9{,}8350426 - 10$ | $9{,}7986517 - 10$ |
| $\varphi = 34°\,22'\,16'',68$ | $-32°\,10'\,11'',84$ |
| $\cos\varphi = 9{,}9176956 - 10$ | $9{,}9276129 - 10$ |
| $\lg r = 0{,}9568579$ | $0{,}7892331$ |
| $r = 9{,}054363$ | $6{,}155071.$ |

Da die Werthe von $\varphi$ in Winkeln gegeben sind, so müssen sie auf Theile von $\pi$ reducirt werden. Man hat:

| | |
|---|---|
| $34° = 0{,}5934119$ | $32° = 0{,}5585054$ |
| $22' = 0{,}0063995$ | $10' = 0{,}0029089$ |
| $16'' = 0{,}0000776$ | $11'' = 0{,}0000533$ |
| $0'',68 = 0{,}0000033$ | $0'',84 = 0{,}0000041$ |
| $\varphi = 0{,}5998923$ | $-0{,}5614717,$ |

also im ersten Falle:

$$x = 9{,}054363\, e^{0{,}5998923\, i},$$

und im zweiten:

$$x = 6{,}155071\, e^{-0{,}5614717\, i}.$$

6) Mehrdeutigkeit der Wurzeln.

Sei zunächst $a$ eine reelle und positive Zahl, so hat immer die Grösse $\sqrt[n]{a}$ auch einen positiven Werth, den wir mit $\alpha$ bezeichnen wollen. Es ist dann $\alpha^n = a$. Da nun $e^{2s\pi i} = 1$ ist, welchen ganzen Werth auch $s$ habe, so ist auch:

$$\left(\alpha e^{\frac{2s\pi i}{n}}\right)^n = \alpha^n e^{2s\pi i} = a,$$

und mithin jeder Ausdruck ein Werth von $\sqrt[n]{a}$, welcher die Form hat:

$$\alpha e^{\frac{2s\pi i}{n}}.$$

Obgleich hierin $s$ jeden beliebigen ganzen Werth annehmen kann, so ist doch leicht ersichtlich, dass sich nur $n$ verschiedene Werthe von $\sqrt[n]{a}$ hieraus ergeben, welche den Werthen von $s = 0, 1 \ldots n-1$ entsprechen, denn wäre $s > n-1$ oder $s$ negativ, so könnte man immer setzen: $s = nk + s'$, wo $s$ einen der gegebenen Werthe hat und $k$ eine negative oder positive ganze Zahl ist. Es ist dann:

$$e^{\frac{2 s \pi i}{n}} = e^{\frac{2 \pi i}{n}(nk+s')} = e^{2 k \pi i + \frac{2 \pi i s'}{n}} = e^{\frac{2 \pi i s'}{n}}.$$

Also nur $n$ Werthe von $s$ geben ein verschiedenes Resultat.

Sei jetzt $a$ eine negative, imaginäre oder complexe Zahl, so kann man immer setzen:

$$a = r e^{\varphi i},$$

wo $r$ positiv, $\varphi$ grösser als $-\pi$ und nicht grösser als $\pi$ ist. Man hat also jedenfalls:

$$\sqrt[n]{a} = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\varphi i}{n}},$$

wo $r^{\frac{1}{n}}$ immer als positiv gedacht werden kann, und das Argument $\frac{\varphi}{n}$ stets grösser als $-\frac{\pi}{n}$ und nicht grösser als $\frac{\pi}{n}$ ist. Ganz wie vorhin ergibt sich dann der allgemeine Werth von $\sqrt[n]{a}$:

$$r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{(\varphi + 2 s \pi) i}{n}},$$

d. h.:

„Jede Zahl hat $n$ verschiedene Wurzeln $n$ter Ordnung, welche die Form $a + bi$ haben."

Es können aber auch nicht mehr als $n$ Wurzeln vorhanden sein. Denn sei $x$ eine derselben, so realisirt sie die Gleichung:

$$x^n - a = 0.$$

Ist nun $\alpha$ ein Werth von $x$, so muss $x^n - a$ durch $x - \alpha$ theilbar sein. — Der Quotient $\frac{x^n - a}{x - a}$ hat nämlich jedenfalls die Form:

$$x^{n-1} + A x^{n-2} + B x^{n-3} + \dots$$
$$+ Cx + D + \frac{E}{x - \alpha},$$

wo die Coefficienten auch complex sein können. Es ist also:

$$x^n - a = (x - \alpha)(x^{n-1} + A x^{n-2} + \dots$$
$$+ Cx + D) + E,$$

und es muss für $x = \alpha$ auch $x^n = a$ sein, was unmöglich ist, wenn $E$ nicht gleich Null wird.

Es kann aber ein Ausdruck $n$ten Grades wie $x^n - a$ nicht mehr als $n$ einfache Factoren haben. Es ist somit in dem Gesagten die Theorie der Wurzelausziehung aus reellen und complexen Zahlen erschöpft.

Es wäre an dieser Stelle noch der Beweis zu führen, dass jede Gleichung $n$ten Grades auch $n$ complexe Wurzeln habe.

Wegen dieses Beweises verweisen wir auf den Artikel: „Quadratische Factoren", namentlich auf den ersten elementaren Beweis.

Was, um nochmals auf die Wurzeln zurückzukommen, die Darstellung derselben anbetrifft, so ist, wenn $a = 1$ ist, ein Werth von $\sqrt[n]{a}$ ebenfalls $= 1$, also der allgemeine Ausdruck von $\sqrt[n]{1}$ wird sein:

$$\sqrt[n]{1} = e^{\frac{2 s \pi i}{n}},$$

und aus diesem Ausdruck, multiplicirt mit einem Werthe der $n$ten Wurzel aus $\alpha$, besteht der allgemeine Werth dieser Wurzel.

Der Ausdruck:

$$e^{\frac{2 s \pi i}{n}} = \cos \frac{2 s \pi}{n} + i \sin \frac{2 s \pi}{n}$$

ist offenbar gegeben, wenn man den ganzen Kreis in $n$ Theile theilt, und die Darstellung der $n$ten Wurzeln und die Theilung des Kreises bilden daher dasselbe Problem. Namentlich wird die $n$te Wurzel der Einheit immer durch Auflösung von quadratischen Gleichungen erfolgen, wenn der Kreis auf geometrischem Wege, d. h. mittels der graden Linie und des Kreises in $n$ Theile getheilt werden kann, und umgekehrt. Was dies Problem anbetrifft, so vergleiche den Artikel: Kreistheilung. Für die Darstellung der $n$ten Wurzeln der Einheit in den einfacheren Fällen bedient man sich derjenigen Formeln, welche aus VII. und VII a. des Abschnitts 4) wie in der Trigonometrie abgeleitet werden, z. B.:

$$\cos 2\alpha = \cos \alpha^2 - \sin \alpha^2 = 2 \cos \alpha^2 - 1$$
$$= 1 - 2 \sin \alpha^2,$$
$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \qquad \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

A) Sei $n=2$, so ist $\cos\pi=-1$, $\sin\pi=0$, also $e^{\pi i}=-1$,

$$\sqrt{1}=1 \text{ und } =-1, \qquad \sqrt{a}=\alpha \text{ oder } =-\alpha,$$

wo unter $\alpha$ diejenige Wurzel verstanden ist, welche der Bedeutung genügt, dass ihr imaginärer Theil zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegt (also auch Null sein kann, was eintritt, wenn $a$ positiv ist).

B) Sei $n=3$, so ist nach Formel VII, Abschnitt 4):

$$\sin 2\pi=\sin\tfrac{2}{3}\pi\cos\tfrac{4}{3}\pi-\cos\tfrac{2}{3}\pi\sin\tfrac{4}{3}\pi.$$

Setzt man also $\frac{2}{3}\pi=x$, so ergibt sich:

$$0=\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x,$$

oder:

$$\sin x(1-2\sin x^2)+2\sin x\cos x^2=0,$$
$$1-2\sin x^2+2(1-\sin x^2)=0,$$
$$3=4\sin x^2,$$

also:

$$\sin\tfrac{2}{3}\pi=\tfrac{1}{2}\sqrt{3},$$
$$\cos\tfrac{2}{3}\pi=-\tfrac{1}{2},$$

(nach der Formel $\cos x^2+\sin x^2=1$ ist das negative Zeichen zu nehmen, weil $\frac{2}{3}\pi$ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\pi$ liegt).

$$e^{\frac{2}{3}\pi i}=-\tfrac{1}{2}(1-i\sqrt{3}),$$
$$e^{\frac{4}{3}\pi i}=(e^{\frac{2}{3}\pi i})^2=\tfrac{1}{4}(-2-2i\sqrt{3})=-\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3}),$$

also:

$$\sqrt[3]{a}=-\frac{\alpha}{2}(1-i\sqrt{3}), \quad -\frac{\alpha}{2}(1+i\sqrt{3}), \quad \alpha.$$

C) Sei $n=4$.

$$\cos\frac{\pi}{2}=0, \qquad \sin\frac{\pi}{2}=1,$$
$$e^{\frac{\pi}{2}i}=i, \; e^{\frac{2\pi}{2}i}=-1, \; e^{\frac{3\pi}{2}i}=-i.$$
$$\sqrt[4]{a}=\alpha, \quad \alpha i, \quad -\alpha, \quad -\alpha i.$$

D) Sei $n=5$.

$$\sin\pi=0=\sin\tfrac{2}{5}\pi\cos\tfrac{3}{5}\pi+\cos\tfrac{2}{5}\pi\sin\tfrac{3}{5}\pi,$$

also wenn man $x=\frac{1}{5}\pi$ setzt:

$$0=\sin 2x\cos 3x+\cos 2x\sin 3x,$$
$$\sin 3x=\sin 2x\cos x+\cos 2x\sin x,$$
$$0=\sin 2x\cos 3x+\sin 2x\cos 2x\cos x+(1-\sin 2x^2)\sin x,$$
$$\cos 3x=\cos 2x\cos x-\sin 2x\sin x,$$
$$0=2\sin 2x\cos 2x\cos x-2\sin 2x^2\sin x+\sin x,$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x,$$

also wenn man mit $\sin x$ hebt:

$$0=4\cos x^2\cos 2x-8\sin x^2\cos x^2+1,$$

oder da:

$$\cos 2x=2\cos x^2-1$$

ist:

$$4\cos x^2\,(2\cos x^2-1)-8\cos x^2\,(1-\cos x^2)+1=0,$$
$$16\cos x^4-12\cos x^2+1=0.$$

Es ergibt sich hieraus:

$$4\cos x^2=\tfrac{3}{2}\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Was das Zeichen anbetrifft, so merke man, dass $\cos\frac{\pi}{4}=\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, also $\cos\frac{\pi}{5}>\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $4\cos\frac{\pi}{5}^2>2$ ist, mithin das obere Zeichen genommen werden muss. Es ist also:

$$\cos\frac{\pi}{5}=\tfrac{1}{2}\sqrt{(\tfrac{3}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{5})},$$
$$\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{5}^2},$$

woraus sich ergibt:

$$\sqrt[5]{a}=\alpha,\quad \alpha\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^2,\ \alpha\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^4,\ \alpha\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^6,$$
$$\alpha\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^8,$$

Ausdrücke, deren Berechnung wir hier sparen. Zugleich ergibt sich:

$$\sqrt[10]{a}=\alpha,\ \alpha\left(\cos\frac{\pi}{5}+i\sin\frac{\pi}{5}\right)^s,$$

wo $s$ die Werthe 1 bis 9 annimmt.

E) Sei $n=15$, so hat man:

$$\cos\frac{2\pi}{15}=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{5},$$

und da:

$$\cos\frac{\pi}{3}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{2}{3}\pi}{2}}=\tfrac{1}{2},$$
$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{(1-\tfrac{1}{4})}=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

bekannt sind, ebenso wie $\cos\frac{\pi}{5}$ und $\sin\frac{\pi}{5}$, so sind auch die 15ten Wurzeln der Einheit durch blosses Ausziehen von Quadratwurzeln zu finden. Wegen der Formeln, welche $\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\sin\frac{\alpha}{2}$ geben, wenn $\cos\alpha$ und $\sin\alpha$ bekannt sind, kann man jede $2n$te Wurzel auf diese Weise bestimmen, wenn die $n$te bekannt ist. Zu merken ist noch, dass auch die 17te Wurzel der Einheit durch Ausziehen von Quadratwurzeln gefunden werden kann. (Siehe den Artikel: „Kreistheilung“.) Bei wirklicher numerischer Berechnung von Wurzeln bedient man sich jedoch immer der trigonometrischen Tafeln.

7) Mehrdeutigkeit der Logarithmen.

Wir wollen mit $l(a)$ denjenigen Logarithmus von $a$ bezeichnen, von dessen Vorhandensein wir uns in jedem Falle überzeugt haben, und dessen imaginärer Theil grösser als $-\pi$ und nicht grösser als $\pi$ ist, während $\lg a$ jeden Ausdruck $x$ bezeichnen soll, welcher die Gleichung $e^x=a$ verificirt. Offenbar ist dann:

$$e^{l(a)}=a,$$

und da $e^{2s\pi i}=1$ ist:

$$e^{l(a)+2s\pi i}=a,$$

und folglich:

$$\lg a = l(a) + 2s\pi i,$$

wo $s$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, Null inbegriffen, vorstellt.

„Jede complexe Grösse hat also unendlich viel Logarithmen, welche sich aus einem derselben ergeben, wenn man ein beliebiges Vielfaches von $2\pi i$ hinzuzählt. Namentlich ist:

$$e^0 = 1, \qquad l(1) = 0,$$

also:

$$\lg 1 = 2s\pi i;$$

ferner:

$$e^{\pi i} = -1, \qquad \pi i = l(-1),$$

also:

$$\lg(-1) = (2s+1)\pi i,$$

$$e^{\frac{\pi}{2}} = i, \quad \frac{\pi}{2} i = l(i),$$

also:

$$\lg i = (4s+1)\frac{\pi}{2} i;$$

$$e^{-\frac{\pi}{2} i} = -i, \qquad l(-i) = -\frac{\pi}{2} i,$$

$$\lg(-i) = (4s-1)\frac{\pi}{2} i = (4s+3)\frac{\pi}{2} i.$$

„Alle positiven Zahlen haben Logarithmen, deren imaginärer Theil stets ein grades Vielfaches von $\pi i$ sein muss"

und wegen der Formel $\lg(-a) = \lg a + \lg(-1)$:

„Alle negativen Zahlen haben solche Logarithmen, deren imaginärer Theil ein ungrades Vielfaches von $\pi$ ist."

„Alle rein imaginären Zahlen haben solche Logarithmen, deren imaginärer Theil ein ungrades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, und zwar wenn sie mit $+i$ multiplicirt sind, ein Vielfaches von der Form $4s+1$, wenn sie mit $-i$ multiplicirt sind, von der Form $4s+3$."

Aus der Mehrdeutigkeit der Logarithmen ergibt sich die der Exponentialgrössen. Welchen Werth des Logarithmus man auch nimmt, immer ist:

$$a^x = e^{x \lg a} = \lim\left(1 + \frac{x \lg a}{n}\right)^n,$$

d. h.:

$$a^x = 1 + x \lg a + \frac{x^2 (\lg a)^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3 (\lg a)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \ldots,$$

also:

$$a^x = 1 + x(l(a) + 2s\pi i) + \frac{x^2}{1 \cdot 2}(l(a) + 2s\pi i)^2 + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}(l(a) + 2s\pi i)^3 + \ldots$$

eine Reihe, die im Allgemeinen unendlich viel Werthe hat. Da jedoch $a^x$ eindeutig ist, wenn $x$ eine ganze Zahl ist und nur $k$ Werthe hat, wenn $x$ ein Bruch mit dem Nenner $k$ ist, so wird sich auch der Ausdruck rechts im ersten Falle auf einen, im letztern auf $k$ Werthe reduciren, und diese Reihe nur dann unendlich viel Werthe behalten, wenn $x$ eine irrationale oder eine imaginäre Zahl ist.

8) Berechnung der Logarithmen reeller und complexer Zahlen.

Wir haben bisher nur die Möglichkeit der Berechnung der Logarithmen bewiesen, und wollen jetzt dieselben wirklich darstellen.

Gehen wir von der Formel aus:

$$x = e^{\lg x} = \lim\left(1+\frac{\lg x}{n}\right)^n,$$

so erhalten wir:

$$\lim\left[n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right)\right] = \lg x.$$

Wir setzen $x=1+y$, und berechnen den Ausdruck $(1+y)^{\frac{1}{n}}$ nach dem Binomischen Satze für gebrochene Zahlen. Da derselbe aber nur denn eine convergente Reihenentwickelung gibt, wenn der Modul von $y$ kleiner als 1 ist (vergleiche den Artikel: „Reihen"), so ist von vorn herein ersichtlich, dass unsere Entwickelung höchstens in diesem Umfange gültig sein wird. Es ist:

$$(1+y)^{\frac{1}{n}} = 1+\frac{1}{n}\,y - \frac{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2}\,y^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\,y^3 - \ldots,$$

woraus sich ergibt:

$$n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right) = y - \frac{1-\frac{1}{n}}{1\cdot 2}\,y^2 + \frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\,y^3 - \ldots$$

Um die Grenzen der Convergenz dieser Reihe zu bestimmen, untersuchen wir den Quotienten des $s+1$ten durch das $s$te Glied:

$$\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(s-\frac{1}{n}\right)1\cdot 2\cdot 3\ldots s\;\; y^{s+1}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(s-1-\frac{1}{n}\right)1\cdot 2\cdot 3\ldots(s+1)\,y^s} = \left(s-\frac{1}{n}\right)\frac{y}{s+1}$$

$$= \frac{sy}{s+1} - \frac{y}{n(s+1)},$$

und es ist klar, dass mit wachsendem $s$ das letztere Glied verschwindet, das erstere sich der Grenze $y$ nähert. Diese Reihe convergirt also in der That, wenn $y$ kleiner als 1 ist, falls $y$ reell ist; sollte $y$ imaginär sein, so setzt man $y = re^{\varphi i}$, und der Modul $r$ wird dann kleiner als 1 sein müssen. Denn da alle Potenzen von $y$, also $y^k$ Grössen von der Gestalt $r^k e^{k\varphi i}$ ergeben, und diese in einen reellen und imaginären Theil zerfallen, $r^k \cos k\varphi$, $ir^k \sin k\varphi$, die beide kleiner als $r^k$ sind, so werden die entsprechenden Reihen convergiren, wenn diejenige convergirt, welche entsteht, wenn man $y=r$ setzt, was der Fall ist, wenn $r$ kleiner als 1 ist. Lässt man nun in unserer Entwickelung $n$ wachsen, so verschwinden die Ausdrücke $\frac{1}{n}$, und man hat:

1) $$\lg(1+y) = y - \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{3}y^3 - \tfrac{1}{4}y^4 + \ldots$$

Man kann jedoch mittels dieser Reihe unmittelbar nur die Logarithmen derjenigen reellen Zahlen berechnen, welche zwischen 0 und 2 liegen, da diese nur sich auf eine Form $1+y$ bringen lassen, wo $y$ zwischen $-1$ und $+1$ liegt. Ebenso ergeben sich daraus nur die Logarithmen der imaginären Zahlen von der Form $1+re^{\varphi i}$, wo $r$ kleiner als 1 ist. Setzt man:

$$1+re^{\varphi i} = a+bi,$$

so muss sein:

$$a = 1+r\cos\varphi,\quad b = r\sin\varphi,\quad (a-1)^2+b^2 = r^2.$$

Es ist also die Bedingung zu erfüllen:

$$(a-1)^2+b^2<1,\quad \text{oder}\quad (a-1)^2<1-b^2,$$

welche Bedingung man auch schreiben kann:

$$a^2-2a<-b^2, \quad \text{oder} \quad 2a-a^2>b^2.$$

Indess lassen sich Reihen für $\lg(1+y)$ finden, welche immer convergiren. Nehmen wir zunächst an, $x$ wäre reell und positiv, so dass $x$ immer einen reellen Logarithmus hat, so ist:

$$e^{\lg x}=x, \quad e^{\frac{1}{n}\lg x}=\sqrt[n]{x},$$

wo wir unter $\sqrt[n]{x}$ immer die positive Wurzel verstehen. Es ist also $\frac{1}{n}\lg x=\lg\sqrt[n]{x}$, und die Bedeutung dieser uns schon bekannten Formeln ist hier so beschränkt, dass $\lg x$ und $\lg\sqrt[n]{x}$ die reellen Werthe $l(x)$ und $l(\sqrt[n]{x})$ dieser Grössen bedeuten. Formel 1) gibt dann:

$$l(\sqrt[n]{x})=\sqrt[n]{x}-1-\tfrac{1}{2}(\sqrt[n]{x}-1)^2+\tfrac{1}{3}(\sqrt[n]{x}-1)^3-\ldots,$$

also:

$$2) \qquad l(x)=n(\sqrt[n]{x}-1)-\frac{n}{2}(\sqrt[n]{x}-1)^2+\frac{n}{3}(\sqrt[n]{x}-1)^3-\ldots,$$

Welche positive Zahl auch $x$ sei, immer lässt sich eine $n$te Wurzel aus $x$ finden, welche um ein beliebig Kleines von der Einheit abweicht, und somit lässt sich etwa durch wiederholtes Quadratwurzelausziehen aus $x$ immer ein Werth von $n$ bestimmen, welcher der Reihe sogar einen beliebigen Grad der Convergenz gibt. Für wachsendes $n$ kann also die Reihe auf ihr erstes Glied beschränkt werden, wo sie dann mit dem oben für $\log x$ gegebenen Werth $\lim n(x^{\frac{1}{n}}-1)$ zusammenfällt. Dass übrigens die Reihe keinen andern Werth von $\lg x$ als $l(x)$ gibt, wenn $\sqrt[n]{x}$ reell und positiv ist, folgt daraus, dass beide Ausdrücke links und rechts reell sind, und dies bei keinem andern Werth von $\lg(x)$ stattfindet. Was die Logarithmen der negativen oder rein imaginären Zahlen anbetrifft, so ergeben dieselben sich aus der Reihe 2) ebenfalls mittels der Formeln:

$$l(-x)=l(x)+\pi i,$$

$$l(ix)=l(x)+\frac{\pi}{2}i,$$

$$l(-ix)=l(x)-\frac{\pi}{2}i.$$

Wir wenden uns jetzt zur Berechnung der Logarithmen complexer Zahlen Es sei:

$$e^{\alpha+\beta i}=a+bi,$$

also:

$$\alpha+\beta i=\lg(a+bi),$$

so lässt sich $\alpha$ immer noch durch die Reihenentwickelung 2) bestimmen. Es ist nämlich:

$$e^{\alpha-\beta i}=a-bi,$$

also indem man beide Formeln multiplicirt:

$$e^{2\alpha}=a^2+b^2, \quad 2\alpha=l(a^2+b^2),$$

$$\alpha=\tfrac{1}{2}l(a^2+b^2), \quad \text{oder} \quad =l(\sqrt{a^2+b^2}),$$

also $\alpha$ ist der reelle Logarithmus einer positiven Zahl. Es kommt also nur so die Bestimmung von $\beta$ an. Wir haben:

$$e^{\beta i} = A + Bi,$$

wo:

$$A = \frac{a}{r},\ B = \frac{b}{r} \quad \text{und} \quad r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$$

ist. Es ist also immer $A^2 + B^2 = 1$.

Da die Entwickelnng nach Reihe 1) möglich war, wenn $(A-1)^2 < 1 - B^2$ war, so ist hier $(A-1)^2 < A^2$ die Bedingung. Sie wird erfüllt, wenn $A$, abgesehen vom Vorzeichen, grösser als $\frac{1}{2}$ ist.

Aus der Formel $e^{\beta i} = A + Bi$ ergibt sich:

$$A = \cos\beta, \quad B = \sin\beta.$$

Nun ist $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. In Abschnitt 6) wurde nämlich berechnet: $\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$, also ist:

$$\cos\tfrac{1}{3}\pi = \cos(\pi - \tfrac{2}{3}\pi) = +\tfrac{1}{2}.$$

Ferner nimmt der Cosinus zwischen 0 und $\pi$ immer ab, also ist die Reihe 1) zu gebrauchen, so lange $\beta = l(A + Bi)$ kleiner als $\frac{\pi}{3}$ ist. Da diese Entwicklung, welche wegen des complexen Ausdruckes nach dessen Potenzen geschieht, nicht sehr bequem ist, so bedient man sich in der Regel einer anderen. Sei wieder:

$$e^{\alpha + \beta i} = a + bi, \quad \text{also} \quad e^{\alpha - \beta i} = a - bi.$$

Die Division beider Formeln gibt:

$$e^{2\beta i} = \frac{a + bi}{a - bi} = \frac{1 + \frac{b}{a}i}{1 - \frac{b}{a}i},$$

also wenn $\frac{b}{a}$, ein Ausdruck, der jeden reellen Werth annehmen kann, gleich $u$ gesetzt wird:

$$2\beta i = \lg\frac{1 + ui}{1 - ui} = \lg(1 + ui) - \lg(1 - ui),$$

also wenn man beide Logarithmen nach Formel 1) entwickelt, so ergibt sich:

$$\lg(1 + ui) = ui + \tfrac{1}{2}u^2 - \tfrac{1}{3}u^3 i - \tfrac{1}{4}u^4 + \tfrac{1}{5}u^5 i - \ldots,$$
$$\lg(1 - ui) = -ui + \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 i - \tfrac{1}{4}u^4 - \tfrac{1}{5}u^5 i + \ldots,$$

also:

3) $$\beta = u - \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5 - \tfrac{1}{7}u^7,$$
$$u = \frac{b}{a}.$$

Es fragt sich zunächst, in welchen Grenzen diese Reihe convergirt. Die Bedingungsgleichung gibt: $u^2 < 1$, also $b < a$, abgesehen vom Vorzeichen. Da übrigens:

$$A = \cos\beta = \frac{a}{r} \quad \text{und} \quad B = \sin\beta = \frac{b}{r}$$

war, so muss auch $\sin\beta < \cos\beta$, abgesehen vom Vorzeichen, sein. Da nun der Sinus zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ wächst, der Cosinus in dieselben Grenzen fällt, aber:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

ist, so folgt daraus, dass diese Entwickelung so lange statt hat, als $\beta$ zwischen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ liegt. Aendert nämlich $u$ sein Vorzeichen, so geschieht dies offenbar auch mit $\beta$, ohne dass diese Grösse ihren absoluten Werth ändert, also jedem $\beta$

zwischen 0 und $\frac{\pi}{4}$ entspricht ein $\beta$ zwischen 0 und $-\frac{\pi}{4}$. Der Gebrauch dieser Gleichung gilt noch für die Grenzen $\frac{\pi}{4}$ und $-\frac{\pi}{4}$ selbst. Es ist nämlich dort $u=\frac{b}{a}$ $=\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{4}}=1$, und $u=\frac{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)}=-1$. Die Glieder der Reihe nehmen für $u=1$ ab, und haben abwechselnde Zeichen, und solche Reihen convergiren immer. (Siehe den Artikel: „Reihen.") Man hat also:

$$\frac{\pi}{4}=1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\ldots,$$

Die bekannte Leibnitz'sche Reihe, welche zur Bestimmung von $\pi$ dient. Da diese Reihe jedoch nur äusserst langsam convergirt, so bedient man sich anderer Entwickelungen zur Bestimmung von $\pi$. (Siehe über diesen Gegenstand den Artikel: „Quadratur (geometrische)".)

Wir hatten allgemein:

$$e^{\alpha+\beta i}=a+bi,$$

also:

$$\alpha+\beta i=\lg(a+bi).$$

Es ist aber noch zu zeigen, welchen Logarithmus unsere Reihenentwickelung vorstellt. Es ist nämlich in allen Logarithmen, wie wir gesehen haben, nur $\beta$ verschieden. — Offenbar sind die Darstellungen von $\lg(1+ui)$ und $\lg(1-ui)$ continuirliche Functionen von $u$, so lange die Reihen convergiren, welche für $u=0$ verschwinden. Für diesen Werth stellen sie also $l(1+ui)$ und $l(1-ui)$ vor. Sie können aber für keinen Werth von $u$ einen andern Logarithmus vorstellen. Denn wäre etwa die erste Reihenentwickelung von $u=0$ bis $u=\alpha$, gleich $l(1+ui)$ und für $u=\alpha+r$ gleich $l(1+ui)+2s\pi i$. Da dies ja der allgemeine Ausdruck ist, so könnte dieser Ausdruck nur aus dem erstern hervorgehen, wenn man eine endliche Zahl $2s\pi i$ zuzählt, würde also nicht continuirlich sein.

Hieraus folgt, dass die imaginären Theile beider Reihen der eine zwischen 0 und $\pi$, der andere zwischen $-\pi$ und 0 liegt (sie haben nämlich ungleiche Vorzeichen). Es wird also:

$$2\beta i=l(1+ui)-l(1-ui)$$

zwischen $2\pi i$ und $-2\pi i$, d. h. $\beta$ zwischen $-\pi$ und $+\pi$ liegen. Es wird also auf diese Weise immer $l(a+bi)$ gefunden. Diese Betrachtung ist bei Bestimmung der Grenzen der Convergenz von $\beta$ und der Reihenentwickelung für $\frac{\pi}{4}$ bereits anticipirt.

Noch ist $\beta$ zu bestimmen für den Fall, dass $b>a$, $\beta>\frac{\pi}{4}$ ist. Es ist dann noch immer:

$$e^{2\beta i}=\frac{a+bi}{a-bi},$$

also:

$$e^{2\beta i}=\frac{a-bi}{a+bi},$$

also wenn man Zähler und Nenner rechts mit $i$ multiplicirt:

$$e^{-2\beta i}=\frac{b+ai}{-b+ai},$$

oder wenn man mit $e^{\pi i}=-1$ multiplicirt:

$$e^{2\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)i}=\frac{b+ai}{b-ai}=\frac{1+\frac{a}{b}i}{1-\frac{a}{b}i},$$

und wenn man $\frac{a}{b}=v$ setzt:

$$\frac{\pi}{2}-\beta=\frac{1}{2i}\lg\frac{1+vi}{1-vi}.$$

Die Entwickelung aber gibt ganz wie oben:

$$\frac{\pi}{2}-\beta=v-\tfrac{1}{3}v^3+\tfrac{1}{5}v^5-\tfrac{1}{7}v^7+\ldots$$

$$v=\frac{a}{b},$$

eine Reihe, welche convergirt, wenn $v^2<1$, also $a$, abgesehen vom Vorzeichen, kleiner als $b$, oder wenn $\frac{\pi}{2}-\beta$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{4}$, also zwischen $\frac{1}{4}\pi$ und $\frac{3}{4}\pi$ liegt. In diesem Falle hat man also:

4) $$\beta=\frac{\pi}{2}-v+\tfrac{1}{3}v^3-\tfrac{1}{5}v^5+\ \ldots$$

$$v=\frac{a}{b}.$$

Immer wird eine der Reihen 3) oder 4) den Werth von $\beta$ geben. Wir haben nämlich die Fälle, in welchen beide convergiren, noch nicht völlig erschöpft. Die Reihe 3) convergirte, so lange $\sin\beta<\cos\beta$ war, abgesehen vom Vorzeichen. Dies ist nicht allein in den Grenzen $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$ der Fall, sondern auch in den Grenzen $\frac{3}{4}\pi$ und $\pi$, denn eine Grösse in diesen Grenzen ist gleich $\pi-\alpha$, wo $\alpha$ zwischen 0 und $\frac{1}{4}\pi$ liegt, aber:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\quad \text{und}\quad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$

Gleiches gilt in den Grenzen $-\frac{3}{4}\pi$ und $-\pi$, denn:

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\quad \text{und}\quad \cos(-\alpha)=\cos\alpha.$$

Der Umstand, dass der Winkel positiv oder negativ ist, hat also auf unsere Schlüsse keinen Einfluss. Die Convergenz der Reihe 4) findet aus diesem Grunde auch in den Grenzen $-\frac{1}{4}\pi$ und $-\frac{3}{4}\pi$ statt, wie sich auch von selbst ergibt, da die Reihe für $\frac{\pi}{2}-\beta$ in diesen Grenzen nur ihr Zeichen ändert.

Man hat also allgemein:

$$l(a+bi)=\alpha+\beta i,$$

wo $\alpha=l(\sqrt{a^2+b^2})$ immer durch die Formel 2) zu bestimmen ist, und $\beta$ sich durch Formel 3) ergibt, wenn $b$ kleiner als $a$, dagegen durch Formel 4), wenn $a$ kleiner als $b$ ist, abgesehen vom Vorzeichen.

Schliesslich bemerken wir noch, dass man wie in der Trigonometrie setzt:

$$y=\arcsin x,\ \text{wenn}\ x=\sin y,$$
$$y=\arccos x,\ \text{wenn}\ x=\cos y,$$
$$y=\text{arc tg}\,x,\ \text{wenn}\ x=\text{tg}\,y.$$

Da man nun hat:

$$e^{\beta i}=\cos\beta+i\sin\beta,\quad e^{2\beta i}=\frac{1+i\,\text{tg}\,\beta}{1-i\,\text{tg}\,\beta},$$

also:

$$e^{i\arcsin\alpha}=\sqrt{(1-\alpha^2)}+\alpha i,$$
$$e^{i\arccos\alpha}=\alpha+i\sqrt{(1-\alpha^2)},$$
$$e^{2i\,\text{arc tg}\,\alpha}=\frac{1+i\alpha}{1-i\alpha},$$

so ist:

$$\arcsin \alpha = \frac{1}{i} \lg [\sqrt{(1-\alpha^2)} + \alpha i],$$

$$\arccos \alpha = \frac{1}{i} \lg [\alpha + i \sqrt{(1-\alpha^2)}],$$

$$\operatorname{arc tg} \alpha = \frac{1}{2i} \lg \frac{1+i\alpha}{1-i\alpha},$$

und diese drei Functionen sind also ebenfalls Ausdrücke, denen unendlich viel Werthe zukommen.

9) Betrachtungen über die Natur des Imaginären.

Wir haben in den vorigen Betrachtungen dem Imaginären eine rein formelle Bedeutung gegeben, die sich etwa auch so fassen lässt, dass jede Gleichung von der Form $\alpha+\beta i=\gamma+\delta i$ eben nur ein anderer Ausdruck für die Gleichungen $\alpha=\gamma$, $\beta=\delta$ sei. Dass aber mit den Ausdrücken rechts und links in dieser Gleichung nach den gewöhnlichen, für reelle Zahlen gültigen Regeln gerechnet werden könne, also auch andere Gleichungen gebildet werden dürfen, wenn man damit die Gleichung $i^2=-1$ verbindet, also rein formell immer $i^2$ mit $-1$ vertauscht. Das Resultat jeder solchen Rechnung ist dann immer wieder ein Ausdruck von der Form $a+bi$, und es ist dies die wichtigste Eigenschaft imaginärer Ausdrücke, dass man eben zu keinen neuen Formen, weder durch directe, noch durch indirecte Operationen geführt wird.

Ueberlegt man, welche Annahmen nöthig sind, um sämmtliche einfachen Operationen mit imaginären Grössen vollführen zu können, so kommt man auf folgende wenigen Regeln:

A) Beim Addiren.

Zwei Ausdrücke von der Form $a+bi$ werden addirt, wenn man die reellen und die mit $i$ multiplicirten Theile für sich addirt.

Dieselbe Regel gilt auch für die Subtraction, die ja eine Addition von zwei Zahlen ist, deren eine negativ genommen wird.

B) Bei der Multiplication.

Der Ausdruck $a+bi$ kann mit jeder ganzen Zahl $m$ durch die Formel $am+bmi$ multiplicirt werden, welches sich aus $A$ ergibt, da das Multipliciren nur ein wiederholtes Addiren ist.

Das Multipliciren mit reellen Brüchen macht auch keine neuen Betrachtungen nöthig. Denn es ist der Ausdruck $\frac{c}{d}(a+bi)=\alpha+\beta i$ definirt durch die Gleichung $c(a+bi)=d(\alpha+\beta i)$. Da nun $\frac{c}{d}a+\frac{c}{d}bi$ auf die angegebene Weise mit $d$ multiplicirt, $ca+cbi=c(a+bi)$ gibt, so stellt obiger Ausdruck das verlangte Product vor, auch kann der Multiplicator eine Irrationalzahl sein, die man sich als Grenze eines Bruches denkt. — Dagegen verlangt das Multipliciren mit complexem Multiplicator eine neue Definition. Sie ist gegeben durch die Sätze:

I. Ein Ausdruck $a+bi$ wird mit $c+di$ multiplicirt, wenn man ihn erst mit $c$ und dann mit $di$ multiplicirt, und die Producte addirt. — Die Multiplication mit $c$ ist nach dem Obigen ausführbar; was die mit $di$ anbetrifft, so gehen wir die Regel:

II. $a+bi$ wird mit $di$ multiplicirt, wenn man erst mit $d$ multiplicirt und das Product abermals mit $i$ multiplicirt. Die erste Multiplication ist ausführbar und führt zu einem Ausdrucke von derselben Form. Es bleibt nur die Multiplication mit $i$ übrig.

III. $a+bi$ wird mit $i$ multiplicirt, wenn man erst $a$ und dann $bi$ mit $i$ multiplicirt, und die Theilproducte addirt. — Dem Product $ai$ lässt man seine formelle Bedeutung. Das Product $bii=bi^2$ wird definirt, eben mittels der Gleichung

$$i^2=-1.$$

Die Division führt zu keiner neuen Annahme, denn der Quotient:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\alpha+\beta i$$

ist definirt durch die Gleichung:

$$a+bi=(\alpha+\beta i)(c+di),$$

und da hieraus sich:

$$(a+bi)(c-di)=(\alpha+\beta i)(c^2+d^2)$$

mittels der Multiplications-Sätze ergibt so hat man auch:

$$\alpha+\beta i=\frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+(cb-ad)i}{c^2+d^2},$$

die Formel, welche wir oben fanden.

C) Was das Potenziren anbetrifft, so ist bloss die Definition nöthig:

$$e^{\alpha+\beta i}=\lim\left(1+\frac{\alpha+\beta i}{n}\right)^n,$$

und nach der Definition der Logarithmen und dem Nachweise, dass alle Logarithmen complexe Zahlen sind:

$$(a+bi)^{\alpha+\beta i}=e^{(\alpha+\beta i)\lg(a+bi)}.$$

Wenn somit die Gesetze des Rechnens

mit Imaginärem vollständig präcisirt sind, so lässt sich nicht leugnen, dass dem Begriffe des Imaginären selbst eine gewisse Dunkelheit anzukleben scheint, die darin beruht, dass die Ausdrücke, welche in diesen Rechnungen vorkommen, an sich nie zur Geltung in irgend einer Anwendung kommen, sondern immer nur die Resultate, insofern sie reelle Zahlen mit einander vergleichen. Man hat sich daher wiederholentlich bemüht, diesen Rechnungen gewissermaassen eine Darstellung zu geben, d. h. den Ausdrücken $a+bi$ eine nicht bloss formelle Bedeutung zu verleihen. Gauss sagt unter Anderm über diesen Gegenstand (Göttinger gelehrte Anzeigen, Stück 64, Jahrgang 1831): „Positive und negative Zahlen können nur da eine Anwendung finden, wo das Gezählte ein Entgegengesetztes hat, was mit ihm vereinigt gedacht, der Vernichtung gleich zu stellen ist. Genau besehen findet diese Voraussetzung nur da statt, wo nicht Substanzen (für sich denkbare Gegenstände), sondern Relationen zwischen je zwei Gegenständen das Gezählte sind. Postulirt wird dabei, dass diese Gegenstände auf eine bestimmte Art in eine Reihe geordnet sind, z. B. $A, B, C, D$ . . ., und dass die Relation des $A$ und $B$ als der Relation des $B$ zu $C$ . . . gleich betrachtet werden kann. Hier gehört nun zu dem Begriff der Entgegensetzung nichts weiter, als der Umtausch der Glieder der Relation, so dass wenn die Relation, oder der Uebergang von $A$ zu $B$ als $+1$ gilt, die Relation von $B$ zu $A$ als $-1$ dargestellt werden muss. Insofern also eine solche Reihe auf beiden Seiten unbegrenzt ist, repräsentirt jede reelle ganze Zahl die Relation eines beliebig als Anfang gewählten Gliedes zu einem bestimmten Gliede der Reihe. — Sind aber die Gegenstände von solcher Art, dass sie nicht in eine, wenn gleich unbegrenzte Reihe geordnet werden können, sondern sich nur in Reihen von Reihen ordnen lassen, oder was dasselbe ist, bilden sie eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen, verhält es sich dann mit den Relationen einer Reihe zu einer andern, oder den Uebergängen aus einer in die andere auf eine ähnliche Weise, wie vorhin mit den Uebergängen von einem Gliede einer Reihe zu einem andern Gliede derselben Reihe, so bedarf es offenbar zur Abmessung des Ueberganges von einem Gliede des Systems zu einem andern ausser den vorigen Einheiten $+1$ und $-1$ noch zweier andern unter sich auch entgegengesetzten $+i$ und $-i$. Offenbar muss aber dabei postulirt werden, dass die Einheit $i$ allemal den Uebergang von einem gegebenen Gliede einer Reihe zu einem bestimmten Gliede der unmittelbar angrenzenden Reihe bezeichne. Auf diese Weise wird also das System auf eine doppelte Art in Reihen von Reihen geordnet werden können. — Der Mathematiker abstrahirt gänzlich von der Beschaffenheit der Gegenstände und dem Inhalt ihrer Relationen; er hat es blos mit der Abzählung und Vergleichung der Relationen unter sich zu thun; insofern ist er ebenso wie er den durch $+1$ und $-1$ bezeichneten Relationen, an sich betrachtet, Gleichartigkeit beilegt, solche auf alle vier Elemente $+1$, $-1$, $+i$ und $-i$ zu erstrecken befugt."

Wie leicht zu sehen, kommt also diese Betrachtung darauf hinaus, dass man von einem Gebiete, worin sich alle Zahlenverhältnisse, reelle und imaginäre, bereits vorfinden, ausgeht. — Nur in geometrischen Vorstellungen, und zwar in der Ebene, ist ein Bild dieses Gebietes zu suchen; in geometrischen Vorstellungen darum, weil nur dieselben zwei Dimensionen darbieten, in der Ebene darum, weil der Uebergang von einem Gliede zum andern, also z. B. von $\alpha$ zu $n\alpha$ und von $\alpha+\beta i$ zu $n(\alpha+\beta i)$ immer in gleicher Weise geschehen muss, und dies nur in der Ebene durch Vermittelung der graden Linie geschehen kann.

Diese Betrachtungen führen also in ihrem Verfolge dahin, ein Bild des Complexen in der Ebene zu suchen. Andere Mathematiker sind so weit gegangen, diese räumlichen Vorstellungen nicht allein zur Versinnlichung des Imaginären zu benutzen, sondern sie mit demselben völlig zu identificiren, und wir werden die Grundzüge einer solchen Theoria in dem nächsten Abschnitte gehen.

10) Geometrische Auffassung der complexen Zahlen.

Es sind diese Betrachtungen einer Abhandlung von Cauchy (*Mémoire sur les quantités géométriques* in den *Exercices d'Analyse et de physique mathématique, Tome IV*) entnommen. Die imaginäre Grösse wird hierbei ganz durch die geometrische ersetzt.

A) Definition.

Von einem Punkt $O$ in der Ebene, der als Anfangspunkt der Coordinaten betrachtet wird, ziehe man eine feste Grade $Ox$. Sei $r$ der Abstand von $O$ und einem beliebigen Punkte $A$ in der Ebene, $\varphi$ der Winkel zwischen den Rich-

tungen $r$ und $Ox$, wie er durch die Drehung $\varphi$ der Linie $Ox$ in einem oder dem andern Sinne bestimmt wird. Den Radius Vector $r_\varphi = OA$ nennen wir „geometrische Grösse". Es sind also in einer solchen als Elemente enthalten der numerische Werth der Länge $r$, auch Modul von $r_\varphi$ genannt, und der Winkel $\varphi$, welchen wir Argument der geometrischen Grösse nennen. Gleich werden zwei geometrische Grössen genannt, wenn ihre Modulen und ihre Argumente übereinstimmen, also Länge und Richtung dieselbe ist. Es muss also sein:

$$R = r, \quad \Phi = \varphi + 2n\pi,$$

damit die geometrischen Grössen $R_\Phi$ und $r_\varphi$ gleich sind, wo $n$ eine ganze Zahl, $\pi$ die bekannte Ludolph'sche Zahl ist. Die Grösse $r_0$ liegt also auf der Axe $Ox$ selbst in einer Richtung, die als die anfängliche zu betrachten ist, die Grösse $r_\pi$ auf derselben Linie, aber in entgegengesetzter Richtung ($r_\pi$ ist also einer negativen Grösse identisch zu setzen). — Statt vom Punkte $O$ kann man auch von einem beliebigen Punkte ausgehen, und ist dann in $r_\varphi$ für $r$ die Länge des Abstandes zweier Punkte, für $\varphi$ der Winkel ihrer Verbindungslinie mit Richtung $Ox$ zu setzen. — Betrachtet man noch $Ox$ als Axe der $x$, und nimmt senkrecht darauf Axe $Oy$ an, so sind $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ die Projectionen der geometrischen Grösse $r_\varphi$ parallel den beiden Axen.

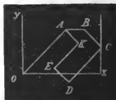
B) Directe Operationen mit geometrischen Grössen.

Geometrische Grössen $r_\varphi$, $r'_{\varphi'}$, $r''_{\varphi''}$ u. s. w. werden in folgender Weise addirt. Aus dem Endpunkt $B$ der Strecke $AB$, welche in Bezug auf Richtung und Abstand von $A$ durch die Grösse $r_\varphi$ definirt ist, ziehe man Linie $BC$, welche in Bezug auf Richtung und Abstand von $B$ durch $r'_{\varphi'}$ definirt ist, durch $C$ Linie $CD = r''_{\varphi''}$, wo $r''$ wieder die Länge, $\varphi''$ die Richtung anzeigt u. s. w. Ist $K$ der letzte Punkt, welcher auf diese Weise entsteht, und verbindet man $A$ mit $K$, so erhält man ein geschlossenes Polygon, und die letzte Seite desselben $AK$ heisst Summe der übrigen (Fig. 59).

Ist $R$ die Länge von $AK$, $p$ der Winkel mit $OX$, so setzt man:

$$R_p = r_\varphi + r'_{\varphi'} + r''_{\varphi''} + \ldots,$$

Fig. 59.




oder:

„Um die Summe mehrerer geometrischen Grössen zu finden, geht man von einem beliebigen Punkte aus und trägt jede der Grössen ihrer Länge und Richtung nach an den Endpunkt der vorhergehenden an. Diejenige Linie, welche das Polygon vollendet, stellt dann die Summe vor."

Bildet man die Projectionen des Vielecks, so wird die der letzten Seite gleich der algebraischen Summe der übrigen sein, also:

$$R\cos p = r\cos\varphi + r'\cos\varphi' + r''\cos\varphi'' + \ldots$$
$$R\sin p = r\sin\varphi + r'\sin\varphi' + r''\sin\psi'' + \ldots$$

oder:

$$X = x + x' + x'' + \ldots, \quad Y = y + y' + y'' + \ldots$$

und $X, x, x' \ldots, Y, y, y' \ldots$ sind die entsprechenden Projectionen,

Die Summe zweier geometrischen Grössen bildet mit denselben ein Dreieck, dessen Seiten die Moduln sind. Hieraus folgt offenbar der Satz:

„Der Modul einer Summe zweier Grössen liegt zwischen der Summe und Differenz der Moduln."

und für beliebig viele Grössen, die also ein Vieleck bilden:

„Der Modul einer Summe ist nie grösser als die Summe der Moduln."

Das Product von geometrischen Grössen wird definirt durch die Gleichung:

$$r_\varphi \cdot r'_{\varphi'} \cdot r''_{\varphi''} = (r \cdot r' \cdot r'')_{\varphi + \varphi' + \varphi''}$$

„Ein solches Product ist also eine geometrische Grösse, deren Modul das algebraische Product der Moduln, dessen Argument die Summe der Argumente ist."

Algebraische (positive oder negative) Summen werden, wie wir wissen, mit einer algebraischen Grösse multiplicirt, wenn man jedes Glied damit multiplicirt, und es lässt sich leicht zeigen, dass Gleiches für die geometrische Grössen gilt. Sei nämlich gegeben:

$$R_p = r_\varphi + r'_{\varphi'} + r''_{\varphi''} + \ldots$$

Soll jeder der Ausdrücke rechts und

links mit einer Grösse $\varrho_\vartheta$ multiplicirt werden, und ist Modul $\varrho$ gleich der Einheit, so braucht man nur alle Argumente um $\vartheta$ zu vermehren. Diese Vermehrung entspricht aber einer Drehung jedes Radius $R, r, r', r'' \ldots$ um diesen Winkel; es wird also das ganze Polygon, dessen Seiten $R, r, r', r'' \ldots$ um diesen Winkel gedreht werden, wobei sich natürlich die Form des Polygons nicht ändert, und es ist daher auch:

$$R_{p+\vartheta} = r_{\varphi+\vartheta} + r'_{\varphi'+\vartheta} + r''_{\varphi''+\vartheta} + \ldots$$

Man kann aber auch, ohne die Richtung der Seiten des Polygons zu ändern, demselben ein ähnliches substituiren, dessen Seiten das $\varrho$fache des gegebenen betragen, und man hat dann:

$$(R\varrho)_{p+\vartheta} = (r\varrho)_{\varphi+\vartheta} + (r'\varrho)_{\varphi'+\vartheta} + (r''\varrho)_{\varphi''+\vartheta} + \ldots$$

oder:

$$R_p \varrho_\vartheta = r_\varphi \varrho_\vartheta + r'_{\varphi'} \varrho_\vartheta + r''_{\varphi''} \varrho_\vartheta + \ldots$$

d. h.:

„Man findet das Product einer Summe geometrischer Grössen und einer andern geometrischen Grösse, wenn man jedes Glied einzeln mit der letztern multiplicirt."

Daraus folgt dann die Art, wie Summe mit Summen multiplicirt werden, ganz wie bei algebraischen Grössen.

Eine ganze Potenz geometrischer Grössen definiren wir als das Product gleicher Factoren. Es ist somit:

$$r_\varphi^m = \left(r^m\right)_{m\varphi}.$$

Hieraus folgen ganz wie bei algebraischen Grössen die Sätze:

$$r_\varphi^p\, r_\varphi^q = \left(r_\varphi\right)^{p+q},$$

und:

$$\left(r_\varphi^p\right)^q = r_\varphi^{pq},$$

aus welchen man leicht den Binomischen Satz für ganze und positive Exponenten ableiten kann.

Man nennt zwei geometrische Grössen entgegengesetzt, wenn ihre Summe Null gibt, und es ist sonach $r_{\varphi+\pi}$ oder $-r_\varphi$ die entgegengesetzte Grösse von $r_\varphi$, da die dritte Seite des Dreiecks, dessen Seiten $r_\varphi$ und $-r_\varphi$ sind, offenbar Null beträgt. — Der umgekehrte Werth einer geometrischen Grösse soll derjenige sein, welcher mit ihr das Product 1 bildet.

Die obigen Formeln benutzt man, um negative Potenzen zu definiren. Es ist also:

$$r_\varphi^{-m} = \left(r^{-m}\right)_{-m\varphi},$$

also:

$$r_\varphi^m\, r_\varphi^{-m} = \left(r^m\right)_{m\varphi} \left(r^{-m}\right)_{-m\varphi} = (r^0)_0 = 1.$$

Die Grösse $r_\varphi^{-m} = \left(r\right)_{-m\varphi}^{-m}$ ist also nichts Anderes als der umgekehrte Werth von $r_\varphi^m$.

Es ist ferner:

$$r_\varphi^0 = \left(r^0\right)_{0\varphi} = 1,$$

Man kann analog der Bezeichnung algebraischer Grössen auch die geometrischen immer mit einem einzigen Buchstaben bezeichnen.

C) Indirecte Operationen.

Die Definition derselben ergiht sich jedesmal, wie bei den algehraischen Fnnctionen, als die dem Addiren, Multipliciren und Potenziren entgegengesetzte Operation, also dnrch die Formeln:

$$(a-b)+b=a, \quad \frac{a}{b}\cdot b=a, \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a.$$

Hierans folgt:

„Um eine geometrische Grösse abznziehen, hraucht man nur die entgegengesetzte zn addiren."

„Um dnrch eine solche zn dividiren, mnss man sie mit ihrem nmgekehrten Werthe mnltipliciren."

Sei jetzt $\varrho_p$ die $n$te Wurzel von $\varrho_\varphi$, also:

$$\varrho_p^n = r_\varphi, \quad \text{d. h.:} \quad \left(\varrho^n\right)_{np} = r_\varphi,$$

eine Gleichnng, aus welcher nach nnserer Definition folgt:

$$\varrho^n = r, \quad np = \varphi + 2k\pi,$$

wo $k$ eine ganze Zahl ist. Daraus folgt dann:

$$\varrho = r^{\frac{1}{n}}, \quad p = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n},$$

$$\varrho_p = \left(r^{\frac{1}{n}}\right)_{\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}},$$

also:

„Jede geometrische Grösse hat $n$ Wurzeln vom $n$ten Grade, zn denen allen jedoch derselhe Modnl gehört."

Ist $p=0$ nnd $r=1$, so hat man als $n$te Wnrzeln von $1_0$ die Werthe $(1)_{\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}}$.

Es ist anch klar, dass, ohgleich $k$ jede ganze Zahl sein kann, sich doch nur $n$ Werthe für die $n$te Wnrzel ergehen.

D) Uehergang znm Ansdrncke $i=\sqrt{-1}$. Potenzen, deren Exponenten geometrische Grössen sind.

Wir wollen jetzt die Grössen $a_0$ nnd $a_\pi = -a_0$, welche anf der Abscissenaxe liegen, mit den algehraischen Grössen $a$ nnd $-a$ identificiren, wie dies ja geschehen kann, da die Längen dieser Linien beide gleich $a$ nnd sie offenhar entgegengesetzt sind.

Da nnn jede Länge $r_\varphi$ nnd ihre Projectionen auf die $x$ nnd $y$ Axe ein Dreieck hilden, so hat man nach nnserer Definition des Addirens:

$$r_\varphi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)_{\frac{\pi}{2}},$$

$$r_{-\varphi} = r\cos\varphi - (r\sin\varphi)_{\frac{\pi}{2}},$$

da:

$$(r\sin\varphi)_{-\frac{\pi}{2}} = (r\sin\varphi)_{\pi+\frac{\pi}{2}} = -(r\sin\varphi)_{\frac{\pi}{2}}$$

ist; oder wenn man setzt:

$$r\cos\varphi = x, \quad r\sin\varphi = y,$$

$$r_{\varphi} = x + y_{\frac{\pi}{2}}, \quad r_{\varphi} = x - y_{\frac{\pi}{2}}.$$

Es ist aber:

$$y_{\frac{\pi}{2}} = y_0 \cdot 1_{\frac{\pi}{2}}$$

nach der Erklärung der Multiplication, und:

$$1_{\frac{\pi}{2}} \cdot 1_{\frac{\pi}{2}} = (1)_{\pi} = -1_0 = -1.$$

d. h.:

$$\left(1_{\frac{\pi}{2}}\right)^2 = -1, \quad 1_{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1},$$

also wenn wir den völlig definirten Ausdruck $\sqrt{-1}$ mit $i$ bezeichnen, so ist $1_{\frac{\pi}{2}} = i.$

Es ist aber, obgleich $-1$ zwei Wurzeln hat, $1_{\frac{\pi}{2}}$ und $1_{-\frac{\pi}{2}} = -1_{\frac{\pi}{2}}$, die geometrische Grösse $i$ völlig bestimmt, und zwar ist $i$ die auf der Ordinatenaxe im Sinne der anfänglichen Drehung abgetragene Einheitslänge.

Man hat also:

$$r_{\varphi} = x + yi, \quad r_{-\varphi} = x - yi,$$
$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Mit Einführung der geometrischen Grösse $i$ kann man nun dem Ausdrucke $r_{\varphi}$ noch eine andere Form geben.

Es ist:

$$r_{\varphi} = r_0 1_{\varphi}, \quad 1_{\varphi} = 1_{n \cdot \frac{\varphi}{n}} = 1_{\frac{\varphi}{n}}^{\,n}, \quad r_0 = r,$$

also:

$$r_{\varphi} = r\left(1_{\frac{\varphi}{n}}\right)^n,$$

aber:

$$1_{\frac{\varphi}{2}} = \cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}.$$

Man hat also:

$$r_{\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = r\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)^n.$$

Ist $n$ sehr gross, also $\frac{\varphi}{n}$ sehr klein, so kann man der Grösse $1_{\frac{\varphi}{n}}$ leicht einen einfacheren Ausdruck geben. Sei (Fig. 60) $OA$ der Länge nach der Einheit gleich, und mache mit $OX$ den Winkel $\frac{\varphi}{n}$; ist $AX$ dann das von $A$ auf $OX$ gefällte Loth, so ist:

Fig. 60.



$$1_{\frac{\varphi}{n}} = OX + (AX)_{\frac{\pi}{2}} = OX + AXi.$$

Ist aber $\frac{\varphi}{n}$ sehr klein, so kann man statt $AX$ den Kreisbogen nehmen, dessen Radius $OA$ ist, und man hat dann: $1_{\frac{\varphi}{n}} = 1_0 + \left(\frac{\varphi}{n}\right)_{\frac{\pi}{2}}$, da offenbar:

$$AO = OX,\ AX = \frac{\varphi}{n}$$

wird, also auch:

$$1_{\frac{\varphi}{n}} = 1 + \frac{\varphi}{n}\,i,$$

und:

$$1_\varphi = \left(1 + \frac{\varphi\, i}{n}\right)^n,\quad r_\varphi = r\left(1 + \frac{\varphi\, i}{n}\right)^n.$$

Definirt man nun die Exponentialgrösse $e^{a_\vartheta}$, wo $a_\vartheta$ eine geometrische Grösse ist, durch die Formel:

$$e^{a_\vartheta} = \left(1 + \frac{a_\vartheta}{n}\right)^n,$$

so lassen sich an diesen Ausdruck ganz ähnliche Betrachtungen anknüpfen, wie dies in Abschnitt 3) und den folgenden geschehen ist, und sich damit die Theorie der geometrischen Grössen in ihrer Anwendung auf Exponentialgrössen ergänzen. Namentlich lässt sich, wenn $\vartheta = 0$ ist, immer eine algebraische Grösse finden, welche die Gleichung $r = e^a$ realisirt. Man hat somit:

$$a^a_\varphi = e^a \cdot 1_\varphi = \left\{ e^{\frac{a}{n}} \cdot 1_{\frac{\varphi}{n}} \right\}^n;$$

aber nach der Definition ist:

$$e^{\frac{a}{n}} = 1 + \frac{a}{n},$$

und man hat:

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right) \cdot 1_{\frac{\varphi}{n}} = \left(1 + \frac{a}{n}\right)_{\frac{\varphi}{n}} = 1 + \frac{a}{n} + \frac{\varphi\, i}{n},$$

wie sich aus der vorigen Figur ergibt, wenn man $OA = 1 + \frac{a}{n}$ denkt und $n$ sehr gross annimmt. Also da:

$$1 + \frac{a}{n} + \frac{\varphi\, i}{n} = e^{\frac{a + \varphi\, i}{n}}$$

ist:

$$e^a_\varphi = e^{a + \varphi\, i}.$$

Hieraus folgt:

$$e^{a + \varphi\, i}\, e^{b + \vartheta\, i} = e^a_\varphi\, e^b_\vartheta = (e^{a+b})_{\varphi + \vartheta},$$

also:

$$e^{a + \varphi\, i}\, e^{b + \vartheta\, i} = e^{a + b + (\varphi + \vartheta)\, i},$$

und:

$$(e^{a + \varphi\, i})^n = e^{n\,(a + \varphi i)}.$$

Aus diesen Grundformeln lassen sich dann mit Zuhülfenahme des Begriffes des Logarithmus die übrigen ableiten, ganz wie dies oben geschehen ist, da die Verschiedenheit der Grundbestimmungen im Uebrigen keinen Einfluss ausübt.

Aber auch die imaginären Wurzeln der Gleichungen lassen sich leicht auf geometrische Grössen zurückführen. Cauchy stellt folgende Betrachtungen in Bezug hierauf an.

Sei:

$$Z = a + bz + cz^2 + \ldots + gz^{n-1} + hz^n,$$

wo $a, b, c \ldots g, h$ geometrische Grössen sind, ebenso wie $Z$. Man hat dann auch:

$$Z = z^n(h + gz^{-1} + \ldots + cz^{-n+2} + bz^{-n+1} + az^{-n}).$$

Wenn $n$ gleich Null ist, so wird $Z = a$. In jedem andern Falle ist $Z$ mit $z$ veränderlich, und der Modul von $Z$ wird unendlich, wenn der von $z$ unendlich ist. Denn sei:

$$z = r_\varphi, \quad Z = R_p,$$

sei $\eta$ der Modul von $h$ und möge $r$ wachsen, so werden die Moduln von $z^{-1}$, $z^{-2}$ ... abnehmen, es wird also $Z$ sich nähern der Grenze $z^n h$, und sein Modul $R$ der Grenze $\eta r^n$, also unendlich gross werden. D. h.:

„Einem endlichen Werthe von $R$ kann nur ein endlicher Werth von $r$ entsprechen."

Gebe man jetzt der Grösse $z$ den Zuwachs:

$$\triangle z = \varrho_\lambda,$$

wo Modul $\varrho$ sehr klein ist. Sei dann $\triangle Z$ der Zuwachs von $z$. Um diesen Zuwachs zu erhalten, ersetzt man $z$ durch $z + \triangle z$, und erhält nach dem Binomischen Satze eine nach Potenzen von $\triangle z$ geordnete Reihe, welche höchstens vom Grade $n$ ist, für $Z + \triangle Z$; also wenn man $Z$ abzieht, so wird diese Reihe durch $\triangle z$ theilbar sein. Sei:

$$\triangle z = \zeta,$$

und $\zeta^m$ die kleinste Potenz von $\zeta$, welche in dieser Entwickelung noch vorkommt. Man hat dann:

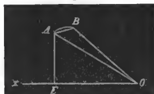
$$\zeta^m = (\varrho^m)_{m\lambda},$$

und:

$$\triangle Z = P_\psi \zeta^m = (P\varrho^m)_{(\psi + m\lambda)}.$$

$P_\varphi$ soll hier diejenige ganze Function sein, welche entsteht, wenn man $\triangle Z$ durch $\zeta^m$ dividirt. Sie wird sich für $\zeta$ gleich $O$ einer Constante nähern, die endlich und ungleich Null ist. Sei $G\alpha$ diese Grenze. Es wird dann $\alpha$ die Grenze sein, der sich $\psi$ nähert. — Seien (Fig. 61) $A$ und $B$ jetzt die Endpunkte zweier von $O$ aus gezogenen Linien, die

Fig. 61.




den geometrischen Grössen $Z$ und $Z + \triangle Z$ entsprechen, so wird die Länge $AB$ gleich $\triangle Z$ sein, und ihre Länge durch $P\varrho^m$ gemessen werden, und zwar wird diese Linie in der Richtung liegen, welche durch den Winkel $\psi + m\lambda$ gegeben wird. Setzt man $\varrho$ anfänglich gleich Null, und lässt diese Grösse dann wachsen, so wird Punkt $B$, welcher anfänglich in $A$ fällt, einen Curvenbogen beschreiben, dessen Sehne $AB$ ist, und die Tangente $AE$, welche an diesen Bogen in Punkt $A$ gezogen wird, bildet mit $OX$ einen Winkel, welcher dem Grenzwerthe von $\psi + m\lambda$, also $\alpha + m\lambda$ gleich ist. — Denkt man sich nun mit Radius $OA$ einen Kreis beschrieben, so wird Länge $OB$ kleiner als $OA$ sein, wenn $B$ innerhalb dieses Kreises fällt. Für sehr kleine Werthe von $\varrho$ wird diese Bedingung immer erfüllt sein, wenn Tangente $AE$ mit der Verlängerung von $OA$ einen stumpfen Winkel bildet, d. h. wenn:

$$\vartheta = \alpha + m\lambda - \psi$$

einen negativen Cosinus hat. Hat man nun willkürlich für $\vartheta$ einen Winkel genommen, der dieser Bedingung genügt, so kann man durch passende Wahl von $\lambda$ immer der letzten Gleichung genügen. Also wenn der Modul $R$ von $Z$, welcher einem endlichen Werthe von $z$ entspricht, nicht Null ist, so kann man immer durch

das bezeichnete Verfahren den Werth von $R$ vermindern, und somit muss der kleinste Werth von $R$ der Null gleich sein, woraus dann $Z=0$ folgt. D. h.:

„Jede ganze Function der geometrischen Grösse $z$ muss wenigstens für einen Werth von $z$ der Null gleich werden."

Bekanntlich nennt man solchen Werth von $z$ eine Wurzel der Gleichung:

$$Z=0.$$

Hieraus folgt dann leicht, dass jede Gleichung $n$ Wurzeln habe, welche geometrische Grössen sind. Dieser Beweis gilt noch dann, wenn $z$ eine convergirende Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $z$ ist.

Einige Betrachtungen über diese Methode.

Die Substitution der geometrischen Grösse an die Stelle der complexen Zahl führt natürlich zu völlig richtigen Schlüssen. Sehr wichtig wird sie dadurch, dass sie bei allen Betrachtungen, welche über complexe Grössen angestellt werden, zu Veranschaulichungen führt, die sich in keiner anderen Weise geben lassen. Jedem Werthe der complexen Zahl $a+bi$ entspricht ein Punkt der Ebene $A$, welcher zur Abscisse die Grösse $a$, zur Ordinate die Grösse $b$ hat; ferner ist der Modul $r$ von $a+bi=re^{\varphi i}$ gleich dem Abstand zwischen $A$ und dem Anfangspunkt $O$ der Coordinaten, das Argument $\varphi$ gleich dem Winkel zwischen $OA$ und der Abscissenaxe.

Indess lässt sich nicht leugnen, dass eine solche Veranschaulichung nicht durchaus die obige Theorie, also das Identificiren der imaginären Grössen mit geometrischen Begriffen verlangt. Im Sinne von Gauss sollen die geometrischen Betrachtungen auch nur eine Veranschaulichung, die einzig mögliche freilich, gewähren für Reihen, die sich continuirlich und gleichmässig nach zwei Ausdehnungen hin ins Unendliche erstrecken.

So vorzüglich und fruchtbar also auch die geometrische Vorstellung ist, wenn es sich um Versinnlichung continuirlicher Begriffe handelt, so möchte sich zur Begründung des Imaginären doch neben ihr noch eine andere Theorie empfehlen, deren Schöpfer ebenfalls Cauchy ist, und die wir bei der Wichtigkeit des Gegenstandes ebenfalls hier kurz wiedergeben wollen. Auch sie ist den *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, tome IV* entnommen.

11) Ersetzung des Begriffs des Imaginären durch die algebraische Congruenz.

Die Cauchy'sche Theorie scheint uns allerdings geeignet, jede Dunkelheit, die dem Imaginären anklebt, gewissermassen mit einem Schlage zu beseitigen. — Um das Folgende völlig aufzufassen, wiederholen wir, dass der Begriff des Imaginären sich zuerst bei der Gleichung:

$$x^2+1=0$$

einstellt, welche keine reelle Wurzel hat. Die allgemeine quadratische Gleichung:

$$x^2+2ax+b=0,$$

welche auch die Form annimmt:

$$(x+a)^2+b-a^2=0,$$

$$\left(\frac{x+a}{\sqrt{(b-a^2)}}\right)^2+1=0,$$

bei welcher wir annehmen, dass $a^2$ kleiner als $b$ ist, lässt ebenfalls keine reelle Wurzel zu, indess lässt sie sich durch eine lineare Substitution:

$$\frac{x+a}{\sqrt{(b-a)^2}}=y,$$

ganz auf die Form der ersten Gleichung bringen. Höhere Gleichungen, insofern sie keine, oder nicht lauter reelle Wurzeln haben, nehmen durch ähnliche Substitutionen einen Factor von der Form $y^2+1$ an, wie sich leicht darthun lässt. Diese Betrachtungen führen auf den Gedanken, den imaginären Grössen als solchen ganz zu entsagen, und dafür zu untersuchen, welche Ausdrücke durch solche von der Form $y^2+1$ theilbar sind. Auf diese Betrachtungen, wo lediglich mit reellen Zahlen gerechnet, der Begriff der Gleichheit aber durch den allgemeinern der Congruenz ersetzt wird, gründet Cauchy seine eben so einfache als sinnreiche Theorie, die wir hier geben.

A) Begriff der algebraischen Congruenz.

Zwei ganze Functionen $\varphi(x)$ und $\psi(x)$, deren Differenz $\varphi(x)-\psi(x)$ durch eine dritte $\chi(x)$ theilbar ist, nennt man congruent in Bezug auf $\chi(x)$. Die algebraische Congruenz entspricht also genau der arithmetischen. Wir wollen auf die erstere also auch die Gauss'sche Bezeichnung anwenden:

$$\varphi(x)\equiv\psi(x) \bmod \chi(x),$$

in Worten:

$\varphi(x)$ congruent $\psi(x)$ nach Modul $\chi(x)$.

Die Erwähnung und das Hinschreiben

des Modul kann unterlassen werden, wenn derselbe bereits bekannt ist. — Leicht ergibt sich folgender Satz:

„Mehrere Congruenzen in Bezug auf denselben Modul geben addirt, subtrahirt und multiplicirt wieder eine Congruenz."

Sei also:

$$\varphi(x) \equiv \chi(x), \quad \varphi_1(x) \equiv \chi_1(x), \quad \varphi_2(x) \equiv \chi_2(x),$$

so ist auch:

$$\varphi(x) \pm \varphi_1(x) \pm \varphi_2(x) \equiv \chi(x) \pm \chi_1(x) \pm \chi_2(x),$$
$$\varphi(x) \cdot \varphi_1(x) \cdot \varphi_2(x) \equiv \chi(x) \cdot \chi_1(x) \cdot \chi_2(x),$$

denn ist $\psi(x)$ der gemeinschaftliche Modul, so hat man:

$$\varphi(x) = \chi(x) + \alpha\,\psi(x), \quad \varphi_1(x) = \chi_1(x) + \alpha_1\,\psi(x); \quad \varphi_2(x) = \chi_2(x) + \alpha_2\,\psi(x) \ldots,$$

wo $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ ganze Functionen von $x$ sind, also:

$$\varphi(x) + \varphi_1(x) + \varphi_2(x) - \chi(x) - \chi_1(x) - \chi_2(x) = (\alpha + \alpha_1 + \alpha_2)\,\psi(x),$$
$$\varphi(x)\varphi_1(x)\varphi_2(x) - \chi(x)\chi_1(x)\chi_2(x) = \beta\,\psi(x),$$

wo $\beta$ ebenfalls eine ganze Function von $x$ ist. Es sind also die Differenzen links durch $\varphi(x)$ theilbar.

Hieraus folgt auch, wenn $m$ eine ganze positive Zahl ist:

$$\varphi(x)^m \equiv \chi(x)^m.$$

Jede Congruenz lässt sich auf die Form bringen:

$$\varphi(x) - \psi(x) \equiv 0,$$

oder:

$$f(x) \equiv 0.$$

Ist der Modul $\psi(x)$ eine Function $n$ten Grades, so kann $f(x)$ durch $\psi(x)$ dividirt nur einen Rest von der Form lassen:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1} x^{n-1}.$$

Ist nun $f(x) \equiv 0$, so muss sein:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_{n-1} x^{n-1} = 0,$$

was auch $x$ sei. Man hat also, indem man $x=0$ setzt:

$$c_0 = 0,$$

und indem man durch $x$ dividirt und dann $x=0$ setzt:

$$c_1 = 0,$$

indem man also so fortfährt:

$$c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_{n-1} = 0.$$

„Ist der Modul vom $n$ten Grade, so lassen sich aus jeder Congruenz $f(x) \equiv 0$ $n$ Gleichungen bilden, indem man in dem Rest von $f(x)$ alle Coefficienten der Null gleich setzt."

Es ist z. B.:

$$x^{mn} - 1 \equiv 0 \bmod (x^n - 1),$$

wenn $m$ und $n$ beliebige ganze positive Zahlen sind. Hieraus folgt:

$$x^{mn} \equiv 1.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $x^l$, so kommt:

$$x^{mn+l} \equiv x^l,$$

und wenn man für $l$ jede der Zahlen 1, 2, 3 ... $n-1$ setzt:

$$x^{mn+1} \equiv x, \quad x^{mn+2} \equiv x^2 \ldots \quad x^{mn+n-1} \equiv x^{n-1}.$$

Setzt man nun:

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots+a_{2n}x^{2n}+\ldots,$$

so hat man:

$$a_{mn+l}x^{mn+l}\equiv a_{mn+l}x^l,$$

also:

$$f(x)\equiv a_0+a_n+a_{2n}+\ldots+(a_1+a_{n+1}+a_{2n+1}+\ldots)x$$
$$+(a_2+a_{n+2}+a_{2n+2}+\ldots)x^2+\ldots$$
$$+(a_{n-1}+a_{2n-1}+\ldots)x^{n-1} \bmod (x^n-1).$$

Man hat hier unmittelbar den Rest von $f(x)$ nach Modul $x^n-1$. Hier kann selbst $f(x)$ unendlich viel Glieder haben, also eine convergirende Reihe vorstellen.

Sei jetzt der Modul $x^n+1$ gegeben, so wird immer:

$$x^{mn}-(-1)^m$$

durch denselben theilbar sein; also wenn $m$ ungerade ist:

$$x^{mn}+1\equiv 0,\ x^{mn}\equiv -1,$$

also:

$$x^{mn+l}\equiv -x^l;$$

dagegen wenn $m$ grade ist:

$$x^{mn}-1\equiv 0,\ x^{mn}\equiv +1,$$

also:

$$x^{mn+l}\equiv x^l.$$

Versteht man unter $f(x)$ wieder die obige Function, so erhält man ganz auf dem obigen Wege:

$$f(x)\equiv a_0-a_n+a_{2n}-\ldots+(a_1-a_{n+1}+a_{2n+1}-\ldots)x$$
$$+(a_2-a_{n+2}+a_{2n+2}-\ldots)x^2+\ldots$$
$$+(a_{n-1}-a_{2n-1}+\ldots)x^{n-1} \bmod (x^n+1).$$

B) Anwendung auf die imaginären Grössen.

Unter $i$ wird jetzt nicht mehr der symbolische Ausdruck $\sqrt{-1}$ verstanden, sondern eine reelle aber unbestimmte Grösse. Dagegen ersetzt man jede imaginäre Gleichung durch eine Congruenz nach Modul $i^2+1$. Da dieser Modul jetzt immer derselbe bleibt, so werden wir ihn nicht weiter hinschreiben. Der Begriff des Imaginären wird also ganz ausgeschlossen, dagegen soll eine imaginäre Gleichung fortan nur ein Symbol für die entsprechende Congruenz sein.

Offenbar ist immer:

$$i^{2m}-(-1)^m\equiv 0,$$

oder:

$$i^{2m}\equiv(-1)^m,$$

also auch wenn man mit $i$ multiplicirt:

$$i^{2m+1}\equiv(-1)^m i.$$

Setzt man also für $m$ erst $2n$ und dann $2n+1$, so kommt:

1) $\quad i^{4m}\equiv 1,\ i^{4m+1}\equiv i,\ i^{4m+2}\equiv -1,\ i^{4m+3}\equiv -i.$

Sei jetzt:

$$f(i)=a_0+a_1i+a_2i^2+a_3i^3+\ldots,$$

so ist also:

2) $$f(i) \equiv a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + \ \ldots \ + (a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + \ldots) i,$$

eine Formel, die sich auch auf den Fall bezieht, wo $f(i)$ eine unendliche convergirende Reihe vorstellt. Wenn man in den Gleichungen 1) und 2) das Congruenzzeichen durch das Gleichheitszeichen ersetzte, so würde man diejenigen Sätze haben, welche lehren, die Function $f(i)$ durch einen Ausdruck von der Form $\alpha + \beta i$ auszudrücken. Man hat:

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i) = \alpha\gamma + (\alpha\delta+\beta\gamma) i + \beta\delta i^2;$$

also wenn man diesen Ausdruck in Gleichung 2) für $f(i)$ setzt:

3) $$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i) \equiv \alpha\gamma - \beta\delta + (\alpha\delta+\beta\gamma) i.$$

Setzt man:

$$\gamma = \alpha, \quad \delta = -\beta,$$

so kommt:

4) $$(\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i) \equiv \alpha^2 + \beta^2.$$

Ersetzt man in 3) $i$ durch $-i$, so erhält man:

$$(\alpha-\beta i)(\gamma-\delta i) \equiv \alpha\gamma - \beta\delta - (\alpha\delta+\beta\gamma) i.$$

Da beide Glieder von $i$ unabhängig sind, so fallen sie mit ihren Resten zusammen. Man kann also das Congruenzzeichen mit dem Gleichheitszeichen vertauschen:

5) $$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2) = (\alpha\beta-\gamma\delta)^2 + (\alpha\delta+\beta\gamma)^2.$$

„Das Product zweier Quadratsummen ist wieder eine solche.“

Dies Verfahren gilt allgemein, d. h.: Sind beide Glieder der Congruenz lineare Functionen von $i$, so sind sie zugleich die Reste nach Modul $i^2+1$ und folglich gleich.

„Bei linearen Functionen von $i$ kann das Zeichen $\equiv$ durch $=$ ersetzt werden.“

Ist also:

$$f(i) \equiv 0,$$

und:

$$c_0 + c_1 i \text{ der Rest,}$$

so ist:

$$c_0 = c_1 = 0.$$

„Jede Congruenz, welche eine imaginäre Gleichung ersetzt, führt auf zwei reelle Gleichungen.“

Durch diese Sätze ist das Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren mit imaginären Grössen entbehrlich. Was namentlich das Dividiren anbetrifft, so ersetzt man die Gleichung:

$$\frac{a+bi}{c+di} = e + fi,$$

oder die gleichbedeutende:

$$(a+bi) = (e+fi)(c+di),$$

durch die Congruenz:

$$a+bi \equiv (e+fi)(c+di),$$

oder:

$$a+bi \equiv ec - fd + (fc+ed) i.$$

Es ist also:

$$a = ec - fd, \quad b = fc + ed,$$

d. h.:

$$e = \frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \quad f = \frac{ac-ad}{c^2+d^2}.$$

C) Anwendung der Theorie der Congruenzen auf die Exponential- und die trigonometrischen Grössen.

Die Formel 3) des vorigen Abschnittes gibt, wenn man:

$$\alpha = \cos x, \quad \beta = \sin x,$$
$$\gamma = \cos y, \quad \delta = \sin y$$

setzt, und darunter die aus der Trigonometrie bekannten Grössen versteht:

$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \equiv \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\sin x \cos y + \cos x \sin y)$,

d. h.:

1) $$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \equiv \cos(x+y) + i \sin(x+y).$$

Indem man so fortfährt, erhält man:

$$(\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)(\cos z + i \sin z) \ldots \equiv \cos(x+y+z+\ldots) + i \sin(x+y+z+\ldots)$$

Also wenn man $x = y = z = \ldots$ setzt, wenn $n$ eine ganze positive Zahl ist:

2) $$(\cos x + i \sin x)^n \equiv \cos nx + i \sin nx,$$

d. h.:

„Die $n$te Potenz des Binoms $\cos x + i \sin x$ durch $i^2+1$ dividirt, gibt $\cos nx + i \sin nx$ als Rest."

Dieser Satz tritt für den von Moivre in dieser Theorie ein.

Sei jetzt wieder:

$$e^x = \lim\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n,$$

oder:

3) $$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots,$$

also:

4) $$e^{ix} = 1 + \frac{x}{1}i + \frac{x^2}{1\cdot 2}i^2 + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}i^3 + \ldots,$$

und somit nach Satz 2) der Abtheilung B:

5) $$e^{ix} \equiv 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots + i\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\right).$$

Andererseits hat man:

6) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots \quad \sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$$

Diese Gleichungen kann man auch als Definition der Functionen Cosinus und Sinus benutzen, und so die der Trigonometrie entnommenen Betrachtungen ganz vermeiden. Man hat also:

7) $$e^{ix} \equiv \cos x + i \sin x.$$

Aus den Formeln 2) und 7) lassen sich alle Schlüsse ziehen, welche man aus den entsprechenden Gleichungen in der Theorie der imaginären Grössen zieht. Seien z. B. $\cos nx$ und $\sin nx$ zu berechnen, so ist:

$$(a+bi)^n = a^n + na^{n-1}bi + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2i^2 + \ldots,$$

also:

8) $$(a+bi)^n \equiv a^n - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots + i\Big(na^{n-1}b - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots\Big),$$

und also wegen Formel 2):

9) $\cos nx + i \sin nx \equiv \cos x^{n} - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2} \cos x^{n-2} \sin x^{2} + \ldots$

$$+ i\left(n \cos x^{n-1} \sin x - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \cos x^{n-3} \sin x^{3} + \ldots\right)$$

Hier können nach dem oben bewiesenen Satze die von $i$ freien und die mit $i$ multiplicirten Glieder gleich gesetzt werden, was die bekannten Formeln für $\cos nx$ und $\sin nx$ gibt.

D) Ueber die Moduln der Binome von der Form $\alpha + \beta i$.

Offenbar ist immer zu setzen:

$$\alpha + \beta i = r(\cos t + i \sin t).$$

Denn die Gleichungen:

$$\alpha = r \cos t, \qquad \beta = r \sin t$$

sind ja immer zu erfüllen, wenn man:

$$r = (\alpha^{2} + \beta^{2})^{\frac{1}{2}},$$

und:

$$\cos t = \frac{\alpha}{r}, \quad \text{also} \quad \sin t = \frac{\beta}{r}$$

setzt, wo $r$ positiv sein soll. Wie früher nennen wir die Grösse $r$ Modul des Binom $\alpha + \beta i$, $t$ das Argument.

Ist der Modul von $\alpha + \beta i$ gleich Null, so hat man:

$$\alpha^{2} + \beta^{2} = 0, \quad \text{also:} \quad \alpha = 0,\ \beta = 0.$$

„Damit beide Glieder des Binom $\alpha + \beta i$ verschwinden, muss der Modul gleich Null sein, und umgekehrt."

Seien $r$, $r'$ die Moduln bezüglich von $\alpha + \beta i$ und $\gamma + \delta i$, also:

$$r = (\alpha^{2} + \beta^{2})^{\frac{1}{2}}, \quad r' = (\gamma^{2} + \delta^{2})^{\frac{1}{2}},$$

so ist der Modul von:

$$\alpha \pm \gamma + (\beta \pm \delta i),$$

d. h. von der Summe bezüglich der Differenz beider Binome:

$$\varrho = [(\alpha \pm \gamma)^{2} + (\beta \pm \delta)^{2}]^{\frac{1}{2}} = [r^{2} + r'^{2} \pm 2(\alpha\gamma + \beta\delta)]^{\frac{1}{2}}.$$

Mittels der Formel 5) der Abtheilung B), wenn man daselbst $-\delta$ für $\delta$ setzt, erhält man:

$$(\alpha\gamma + \beta\delta)^{2} < (\alpha^{2} + \beta^{2})(\gamma^{2} + \delta^{2}),$$

d. h.:

$$(\alpha\gamma + \beta\delta)^{2} < r^{2} r'^{2},$$

also ist der numerische Werth von $\alpha\gamma + \beta\delta$ immer kleiner als $r$, $r'$. Die Moduln von $\alpha \pm \gamma + (\beta \pm \delta) i$ liegen also in den Grenzen:

$$(r^{2} - 2r r' + r'^{2})^{\frac{1}{2}} = \pm (r - r'),$$

und:

$$(r^{2} + 2r r' + r'^{2})^{\frac{1}{2}} = r + r'.$$

I. „Summe und Differenz zweier Binome von der Form $\alpha + \beta i$ haben Moduln, welche zwischen der Summe und Differenz der Moduln beider Binome liegen."

Zählt man zu einer Summe noch ein Binom zu und fährt so fort, so gibt dies den Satz:

II. „Die Summe mehrerer Binome hat einen Modul, welcher kleiner als die Summe der Moduln ist. Ist unter allen Binomen eins, dessen Modul $r$ grösser ist als die Summe der Moduln $s$ aller übrigen, so ist der Modul der Summe aller grösser als $r - s$."

Wir nennen jetzt Modul und Argument irgend einer ganzen Function von $i$ denjenigen Modul und das Argument, welche dem Rest dieser Function nach $i^{2}+1$

entsprechen. Dio eben bewiesenen beiden Sätze gelten dann für alle solche Functionen.

Es war:

$$(\alpha+\beta i)(\gamma+\delta i)\equiv\alpha\beta-\gamma\delta+(\alpha\delta+\beta\gamma)i,$$

und:

$$(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\delta^2)=(\alpha\beta-\gamma\delta)^2+(\alpha\delta+\beta\gamma)^2,$$

also wenn $r$, $r'$ wieder die Moduln bezüglich von $\alpha+\beta i$ und $\gamma+\delta i$ sind, und $\varrho$ der Modul beider, so ist:

$$r^2 r'^2=\varrho^2, \quad \text{also:} \quad r r'=\varrho.$$

III. „Der Modul eines Products ist gleich dem Product der Moduln."

Auch kann man setzen:

$$\cos t+i\sin t\equiv e^{it},$$

$$\alpha+\beta i\equiv r e^{it}.$$

Hieraus folgt sogleich, da:

$$r e^{it}.r' e^{it'}.r'' e^{it''}=r r' r'' \ldots e^{i(t+t'+t''+\ldots)}$$

ist, der zuletzt bewiesene Satz und zugleich der folgende:

IV. „Das Product mehrerer ganzen Functionen von $i$ hat als Argument die Summe ihrer Argumente."

Auch hat man:

$$(re^{it})^n=r^n e^{int},$$

also:

V. „Die $n$te Potenz einer ganzen Function von $i$ hat als Modul die $n$te Potenz des Moduls derselben, und als Argument ihr $n$faches Argument."

Sei jetzt:

$$x=\alpha+\beta i,$$

$r$ der Modul, $t$ das Argument dieses Binoms, also:

$$x\equiv r e^{it}.$$

Sei ferner:

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n,$$

und mögen:

$$\alpha_0,\ \alpha_1 \ldots \alpha_n$$

die numerischen Werthe der Coefficienten:

$$a_0,\ a_1 \ldots a_n$$

sein, so werden diese Grössen auch die Moduln von $a_0, a_1 \ldots a_n$ sein, und es haben daher die einzelnen Glieder von $f(x)$ zu Moduln die Grössen:

$$\alpha_0 r^n,\ \ \alpha_1 r^{n-1} \ldots \alpha_{n-1} r,\ \ \alpha_n,$$

d. h. die Producte der Grössen:

$$\alpha_0,\ \frac{\alpha_1}{r} \ldots \frac{\alpha_{n-1}}{r^{n-1}},\ \frac{\alpha_n}{r^n}$$

multiplicirt mit $r^n$. Andererseits hat man:

$$f(x)=f(\alpha+\beta i)\equiv R(\cos T+i\sin T),$$

wo $R$ der Modul und $T$ das Argument von $f(x)$ ist. — Für sehr grosse Werthe von $r$ werden die Glieder der Reihe:

$$\alpha_0, \ \frac{\alpha_1}{r} \ \ldots \ \frac{\alpha_{n-1}}{r^{n-1}}, \ \frac{\alpha_n}{r^n},$$

bis auf das erste sich der Null nähern. Es wird also $\alpha_0 r^n$ mit zunehmendem $r$ die Summe aller übrigen Grössen:

$$\alpha_1 r^{n-1}, \ \alpha_2 r^{n-2} \ldots \alpha_{n-1} r, \ \alpha_n$$

überschreiten. Hieraus folgt mit Bezug auf Satz II., dass der Modul $R$ von $f(x)$ kleiner sein wird als die Summe:

$$\alpha_0 r^n + \alpha_1 r^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} r + \alpha_n,$$

und grösser als die Differenz:

$$\alpha_0 r^n - (\alpha_1 r^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} r + \alpha_n),$$

also:

$$R > r^n (\alpha_0 - \frac{\alpha_1}{r} - \frac{\alpha_2}{r^2} - \ \ldots \ - \frac{\alpha_n}{r^n}),$$

wenn $r$ hinreichend wächst. Die Reihe in der Klammer nähert sich aber der Grenze $\alpha_0$, also:

VI. „Der Modul einer ganzen Function von $\alpha + \beta i$ wird unendlich gross, gleichzeitig mit dem Modul von $\alpha + \beta i$ selbst."

E) Substitution der Wurzeln der Congruenzen an die Stelle der imaginären Wurzeln der Gleichungen.

Sei wieder gegeben:

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

so giebt es entweder reelle Werthe von $x$, welche die Gleichung:

$$f(x) = 0$$

erfüllen oder nicht. Im ersteren Falle kann die Anzahl dieser Werthe nicht grösser als $n$ sein, und sie ist wenigstens 1, wenn $n$ ungrade ist. Das erstere folgt daraus, dass, wenn $x = \alpha$ ein solcher Werth ist, $f(x)$ durch $x - \alpha$ theilbar sein muss (siehe den Artikel: „Quadratische Factoren"), das letztere daraus, dass $f(x)$ eine continuirliche Grösse ist, die für $x = +\varrho$ sich der Grenze $a_0 \varrho^n$, und für $x = -\varrho$ sich der Grenze $-a_0 \varrho^n$ nähert, wenn $\varrho$ wächst, also zwischen $+\infty$ und $-\infty$ wenigstens einmal durch Null gegangen sein muss. — Dagegen hat die Congruenz:

$$f(x) \equiv 0$$

immer Wurzeln, d. h. es gibt immer Werthe:

$$x = \alpha + \beta i,$$

welche sie erfüllen. Die Theorie der Wurzeln solcher Congruenzen ergibt sich dann aus den Sätzen:

I. „Jede Congruenz von der Form:

$$f(x) \equiv 0$$

hat immer $n$ Wurzeln, und nie mehr."

II. „Bezeichnen wir diese Wurzeln mit $x, x_1 \ldots x_n$, so ist immer:

$$f(x) \equiv a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n).$$

Diese beiden Sätze lassen sich ganz eben so beweisen, wie dies in dem Artikel: „Quadratische Factoren" in Bezug auf die Formeln:

$$f(x) = 0, \quad f(x) = a_0 (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n)$$

geschehen ist, wenn man dem Begriff der Gleichheit den der Congruenz substituirt, und $i$ willkürlich sein lässt.

Berechnet man das Product rechts in der Formel:

$$f(x) \equiv (x-x_1)(x-x_2) \ldots (x-x_n),$$

wo man den ersten Coefficienten $a_0$ gleich 1 setzt, so erhält man links und rechts Polynome $n$ter Ordnung von $x$, und da $x$ willkürlich ist, müssen die Coefficienten der gleichen Potenzen von $x$ unter sich congruent, also ihre Reste gleich werden. Es ist also:

$$a_1 \equiv x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

$$a_2 \equiv -(x_1 x_2 + x_1 x_3 + \ldots + x_{n-1} x_n$$

$$\vdots$$

$$a_n \equiv \pm x_1 x_2 \ldots x_n,$$

wodurch der bekannte Satz über die Wurzeln der Gleichungen ersetzt wird. Hat die Congruenz:

$$f(x) \equiv 0$$

eine Wurzel, die von $i$ unabhängig ist, so ist:

$$f(a) = 0,$$

also:

III. „Alle Wurzeln der Congruenz $f(x) \equiv 0$, die von $i$ unabhängig sind, werden Wurzeln der Gleichung:

$$f(x) = 0$$

sein.“

Da ferner der Ausdruck $i^2+1$ sich nicht ändert, wenn man $i$ mit $-i$ vertauscht, so wird, falls auch die Coefficienten von $f(x)$ $i$ nicht enthalten, jeder Wurzel der Congruenz $f(x) \equiv 0$ von der Form $\alpha+\beta i$ eine andere $\alpha-\beta i$ entsprechen, weil die letztere aus der ersteren entsteht, wenn man $i$ mit $-i$ vertauscht. Nennt man also zwei Ausdrücke von der Form $\alpha+\beta i$ und $\alpha-\beta i$ conjugirt, so gilt der Satz:

IV. „Wenn die Coefficienten der Congruenz von $i$ unabhängig sind, so sind die von $i$ abhängigen Wurzeln in grader Anzahl vorhanden, und je zwei einander conjugirt.“

Ist $f(x)$ endlich eine transcendente Function, so gelten noch immer ähnliche Betrachtungen.

Durch das hier Gesagte ist, wie angezeigt, also der Begriff des Imaginären völlig eliminirt, alle Sätze aber, und selbst die Beweise derselben gelten noch, wenn man die Ausdrücke gleich und Gleichung mit congruent und Congruenz vertauscht, und als den Modul der Congruenzen (nicht zu verwechseln mit dem, was hier als Modul einer Function $f(x)$ bezeichnet wurde) $i^2+1$ annimmt. Denn wie bei der in den Abschnitten 1 bis 9 gegebenen Theorie, werden die Ausdrücke $a+bi$ ganz nach den Regeln des Rechnens, deren man sich bei reellen Grössen bedient, behandelt.

Der Satz, dass Congruenzen mit einander addirt, multiplicirt, von einander subtrahirt, wieder Congruenzen geben, gestattet, sie wie Gleichungen zu behandeln, und die Reste der zwei Seiten einer Congruenz, welche dann eine wirkliche Gleichung (oder zwei Gleichungen) bilden, werden gefunden, wenn man $i^2$ mit $-1$ vertauscht.

Man hat somit jetzt einen deutlichen Begriff von denjenigen Ausdrücken und Gleichungen, welche die imaginären ersetzen.

Unter $f(\alpha+\beta i)$ versteht man immer den Rest dieser Grösse nach $i^2+1$ genommen, wenn $f$ entweder eine ganze Function von $\alpha+\beta i$, oder eine nach ganzen Potenzen fortschreitende convergirende Reihe ist. Sollte dagegen für reelles $x$, $y=f(x)$ keine ganze Function sein, so kann sie doch immer durch Auflösung einer Gleichung $\varphi(x, y)=0$ erlangt werden, wo nur ganze Functionen oder Potenzreihen nach $x$ vorkommen. Es ist dann unter $y=f(\alpha+\beta i)$ die Wurzel der Congruenz:

$$\varphi(\alpha+\beta^i, y) \equiv 0$$

zu verstehen, oder, was dasselbe ist, die der Gleichung:

$$\varphi(\alpha+\beta i, y) = 0,$$

wenn man für die Function $\varphi$ ihren Rest setzt.

Hierin ist der Satz enthalten:

„Identificirt man alle ganzen Functionen von $\alpha+\beta i$ mit ihren Resten nach $i^2+1$, so hat man es nicht mehr mit Congruenzen, sondern mit Functionen und Gleichungen zu thun, die nach den in Abschnitt 1 bis 9 gegebenen Regeln behandelt werden.“

Z. B. Es sei zu bestimmen:

$$y = \sqrt[n]{\alpha+\beta i}.$$

Die Function $\sqrt[n]{x}$ ist gegeben durch die Gleichung:

$$y^n = x,$$

also in unserm Falle ist die Congruenz:

$$y^n \equiv \alpha + \beta i$$

zu lösen. Setzt man:

$$\alpha = r \cos \varphi, \quad \beta = r \sin \varphi,$$

so bat mau:

$$y^n \equiv r e^{\varphi i},$$

oder auch, da:

$$\cos 2s\pi = 1, \quad \sin 2s\pi = 0$$

ist:

$$y^n \equiv r e^{\varphi i} e^{2s\pi i} \equiv r e^{(\varphi + 2s\pi) i},$$

$$y \equiv r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{(\varphi + 2s\pi) i}{n}}.$$

Ueberall aber kann statt des Congruenzzeicheus hier das Gleichheitszeichen stehen, wenn man, wie wir jetzt thun, statt der Werthe von $y$ und $y^n$ immer ihre Reste denkt.

## Quantitäten — complexe — in ihrer Anwendung auf die Functionenrechnung.

1) Einleitung.

Es ist nothwendig, Ausdrücke von der allgemeinen Form $f(\alpha + \beta i)$ zu untersuchen und die Gesetze ihrer Veränderlichkeit, also der Bildung ihrer Differenziale und Integrale festzustellen. Nur indem man das Veränderliche sich complex denkt, ergeben sich die Gesetze der Functionenrechnung in einfachster und allgemeinster Weise.

Die Betrachtungen, welche wir hier anzustellen haben, ersetzen also die Elemente der höheren Analysis, d. h. die Differenzialrechnung, die man früher hauptsächlich nur auf reelle Zahlen erstreckte; sie werden sich ferner auf Reihenentwicklung der Functionen, Eindeutigkeit und Mehrdeutigkeit derselben erstrecken müssen.

Wir werden dabei das im vorigen Artikel Gegebene zu Grunde legen, und in Bezug auf die der Integralrechnung entnommenen Betrachtungen auf den Artikel: „Quadraturen (analytische)" verweisen.

Nachdem im vorigen Artikel der Begriff des Imaginären in verschiedener Weise erörtert ist, brauchen wir keine bestimmte dieser Theorien zu Grunde zu legen. Immer aber werden wir uns geometrischer Veranschaulichungen derart bedienen, dass wir in der complexen Grösse $s = x + yi = r e^{\varphi i}$ nus $x$ und $y$ als rechtwinklige Coordinaten, $r$ als Radius-Vector und $\varphi$ als Winkel desselben mit der Axe der $x$ vorstellen.

Legt man die in Abschnitt 1 bis 9 des vorigen Artikels abgehandelte Theorie des Imaginären zu Grunde, so ist diese Betrachtung nur die Versinnlichung der Thatsache, dass die Grösse $z = x + yi$ sich gleichzeitig mit $x$ und $y$ ändert, also eine Veränderlichkeit nach zwei Dimensionen eintreten kann. Jedem Werthe von $s$ entspricht dann ein Punkt in der Ebene $A$.

Gleiches gilt, wenn man die Theorie der Congruenzen (Abschnitt 11 des vorigen Artikels) dem Imaginären substituirt, und ist dabei immer anzunehmen, dass jede Grösse mit ihrem Rest nach $i^2 + 1$ vertauscht wird (siehe Ende des Abschnittes 11). Dagegen sind bei Zugrundelegung der Theorie der geometrischen Grössen (Abschnitt 10) diese geometrischen Betrachtungen der Theorie unmittelbar entnommen, und die Punkte und Linien, welche dabei vorkommen, stellen die geometrischen Grössen wirklich dar.

2) Allgemeiner Begriff einer Function mit einer complexen Variablen.

Unter einer Function von $s$:

$$u = f(s),$$

wo:

$$s = x + yi$$

eine complexe Grösse ist, verstehen wir zunächst eine Grösse von der Form $p + qi$, wo $p$ und $q$ reelle Werthe sind, die sich nach irgend einem Gesetze gleichzeitig mit $x$ und $y$ ändern. Im Allgemeinen wird also zu jedem Punkte $A$ der Ebene, welche durch irgend einen Werth von $x$ und $y$ bestimmt wird (wir drücken dies in der Folge so aus, der Punkt $A$ habe den Werth $z = x + yi$), auch wenigstens ein Werth von $p$ und ein Werth von $q$ gehören.

Je nach der Beschaffenheit der Functionen kann dieselbe für jedes $x$ und $y$, also für die ganze Ebene oder nur für gewisse Theile derselben gegeben sein. Im letztern Falle sagt man, $x$ sei beschränkt veränderlich.

Man kann annehmen, dass man von jedem Punkt $A$, dem ein Werth der Function entspricht, zu jedem andern $B$ auf wenigstens einem Wege, d. h. auf einer Linie so gelangen kann, dass für jeden Punkt derselben die Function continuirlich bleibt. Denn was die Discontinuitäten anbetrifft, so finden dieselben entweder in ganzen Flächenstücken, oder in Linien, oder in Punkten statt. In den beiden ersten Fällen sind die Functionen

für diese Theile nicht als definirt zu betrachten, die Variable ist also beschränkt veränderlich. Nur dann kann man auf continuirlichem Wege nicht von einem Punkte $A$ nach $B$ gelangen, wenn zwischen beiden eine geschlossene oder nach beiden Seiten unendliche Discontinuitätslinie, bezüglich ein Flächenstück, welches eine solche enthält, vorhanden sind. Dann sind statt einer Function zwei mit beschränkt veränderlicher Variable $x$ anzunehmen, deren Gebiete von einander geschieden sind.

Noch bemerken wir, dass es zwei Arten von Discontinuitätslinien gibt. Die Unstetigkeit findet entweder von Punkt zu Punkt der Linie, also auf derselben statt, oder beim Ueberschreiten der Linie, auf beiden Seiten, wenn man von einem Punkt $A$ auf einer Seite derselben zu einem benachbarten auf der andern gelangt, während die Function auf der Linie selbst stetig ist.

Wir reihen hieran einige Betrachtungen, welche sich auf die geometrische Bedeutung gewisser analytischen Operationen beziehen.

Allen reellen Werthen von $z$, wo also $y=0$ ist, entsprechen die Punkte der Abscissenaxe, den positiven die eine, den negativen die andere Seite derselben, allen rein imaginären Werthen, wo $x=0$ ist, die Ordinatenaxe. Für $z=0$, also $x=y=0$, hat man den Anfangspunkt der Coordinaten.

Setzt man:

$$x+yi=re^{\varphi i},$$

so entsprechen alle Werthe, welche gleiches:

$$r=\sqrt{(x^2+y^2)},$$

also gleiche Radien-Vectoren haben, offenbar der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten, und wo $r$ der Radius ist. Alle Werthe $z$, deren Modul $\varrho$ kleiner als $r$ ist, entsprechen Punkten innerhalb dieses Kreises, alle Werthe, wo $\varrho$ grösser ist, Punkten ausserhalb desselben. Setzt man:

$$z=\alpha+u,$$

wo $\alpha$ eine complexe Constante

$$\alpha=a+bi$$

sein soll, so ist:

$$u=x-a+(y-b)i.$$

Punkt $u$ hat also die Coordinaten:

$$x'=x-a,\quad y'=y-b.$$

Es sind dies die Coordinaten, welche man für $z$ erhält, wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten, welche parallel mit sich selbst bleiben, nach Punkt $\alpha$ verlegt. Setzt man also:

$$z=\alpha+u,$$

so entspricht dieser Substitution eine Verlegung der Coordinaten nach Punkt $\alpha$. Ist:

$$u=\varrho e^{\vartheta i},$$

also:

$$z=\alpha+\varrho e^{\vartheta i},$$

so ist:

$$\varrho e^{\vartheta i}=(x-a)+i(y-b),$$

also:

$$\varrho^2=(x-a)^2+(y-b)^2,$$

d. h. $\varrho$ stellt die Entfernung des Punktes $z$ vom Punkte $\alpha$ vor. Alle Punkte, welche gleiches $\varrho$ haben, liegen also in einer Kreisperipherie, deren Mittelpunkt $\alpha$ und deren Radius $\varrho$ ist.

3) Eindeutige und mehrdeutige Functionen.

Von jedem Punkte $a$ kann man zu einem andern Punkte $b$ auf unendlich vielen Wegen in continuirlicher Weise gelangen, und jedem Punkte eines dieser Wege wird im Allgemeinen ein anderer Werth von $f(z)$ entsprechen. Ist die Function eindeutig, so wird man schliesslich in Punkt $b$ immer wieder zu demselben Werthe gelangen, welches auch der eingeschlagene Weg sei, da für jeden Punkt die Function ja nur einen Werth hat.

Bei eindeutigen Functionen kommen also nur die Discontinuitäten in Betracht. Discontinuitätslinien kommen bei der in den Elementen betrachteten Function nicht vor, und haben wir uns zunächst auf Discontinuitätspunkte zu beschränken. Dieselben theilen wir in zwei Gattungen, deren erstere solche Punkte umfassen soll, in deren Umgebung die Function immer unendlich bleibt. Ein solcher Punkt ist z. B. für die Function $\operatorname{tg} x$ der Punkt $x=\frac{\pi}{2}$, da man immer hat:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\nu\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\nu\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\nu\right)}=-\cot\nu,$$

also für unendlich kleines $\nu$:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\nu\right)=-\frac{1}{\nu},$$

es sei nun $\nu$ reell oder imaginär. Die Discontinuitätspunkte erster Gattung haben also die Eigenschaft, dass wenn $f(x)$ für $x=a$ einen solchen hat, die Function $\frac{1}{f(x)}$ für $x=a$ verschwindet und continuirlich bleibt.

Discontinuitätspunkte zweiter Gattung nennen wir diejenigen, in deren Umgegend die Function wenigstens nicht immer unendlich wird. Dergleichen sind für die Function $e^{\frac{1}{x}}$ der Punkt $x=0$, dafür einen positiven Zuwachs von $x$ $e^{\frac{1}{x}}=\infty$, für einen negativen $e^{\frac{1}{x}}=0$ ist. Man kann auch eine eindeutige Function finden, welche in einem beliebigen Punkte $a$ von einem gegebenen Werthe $a$ nach einem andern $b$ überspringt. Eine solche ist z. B.:

$$f(x)=a+(b-a)e^{-e^{\frac{1}{x-a}}}.$$

Ist $\nu$ positiv und unendlich klein, so hat man offenbar:

$$f(a+\nu)=a,\quad f(a-\nu)=b.$$

Mit diesem Sprunge ist jedoch die Discontinuität der bezeichneten Function nicht erschöpft. Sei der Zuwachs $=\nu+\vartheta i$, wo $\nu$ und $\vartheta$ unendlich klein und $\nu$ auch positiv sein soll; dann hat man:

$$e^{\frac{1}{\nu+\vartheta i}}=e^{\frac{\nu-\vartheta i}{\nu^2+\vartheta^2}}=S(\cos\varrho-i\sin\varrho),$$

wo $S$ und $\varrho$ unendlich grosse positive Grössen sind. Dagegen ist:

$$e^{\frac{1}{-\nu+\vartheta i}}=e^{\frac{-\nu-\vartheta i}{\nu^2+\vartheta i^2}}=0.$$

Man hat also immer:

$$f(a-\nu+\vartheta i)=b.$$

Was den Ausdruck $f(a+\nu+\vartheta i)$ anbetrifft, so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

A) Das unendlich grosse positive, sonst beliebige $\varrho$ ist kein ungrades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ und liegt im ersten, vierten, fünften, achten u. s. w. Quadranten. Dann ist $S\cos\varrho$ positiv unendlich, und:

$$f(a+\nu+\vartheta i)=a.$$

B) $\varrho$ ist kein ungrades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, liegt aber im zweiten, dritten, sechsten, neunten u. s. w. Quadranten. Dann ist $S\cos\varrho$ negativ, und wie leicht zu sehen:

$$f(a+\nu+\vartheta i)=P+Qi,$$

wo $P$ und $Q$ beliebige reelle Zahlen sind, die auch unendlich gross sein können.

C) $\varrho$ ist ein ungrades Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, also:

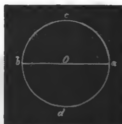
$$\cos\varrho=0,\ \sin\varrho=\pm 1;$$

dann ist $f(a+\nu+\vartheta i)$ ebenfalls gleich $P+Qi$.

Die Discontinuität ist also derart, dass in der Nähe des Punktes $a$ die Function alle Werthe annimmt. Es wird später gezeigt werden, dass in der Nähe eines Discontinuitätspunktes zweiter Gattung eine eindeutige Function wenigstens einmal unendlich gross werden muss.

Was nun die mehrdeutigen Functionen anbetrifft, so kann man in der That auf zwei Wegen mit verschiedenen Werthen der Function von $a$ nach $b$ gelangen. Die Function möge in einem beliebigen Punkte $z$ die Werthe $f_1(z)$ und $f_2(z)$ haben, so ist es möglich, dass, wenn man von Punkt $a$ nach $b$ auf zwei verschiedenen Wegen fortschreitet und beide Male mit demselben Werthe von $f(a)$ beginnt, man auf dem einen zur Function $f_1(b)$, auf dem andern zu $f_2(b)$ gelangt. Sei z. B. gegeben $f(z)=\sqrt{z}$, eine Function, welche für jeden Werth von $z$ zwei entgegengesetzte Werthe hat. Beginnen wir mit einem Punkte der Abscissenaxe, der den reellen Werth $a$ hat, und gehen wir der Function für $z=a$ den positiven Wurzelwerth. Sei $b=-a$, also ebenfalls reell. Ziehen wir jetzt vom Anfangspunkte $O$ aus (Fig. 62)

Fig. 62.




mit Radius $Oa$ einen Kreis, und gehen einmal auf dem Wege, der durch den Halbkreis $acb$ bezeichnet wird, dann auf dem Wege $adb$ von $a$ nach $b$ über. — Es ist für irgend einen Punkt dieser

Peripherie $y = a e^{\varphi i}$. Auf dem erstern Wege geht man von $\varphi = 0$, welcher $a$ entspricht, bis $\varphi = \pi$, welcher $b$ entspricht, auf dem andern von $\varphi = 0$ bis $\varphi = -\pi$. Es ist also auf dem ersten Wege:

$$\sqrt{b} = \sqrt{a e^{\pi i}},$$

und auf dem letztern:

$$\sqrt{b} = \sqrt{a e^{-\pi i}},$$

d. h. bezüglich:

$$\sqrt{b} = \sqrt{a}\, e^{\frac{\pi}{2} i} = i \sqrt{a},$$

und:

$$\sqrt{b} = \sqrt{a}\, e^{-\frac{\pi}{2} i} = -i \sqrt{a}.$$

Man hat also in der That auf jedem Wege einen anderen Werth von $\sqrt{b}$ erhalten.

Es fragt sich, unter welchen Bedingungen eine solche Abhängigkeit des Werthes einer Function vom zurückgelegten Werthe eintreten kann.

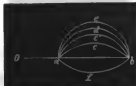
Es sind hier gewisse Punkte der Ebene ins Auge zu fassen, welche wir mehrfache Punkte (doppelte, dreifache, $n$fache u. s. w.) nennen. Es haben dieselben die Eigenschaft, dass für sie $n$ Werthe der betrachteten Function gleich werden. Für den Ausdruck $\sqrt{z}$ z. B. ist also der Anfangspunkt der Coordinaten, $z = 0$, ein Doppelpunkt, denn für ihn wird:

$$+\sqrt{z} = -\sqrt{z}.$$

eben so hat die Function $\sqrt[n]{z}$ in $z = 0$ einen $n$fachen Punkt, da hier alle Wurzeln einander gleich und gleich Null werden. Die Function $\sqrt{(x^2 - a^2)}$ hat zwei Doppelpunkte, welche $x = +a$ und $x = -a$ entsprechen.

Wir untersuchen jetzt den Gang der Function $f(z)$, welche für jeden Punkt etwa zwei Werthe $f_1(z)$ und $f_2(z)$ annehmen kann auf zwei Wegen, $acb$ und $adb$, welche beide von $a$ nach $b$ führen (Fig. 63). Wir wollen dabei zunächst

Fig. 63.




annehmen, die Wege wichen nur unendlich wenig von einander ab; ferner sei auf dem ganzen Umfange $aedb$ und innerhalb des von ihm begrenzten Ebenenstückes die Function $f(z)$ continuirlich, und es befinde sich daselbst kein mehrfacher Punkt, so dass also für jeden Punkt auf diesem Umfang und innerhalb desselben die beiden Werthe $f_1(z)$ und $f_2(z)$ um eine endliche Grösse von einander verschieden sind.

Fängt man nun in $a$ mit dem Werthe $u = f_1(a)$ an und verfolgt den Weg $acb$, so kann sich $u$ nur continuirlich ändern, und in jedem Punkte des Weges, z. B. in $c$ oder $b$, mit einem der beiden Werthe von $f(z)$ anlangen, den wir ebenfalls mit $f_1(b)$, $f_1(c)$ bezeichnen. — Verfolgt man mit demselben Anfangswerthe den Weg $adb$, so wird sie, da auch hier und auf dem Uebergange von $acb$ nach $adb$ Continuität herrscht, in keinem Punkte einen Werth annehmen können, der von dem eines benachbarten Punktes des Weges $acb$ um eine endliche Grösse verschieden ist. Ist also $d$ unendlich nahe dem Punkte $c$, so wird hier die Function nur den Werth $f_1(d)$, nicht $f_2(d)$ annehmen können, da letzterer Werth um eine endliche Grösse von $f_1(d)$ und also auch von $f_1(c)$ abweicht. Gleiches gilt von jedem Punkte der Linie $adb$, es wird also auf diesem Wege in Punkt $b$ die Function ebenfalls den Werth $f_1(b)$ erhalten. Nun aber kann man, wenn $acb$ eine andere beliebige Linie zwischen $a$ und $b$ ist, die auf gleicher Seite mit $acb$ und $adb$ liegt, auch den ganzen Raum, welcher von $acbea$ begrenzt ist, in unendlich kleine Räume theilen, durch Linien, die alle wie $ac'b$ durch $a$ und $b$ gehen.

Auf allen diesen Wegen, und schliesslich also auch auf Weg $aeb$, wird die Function in $b$ denselben Werth $f_1(b)$ erhalten, wenn man überall in $a$ mit $f_1(a)$ beginnt, und in und auf dem ganzen Umfange $adbea$ kein mehrfacher Punkt sich befindet, auch die Function nicht discontinuirlich wird.

Aehnliches gilt für alle Wege, die zwischen $afb$ und $adb$ liegen, wenn $afb$ auf der andern Seite von $adb$ und $aeb$ liegt. Also:

„Damit auf zwei Wegen $aeb$ und $afb$ die Function zu demselben Werthe in $b$ führt, wenn man mit demselben Werthe von $a$ ausgegangen ist, reicht es hin, dass in dem ganzen von $ebfa$ begrenzten Raume und auf der Begrenzung selbst kein mehrfacher Punkt und die Function continuirlich sei."

Wenn man in diesem Falle Weg $\alpha f b$ rückwärts, also von $b$ nach $\alpha$ zurücklegt, so wird man von dem Functionswerthe $f_1(b)$ zu $f_1(\alpha)$ gelangen. Also:

„Wenn man von $\alpha$ ausgeht und die ganze geschlossene Curve $\alpha e b f \alpha$ zurücklegt, so muss, falls man mit einem anderen Werthe, $f_r(\alpha)$, als dem, mit welchem man in $\alpha$ begonnen hat, $f_1(\alpha)$, nach $\alpha$ zurückgelangt, von dieser Curve ein mehrfacher oder ein Discontinuitätspunkt enthalten sein."

Was zunächst die Discontinuitätspunkte erster Gattung anbetrifft, so kann man für dieselben statt der Function $f(x)$ in der Nähe eines solchen Punktes $\frac{1}{f(x)}$ betrachten, und da hier die Function continuirlich ist, und jedem Werthe von $f(x)$ ein solcher von $\frac{1}{f(x)}$ entspricht, so muss, falls ein solcher Wechsel des Werthes eintreten soll, die letztere Function einen mehrfachen Punkt haben. Der Discontinuitätspunkt ist in diesem Falle zugleich mehrfacher Punkt.

Die Betrachtung der Discontinuitätspunkte zweiter Gattung wollen wir hier nicht weiter verfolgen. Man kann also jetzt sagen, dass ein Werthwechsel nur beim Umkreisen eines mehrfachen Punktes eintreten kann. Ein solcher Wechsel ist jedoch nicht nothwendig, sondern nur möglich. Die Function $\sqrt{x}$ hat für $x=0$ einen solchen. — Der Ausdruck $\alpha^x = e^{x \lg \alpha}$ ist ein mehrdeutiger, da $\lg \alpha$ unendlich viel Werthe hat. Alle diese Werthe werden gleich, wenn $x$ eine ganze Zahl ist; es sind die entsprechenden Punkte also mehrfache. Aber setzt man für $x$ den Werth $n + re^{\varphi i}$, wo $n$ eine ganze Zahl ist, so wird:

$$\alpha^x = \alpha^n e^{re^{\varphi i} \lg \alpha},$$

und wenn man für $\varphi$ erst 0, dann $2\pi$ setzt, erhält man beidemal denselben Werth, so dass hier beim Umkreisen keine Werthverschiedenheit eintritt. Gleiches ist offenbar auch bei:

$$\sqrt{(1-\sin x^2)} = \pm \cos x$$

der Fall.

Man kann sonach immer von Räumen sprechen, in welchen eine gegebene Function eindeutig ist, nämlich in solchen, worin sich kein mehrfacher Punkt befindet. In diesen Räumen sind alle Werthe von $f(x)$ völlig von einander getrennt.

„Hat eine Function eine endliche Anzahl von Werthen, also $n$, so wird man, wenn man auf einer geschlossenen Curve einen mehrfachen Punkt eine gewisse Anzahl von Malen umkreist, zuletzt immer auf denselben Werth von $f(x)$ zurückkommen."

Seien z. B. $f_1(x)$, $f_2(x)$ . . . $f_n(x)$ die Werthe von $f(x)$, und mögen von denselben $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ für $x=\alpha$ gleich werden, so kann man bei einmaligem Umkreisen von $f_1(\alpha)$ zu $f_2(\alpha)$, bei zweimaligem von $f_2(\alpha)$ zu $f_3(\alpha)$ gelangen. Aber keiner der Werthe $f_4(\alpha)$ . . . $f_n(\alpha)$ kann beim weiteren Umkreisen des Punktes $\alpha$ sich einstellen, da diese Werthe in $\alpha$ einen endlichen Unterschied von $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$ haben. Es muss also $f_3(\alpha)$ bei abermaligem Zurücklegen der geschlossenen Curve zu einem der Werthe $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\alpha)$ zurückführen. Es kann dies aber nur der anfängliche Werth $f_1(\alpha)$ sein; denn führte das Umkreisen des Punktes $\alpha$ mit dem Anfangswerthe $f_3(\alpha)$ zu $f_3(\alpha)$, so würde die umgekehrt gerichtete Umkreisung von $f_3(\alpha)$ zu $f_2(\alpha)$ führen. Nach der Annahme aber führt eine solche zu $f_1(\alpha)$, da die anfängliche von $f_1(\alpha)$ zu $f_2(\alpha)$ führt. Also:

„Beim $n$maligen Umkreisen eines $n$fachen Punktes kann die Function nur $n$ verschiedene Werthe annehmen, und muss dann auf den ersten wieder zurückkommen."

Z. B. die Function:

$$u = \sqrt[n]{z}$$

hat einen $n$fachen Punkt für $z=0$. Beschreibt man um diesen einen Kreis, d. h. setzt man $z = re^{\varphi i}$ und lässt $\varphi$ von 0 bis $2n\pi$ wachsen (siehe den vorigen Abschnitt), so erhält man für:

$$\varphi = 0,\ \varphi = 2\pi,\ \varphi = 4\pi\ .\ .\ .\ \varphi\,(2n-2)\pi,\quad \varphi = 2n\pi$$

bezüglich:

$$u = r^{\frac{1}{n}},\ u = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2\pi i}{n}},\ u = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{4\pi i}{n}}\ .\ .\ .\ u = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}},\ u = r^{\frac{1}{n}},$$

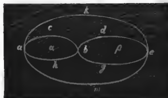
und in der That ist nach $n$fachem Umkreisen des Anfangspunktes der Coordinaten die Function zu ihrem anfänglichen Werthe zurückgekehrt. Indess braucht nicht das Umkreisen jedes $n$fachen Punktes wirklich alle $n$ Werthe in einem Cy-

clus zu gehen. Es kann z. B. sein, dass, wenn für $x=\alpha$ die Function $f(x)$ einen vierfachen Punkt hat, ein zweimaliges Umkreisen, wenn man mit $f_1(x)$ beginnt, zuerst auf $f_2(x)$ und dann wieder auf $f_1(x)$ zurückführt. Beginnt man dagegen mit $f_3(x)$, so kann man zu $f_4(x)$ und dann zu $f_3(x)$ gelangen. Immer aber müssen im letztern Falle die verschiedenen Cyclen auch von einander verschiedene Werthe ergeben. Möglicherweise kann ein Cyclus aus einem Werthe bestehen.

„Das eben Gesagte gilt aber dann nicht mehr, wenn man auf zwei Wegen von $a$ nach $b$, oder auf einem geschlossenen Wege von $a$ nach $a$ geht, wenn in dieser Begrenzung mehr als ein mehrfacher Punkt enthalten ist."

Wie in diesem Falle zu verfahren ist, zeigen aber sehr leicht folgende Betrachtungen. Es mögen innerhalb *akema*

Fig. 64.




zwei mehrfache Punkte $\alpha$ und $\beta$ liegen. Wir umgehen $\alpha$ und $\beta$ einzeln mit den geschlossenen Curven *acbha* und *bdegb*, die sich in $b$ berühren. Es wird dann Weg *acbde* dasselbe Resultat als Weg *ake*, und *ahbge* dasselbe als *ame* geben, denn in den von je zweien dieser Wege gebildeten geschlossenen Curven sind mehrfache Punkte nicht enthalten. Man kann also diese Betrachtung auf die derjenigen Curven, welche die mehrfachen Punkte einzeln umgehen, zurückführen. Jedoch ist nicht nöthig, dass sich diese Curven berühren. Es sei z. B.:

$$f(x)=\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)};$$

$x=\alpha$ und $x=\beta$ sind hier in der That Doppelpunkte. Umgehe man (Fig. 65) $\alpha$ und $\beta$ mit kleinen Kreisen, die innerhalb *akem* liegen; $g$, $h$ sind beliebige Punkte der Peripherie des einen, $s$, $i$ des andern Kreises, *gdh*, *gvh*, *swi*, *swi* sind Halbkreise. Wir verbinden durch beliebige, z. B. grade Linien die Punkte $a$, $g$ — $h$, $s$ — $i$, $e$. Es führt dann Weg *ake* zu demselben Werthe als *agdhsuie*, und *ame* zu demselben als

Fig. 65.




*agvhswie*. Möge man in $a$ mit einem der beiden Wurzelwerthe $f_1(x)$ beginnen. Ist in $g$:

$$x=\alpha+re^{\varphi i},$$

wo $r$ der Radius des Kreises um $\alpha$ ist, so ist in $h$:

$$x=\alpha+re^{(\varphi+\pi)i},$$

wenn man auf Weg *gdh* geht, dagegen:

$$x=\alpha+re^{(\varphi-\pi)i},$$

wenn man Weg *gvh* zurückgelegt hat. Es ist dann also bezüglich:

$$f_1(g)=r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\varphi}{2}i}e^{\frac{\pi}{2}i},$$

$$f_2(g)=r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\varphi}{2}i}e^{-\frac{\pi}{2}i},$$

also da:

$$e^{\frac{\pi}{2}i}=i,\; e^{-\frac{\pi}{2}i}=-i$$

ist:

$$f_2(g)=-f_1(g).$$

Ebenso führen die Wege *swi* und *swi* zu verschiedenen Werthen von $f(i)$. Man hat also auf Strecke *agdhsuie* immer den Werth $f_1(x)$, dagegen auf Strecke *agvhswie* in $h$ den Werth $f_2(x)$, in $s$ denselben, in $i$ dann $-f_2(x)=f_1(x)$, denn da Weg *swi* von $f_1(s)$ zu $f_2(w)$ führt, muss dieser Weg auch von $f_2(s)$ nach $f_1(w)$ führen, man langt also in $e$ ebenfalls mit $f_1(x)$ an. D. h.: Zwei Wege, welche die Doppelpunkte $x=\alpha$ und $x=\beta$ umfassen, *ake* und *ame* führen in $e$ zu demselben Werthe von $f(x)=\sqrt{(x-\alpha)(x-\beta)}$. Also wenn man von $a$ aus eine in sich zurückkehrende Curve durchschreitet, welche beide Punkte umfasst, so kehrt man zu demselben Werthe zurück, von welchem man ausgegangen ist.

Aus dem Umkreisen von Räumen, welche je einen mehrfachen Punkt ent-

halten, kann man sich also die Mehrdeutigkeit der Function gewissermaassen entstehend denken. Da es Functionen giht, die unendlich vieldeutig sind, wie z. B. $\lg(x)$, so brauchen diese beim Umkreisen eines mehrfachen Punktes nie wieder auf den alten Werth zurückführen. In der That findet für die Function $\lg(x)$ im Anfangspunkt der Coordinaten ein unendlichfacher Punkt statt. Es ist nämlich zwar $\lg 0 = \infty$, aber:

$$\frac{1}{\lg x} = \frac{1}{l x + 2 s \pi i},$$

wo $l(x)$ ein beliebiger Werth des Logarithmus ist, und alle diese Werthe werden unter einander und der Null gleich für $x = 0$.

Ziehen wir einen Kreis um den Anfangspunkt der Coordinaten mit Radius $r$, und beginnen in Punkt $\alpha$ dieses Kreises mit dem Werthe $\alpha = r e^{\varphi i}$, und mit:

$$\lg \alpha = \lg r + \varphi i,$$

wo unter $\lg r$ der reelle Logarithmus dieser Grösse zu verstehen ist. Nach $s$ maligem Umkreisen hat man dann:

$$\lg \alpha = \lg r e^{(\varphi + 2 s \pi) i},$$

also:

$$\lg \alpha = r + i(\varphi + 2 s \pi),$$

d. h. bei jeder Umkreisung vermehrt sich $\lg(x)$ um $2\pi i$ und so ins Unendliche fort; bei der Umkreisung in einer der anfänglichen entgegengesetzten Richtung würde Verminderung um $2\pi i$ eintreten.

Wir können hier eine Veranschaulichung nicht übergehen, mit welcher Riemann die Mehrdeutigkeit der Functionen und die hier gegebenen Verhältnisse des Uebergangs ihrer verschiedenen Werthe in einander auch räumlich dargestellt hat. (Vergleiche: Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen von G. Riemann.)

Man denke sich statt einer Ebene mehrere über einander gelegte Blätter, und zwar soviel als die Function Werthe hat. Jedem Werthe der Variablen $z = x + yi$ wird dann auf jedem dieser Blätter ein Punkt und diesem ein Werth der Function $f(x)$ entsprechen. Alle diejenigen Werthe von $f(x)$, welche, einzelne Punkte ausgenommen, continuirlich aus einander entstehen, denkt man sich als zu dem ersten Blatte gehörig, die anderen $f_2(x)$ zu dem zweiten u. s. w. Somit hat jeder Werth von $f(x)$ seinen ganz bestimmten Platz, und es ist somit die Mehrdeutigkeit im Allgemeinen gewissermassen aufgehoben. Nur in den Punkten, wo etwa $n$ Werthe von $f(x)$ gleich werden, denke man sich die Blätter zusammenhängend. Dieser Zusammenhang kann aber ein verschiedener sein. Geht nach einmaligem Umkreisen des mehrfachen Punktes $f_1(x)$ wieder in $f_1(x)$, $f_2(x)$ in $f_2(x)$ u. s. w. über, wie dies bei $a^x$ für $x = 1, 2 \ldots$ der Fall war, so muss man sich die Blätter noch immer über einander liegend und ohne weiteren Zusammenhang als in dem fraglichen Punkte vorstellen. Geht aber z. B. $f_1(x)$ in $f_2(x)$, $f_2(x)$ in $f_3(x)$ und $f_3(x)$ in $f_1(x)$ über, so denke man sich in diesem Punkte die Blätter nach Art einer Schraube über einander gewunden, so dass eine Umkreisung, d. h. die Zurücklegung einer Schraubenwindung vom ersten Blatt ins zweite, der zweiten Windung vom zweiten ins dritte führt; um vom dritten wieder ins erste zu gelangen, muss man sich dann die Windung allerdings durch die einzelnen Blätter zurück in sich selbst zurücklaufend denken, wie dies hier (Fig. 66) ungefähr in der von $a$ nach $a$ zurückführenden Schraube angedeutet ist. Ein solcher mehrfacher Punkt heisst dann Windungs- oder Verzweigungspunkt, und kann ein doppelter, dreifacher u. s. w. sein. Führt also z. B. beim Umkreisen des Punktes $\alpha$ die erste Windung von $f_1(x)$ an $f_2(x)$, von $f_2(x)$ zu $f_3(x)$, von $f_3(x)$ zu $f_1(x)$ und gleichzeitig von $f_4(x)$ zu $f_5(x)$ und von $f_5(x)$ zu $f_4(x)$, so ist $\alpha$ ein fünffacher Punkt, zugleich aber ein dreifacher und ein zweifacher Windungspunkt, nämlich für $f_1$, $f_2$, $f_3$ ein dreifacher, und für $f_4$ und $f_5$ ein doppelter. Windungspunkte können offenbar auch Discontinuitäts-Punkte zwejter Gattung sein. Nur wenn eine Function unendlich viel Werthe hat, und zugleich jede Umkreisung einen neuen Werth giht, wie dies z. B. bei $\lg(x)$ in Punkt $x = 0$ stattfindet, ist eine Schraube mit unendlich vielen Windungen zu den-

Fig. 66.



ken, deren jede einem Werthe von $f(x)$ entspricht.

Es lässt sich nun für jeden Punkt eines der Blätter der Gang der Function in folgender Weise veranschaulichen.

Man denke zuerst die Windungspunkte auf denjenigen Blättern, zu welchen sie gehören, verzeichnet; von jedem Windungspunkte aus eine Linie, z. B. eine Grade, jedoch nur nach einer Richtung und so gezogen, dass sie über keinen Windungspunkt hinausgeht, also entweder ins Unendliche, so, dass sie dadurch keinen zweiten Windungspunkt enthält, oder eine endliche Linie vom ersten Windungspunkt bis zum zweiten, eine andere Linie vom dritten bis zum vierten u. s. w. Zieht man nun von einem Punkte $b$ der vom Windungspunkte $a$ ausgehenden Linie eine in sich zurückkehrende Curve um $a$ herum bis wieder nach $b$, so wird, wenn man mit $f_1(b)$ begann, man in $b$ mit $f_2(b)$ zurückkehren, wo $f_1(b)$ ungleich $f_2(b)$ ist.

Es wird also auf beiden Seiten dieser Linie Discontinuität stattfinden. Diese Linie nennen wir Verzweigungslinie. Geht man nun ein zweites Mal um $a$ herum von $b$ nach $b$, also diesmal mit $f_2(b)$ beginnend, so wird man mit $f_3(b)$ oder auch, wenn der Punkt ein Doppelpunkt ist, mit $f_1(b)$ zurückkehren, d. h. man muss annehmen, dass man beim Ueberschreiten einer Verzweigungslinie von einem Blatt ins nächste gerathe, dass also die Blätter in der Verzweigungslinie mit einander zusammenhängen. Diese Darstellung zeigt auch sehr gut, wie man beim einmaligen Umkreisen zweier Windungspunkte dennoch auf den Anfangswerth zurückkommen kann. Z. B. wenn $a$ und $b$ Doppelpunkte sind, $A$, $B$ die zugehörigen Verzweigungslinien; fängt man dann mit einem Punkte auf der äusseren Seite von $A$ mit $f_1(x)$ an, so kann man bis $B$ gelangen, ohne die Verzweigungslinie zu schneiden, dann schneidet man $B$, kommt also auf den Werth $f_2(x)$, endlich muss $A$ geschnitten werden, was auf $f_1(x)$ zurückführt.

Geht nach der zweiten Betrachtungsweise von $a$ nach $b$ nur eine Verzweigungslinie, so ist es an sich klar, wie man, ohne diese zu schneiden, von $a$ nach $a$ zurückkehrt, wenn die Punkte nur Doppelpunkte sind.

Es ist aber noch eine Bemerkung über den Werth $x=\infty$ zu machen. Diesem Werthe entsprechen auf der Ebene unendlich viel Punkte. Betrachtet man indess statt der Function $f(x)$ die von $y=\frac{1}{x}:f\left(\frac{1}{y}\right)$, so ist für $x=\infty:\ y=0$, also nur ein Punkt vorhanden. Es hat aber $f\left(\frac{1}{y}\right)$ gerade so viel Werthe als $f(x)$. Man kann also auch, wie dies oft nützlich ist, nur von einem Unendlichkeits-, d. h. unendlich entfernten Punkte sprechen, und ist darunter derjenige zu verstehen, wo $y=\frac{1}{x}=0$ ist. Dieser Punkt kann ein Discontinuitäts- und auch ein mehrfacher Punkt sein. Z. B. bei der Function $\sqrt[n]{x}$ hat der Punkt $x=\infty$ beide Eigenschaften, denn sowohl ist $\sqrt[n]{x}=\infty$, als $\sqrt[n]{\frac{1}{y}}=\frac{1}{\sqrt[n]{y}}$ ein $n$facher Punkt, da $\frac{1}{\sqrt[n]{x}}=\sqrt[n]{y}$ ein solcher ist. Dies Verhältniss wird räumlich wiedergegeben, wenn man sich statt der Ebene eine Kugel mit unendlich grossem Radius denkt. Die Verzweigungslinien gehen dann, wenn man von unserer ersten Betrachtung ausgeht, von den mehrfachen bis zum Unendlichkeitspunkte, nicht aber über denselben weg, da sie sonst zum Anfangspunkte zurückführen würden.

4) Untersuchung der Werthe, welche eine mehrdeutige Function annehmen kann, wenn man von einem gegebenen Punkte und Werthe aus zu einem andern Punkte auf verschiedenen Wegen gelangt.

Wenn man von Punkt $a$ aus nach einem andern $a'$ derart auf zwei Wegen geht, dass man mit demselben Werthe $f_1(a)$ beginnt, so kann man mit verschiedenen Functionswerthen in $a'$ anlangen, wenn beide Wege Windungspunkte einschliessen. Schliessen sie nur einen ein, so muss dies offenbar stattfinden.

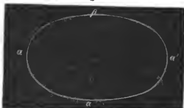
Wir unterscheiden jetzt geschlossene Curven von in sich zurückkehrenden, unter den erstern solche verstehend, wo die Function $f(z)$ in $a$ mit demselben Werthe $f_1(a)$, mit dem sie ausging, nach $a$ zurückkehrt, also in dasselbe Blatt wieder eintritt, unter den letztern solche, wo die Function bei der Rückkehr nach $a$ in ein anderes Blatt tritt, also mit $f_2(a)$ zurückkehrt, wenn sie mit $f_1(a)$ ihren Lauf begann. Sonach sind in sich zurückkehrende Curven geschlossen, wenn

sie keinen Windungspunkt enthalten, oder nur einen $n$fachen, den sie $n$mal umkreisen. Eine Curve, die einen Windungspunkt nur einmal umkreist, ist nicht geschlossen. Leicht einzusehen sind nun folgende Sätze:

A) „Wenn man, mit $f_1(a)$ beginnend, Weg $a\beta a'$ zurücklegt, so kann man zu demselben Functionenwerth in $a'$ gelangen, wenn man irgend einen andern Werth $a\alpha a'$ und ausserdem eine in sich zurückkehrende Curve zurücklegt. Beide Wege gelten also gleich."

Denn $a\beta a'$ lässt sich ersetzen durch die in sich zurückkehrende Curve $a\beta a'\alpha a$ (Fig. 67) und Weg $a\alpha a'$. Da man nämlich Weg $a'\alpha a$ und unmittelbar darauf $a\alpha a'$ geht, so ist dieser Weg als nicht geschehen zu betrachten.

Fig. 67.

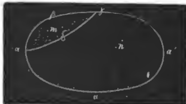


Was nun die in sich zurückkehrende Curve anbetrifft, so kamen wir schon im vorigen Abschnitt auf das Resultat.

B) „Eine in sich zurückkehrende Curve, welche $n$ Windungspunkte umkreist, gilt gleich $n$ dergleichen Curven, welche jede einen umkreisen."

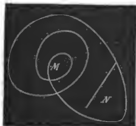
Weg $a\beta a'\alpha a$ (Fig. 68) möge z. B. die Windungspunkte $m$ und $n$ enthalten, so gilt dieser Weg gleich den beiden $a\beta\gamma\delta a$ und $a\delta\gamma a'\alpha a$, die jede nur einen Verbindungspunkt enthalten. Hierbei kann der Weg (Fig. 68) sich mehrere Male selbst

Fig. 68.



schneiden, oder einen der Windungspunkte $M$ auch mehrere Male (Fig. 69) umkreisen. Dasselbe wird auch die Curve thun, welche durch Zerlegung entsteht.

Fig. 69.




C) „Eine geschlossene Curve, die sich auf einem Wege befindet, kann ganz weggelassen werden."

Die Function kehrt nämlich mit ihrem Anfangswerthe zurück, und der Weg ist also ohne Einfluss.

D) „Zwei von $a$ ausgehende, in sich zurückkehrende Curven, welche einen und zwar denselben Windungspunkt gleich oft und in gleicher Richtung umkreisen, gelten einander gleich."

Denn zwischen ihnen befindet sich kein Windungspunkt, beide Werthe kehren also mit demselben Werthe nach $a$ zurück. — Es ist wichtig zu bemerken, in welcher Richtung ein Windungspunkt

umkreist wird. Wir bezeichnen eine anfänglich anzunehmende als positiv, die entgegengesetzte als negativ.

Ein in sich zurückkehrender Weg, der einen Windungspunkt $M$ $n$mal umkreist, ist durch folgende Wege zu ersetzen. Man zieht von $a$ aus eine beliebige Linie, am besten eine grade, die jedoch keinen andern Windungspunkt enthält (Fig. 70), nach $b$ in die Nähe von $M$,

Fig. 70.




macht einen Kreis durch $b$ mit Radius $Mb$ und kehrt nach $a$ zurück. Ein solcher Weg heisst Elementarweg. Dann wiederholt man mit dem Functionenwerthe, mit dem man in $a$ zurückkam, diesen Weg, und fährt so $n$mal fort. Die Wege von $a$ nach $b$ und $b$ nach $a$ heben sich nämlich derart, dass nur der erste und letzte, dazwischen ein $n$facher Kreis übrig bleibt, der dem gegebenen Wege gleich zu setzen ist. Also:

Ein in sich zurückkehrender Weg, der denselben Windungspunkt $n$mal umkreist, gilt gleich $n$ Elementarwegen.

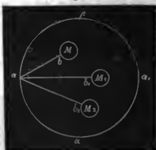
Hieraus folgt leicht:

E) „Jeder in sich zurückkehrende Weg gilt einer Anzahl von Elementarwegen gleich."

Z. B. Weg $a\beta a_1 a$, der die Windungspunkte $M$, $M_1$, $M_2$ umgibt, wird zuerst in Wege getheilt, deren jeder einen umgibt (Fig. 71), und diese durch die entsprechenden Elementarwege ersetzt.

Der Werth, mit dem die Function nach $a$ zurückführt, wird bestimmt: durch den Anfangswerth, durch die Anzahl, Art und Ordnung der Elementarwege. Unter der Bezeichnung Art wird verstanden, welche Punkte $M$ und in welcher Richtung sie umkreist werden, unter Ordnung die Reihenfolge, in welcher dies geschieht.

Fig. 71.




Die Bezeichnung $(+M)$, $(-M)$ gibt die Punkte und die Richtung der Umkreisung (positiv oder negativ) an. Die Bezeichnung $(\pm M)^s$ soll anzeigen, dass der Punkt $M$ $s$mal hintereinander umkreist sei. Die Reihenfolge wird durch eine Reihe solcher Ausdrücke, die wir Zeiger nennen, angegeben.

Z. B.:

$$(+M)^2(-M_1)(-M_2)(+M)(-M_2)^2$$

gibt an, dass Punkt $M$ zweimal in positiver, dann $M_1$, $M_2$ in negativer, $M$ wieder in positiver, schliesslich $M_2$ zweimal in negativer Richtung umkreist wird. Eine solche Reihe nennen wir Charakteristik der in sich zurückkehrenden Linie.

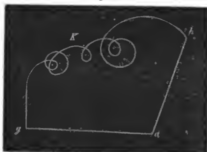
Was schliesslich einen beliebigen Werth anbetrifft, der von $g$ nach $h$ führt, $gKh$, so ist dieser folgendermaassen (Fig. 72) zu ersetzen. Man geht von $g$ nach dem festen Punkte $a$ (auf einer Graden, wenn diese keinen Windungspunkt enthält, oder auf einer beliebigen, keinen Windungspunkt enthaltenden oder umgehenden Linie), legt dann die in sich zurückkehrende Curve $agKha$ zurück, die durch ihre Charakteristik bestimmt wird, und macht dann Weg $ah$ (in grader Richtung, wenn kein Windungspunkt auf $ah$ liegt). Die Richtigkeit folgt aus dem Vorigen.

Also:

F) „Jeder Weg von $g$ nach $h$ ist gleich einem einfachen Wege von $g$ nach dem festen Punkte $a$, einer Anzahl Elementarwege und dem einfachen Wege von $a$ nach $h$."

Schliesslich ist noch der Fall zu berücksichtigen, wo die Curve $gKh$ einen Windungspunkt $M$ enthält. Da dieser Punkt durch Verengung einer jeden Umkreisung entstanden sein kann, so kön-

Fig. 72.




nen wir den Weg durch eine jede solche Umkreisung führen. Der Weg hat also $n$ verschiedene Werthe, wenn $M$ ein Windungspunkt $n$ter Ordnung ist.

Betrachten wir jetzt noch eine Curve, welche alle Windungspunkte (den Unendlichkeitspunkt, wenn er ein solcher ist, natürlich ausgeschlossen) umgibt, so wird diese Curve zugleich, vom Unendlichkeitspunkt gesehen, eine solche sein, die den letzteren allein umgibt, also wenn dieser kein Windungspunkt ist, eine geschlossene. Daraus würde, wenn man sich mit dieser Betrachtung begnügen wollte, schon folgen:

„Eine Curve, die alle Windungspunkte umgibt, führt zu demselben Werthe zurück oder nicht, je nachdem der Unendlichkeitspunkt ein Windungspunkt ist oder nicht."

Indess ist diese lediglich als Veranschaulichung dienende Betrachtung analytisch zu rechtfertigen. Zu dem Ende denkt man durch den dem Anfangspunkt $O$ entferntesten Punkt der Curve einen Kreis mit Mittelpunkt $O$ geschlagen, dessen Radius $r$ sei, so gilt dieser der gegebenen Curve gleich nach dem Obigen, und es ist $z = r e^{\varphi i}$, $f(z) = f(r e^{\varphi i})$, wo $r$ constant ist, Variable und Function für irgend einen Punkt dieses Kreises. Ist nun:

$$z = \frac{1}{y}, \quad r = \frac{1}{\varrho},$$

so hat man:

$$f(z) = \psi(y) = \varphi(\varrho e^{-\varphi i}),$$

$y = 0$ entspricht dem Unendlichkeitspunkte, $y = \varrho e^{-\varphi i}$ einer Kreisperipherie, welche keinen andern Windungspunkt als $y = 0$ umschliesst ($\varrho$ ist nämlich constant); also ist auch dieser kein solcher, so findet keinerlei Wechsel der Function beim Umkreisen statt. Uebrigens ist wegen $\varphi\,(r e^{-\varphi i})$, da $\varphi$ von 0 bis $2\pi$, also $-\varphi$ von 0 bis $-2\pi$ zu nehmen ist, die Windung um den letztern Kreis die entgegengesetzte des erstern, der alle Windungspunkte umgibt.

5) Differenzial und Differenzialquotienten der Functionen complexer Variablen.

Ist $f(x)$ eine beliebige Function von $x$, so nennt man Differenzial von $f(x)$ den Ausdruck:

$$\lim f(x+\nu) - f(x),$$

wo $\nu$ eine im Uebrigen beliebige Grösse ist, welche ins Unendliche abnimmt. Wir sagen nämlich, dass eine complexe Zahl abnehme, wenn dies mit ihrem Modul der Fall ist. Der Ausdruck:

$$\frac{\lim f(x+\nu) - f(x)}{\nu}$$

heisst Differenzialquotient von $f(x)$. Man schreibt gewöhnlich:

$$dx = \nu, \quad df(x) = \lim [f(x+dx) - f(x)],$$

also auch:

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim \left[\frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}\right],$$

Auch setzt man:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}.$$

Hat man eine Function von mehreren Variablen $x$, $y$, $z$, so kann man das Differenzial nach jeder derselben nehmen, und man hat folgende Bezeichnungen:

$$\partial_x f(x, y, z) = \lim [f(x+dx, y, z) - f(x, y, z)],$$
$$\partial_y f(x, y, z) = \lim [f(x, y+dy, z) - f(x, y, z)],$$
$$\partial_z f(x, y, z) = \lim [f(x, y, z+dz) - f(x, y, z)],$$
$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \lim \left[\frac{f(x+dx, y, z) - f(x, y, z)}{dx}\right],$$
$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \lim \left[\frac{f(x, y+dy, z) - f(x, y, z)}{dy}\right],$$
$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} = \lim \left[\frac{f(x, y, z+dz) - f(x, y, z)}{dz}\right].$$

Man nennt diese Ausdrücke bezüglich partielle Differenziale und partielle Differenzialquotienten, genommen nach $x$, $y$, $z$. Man kann sich übrigens $x$, $y$, $z$ von einander abhängig oder unabhängig denken. Das bei den partiellen Differenzialen und Differenzialquotienten gebrauchte $\partial$ ist von demjenigen $d$ zu unterscheiden, welches andeutet, dass man das Differenzial nach der einzigen in der Function enthaltenen Veränderlichen genommen habe. Zuweilen sind zwischen verschiedenen partiellen Differenzialen und Differenzialquotienten einer Function noch andere Unterschiede zu machen, z. B. wenn man andere Variablen durch Transformation einsetzt, und man kann dann auch die Ausdrücke:

$$\left(\frac{\partial f(x)}{\partial x}\right), \quad \frac{\delta f(x)}{\delta x}$$

u. s. w. gebrauchen.

Das Differenzial oder den Differenzialquotienten einer Function bilden, nennt man: „dieselben differenziiren". Mit dem Ausdrucke Differenzial ist das Wort Zuwachs, mit dem Ausdrucke Differenzialquotient sind die Wörter Ableitung, Differenzialcoefficient und Derivation (derivirte Function) gleichbedeutend.

Bei einer Function mehrerer Variablen kann man auch das Differenzial nach allen Variablen gleichzeitig nehmen. Der Ausdruck:

$$df(x, y, z) = \lim [f(x+dx, y+dy, z+dz) - f(x, y, z)]$$

heisst dann totales Differenzial. Man gebraucht für dieselben das erst angewandte $d$ im Gegensatz zu dem bei den partiellen Differenzialen gebräuchlichen $\partial$.

Man kann auch von einem totalen Differenzialquotienten der Function $f(x, y, z)$ sprechen. Nehme man nämlich an, $y$ und $z$ seien irgend welche Functionen einer andern Grösse $u$, so kann man setzen:

$$f(x, y, z) = f[\varphi(u), \psi(u), \chi(u)],$$

und wird dann haben:

$$\frac{df(x, y, z)}{du} = \lim \left[\frac{f[\varphi(u+du), \psi(u+du), \chi(u+du)] - f[\varphi(u), \psi(u), \chi(u)]}{du}\right].$$

Von den Differenzialquotienten gelten zunächst folgende Fundamentalsätze:

I. „Gibt man der Variablen $x$ eine Reihe continuirlich auf einander folgender Werthe, welche also den auf einander folgenden Punkten irgend einer begrenzten Linie entsprechen, so kann $\frac{df(x)}{dx}$ nur für einzelne Punkte dieser Linie discontinuirlich werden, nie für eine ganze Strecke, so klein diese auch sei, vorausgesetzt, dass nicht die Function $f(x)$ selbst auf dieser ganzen Strecke discontinuirlich sei."

**Beweis.** Wir nehmen zunächst an, $x$ sei reell für alle Punkte der zu untersuchenden Strecke, d. h. die letztere falle in die Abscissenaxe. Wir untersuchen dann die Function $f(x)$ für eine Reihe von Werthen:

$$x = \alpha, \; x = \alpha + \nu, \; x = \alpha + 2\nu, \; x = \alpha + 3\nu \; . \; . \; . \; x = \beta,$$

welche auf einander continuirlich folgen, derart, dass $\nu$ reell und unendlich klein ist, und wo die Abstände $\nu$ eines jeden Punktes vom zunächst vorhergehenden einander gleich sind. — Es entsprechen dann den Werthen von $x$ die Werthe des Differenzialquotienten:

$$f'(\alpha)=\frac{f(\alpha+\nu)-f(\alpha)}{\nu},\quad f'(\alpha+\nu)=\frac{f(\alpha+2\nu)-f(\alpha+\nu)}{\nu},$$

$$f'(\alpha+2\nu)=\frac{f(\alpha+3\nu)-f(\alpha+2\nu)}{\nu}\quad\ldots\quad f'(\beta-\nu)=\frac{f(\beta)-f(\beta-\nu)}{\nu}.$$

Sei noch $\beta=\alpha+n\nu$, also $n+1$ die Anzahl der betrachteten Punkte. Addirt man alle Differenzialquotienten, so kommt:

$$f'(\alpha)+f'(\alpha+\nu)+f'(\alpha+2\nu)+\ \ldots\ +f'(\beta-\nu)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\nu},$$

oder wenn man mit:

$$\nu=\frac{\beta-\alpha}{n}$$

multiplicirt:

1) $$\nu\,[f'(\alpha)+f'(\alpha+\nu)+f'(\alpha+2\nu)+\ \ldots\ +f'(\beta-\nu)]=f(\beta)-f(\alpha).$$

Die Strecke kann so genommen werden, dass die Function $f(x)$ für $x=\beta$ und $x=\alpha$ endlich ist; dasselbe wird dann mit $f(\beta)-f(\alpha)$ der Fall sein. Man kann ferner, falls $f(x)$ für die ganze Strecke reell ist, dieselbe klein genug annehmen (es ist nämlich über die Länge derselben nichts bestimmt), dass die Function $f(x)$ von $\alpha$ nach $\beta$ continuirlich bleibt und für jeden folgenden Punkt gegen den vorhergehenden entweder immer zu- oder immer abnimmt. Denn ohne die Continuität zu verlieren, kann sie nicht für einen Punkt zu-, für den nächsten abnehmen, für den dritten etwa wieder zunehmen u. s. f. Es wird also im Falle der Zunahme sein:

$$f(\alpha)<f(\alpha+\nu)<f(\alpha+2\nu)\ \ldots,$$

im Falle der Abnahme:

$$f(\alpha)>f(\alpha+\nu)>f(\alpha+2\nu)\ \ldots$$

In jedem Falle also werden die Ausdrücke:

$$f(\alpha+\nu)-f(\alpha),\ f(\alpha+2\nu)-f(\alpha+\nu),\ f(\alpha+3\nu)-f(\alpha+2\nu)\ \ldots,$$

und daher auch die Differenzialquotienten:

$$f'(\alpha),\ f'(\alpha+\nu),\ f'(\alpha+2\nu)\ \ldots$$

auf der ganzen Strecke gleiche Zeichen haben.

Es ist nun von diesen Werthen einer der kleinste, abgesehen vom Vorzeichen; er möge dem Punkte $\gamma$ entsprechen. Dann ist:

$$\nu n f'(\gamma)=\nu\,[f'(\gamma)+f'(\gamma)+\ \ldots\ +f'(\gamma)]<f(\beta)-f(\alpha),$$

indem man in Formel 1) sämmtliche Glieder der Summe mit ihren untern Grenzen $f'(\gamma)$ vertauscht. Da die Anzahl dieser Glieder aber:

$$n=\frac{\beta-\alpha}{\nu}$$

ist:

$$(\beta-\alpha)\,f'(\gamma)<f(\beta)-f(\alpha).$$

Es kann also $f'(\gamma)$ nicht unendlich sein, da $\beta-\alpha$ und $f(\beta)-f(\alpha)$ endlich sind.

Es kann also nicht für alle Punkte der noch so kleinen Strecke der Differenzialquotient ins Unendliche wachsen.

Jetzt zeigen wir, dass auch keine andere Art der Discontinuität für alle Punkte eintreten kann.

Denn sei wieder $f'(\gamma)$ der kleinste der Differenzialquotienten (abgesehen vom Zeichen), $f'(\gamma')$ der nächst grössere u. s. w. Sei ferner:

$$f'(\gamma)=a,\ f'(\gamma')=a+a_1,\ f'(\gamma'')=a+a_1+a_2,$$

so werden nach unserer Annahme die Grössen $a$, $a_1$, $a_2$ alle dasselbe Zeichen haben. Herrscht nun überall Discontinuität, so können $a$, $a_1$, $a_2$ nicht unter eine gewisse Grenze, die von Null verschieden ist, sinken. Denn sei z. B. $a_2=0$, so wäre:

$$f'(\gamma')=f'(\gamma'').$$

Wäre die Strecke $\gamma'\gamma''$ eine endliche, so könnte man die Strecke $\alpha\beta$ so klein nehmen, dass nicht zwei Punkte $\gamma'$ und $\gamma''$, wo dies stattfindet, darauf liegen, wenn nicht etwa für alle dazwischen liegenden Punkte $f'(x)$ constant ist. Es sind also die Punkte $\gamma'$ und $\gamma''$, wo dies stattfinden kann, immer einander unendlich nah, dann aber ist in $\gamma'$ der Ausdruck $f'(\gamma')$ nicht discontinuirlich, was unserer Annahme widerspricht. Gleichung 1) gibt also jetzt:

$$\nu(na+(n-1)a_1+(n-2)a_2+\ .\ .\ .\ +a_{n-1})=f(\beta)-f(\alpha),$$

und wenn $A$ der kleinste der Werthe $a_1,\ a_2\ .\ .\ .\ a_n$ ist:

$$\nu A(n+n-1+n-2+\ .\ .\ .\ +1)<f(\beta)-f(\alpha),$$

oder:

$$\frac{n(n+1)}{2}\nu A<f(\beta)-f(\alpha),$$

d. h. mit Berücksichtigung des Werths von $\nu$:

$$(\beta-\alpha)\frac{n+1}{2}A<f(\beta)-f(\alpha).$$

Mit wachsendem $n$ müsste also $f(\beta)-f(\alpha)$ ins Unendliche wachsen, was unserer Annahme widerspricht.

Gegen diese Schlüsse lässt sich dann nur folgender Einwand machen. Es könnte $f'(x)$ in jedem Punkte $\gamma$ zwar insofern continuirlich sein, dass es einen benachbarten $\gamma'$ gibt, so dass $f'(\gamma')$ nur unendlich wenig von $f'(\gamma)$ abweicht. Andererseits aber, könnte man sagen, brauchte dies nicht für jeden benachbarten Werth $\gamma_1$ von $\gamma$ stattzufinden, so dass $f'(x)$ unbestimmt ist. Dies widerlegen wir folgendermaassen. In jedem Falle gibt es nach dem Obigen auf bezeichneter Linie eine Reihe Werthe von $x,\ \gamma,\ \gamma',\ \gamma''\ .\ .\ .\ \gamma^{(n)}$, wovon die Differenz zweier auf einander folgenden beliebig klein ist, und welche die Eigenschaft haben, dass:

$$\frac{f(\gamma^{(s)})-f(\gamma^{(s-1)})}{\gamma^{(s)}-\gamma^{(s-1)}}$$

nur unendlich wenig von:

$$\frac{f(\gamma^{(s+1)})-f(\gamma^{(s)})}{\gamma^{(s+1)}-\gamma^{(s)}}$$

verschieden ist. Diese Reihe von Punkten bestimmt aber auch auf der ganzen Linie die Function $f(x)$, denn sei $\delta$ ein zwischen $\gamma^{(s)}$ und $\gamma^{(s+1)}$ liegender Punkt, so kann man, da $f(x)$ continuirlich ist, für $f(\delta)$ jeden Werth setzen, der nicht um eine endliche Grösse von $f(\gamma^{(s)})$ abweicht, weil eben $f(x)$ auf der Linie continuirlich ist. Man kann also für jedes zwischen $\gamma^{(s)}$ und $\gamma^{(s+1)}$ liegende $\delta$ setzen:

$$f(\delta)=f(\gamma^{(s)})+(\delta-\gamma^{(s)})\frac{f(\gamma^{(s+1)})-f(\gamma^{(s)})}{\gamma^{(s+1)}-\gamma^{(s)}},$$

da dieser Ausdruck eben nur unendlich wenig von $f(\gamma^{(s)})$ verschieden ist.

Man erhält also:

$$\frac{f(\delta)-f(\gamma^{(s)})}{\delta-\gamma^{(s)}}=\frac{f(\gamma^{(s+1)})-f(\gamma^{(s)})}{\gamma^{(s+1)}-\gamma^{(s)}}=f'(\delta),$$

so dass auch für Punkt $\delta$ und somit für alle in der Nachbarschaft von $\gamma^{(s)}$ die Grösse $f'(x)$ continuirlich ist.

Diese Betrachtung schliesst nicht aus, dass der Differenzialquotient in unbestimmter Form erscheinen kann. Z. B. der Ausdruck:

$$f(x)+\frac{e^{nxi}}{n},$$

wo $n$ unendlich gross, $x$ reell sein soll, und der immer mit $f(x)$ zusammenfällt, hat zum Differenzialquotienten:

$$f'(x)+\frac{e^{n(x+\nu)i}-e^{nxi}}{n\nu},$$

wo $\nu$ unendlich klein, also da $n\nu=\alpha$ beliebig ist:

$$f'(x)+\frac{e^{nxi}}{\alpha}(e^{\alpha i}-i),$$

wo das zweite Glied ganz unbestimmt ist. Man vermeidet dies, wenn man zunächst eine Reihe discreter Punkte betrachtet, $\gamma$, $\gamma'$ . . ., für welche die Function immer mit $f(x)$ zusammenfällt. Lässt man die Differenzen ins Unendliche abnehmen, und verfährt für die dazwischen liegenden Punkte nach der obigen Regel, so ist der Differenzialquotient immer $f'(x)$. Aehnliches bieten gewisse convergente unendliche Reihen dar, deren Differenzialquotienten discontinuirlich, also der Form nach unbestimmt sind. Z. B. die Reihe:

$$e^{xi}+\frac{e^{2xi}}{2}+\frac{e^{3xi}}{3}+\ldots,$$

die für reelles $x$ convergirt, und deren Differenzialquotient:

$$i(e^{xi}+e^{2xi}+e^{3xi}+\ldots)$$

divergirt. Da die Reihe summirbar ist, so ist dieser Uebelstand leicht zu vermeiden. Nicht immer aber ist dies möglich. Man kann dann aber zwei endliche, aber sehr wenig von einander verschiedene Werthe von $x$ nehmen, $\alpha$ und $\beta$, und durch Berechnung von $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$ wenigstens numerisch den Differenzialquotienten mit beliebiger Genauigkeit ermitteln. Dies Verfahren ist geometrisch genommen das, $y=f(x)$ als Curve darzustellen und die Tangente zu ziehen.

Ist $f(x)$ nicht für die ganze Strecke reell, so substituire man den Werthen von $f(\alpha)$, $f(\alpha+\nu)$ . . . ihre reellen und ihre mit $i$ multiplicirten Theile einzeln, und die eben gemachten Schlüsse finden noch Anwendbarkeit.

Ist endlich die Variable nicht reell, sondern ist die Function $f(x+yi)$ für irgend eine Linie zu untersuchen, so möge die Gleichung dieser Linie $y=\varphi(x)$ sein. Es wird dann für die ganze Linie sein:

$$\psi(x)=f(x+yi)=f[x+i\,\varphi(x)].$$

$\psi(x)$ aber ist dann eine Function mit reeller Variable $x$, für die das Gesagte vollständig gilt. Der Differenzialquotient auf der Linie wird nämlich sein:

$$\lim\left[\frac{\psi(x+\nu)-\psi(x)}{\nu}\right]=\lim f\left[\frac{[x+\nu-i\,\varphi(x+\nu)]-f[x+i\,\varphi(x)]}{\nu}\right].$$

Im Anschluss an die oben gemachte Bemerkung beweisen wir noch den Satz:

II. „Wenn $f'(x)$ continuirlich ist für einen Punkt $x$, so sind die Werthe:

$$\frac{f(x+\nu)-f(x)}{\nu},\quad \frac{f(x+\mu)-f(x)}{\mu}$$

immer einander gleich, wenn die unendlich kleinen Grössen $\mu$ und $\nu$ einen reellen Quotienten haben."

**Beweis.** Sei $\mu=s\alpha$ und $\nu=t\alpha$, wo $s$ und $t$ ganze Zahlen sind. Diese Gleichungen sind immer zu erfüllen, wenn $\frac{\mu}{\nu}$ einem Bruche gleich ist. Wird $\frac{\mu}{\nu}$ irrational, so kann man immer ein $\alpha$ finden, derart, dass beide Gleichungen bis zu einer beliebigen Grenze der Genauigkeit erfüllt sind. Man hat nun:

$$\frac{f(x+s\alpha)-f(x)}{s\alpha}=\frac{1}{s}\left[\frac{f(x+s\alpha)-f(x+\widehat{s-1}\,\alpha)}{\alpha}+\frac{f(x+\widehat{s-1}\,\alpha)-f(x+\widehat{s-2}\,\alpha)}{\alpha}+\ldots+\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}\right],$$

d. h.:

$$\frac{f(x+\nu)-f(x)}{\nu}=\frac{1}{s}\,[f'(x+\widehat{s-1}\,\alpha)+f'(x+\widehat{s-2}\,\alpha)+\ldots+f'(x)].$$

Da nun $f'(x)$ continuirlich und $\alpha$ unendlich klein ist, können die Grössen $f'(x+\widehat{s-1}\,\alpha)+f'(x+\widehat{s-2})\ldots f'(x)$ nur um eine unendlich kleine Grösse verschieden sein. Man kann sie also gleich setzen, da die linke Seite der Gleichung endlich ist, und man hat, da rechts $s$ Glieder stehen:

$$\frac{f(x+\nu)-f(x)}{\nu}=\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha},$$

und ebenso folgt:

$$\frac{f(x+\mu)-f(x)}{\mu}=\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}.$$

Da diese Gleichungen bis auf beliebige Grenzen der Genauigkeit selbst dann stattfinden, wenn $\frac{\mu}{\nu}$ irrational ist, so ist unser Satz bewiesen. Hieraus folgt aber auch, dass in diesem Falle der Differenzialquotient $f'(x)$ nur diejenige Mehrdeutigkeit hat, welche der Function $f(x)$ selbst zukommt, so lange er continuirlich und das Verhältniss der Vermehrungen $\mu$ und $\nu$ reell ist.

Untersuchen wir jetzt die Anzahl der möglichen Werthe desselben, wenn dies letztere nicht stattfindet. Sei:

$$u=f(z),$$

wo $z$ eine complexe Zahl ist. Wir wollen derselben einen reellen Zuwachs $\alpha$, einen rein imaginären $\beta i$ und endlich einen complexen $\alpha+\beta i$ geben, wo $\alpha$ und $\beta$ reelle, ins Unendliche abnehmende Zahlen sind.

Wir setzen, um diese Fälle zu unterscheiden:

$$\frac{du}{dz}=\lim\frac{f(z+\alpha)-f(z)}{\alpha},$$

$$\left(\frac{du}{dz}\right)=\lim\frac{f(z+\beta i)-f(z)}{\beta i},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\lim\frac{f(z+\alpha+\beta i)-f(z)}{\alpha+\beta i}.$$

Es ist dann offenbar:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\lim\left[\frac{f(z+\alpha+\beta i)-f(z+\alpha)}{\alpha+\beta i}+\frac{f(z+\alpha)-f(z)}{\alpha+\beta i}\right]$$

$$=\frac{\left(\frac{d\,f(z+\alpha)}{dz}\right)\beta i+\frac{\alpha\, d\,f(z)}{dz}}{\alpha+\beta i},$$

da aber $\alpha$ unendlich klein ist, so kann man, wenn $\left(\frac{df(z)}{dz}\right)$, wie dies doch im Allgemeinen der Fall ist, continuirlich bleibt, setzen:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\frac{du}{dz}+\frac{\beta i}{\alpha}\left(\frac{du}{dz}\right)}{1+\frac{\beta i}{\alpha}},$$

d. h. wie auch die Function $f(z)$ beschaffen sei, ihr allgemeiner Differenzialquotient ist eine lineare Function derjenigen beiden, welche aus dem reellen und dem rein imaginären Zuwachse entstehen, und die nach dem Vorigen völlig bestimmt sind. Sie hängt ausserdem nur noch von dem Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ ab.

Setzen wir jetzt voraus, die beiden Differenzialquotienten $\frac{du}{dz}$ und $\left(\frac{du}{dz}\right)$ seien gleich, so ergibt sich sogleich auch:

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{du}{dz},$$

mithin muss der Differenzialquotient eindeutig (abgesehen von der Mehrdeutigkeit von $u$) und wirklich eine bestimmte Function von $z$ sein. Diese Bedingung ist nothwendig und ausreichend. Functionen, welche sie erfüllen, nennt Cauchy monogen.

Man kann aber die Bedingung der Monogenität, d. h.:

$$\frac{du}{dz}=\left(\frac{du}{dz}\right)$$

geradezu in die Definition einer Function

mit aufnehmen. Es wird sich bald zeigen, dass alle in den Elementen vorkommenden Functionen in der That monogen sind. Wir werden aber für alle Functionen, die wir betrachten, dies voraussetzen.

Wir kommen jetzt auf Eigenschaften, die den Functionen unter dieser Bedingung zukommen.

6) Vom Differenziiren monogener Functionen.

Die folgenden Sätze gelten nur für solche Functionen $f(z)$, für welche der Differenzialquotient eindeutig ist, oder wenigstens für jeden Werth von $f(z)$, wenn $f(z)$, mehrdeutig, nur einen Werth hat. Sie gelten also für jeden complexen Werth von $z$ nur für monogene Functionen, dagegen für jede Function, wenn dieselbe nur auf einer Linie betrachtet, also der Werth von $z = x+yi$ durch eine zweite Gleichung $y=\varphi(x)$ beschränkt wird. Dann nämlich ist:

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim\left[\frac{f(x+\nu)+i\,\varphi(x+\nu)}{\nu}\right]$$

ebenfalls nur eindeutig.

Sei:

$$u=f(y),$$

und:

$$y=\varphi(x),$$

so ist:

$$\frac{du}{dx} = \frac{f[\varphi(x+\nu)]-f[\varphi(x)]}{\nu}.$$

Aber:

$$\varphi(x+\nu)=\varphi(x)+\frac{d\varphi(x)}{dx}\,\nu,$$

also:

$$f[\varphi(x+\nu)]=f(\varphi(x)+\frac{d\varphi(x)}{dx}\,\nu)=f(y)+\frac{d\,f(y)}{dy}\frac{dy}{dx}\,\nu,$$

wenn man $\varphi(x)$ wieder gleich $y$ setzt, da es beim Differenziiren auf den Werth des Zuwachses von $\varphi(x)$, welcher hier $\nu\frac{dy}{dx}$ ist, nach unserer Voraussetzung nicht ankommt. Also:

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx},$$

d. h.:

I. „Man findet den Differenzialquotienten nach $x$ von einer Function von $y$, wo $y$ selbst eine Function von $x$ ist, wenn man $u$ nach $y$ und $y$ nach $x$ differenziirt und beide multiplicirt."

Sei jetzt:

$$x=f(y),$$

und möge aus dieser Gleichung folgen:

$$y=\varphi(x),$$

so ist:

$$\frac{dx}{dx}=1=\frac{df(y)}{dy}\frac{dy}{dx}=\frac{dx}{dy}\frac{dy}{dx},$$

oder:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}},$$

II. „Der Differenzialquotient von $x$ nach $y$ ist der umgekehrte Werth desjenigen von $y$ nach $x$."

Es sei jetzt eine Function von mehreren Variablen $f(x, y, z \ldots)$ gegeben, so ist:

$$\begin{aligned} df(x, y, z) &= f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)-f(x, y, z)\\ &= f(x+dx,\ y+dy,\ z+dz)-f(x,\ y+dy,\ z+dz)+f(x,\ y+dy,\ z+dz)\\ &\quad -f(x,\ y,\ z+dz)+f(x,\ y,\ z+dz)-f(x, y, z)\\ &= \frac{\partial f(x,\ y+dy,\ z+dz)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,\ y,\ z+dz)}{\partial y}dy+\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}dz, \end{aligned}$$

oder falls die partiellen Differenzialquotienten von $f(x, y, z)$ für den betrachteten

Punkt continuirlich sind, wo dann $\frac{\partial f(x,\ y+dy,\ z+dz)}{\partial x}$ nur einen verschwindend kleinen Unterschied von $\frac{\partial f(x,\ y,\ z)}{\partial x}$ haben kann:

$$df(x,\ y,\ z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz,$$

oder auch, wenn man, wie früher $\frac{\partial f}{\partial x}dx = \partial_x f$ setzt:

$$df = \partial_x f + \partial_y f + \partial_z f.$$

III. „Das totale Differenzial einer Function ist gleich der Summe der partiellen Differenziale nach sämmtlichen Variablen."

Hierbei können $x$, $y$, $z$ von einander unabhängig oder abhängig sein.

Ist z. B. $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$, so ist zu setzen:

$$df(x,\ y,\ z) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}d\varphi(x) + \frac{\partial f}{\partial z}d\psi(x) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\varphi(x)}{dx}dx + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{d\psi(x)}{dx}dx,$$

also auch:

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dx}.$$

IV. „Soll der Differenzialquotient einer Function nach $x$ gefunden werden, welche $x$ sowohl evolute als auch andere Grössen enthält, die Functionen von $x$ sind, so werden die Functionen so oft differenziirt, als dergleichen Functionen vorhanden sind, und zwar jedesmal ohne Rücksicht auf die übrigen, so dass man sich diese als constant vorstellt, zuletzt alle Theilresultate addirt."

Von diesen Sätzen sollen jetzt Anwendungen gemacht werden.

Selbstverständlich ist:

$$\frac{dx}{dx} = 1, \qquad \frac{da}{dx} = 0,$$

wenn $a$ constant ist. Sei zunächst:

$$u = f(x) \pm \varphi(x) \pm \psi(x) \pm \ldots,$$

so ist:

$$\frac{du}{dx} = \lim\left[\frac{f(x+\nu) - f(x)}{\nu} \pm \frac{\varphi(x+\nu) - \varphi(x)}{\nu} \pm \ldots\right],$$

also:

$$\frac{du}{dx} = \frac{df}{dx} \pm \frac{d\varphi}{dx} \pm \frac{d\psi}{dx} \pm \ldots$$

V. „Der Differenzialquotient einer Summe oder Differenz wird gefunden, wenn man die Differenzialquotienten aller Glieder addirt, bezüglich subtrahirt."

Hieraus folgt auch:

$$\frac{d\,[a + f(x)]}{dx} = \frac{df(x)}{dx},$$

wenn $a$ constant ist. Sei ferner:

$$u = a\,f(x),$$

wo $a$ eine Constante ist. Man hat dann:

$$\frac{du}{dx} = \frac{af(x+\nu) - af(x)}{\nu} = a\frac{df(x)}{dx},$$

also wenn man:

$$f(x) = y$$

setzt:

$$\frac{d(ay)}{dx} = a\frac{dy}{dx}.$$

VI. „Der Differenzialquotient des Products einer Function von $f(x)$ mit einer Constanten ist gleich dem Producte der Constanten mit dem Differenzialquotienten der Function."

Sei ferner:

$$u = f(x)\,\varphi(x)\,\psi(x)\,\ldots,$$

so ist nach Satz IV. erst so zu differenziiren, als wenn $f(x)$ und $\varphi(x)$, dann, als wenn $f(x)$ und $\psi(x)$, dann, als wenn $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ constant wären; also mit Berücksichtigung des letzten Satzes:

$$\frac{du}{dx} = f(x)\,\varphi(x)\ldots\frac{d\psi(x)}{dx} + f(x)\,\psi(x)\ldots\frac{d\varphi(x)}{dx} + \varphi(x)\,\psi(x)\ldots\frac{df(x)}{dx} + \ldots,$$

oder wenn man:

$$f(x) = v_1,\ \varphi(x) = v_2,\ \psi(x) = v_3\ \ldots$$

setzt:

$$\text{VII.}\quad \frac{d(v_1\,v_2\,v_3\,\ldots)}{dx} = v_2\,v_3\ldots\frac{dv_1}{dx} + v_1\,v_3\ldots\frac{dv_2}{dx} + v_3\,v_3\ldots\frac{dv_1}{dx} + \ldots$$

Aus dieser Formel lässt sich auch leicht der Differenzialquotient eines Quotienten ableiten. Sei:

$$\frac{u}{v} = w,$$

so ist:

$$u = vw,$$

also:

$$\frac{du}{dx} = v\frac{dw}{dx} + w\frac{dv}{dx},$$

d. h.:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{1}{v}\left(\frac{du}{dx} - w\frac{dv}{dx}\right),$$

oder:

$$\text{VIII.}\quad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2},$$

Sei jetzt:

$$v_1 = v_2 = v_3 = \ldots = v,$$

und die Anzahl dieser Grössen gleich $n$, so folgt für jeden ganzen positiven Werth von $n$:

$$\text{IX.}\quad \frac{dv^n}{dx} = n\,v^{n-1}\,\frac{dv}{dx}.$$

Diese Formel gilt aber auch für beliebiges $n$, denn sei:

$$v = \frac{1}{w},$$

so hat man nach Formel IX.:

$$\frac{d(w^{-n})}{dx} = -n\,w^{-n-1}\,\frac{d\left(\frac{1}{w}\right)}{dx}.$$

Aber wenn man in VIII.:

$$u = 1,\ v = w$$

setzt:

$$\frac{d\left(\frac{1}{w}\right)}{dx} = -\frac{\frac{dw}{dx}}{w^2},$$

also:

$$\frac{d(w^{-n})}{dx} = -n\,w^{-n-1}\,\frac{dw}{dx},$$

was mit Formel IX. übereinstimmt.

Sei jetzt:

$$v^p = w^q,$$

also:

$$w = v^{\frac{p}{q}},$$

wo $p$ und $q$ ganze positive oder negative Zahlen sind, so ist nach IX.:

$$p\,v^{p-1}\,\frac{dv}{dx} = q\,w^{q-1}\,\frac{dw}{dx},$$

also:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{p}{q}\,\frac{v^{p-1}}{w^{q-1}}\,\frac{dv}{dx},$$

oder für $w$ den Werth gesetzt:

$$d\left(v^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}\,v^{\frac{p}{q}-1}\,\frac{dv}{dx},$$

eine Formel, die ebenfalls mit IX. übereinstimmt. Es gilt dieselbe auch noch, wenn man sich statt der Irrationalzahl einen Bruch denkt, dem sie sich bis auf eine beliebige Grenze nähert. Unser Satz ist also nur noch für imaginäre Exponenten zu beweisen, ein Gegenstand,

auf den wir sogleich zurückkommen werden.

Setzt man in Formel IX. noch $v=x$, so wird:

$$\frac{dv}{dx}=1,$$

also:

IX a. $$\frac{d(x^n)}{dx}=nx^{n-1}.$$

Ferner setzt man:

$$v=1+\frac{\alpha x}{n},$$

so ist:

$$\frac{dv}{dx}=\frac{\alpha}{n},$$

und folglich:

$$\frac{d\left(1+\frac{\alpha x}{n}\right)^n}{dx}=\alpha\left(1+\frac{\alpha x}{n}\right)^{n-1}.$$

Mit wachsendem $n$ wird:

$$\lim\left(1+\frac{\alpha x}{n}\right)^n=e^{\alpha x},$$

was auch $\alpha$ sei, und:

$$\lim\left(1+\frac{\alpha x}{n}\right)^{n-1}=\lim\frac{\left(1+\frac{\alpha x}{n}\right)^n}{1+\frac{\alpha x}{n}}=e^{\alpha x},$$

also:

X. $$\frac{d\varepsilon^{\alpha x}}{dx}=\alpha\varepsilon^{\alpha x},$$

und:

X a. $$\frac{de^x}{dx}=\varepsilon^x.$$

Der Differenzialquotient von $e^x$ ist also gleich dieser Grösse selbst.

Sei ferner:

$$e^x=y,$$

also:

$$x=\lg y,$$

so ist:

$$\frac{dy}{dx}=y,$$

und nach Satz II:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y},$$

d. h.:

XI. $$\frac{d\lg y}{dy}=\frac{1}{y}.$$

Obgleich also $\lg y$ unendlich viel Werthe hat, ist doch der Differenzialquotient dieser Function eindeutig. Es folgt dies aber auch schon daraus, dass sich die verschiedenen Werthe von $\lg y$ nur um Constanten unterscheiden. — Sei nun $n$ eine beliebige reelle oder imaginäre Grösse, so ist:

$$v^n=e^{n\lg v},$$

also wenn man:

$$n\lg v=z$$

setzt:

$$\frac{dv^n}{dx}=\frac{de^z}{dx}\frac{dz}{dx}=\varepsilon^z n\frac{d\lg v}{dv}\frac{dv}{dx}$$

$$=n\frac{e^z}{v}\frac{dv}{dx}.$$

Da aber:

$$e^z=v^n$$

war:

$$\frac{d(v^n)}{dx}=nv^{n-1}\frac{dv}{dx},$$

somit ist Formel IX. auch für complexe Exponenten bewiesen.

Sei jetzt der Exponent veränderlich, so ist wieder:

$$a^x=e^{x\lg a},$$

also:

$$\frac{d(a^x)}{dx}=\frac{d\varepsilon^z}{dz}\frac{dz}{dx},$$

oder da:

$$z=x\lg a,$$

und:

$$\frac{d(x\lg a)}{dx}=\lg a$$

ist:

XII. $$\frac{d(a^x)}{dx}=a^x\lg a.$$

Bei den Formeln IX a., X., XI. und XII. ist folgende Bemerkung zu machen. Dieselben gelten, wenn man die entsprechenden Functionen derart differenziirt, dass der unendlich kleine Zuwachs von $x$ aus auf irgend einer durch $x$ gehenden Linie, also in ganz beliebiger Richtung genommen wird. Da nun die Ausdrücke des Differenzialquotienten von dem Zuwachs unabhängig sind, so sind die entsprechenden Functionen:

$$x^n,\ e^{\alpha x},\ \lg(x),\ a^x$$

monogen. Dasselbe findet nach den Sätzen V. bis VIII. auch mit den Summen, Differenzen, Producten und Quotienten solcher Functionen statt.

Es lässt sich aber auch zeigen, dass die Wurzel $y$ jeder Gleichung $f(x, y)=0$, wo $f$ nur aus einer Verbindung von $x$ und $y$ mittels der sieben Grundoperationen entsteht, eine monogene Function sei. Es ist nämlich, da diese Gleichung für jeden Werth von $x$ gilt, auch:

$$\frac{df(x, y)}{dx}=0,$$

denn setzt man:

$$x=x+\nu,\quad y=y_{x+\nu},$$

so erhält man:

$$\frac{df}{dx}=\lim\left[\frac{f\,[x+\nu,\ y_{x+\nu}]-f(x, y)}{\nu}\right],$$

und beide Glieder des Zählers sind der Null gleich. Aber:

$$\frac{df}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

d. h.:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

und da Zähler und Nenner monogen sind, so wird dies auch mit $\frac{dy}{dx}$ der Fall, also $y$ monogen sein. — Diese Bemerkung, dass nämlich auf allen uns bis jetzt bekannten Rechnungswegen monogene Functionen entstehen, rechtfertigt es, wenn wir von jetzt an den Begriff der Function mit dem der Monogenität ohne Weiteres identificiren.

7) Geometrische Darstellung der Bedingung, welcher die Functionen complexer Variablen genügen.

Sei jetzt:

$$f(x+yi)=u+iv,$$

wo also $u$ und $v$ reelle Functionen von $x$ und $y$ sind. Es ist offenbar, wenn man $z=x+yi$ nach $x$ und dann nach $y$ differenziirt, also im ersten Falle $y$, im zweiten $x$ constant denkt:

$$\frac{\partial\,(x+yi)}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}=1,\quad \frac{\partial\,(x+yi)}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y}=i,$$

also:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x}=\frac{\partial f(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=f'(z),$$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial y}=\frac{\partial f(z)}{\partial z}\,i=i\,f'(z),$$

also:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial y}=i\,\frac{\partial f(z)}{\partial x},$$

d. h.:

$$\frac{\partial u}{\partial y}+i\,\frac{\partial v}{\partial y}=i\,\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x},$$

also da der reelle und der imaginäre Theil einzeln gleich sein müssen:

$$1)\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

und:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Diese Bedingungen, welche zwischen dem reellen und dem mit $i$ multiplicirten Theil von $f(z)$ gelten müssen, sind nothwendig und ausreichend, damit die Function monogen sei.

Wir wollen dieser Bedingung noch einen geometrischen Ausdruck geben.

Ebenso wie wir uns früher eine Ebene gedacht haben, auf der jedem Werthe von $z$ ein Punkt entspricht, dessen Coordinaten $x$ und $y$ sind, können wir uns eine zweite Ebene denken, deren einzelne Punkte den Werthen von $f(z)$ derart entsprechen, dass das zu $f(z)$ gehörige $u$ und $v$ bezüglich Abscisse und Ordinate des entsprechenden Punktes sind. Ist $f(z)$ eine mehrdeutige Function, so wird jedem der $n$ Blätter, auf welchem wir uns $z$ denken, auch ein Blatt für $f(z)$ entsprechen. Die Ebene, auf welcher die Punkte $z$ dargestellt sind, wollen wir die erste, diejenige, auf welcher $f(z)$ dargestellt ist, die zweite Ebene nennen. Zu jedem Punkte $z$ auf der ersten, gehört dann ein Punkt $f(z)$ auf der zweiten Ebene.

Fixiren wir jetzt drei Punkte auf der ersten Ebene, $a$, $b$ und $c$, welche nicht in grader Linie liegen, und nehmen wir an, dass die Entfernung je zweier dieser Punkte verschwindend klein sei. Seien $x$, $y$ die Coordinaten des ersten Punktes $a$, $x+dx$, $y+dy$ die des zweiten $b$, $x+\partial x$, $y+\partial y$ die des dritten Punktes $c$. Die Entfernung ist dann bekanntlich:

$$ab=\sqrt{(dx^2+dy^2)},$$

die Entfernung:

$$ac=\sqrt{(\partial x^2+\partial y^2)}$$

und:

$$bc = \sqrt{(dx-\delta x)^2+(dy-\delta y)^2}.$$

Diesen drei Punkten entsprechen nun auf der zweiten Ebene ebenfalls drei, $A$, $B$, $C$, deren Coordinaten wir bezeichnen bezüglich mit:

$$u,\ v,$$
$$u+du,\ v+dv,$$
$$u+\delta u,\ v+\delta v,$$

und man hat:

$$AB=\sqrt{(du^2+dv^2)},$$
$$AC=\sqrt{(\delta u^2+\delta v^2)},$$
$$BC=\sqrt{(du-\delta u)^2+(dv-\delta v)^2},$$

Da aber $u$ und $v$ Functionen von $x$ und $y$ sind, so hat man:

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,$$
$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy,$$

oder wegen Gleichung 1):

$$dv=-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

woraus sich dann ergibt:

$$AB=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)^2+\left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{dx^2+dy^2},$$

d. h.:

$$AB=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\cdot ab.$$

Ganz ebenso folgt:

$$AC=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\cdot ac,$$

$$BC=\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2}\cdot bc,$$

d. h.:

$$AB : BC : AC = ab : bc : ac,$$

oder:

„Wenn drei unendlich nahe Punkte auf der ersten Ebene in einem Dreiecke liegen, so liegen die entsprechenden Punkte auf der zweiten Ebene in einem Dreiecke, welches dem ersten ähnlich ist, falls die Entfernungen unendlich klein sind."

Da man nun jede Figur in Dreiecke theilen kann, so entspricht überhaupt jeder von beliebigen Punkten $z$ gebildeten, unendlich kleinen Figur der ersten Ebene eine von den entsprechenden Punkten $f(z)$ gebildeten ähnliche Figur auf der zweiten.

Wenn irgend einer Figur auf einer Fläche eine andere auf einer zweiten so entspricht, dass die unendlich kleinen Theile beider entsprechend ähnlich sind, so jedoch, dass die Verhältnisszahl nicht für die ganzen Figuren dieselbe bleibt, so nennt man die Figuren Abbildungen von einander. Eine monogene Function $f(z)$ hat also die Eigenschaft, dass ihre Darstellung eine solche Abbildung der Variable $z$ ist. Denke man sich z. B. eine Schaar von graden Linien gezogen in der ersten Ebene, welche der Axe der $x$, und eine zweite, welche der Axe der $y$ parallel ist, so werden daraus unendlich viel kleine Rechtecke entstehen. Jedem derselben entspricht auf der zweiten Ebene ebenfalls ein Rechteck. Jeder der graden Linien aber wird im Allgemeinen eine Curve auf der zweiten Ebene entsprechen. Man hat also als Abbildung der zwei Schaaren sich rechtwinklig schneidender graden Linien zwei Schaaren sich rechtwinklig schneidender Curven. Die Gestalt der ersten beiden Schaaren bedarf natürlich keiner weitern Veranschaulichung. Zeichnet man daher für alle Werthe von $z$ die Schaaren von Curven, welche $f(z)$ vorstellen, so hat man eine bildliche Darstellung des Ganges der Function, und wenn man zu irgend einem Punkte Abscissen und Ordinaten zeichnet, so geben deren Längen den reellen Theil $u$ und den mit $i$ multiplicirten Theil $v$ des entsprechenden Punktes von $f(z)$ an.

Es lässt sich aber auch zeigen, dass für jede Abbildung einer Ebene auf eine andere die Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\pm\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\mp\frac{\partial u}{\partial x}$$

stattfinden, wo die obern und untern Zeichen einander entsprechen. Im Falle der obern Zeichen erhält man dieselben Gleichungen wie im Falle der untern, wenn man $u$ und $v$, also die Axen vertauscht. Es ist also eine Function von $z$ vollständig definirt, indem man sagt, sie sei die Abbildung der Variablen $z$ auf einer Ebene.

Wir beweisen daher noch den obigen Satz.

Eine beliebige, unendlich kleine Länge zwischen den Punkten $x$, $y$ und $x+h$, $y+k$ ist gegeben durch den Ausdruck:

$$\sqrt{(dx^2+dy^2)}=\sqrt{(h^2+k^2)}.$$

Die Länge einer Linie, deren Endpunkte

$u$, $v$ und $u'$, $v'$ zu Coordinaten haben, und welche als die Abbildungen der obigen Punkte betrachtet werden, ist:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}h+\frac{\partial v}{\partial y}k\right)^2}.$$

Was nun auch $h$ und $k$ seien, so muss, wenn Aehnlichkeit der unendlich kleinen Figuren, welche bezüglich $x$, $y$ und $u$, $v$ umgeben, stattfinden soll, die Gleichung erfüllt sein:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}h+\frac{\partial u}{\partial y}k\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}h+\frac{\partial v}{\partial y}k\right)^2} = M\sqrt{(h^2+k^2)},$$

wo $M$ von $h$ und $k$ unabhängig ist. — Erhebt man ins Quadrat, und setzt die mit $h^2$, $k^2$, $h$, $k$ multiplicirten Glieder einzeln gleich, so kommt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2=M^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}=0,$$

d. h.:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial u}{\partial y}=\mp\left(\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial v}{\partial x}\right),$$

also:

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\mp\frac{\partial u}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\pm\frac{\partial v}{\partial x},$$

wie oben gesagt wurde.

8) **Vom Differenziren der trigonometrischen Functionen.**

Die trigonometrischen Functionen lassen sich immer auf Exponentialgrössen zurückführen, jedoch wird es gut sein, hier noch ihre Differenzialquotienten anzugeben.

Es ist nach Formel X. des Abschnitts 5):

$$\frac{d(e^{ix})}{dx}=i\,e^{ix},$$

und da man hat:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

$$\frac{d\cos x}{dx}+i\frac{d\sin x}{dx}=i\cos x-\sin x.$$

Da aber der reelle und der mit $i$ multiplicirte Theil einzeln gleich sind:

$$\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x,\quad \frac{d\sin x}{dx}=\cos x.$$

Es war ferner:

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},$$

also nach Formel VIII. des Abschnitt 5):

$$\frac{d\operatorname{tg} x}{dx}=\frac{\cos x\dfrac{d\sin x}{dx}-\sin x\dfrac{d\cos x}{dx}}{\cos x^2}$$

$$=\frac{\cos x^2+\sin x^2}{\cos x^2},$$

d. h.:

$$\frac{d\operatorname{tg} x}{dx}=\frac{1}{\cos x^2}.$$

Führt man noch die Grössen $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$, durch die Gleichungen:

$$\cot x=\frac{1}{\operatorname{tg} x},\quad \sec x=\frac{1}{\cos x},$$

$$\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x},$$

so gibt die Formel:

$$\frac{d\frac{1}{u}}{dx}=\frac{du^{-1}}{dx}=-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dx},$$

$$\frac{d\cot x}{dx}=-\frac{1}{\operatorname{tg} x^2}\,\frac{1}{\cos x^2},$$

also:

$$\frac{d\cot x}{dx}=-\frac{1}{\sin x^2},$$

$$\frac{d\sec x}{dx}=\frac{1}{\cos x^2}\sin x,$$

d. h.:

$$\frac{d\sec x}{dx}=\sec x\operatorname{tg} x,$$

$$\frac{d\operatorname{cosec} x}{dx}=-\frac{1}{\sin x^2}\cos x,$$

oder:

$$\frac{d\operatorname{cosec} x}{dx}=-\operatorname{cosec} x\cot x.$$

Sei:

$$\arcsin x=y,$$

so ist:

$$\sin y=x,$$

also:

$$\frac{dx}{dy}=\cos y,$$

oder:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\cos y},$$

d. h.:

$$\frac{d \arcsin x}{dx} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Es ist nämlich:

$$\cos y = \sqrt{(1-\sin y^2)} = \sqrt{(1-x^2)}.$$

Sei ferner:

$$\arccos x = y,$$

also:

$$\cos y = x,$$

$$\frac{dx}{dy} = -\sin y \text{ und } \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin y},$$

d. h.:

$$\frac{d \arccos x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Ferner:

$$\operatorname{arc tg} x = y \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} y = x,$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\cos y^2}, \quad \frac{dy}{dx} = \cos y^2,$$

und da:

$$\cos y^2 = \frac{1}{\sec y^2} = \frac{1}{1+\operatorname{tg} y^2} = \frac{1}{1+x^2}$$

ist:

$$\frac{d \operatorname{arc tg} x}{dx} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Da übrigens:

$$\operatorname{arc cot} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc tg} x$$

ist, so hat man auch:

$$\frac{d \operatorname{arc cot} x}{dx} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Noch ist:

$$\operatorname{arc sec} x = \operatorname{arc cos} \frac{1}{x},$$

also:

$$\frac{d \operatorname{arc sec} x}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \frac{d\frac{1}{x}}{dx},$$

also:

$$\frac{d \operatorname{arc sec} x}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}.$$

$$\frac{d \operatorname{arc cosec} x}{dx} = \frac{d \arcsin \frac{1}{x}}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \frac{d\frac{1}{x}}{dx},$$

also:

$$\frac{d \operatorname{arc cosec} x}{dx} = -\frac{1}{x\sqrt{(x^2-1)}}.$$

Diese Formeln zeigen, dass sämmtliche Arcus zu Differenzialquotienten algebraische Functionen haben, welche nur eine Quadratwurzel enthalten. Die von $\operatorname{arc tg} x$ und $\operatorname{arc cot} x$ aber sind sogar eindeutig, wie der Differenzialquotient eines Logarithmus.

9) Höhere Differenzialquotienten.

Die vorigen Betrachtungen rechtfertigen es, jeden Differenzialquotienten $f'(x)$ als eine Function von $x$ zu betrachten, denn es ist derselbe bis auf einzelne Punkte (oder höchstens Linien) continuirlich, und kann, falls die Function monogen ist, wie wir voraussetzen, keine höhere Mehrdeutigkeit haben als $f(x)$, wie dies augenblicklich aus dem Ausdrucke: $\lim \frac{f(x+\nu)-f(x)}{\nu}$ folgt. Offenbar sind, damit:

$$df(x) = f(x+\nu) - f(x)$$

in der That unendlich klein bleibt, wenn die Function mehrere Werthe hat, nur die entsprechenden Werthe $f_1(x+\nu)$ und $f_1(x)$ mit einander zu verbinden, da z. B. $f_2(x+\nu)$ und $f_1(x)$ einen endlichen Unterschied haben. Ausgenommen sind hiervon die mehrfachen Punkte, wo $f_1(x) = f_2(x)$ wird, und in solchen kann man in der That setzen:

$$f'(x) = \frac{f_1(x+\nu)-f_1(x)}{\nu} \text{ oder } f'(x) = \frac{f_2(x+\nu)-f_1(x)}{\nu}.$$

Es wird also in einem solchen Punkt der Differenzialquotient im Allgemeinen auch einen mehrfachen Punkt haben, wenn auch:

$$f_1(x+\nu) = f(x+\nu)$$

ist. Jedoch kann ein solcher Puukt auch mit einer Discontinuität verbunden sein. Wir wollen dies an zwei Beispielen zeigen.

Die Function:

$$y = x^{\frac{3}{2}}$$

hat für $x=0$ einen Doppelpunkt, und es ist:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\, x^{\frac{1}{2}},$$

ein Ausdruck, der ebenfalls für $x=0$ einen Doppelpunkt hat. — Sei jetzt $y$ bestimmt durch die Gleichung:

$$y^2 - 2f(x) \cdot y + [\varphi(x)]^2 = 0,$$

wo $f(x)$ und $\varphi(x)$ eindeutige Functionen von $x$ sein sollen. Es ist dann:

$$y = f(x) \pm \sqrt{[f(x)]^2 - [\varphi(x)]^2}.$$

Beide Werthe haben immer einen endlichen Unterschied von einander, ausser in den Punkten, wo:

$$f(x) = \pm \varphi(x),$$

also:

$$y_1 = y_2 = f(x)$$

ist. Diese Punkte sind also Doppelpunkte. Differenziiren wir jetzt unsere Gleichung nach $x$, so kommt:

$$y\frac{dy}{dx} - yf'(x) - f(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(x)\varphi'(x) = 0,$$

d. h.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{yf'(x) - \varphi(x)\varphi'(x)}{y - f(x)}.$$

In den Doppelpunkten aber, wo $y=f(x)$ war, wird $\frac{dy}{dx}$ unendlich gross, es tritt also in der That Discontinuität ein.

Es ist sonach gerechtfertigt, einen Differenzialquotienten wieder zu differenziiren, und wir bezeichnen dies durch folgende Ausdrücke:

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} = \frac{d\,f'(x)}{dx},$$

und dieser Ausdruck heisst zweiter Differenzialquotient von $f(x)$ nach $x$ genommen, ferner:

$$f'''(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx^3} = \frac{df''(x)}{dx}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{df^{n-1}(x)}{dx}.$$

Durch diese Formeln sind die höhern Differenzialquotienten einer Function von einer Variablen völlig definirt.

In gleicher Weise lassen sich aber auch die Functionen von mehreren Variablen behandeln. Sei gegeben $f(x, y, z)$, so hat man:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\partial x} \quad \cdots \quad \frac{\partial^n f}{\partial x^n} = \frac{\partial \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1}}}{\partial x}.$$

Man kann aber auch erst nach einer Veränderlichen und dann nach der andern differenziiren. Wird z. B. erst nach $x$ und dann nach $y$ differenziirt, und dann umgekehrt, so hat man:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial x}.$$

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass diese Ausdrücke gleich sind. Denn es ist:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim \frac{f(x+\nu, y) - f(x, y)}{\nu},$$

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = \lim \frac{1}{\mu}\left[\frac{f(x+\nu, y+\mu) - f(x, y+\mu)}{\nu} - \frac{f(x+\nu, y) - f(x, y)}{\nu}\right].$$

Derselbe Ausdruck würde sich aber auch ergeben, wenn man $\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}$ bildet. Durch Wiederholung dieses Verfahrens verificirt man nun leicht die Gleichungen:

$$\frac{\partial^s\left(\frac{\partial^m f}{\partial y^m}\right)}{\partial x^s} = \frac{\partial^m\left(\frac{\partial^s f}{\partial x^s}\right)}{\partial y^m},$$

d. h.:

„Wird nach mehreren Variablen differenziirt, so kommt es auf die Ordnung des Differenziirens nicht an.“

Es ergibt sich nun leicht die Bedeutung der Formeln:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^{n+p} f(x, y)}{\partial x^n\, \partial y^p} = \frac{\partial^p \frac{\partial^n f}{\partial x^n}}{\partial y^p} = \frac{\partial^n \frac{\partial^p f}{\partial y^p}}{\partial x^n},$$

$$\frac{\partial^{n+p+q} f(x, y, z)}{\partial x^n\, \partial y^p\, \partial z^q} = \frac{\partial^q}{\partial z^q}\left[\frac{\partial^{n+p} f}{\partial x^n \partial y^p}\right]$$

. . .

Beispiel. Sei:

$$f(x, y) = x y^2 + y x^2,$$

so ist:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial (y^2 + 2xy)}{\partial x} = 2y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y^2 + 2xy) = 2y + 2x,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(2y + 2x) = 2,$$

. . .

Von sämmtlichen totalen und partiellen Differenzialgleichungen gilt noch folgender Satz:

„Ist eine monogene Function von einer oder mehreren Variablen gegeben, so sind auch alle ihre Differenzialquotienten monogen.“

Es braucht dieser Satz nur für den ersten Differenzialquotienten nach irgend einer Variable bewiesen zu werden, da er sich durch Wiederholung des Verfahrens

auf Differenzialquotienten von beliebiger Ordnung und nach beliebigen Variablen erweisen lässt. — Sei nun:

$$z = x + yi,$$

und:

$$f(z) = u + vi,$$

ferner:

$$f'(z) = u' + v'i.$$

In Abschnitt 6) zeigten wir, dass man hat:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x} = f'(z), \quad \frac{\partial f(z)}{\partial y} = i f'(z),$$

also:

$$u' + v'i = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x},$$

und:

$$u' + v'i = -i\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y},$$

woraus sich dann ergibt:

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x} = +\frac{\partial v}{\partial y}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Durch Differenziiren folgt:

$$\frac{\partial u'}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}, \quad \frac{\partial v'}{\partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y},$$

also:

$$\frac{\partial u'}{\partial y} = -\frac{\partial v'}{\partial x}, \quad \frac{\partial u'}{\partial x} = \frac{\partial v'}{\partial y},$$

welches die in Abschnitt 6) entwickelten Gleichungen der Monogenität sind.

Indess folgt dieser Satz auch schon aus der Betrachtung, dass:

$$f'(z) = \lim \frac{f(z+\nu) - f(z)}{\nu},$$

also die Grenze einer Differenz ist, wo der Zuwachs $\nu$ als constant betrachtet werden kann. — Dieser Satz ist nicht mehr richtig, wenn die Function discontinuirlich ist.

Man spricht auch von höhern Differenzialen, und definirt sie durch die Gleichungen:

$$d^2 f = \frac{d^2 f}{dx^2}\,dx^2, \quad d^3 f = \frac{d^3 f}{dx^3}\,dx^3 \;\ldots,$$

$$\partial^2_x f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2, \quad \partial_x \partial_y f = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy \;\ldots,$$

$$\partial^{p,\,q}{}_{y} f = \frac{\partial^{p+q} f}{\partial x^p\,\partial y^q}\,\partial x^p\,dy^q \;\ldots$$

Auch haben die Functionen mehrerer Variablen totale Differenziale höherer Ordnung. Es war nämlich, wenn $x$, $y$ von einander unabhängige Variable sind:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy.$$

Hierin sind die Vermehrungen $dx$, $dy$ unendlich kleine von einander unabhängige Grössen, die man als constant betrachten muss. Man kann also mit Anwendung derselben Regel auch das totale Differenzial von $df$ bilden, welches mit $d^2 f$ bezeichnet wird, indem man erst nach $x$ und dann nach $y$ differenziirt:

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2,$$

und indem man so fortfährt:

$$d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx\, dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dy^3.$$

Der ganze Mechanismus der Rechnung zeigt, dass sich hierbei die Binomialcoefficienten als Zahlenfactoren einstellen. Setzt man also:

$$n_1 = n, \quad n_2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \ \ldots \ n_s = \frac{n(n-1) \ \ldots \ (n-s+1)}{1 \cdot 2 \ldots s},$$

so hat man:

$$1) \qquad d^n f(x, y) = \frac{\partial^n f}{\partial x^n} dx^n + n_1 \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1} \partial y} dx^{n-1} dy + n_2 \frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2} \partial y^2} dx^{n-2} dy_2 + \ldots \frac{\partial^n f}{\partial y^n} dy^n.$$

Es kann diese Formel auch dargestellt werden durch den Ausdruck:

$$2) \qquad d^n f(x, y) = \partial_x^{\ n} f + n_1 \partial_x^{\ n-1} \partial_y f + n_2 \partial_x^{\ n-2} \partial_y^{\ 2} f + \ldots + \partial_y^{\ n} f,$$

wenn man auf die oben eingeführten Differenzialzeichen achtet. Symbolisch kann diese Formel auch geschrieben werden:

$$3) \qquad \partial^n f(x, y) = (\partial_x + \partial_y)^n f(x, y).$$

Der Sinn dieser Bezeichnung ist der folgende. Es werden $\partial_x$ und $\partial_y$ zunächst als Grössen betrachtet, und $(\partial_x + \partial_y)^n$ nach dem Binomischen Satze entwickelt, dann aber die Bedeutung der Producte $\partial_x^{\ s} \cdot \partial_y^{\ q} \cdot f(x, y)$, welche sich hierbei einstellen, derart ersetzt, dass man darunter dasjenige Differenzial versteht, welches mit $\partial_x^{\ s} \partial_y^{\ q} f(x, y)$ bezeichnet wurde. Leicht zeigt sich auch, dass man in gleicher symbolischer Darstellung hat:

$$4) \qquad d^n f(x_1, x_2 \ldots x_s) = (\partial_{x_1} + \partial_{x_2} + \ \ldots \ + \partial_{x_s})^n f(x_1, x^2 \ldots x_s).$$

Um diese Formel zu beweisen, bemerke man, dass der ganze Mechanismus der Ableitung mit diesem übereinstimmt, wenn man die $n$te Potenz eines Polynoms $(u_1 + u_2 + \ \ldots \ u_s)^n$ entwickelt.

Indess kann man die Formel 4) noch auf eine andere Art direct beweisen.

Durch wiederholtes Differenziiren erhält man nämlich offenbar Ausdrücke von der Gestalt:

$$d^2 f = \partial_{x_1}^{\ 2} f + A \partial_{x_1} \partial_{x_2} f + B \partial_{x_1} \partial_{x_3} f + \ldots,$$

$$d^3 f = \partial_{x_1}^{\ 3} f + A_1 \partial_{x_1}^{\ 2} \partial_{x_2} f + B_1 \partial_{x_2}^{\ 2} \partial_{x_3} f + \ldots,$$

also endlich:

$$d^n f = \Sigma_f A_f \partial_{x_1}^{\ \alpha_1} \partial_{x_2}^{\ \alpha_2} \ldots \partial_{x_s}^{\ \alpha_s} f$$

$$= \Sigma_f A_f \frac{\partial^n f(x_1, x_2 \ldots x_s)}{\partial x_1^{\ \alpha_1} \partial x_2^{\ \alpha_2} \ldots \partial x_s^{\ \alpha_s}} dx_1^{\ \alpha_1} dx_2^{\ \alpha_2} \ldots dx_s^{\ \alpha_s},$$

wo:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ \ldots \ \alpha_s = n$$

ist und die Ausdrücke $A_f$ zu bestimmende Zahlencoefficienten vorstellen. — Man hat also in der That einen Ausdruck rechts, wie ihn die Entwickelung der $n$ten Potenz des symbolischen Polynoms:

$$\partial x_1 + \partial x_2 + \ldots + \partial x_s$$

angibt, und es käme nur auf die Uebereinstimmung der beiderseitigen Coefficienten an. Diese lassen sich aber ermitteln, wenn man der Function $f$ einen bestimmten Werth gibt. Sei demgemäss:

$$f(x_1, x_2 \ldots x_s) = (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_s x_s)^n,$$

wo $a_1, a_2 \ldots a_s$ Constanten vorstellen, so hat man:

$$df = n(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_s x_s)^{n-1}(a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_s dx_s),$$

$$d^2 f = n(n-1)(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_s x_s)^{n-2}(a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_s dx_s),$$

und indem man so fortfährt:

$$d^n f = n(n-1) \ldots 2 \cdot 1 (a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_s dx_s)^n.$$

Andererseits aber ist:

$$\frac{\partial^{\alpha_1} f}{\partial x_p^{\alpha_1}} = n(n-1) \ldots (n-\alpha+1)(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_s x_s)^{n-\alpha_1} a_p^{\alpha_1},$$

also:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_s^{\alpha_s}} = n(n-1) \ldots 2 \cdot 1 \, a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_s^{\alpha_s},$$

also:

$$d^n f = n! \cdot \Sigma_f \, a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \ldots a_s^{\alpha_s} A_f \, dx_1^{\alpha_1} dx_2^{\alpha_2} \ldots dx_s^{\alpha_s}$$
$$= n! \cdot (a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + \ldots + a_s dx_s)^n,$$

und diese Formel zeigt, wenn man $u_1 = a_1 dx_1$, $u_2 = a_2 dx_2 \ldots$ setzt, dass $A_f$ mit dem Coefficienten von $u_1^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \ldots u_s^{\alpha_s}$ in der Entwickelung von $(u_1 + u_2 + \ldots + u_s)^n$ übereinstimmt, was zu beweisen war.

10) Transformation der Differenziale und Differenzialquotienten. Vom Differenziiren unentwickelter Functionen.

Ist eine Grösse nicht entwickelt, sondern durch die Gleichung gegeben:

$$f(x, y) = 0,$$

so kann man ihre verschiedenen Differenziale und Differenzialquotienten durch Differenziiren dieser Gleichung finden, wobei dann $x$ und $y$ nicht von einander unabhängige Veränderliche, sondern $y$ als eine Function von $x$ zu betrachten ist. Offenbar sind unter dieser Voraussetzung sämmtliche Differenzialquotienten von $f(x, y)$ gleich Null. Also wenn man setzt:

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = y'', \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = y''' \ldots:$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0,$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}y'+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}y'^3+3\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}y''+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'y''+\frac{\partial f}{\partial y}y'''=0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Die erste Gleichung giht:

$$y'=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Setzt man diesen Werth in die zweite Gleichung ein, so kann man daraus $y''$, durch Einsetzen beider Werthe in die dritte $y'''$ u. s. w., also alle Differenzialquotienten von $y$ nach $x$ erhalten.

Statt des Aufsuchens des Differenzialquotienten kann man auch das Differenzial $dy$ finden. Es ist dabei zu berücksichtigen, dass $dy=\frac{dy}{dx}dx$, also $dy$ und alle höheren Differenzialquotienten $d^2y$ . . . , Functionen von $x$ sind, dagegen war $x$ als unabhängige Variable betrachtet; es ist also $dx=\nu$ constant zu denken, und daher $d^2x=d^3x$ . . . $=0$ zu setzen. Man hat:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial f}{\partial y}d^2y=0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Seien jetzt zwei Functionen von $x$ und $y$ gegeben durch die Gleichungen:

$$f(x,\,y,\,z)=0,\quad f_1(x,\,y,\,z)=0,$$

so sind $dy$, $dz$ als Functionen von $x$ zu betrachten, und man hat:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}dx+\frac{\partial f_1}{\partial y}dy+\frac{\partial f_1}{\partial z}dz=0,$$

woraus sich $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ durch Anflösen von linearen Gleichungen ergehen. Ferner:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}dy\,dx+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}dz\,dx+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}dy\,dz+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}\partial^2 y+\frac{\partial f}{\partial z}d^2z=0,$$

und eine ähnliche Gleichung, welche aus dieser entsteht, wenn man $f$ mit $f_1$ vertauscht. Beide gehen $d^2y$ und $d^2z$, also durch Dividiren mit $dx^2$: $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$. Auch hätte man gleich so differenziiren können, dass man statt der Differenziale die Differenzialquotienten genommen hätte, was natürlich dasselbe Resultat gibt. Ganz ebenso verfährt man, wenn mehr als drei Variablen vorkommen, also wenn man $n-1$ Gleichungen mit $n$ Variablen hat.

Sucht man aus den Gleichungen:

$$f_1(x_1, x_2 \ldots x_n)=0,\ f_2(x_1, x_2 \ldots x_n)=0 \ldots f_{n-1}(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

nur die ersten Differenziale oder Differenzialquotienten, so hat man die Gleichungen aufzulösen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} dx_n = 0,$$

Setzt man:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = u_1^{(1)},\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = u_1^{(2)} \ldots \frac{\partial f_n}{\partial x_1} = u_1^{(n)},\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = u_2^{(1)} \ldots \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = u_n^{(n-1)},$$

und:

$$v_s = \begin{vmatrix} u_1^{(1)} & u_1^{(2)} & \ldots & u_1^{(n-1)} \\ u_2^{(1)} & u_2^{(2)} & \ldots & u_2^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{s-1}^{(1)} & u_{s-1}^{(2)} & \ldots & u_{s-1}^{(n-1)} \\ u_{s+1}^{(1)} & u_{s+1}^{(2)} & \ldots & u_{s+1}^{(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n^{(1)} & u_n^{(2)} & \ldots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

so erhält man bekanntlich als Auflösungen:

$$dx_1 : dx_2 : dx_3 \ldots : dx_n = v_1 : v_2 : v_3 \ldots : v_n.$$

Ist aber die Anzahl der Variablen noch $n$, die Anzahl der Gleichungen kleiner als $n-1$, etwa gleich $n-s$, so können $n-s$ Grössen als Functionen der $s$ übrigen betrachtet, und die totalen oder die partiellen Differenziale abgeleitet werden.

Letzteres geschieht, indem man von den unabhängigen Variablen alle bis auf eine als constant betrachtet Also z. B. wenn nur eine Gleichung mit drei Variablen gegeben ist:

$$f(x, y, z)=0,$$

kann man $y$ und $z$ als Functionen von $x$ betrachten. Man hat:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0,$$

und wenn man die erste der Gleichungen nach $y$ oder die zweite nach $x$ differenziirt:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}=0.$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\ \ldots$$

Sollte man dagegen die totalen Differenziale von $z$ finden, so hat man:

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}dx\, dy+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial z}dx\, dz+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}dy\, dz+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dz^2$$
$$+\frac{\partial f}{\partial z}d^2 z=0,$$

aus welchen Gleichungen sich $dz$, $d^2z$ . . . ergibt.

Seien jetzt gegeben die Differenzialquotienten:

$$\frac{dy}{dx},\quad \frac{d^2 y}{dx^2},\quad \frac{d^2 y}{dx^3}.$$

Es soll statt der unabhängigen Veränderlichen $x$ eine andere $u$ eingeführt werden, welche gegeben ist durch die Gleichung:

$$\varphi(x,\ y,\ u)=0.$$

Da $u$ unabhängige Veränderliche ist, so hat man:

$$dy=\frac{dy}{du}du,\quad dx=\frac{dx}{du}du,$$

also:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}},$$

ferner:

$$\frac{d^2 y}{dx^2}=\frac{d\,\frac{dy}{dx}}{dx}=\frac{d\left(\frac{dy}{du}:\frac{dx}{du}\right)}{\frac{dx}{du}}=\frac{\frac{dx}{du}\frac{d^2 y}{du^2}-\frac{dy}{du}\frac{d^2 x}{du^2}}{\left(\frac{dx}{du}\right)^2},$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3}=\frac{\frac{d}{du}\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)}{\frac{dx}{du}}=\left[\left(\frac{dx}{du}\right)^2\frac{d^3 y}{du^3}-3\frac{dx}{du}\frac{d^2 x}{du^2}\frac{dy}{du}+3\frac{dy}{du^2}\left(\frac{d^2 x}{du^2}\right)^2\right.$$
$$\left.-\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}\frac{d^3 x}{du^3}\right]:\left(\frac{dx}{du}\right)^5$$

. . . .

Aus diesen Gleichungen schafft man fort die Grössen $x$, $\frac{dx}{du}$, $\frac{d^2 x}{du^2}$, $\frac{d^3 x}{du^3}$ durch die Gleichung:

$$\varphi(x,\ y,\ u)=0,$$

und ihre Differenzialquotienten:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{du}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{du}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}=0,$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{du}\right)^2+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{du}\right)^2+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}+2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial y}\frac{dx}{du}\frac{dy}{du}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial u}\frac{dx}{du}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\,\partial u}\frac{dy}{du}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{d^2x}{du^2}$$
$$+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{d^2y}{du^2}=0$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Es sind dann $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ ausgedrückt durch $y, u, \frac{dy}{du}, \frac{d^2y}{du^2} \ldots$, also $x$ völlig eliminirt.

Sollten $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ldots \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \ldots$ gegeben sein, und statt der unabhängigen Veränderlichen $x$, $y$ nun $t$, $u$ mittels der Gleichungen:

$$\varphi(x, y, z, u, t)=0, \quad \psi(x, y, z, u, t)=0$$

eingeführt werden, so wäre dies Verfahren nur zu wiederholen, indem man erst $x$ und dann $y$ als unabhängige Variable betrachtet, also im ersten Falle $y$, im zweiten $x$ constant denkt.

Man hat dann zu setzen z. B.:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial t\,\partial u}\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}+\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

und die Grössen:

$$\frac{\partial t}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 t}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

sind zu eliminiren mittels dieser und der Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

und der ähnlichen, worin $\psi$ an die Stelle von $\varphi$ tritt, sowie den höheren Differenzialen der Gleichung $\varphi=0$ und $\psi=0$.

Für die Differenzialquotienten nach $y$ finden natürlich ähnliche Gleichungen statt.

Seien jetzt gegeben wieder die Grössen $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$. Es soll nicht allein die unabhängige Variable $x$, sondern auch die abhängige ersetzt werden durch $v$ und $u$ mittels der Gleichungen:

$$\varphi(x, y, v, u)=0, \quad \psi(x, y, v, u)=0,$$

$u$ aber unabhängige Veränderliche sein. Durch Differenziiren dieser beiden Gleichungen nach $u$ erhält man zwei Beziehungen zwischen $\frac{dx}{du}, \frac{dy}{du}, \frac{dv}{du}$, und durch abermaliges Differenziiren wieder zwei zwischen $\frac{d^2x}{du^2}, \frac{d^2y}{du^2}, \frac{d^2v}{du^2} \ldots$ Man kann also in den eben gefundenen Ausdrücken für $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \ldots$ die darin vorkommenden Grössen:

$$\frac{dy}{du}, \frac{dx}{du}, \frac{d^2y}{du^2}, \frac{d^2x}{du^2} \ldots$$

ausdrücken durch $u, v, \frac{dv}{du}, \frac{d^2x}{du^2} \ldots$, so dass $x$ und $y$ völlig eliminirt sind.

Ebenso verfährt man, wenn mehr als eine unabhängige Variable gegeben ist. — Als Beispiel diene der Fall, wo man hat:

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z},$$

und diese Grössen ersetzt werden sollen durch die Differenzialquotienten von $r$ nach $u$, $v$, $w$, wenn gegeben ist:

$$u = f(x, y, z), \quad v = \varphi(x, y, z), \quad w = \psi(x, y, z).$$

Es ist:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

und indem man ebenso mit $\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial r}{\partial z}$ verfährt, erhält man:

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} + \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial z} + \quad . \quad . \quad .$$

Aus $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \ldots$ lässt sich $x$, $y$, $z$ eliminiren mittels der Werthe von $u$, $v$ und $w$.

Haben aber die Gleichungen, aus welchen $x$, $y$, $z$ zu bestimmen ist, die Gestalt:

$$x = f(u, v, w), \quad y = \varphi(u, v, w), \quad z = \psi(u, v, w),$$

so findet man $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \ldots$ durch folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1 = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x},$$

drei Gleichungen, welche:

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$$

geben. Ebenso erhält man mittels der Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1,$$

bezüglich $\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial z}, \frac{\partial w}{\partial z}$.

Wären endlich gegeben die Gleichungen:

$$f(x, y, z, u, v, w) = 0, \quad \varphi = 0, \quad \psi = 0,$$

wo $\varphi$ und $\psi$ ebenfalls alle 6 Veränderlichen enthielten, so hätte man:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}=0,$$

zur Bestimmung von $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial x}$.

Die Differenzialquotienten nach $y$ und $z$ ergeben sich ganz ebenso, wenn man überall statt nach $x$, bezüglich nach $y$ und $z$ differenzirt.

Die höheren Differenzialquotienten von $r$ sind ebenso zu finden, wenn man die Werthe von $\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}$ unter der Berücksichtigung, dass $r$ eine Function von $u, v, w$, diese Grössen aber von $x, y, z$ abhängig sind, differenziirt, und ebenso mit den Differenzialquotienten von $f, \varphi, \psi$ verfährt.

11) **Auffindung der Werthe einer Function, welche unter unbestimmter Form erscheinen.**

Unbestimmte Formen in der Analysis sind unter anderm die Ausdrücke $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, da jede endliche Grösse $a$ mit 0 multiplicirt 0, und mit $\infty$ multiplicirt $\infty$ gibt. Es folgt also hieraus:

$$a\cdot 0=0, \quad \text{oder} \quad a=\frac{0}{0},$$

$$a\cdot\infty=\infty, \quad a=\frac{\infty}{\infty},$$

wo $a$ ganz beliebig ist. Nehmen aber zwei Functionen von $x$, $f(x)$ und $\varphi(x)$, für einen bestimmten Werth von $x$, gleichzeitig die Werthe 0 oder $\infty$ an, so kann der Quotient doch mit keiner grösseren Mehrdeutigkeit behaftet sein, als sich aus den allgemeinen Werthen der Functionen selbst ergibt. Sei z. B. gegeben der Ausdruck:

$$\frac{x^2-a^2}{x-a},$$

so wird derselbe für $x=a$ den Werth $\frac{0}{0}$ annehmen. Denkt man sich indess zunächst $x$ um ein beliebig Kleines von $a$ unterschieden, und behandelt den Ausdruck nach allgemeinen Regeln, wo sich dann ergibt:

$$\frac{x^2-a^2}{x-a}=x+a,$$

und setzt dann $x=a$, so erhält man den Werth $2a$ für unsern Bruch.

Die Differenzialrechnung gibt ein Mittel, das hier angewandte Verfahren zu verallgemeinern.

Sei in $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x=a$:

$$f(a)=\varphi(a)=0,$$

so setzt man zunächst $a+\nu$ für $x$, wo $\nu$ eine beliebig kleine Grösse ist. Man hat dann:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f(a+\nu)}{\varphi(a+\nu)},$$

oder da man vom Zähler und Nenner die verschwindenden Grössen $f(a)$ und $\varphi(a)$ abziehen kann:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\frac{f(a+\nu)-f(a)}{\nu}}{\frac{\varphi(a+\nu)-\varphi(a)}{\nu}}.$$

Für Zähler und Nenner kann man aber ihre Grenzen für verschwindend kleines $a$ schreiben, und hat für $x=a$:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

Diese Formel ist immer anwendbar, wenn nicht $f'(a)$ und $\varphi'(a)$ gleichzeitig Null oder unendlich werden.

**Beispiel.**

Sei gegeben:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{a^x-b^x}{x},$$

ein Ausdruck, welcher $\frac{0}{0}$ wird für:

$$x=0.$$

Man erhält:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=a^x\lg a-b^x\lg b,$$

also für $x=0$:

$$\frac{a^x-b^x}{x}=\lg\frac{a}{b}.$$

Ebenso ergibt sich für $x=1$:

$$\frac{\lg x}{x-1}=\frac{1}{x}=1,$$

$$\frac{x-1}{x^n-1}=\frac{1}{nx^{n-1}}=\frac{1}{n}.$$

Es kann aber auch vorkommen, dass für $x=a$ zugleich:

$$\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\frac{0}{0}$$

wird. Indem man in diesem Falle das obige Verfahren wiederholt, erhält man:

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{f''(\alpha)}{\varphi''(\alpha)},$$

und allgemein:

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{f^{(s)}(\alpha)}{\varphi^{(s)}(\alpha)}.$$

Wenn die $s-1$ten ersten Differenzialquotienten von $f(x)$ und $\varphi(x)$, sowie diese Functionen selbst für $x=\alpha$ der Null gleich werden.

Beispiel.

Es ist für $x=0$:

$$\frac{x-\sin x}{x^3} = \frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{\sin x}{6x}$$

$$= \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6}.$$

Hier nahmen die zwei ersten Differenzialquotienten die Form $\frac{0}{0}$ an, und es war daher dreimal zu differenziiren

$$\frac{\sin x^2}{x-\frac{1}{2}\sin 2x} = \frac{3\sin x^2 \cos x}{1-\cos 2x}$$

$$= \frac{3\sin x\,(2\cos x^2 - \sin x^2)}{2\sin 2x}$$

$$= \frac{3\cos x\,(2\cos x^2 - 7\sin x^2)}{4\cos 2x} = \frac{3}{2}.$$

Möge jetzt in dem Bruche $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ gleichzeitig der Zähler und der Nenner unendlich werden. Der Fall lässt sich dann sogleich auf den früheren zurückführen. Es ist:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

und also hier ein Bruch gegeben, dessen Zähler und Nenner $\frac{1}{\varphi(x)}$ und $\frac{1}{f(x)}$ gleichzeitig verschwinden.

Es ist nun, wenn man das eben gegebene Verfahren anwendet:

$$\frac{d\left(\frac{1}{\varphi(x)}\right)}{dx} = -\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)^2},$$

$$\frac{d\left(\frac{1}{f(x)}\right)}{dx} = -\frac{f'(x)}{f(x)^2},$$

also für $x=\alpha$:

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{\varphi'(\alpha)}{f'(\alpha)}\left(\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)}\right)^2,$$

oder:

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{f'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}.$$

Mithin gilt für die Brüche von der Form $\frac{\infty}{\infty}$ dieselbe Regel, als für die von der Form $\frac{0}{0}$.

Jedoch ist in Bezug auf die erstern noch eine Bemerkung zu machen.

Zu dem Ende beweisen wir folgenden Satz:

„Wenn eine Function $f(x)$ für $x=\alpha$ bei endlichem $\alpha$ unendlich oder discontinuirlich wird, so muss auch ihr Differenzialquotient unendlich werden.“

In der That sei $f(x)$ unendlich oder discontinuirlich für $x=\alpha$, sei für denselben Werth:

$$\lim \frac{f(\alpha+\nu)-f(\alpha)}{\nu} = f'(\alpha)$$

einer endlichen Grösse gleich, so wäre:

$$f(\alpha+\nu) = f(\alpha) + \nu f'(\alpha)$$

für jeden Zuwachs $\nu$, und da wegen des endlichen $f'(\alpha)$, $\nu f'(\alpha)$ mit abnehmendem $\nu$ verschwindet, so müssten die Grössen $f(\alpha+\nu)$ und $f(\alpha)$ mit abnehmendem $\nu$, was auch $\nu$ sei, einen verschwindend kleinen Unterschied haben, mit andern Worten, $f(x)$ müsste für $x=\alpha$ continuirlich sein, was der Annahme widerspricht.

Ausgeschlossen ist hier jedoch der Fall, wo $\alpha=\infty$ ist.

Aus diesem auch im Uebrigen wichtigen Satze folgt für unsern Fall, dass, wenn:

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{\infty}{\infty}$$

ist, dies auch mit $\frac{f'(\alpha)}{\varphi'(\alpha)}$ . . . der Fall sein wird, wenn $\alpha$ nicht $=\infty$ ist. Indess schliesst dies nicht aus, dass sich in $f'(\alpha)$ und $\varphi'(\alpha)$ ein gemeinschaftlicher Factor findet, nach dessen Hinweghebung man den wahren Werth von $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ erhält.

Beispiel.

Für $x=0$ ist:

$$\frac{\lg\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x} = \frac{\infty}{\infty},$$

und wenn man differenziirt:

$$\frac{\lg\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot x} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sin x^2}} = \frac{\sin x^2}{x} = \frac{0}{0},$$

also:

$$\frac{\lg\left(\frac{1}{x}\right)}{\cot(x)} = 2\sin x\cos x = 0.$$

Es lässt sich übrigens noch eine andere Methode zur Entwickelung des Ausdruckes:

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\infty}{\infty}$$

finden.

Zunächst kann man $\varphi(x) = y$ setzen, und den aus dieser Gleichung zu bestimmenden Werth von $x$ in $f(x)$ einsetzen. Möge $f(x) = \psi(y)$ werden, so ist also zu untersuchen der Bruch:

$$\frac{\psi(y)}{y} \text{ für den Werth } y = \infty,$$

und es wird auch:

$$\psi(y) = \infty$$

sein. Nun ist für verschwindend kleines $\varepsilon$ offenbar:

$$f[u(1+\varepsilon)] = f(u+u\varepsilon) = f(u) + u\varepsilon f'(u).$$

Wenn aber $y$ unendlich gross ist, so hat man:

$$\psi(y+h) = \psi y\left(1+\frac{h}{y}\right),$$

und $\frac{h}{y}$ ist unendlich klein, welchen endlichen Werth auch $h$ habe. Also:

$$\psi(y+h) = \psi(y) + h\psi'(y),$$

$$\psi'(y) = \frac{\psi(y+h) - \psi(y)}{h}.$$

Da nun mit Anwendung unserer Regel für $y = \infty$:

$$\frac{\psi(y)}{y} = \psi'(y)$$

ist, so hat man für diesen Fall auch:

$$\frac{\psi(y)}{y} = \frac{\psi(y+h) - \psi(y)}{h},$$

wo $h$ jede endliche Zahl, also auch 1 sein kann.

Sei jetzt gegeben der Ausdruck:

$$F(x)^{f(x)}$$

für den Fall, wo:

$$F(x) = f(x) = 0,$$

oder:

$$F(x) = \infty \quad \text{und} \quad f(x) = 0$$

ist. Es handelt sich also um Ermittelung der gleichfalls unbestimmten Werthe $0^0$, $0^\infty$. Dieselben lassen sich auf den vorigen Fall zurückführen, wenn man den Logarithmus nimmt. Es ist derselbe:

$$f(x)\lg F(x) = \frac{\lg F(x)}{\frac{1}{f(x)}},$$

also in beiden Fällen $= \frac{\infty}{\infty}$, oder man setzt für den obigen Werth:

$$\frac{f(x)}{\frac{1}{\lg F(x)}},$$

wodurch man die Form $\frac{0}{0}$ erhält.

Beispiel.

Sei gegeben:

$$y = [F(x)]^{\frac{1}{x}} \text{ und } F(\infty) = \infty,$$

so hat man:

$$\lg y = \frac{\lg F(x)}{x} = \lg F(x+1) - \lg F(x)$$

$$= \lg\frac{F(x+1)}{F(x)},$$

wenn man in der oben gegebenen Formel $h = 1$ setzt, also:

$$[F(x)]^{\frac{1}{x}} = \frac{F(x+1)}{F(x)}.$$

Ist also $F(x) = x$, so hat man:

$$x^{\frac{1}{x}} = \frac{x+1}{x} = 1,$$

wenn $x = \infty$ ist.

Suchen wir jetzt die Grösse:

$$y = [F(x)]^x$$

für $x = 0$, wenn $F(0) = 0$ ist.

Man hat:

$$\lg(y) = x\lg F(x) = \frac{\lg F(x)}{\frac{1}{x}},$$

also wenn man $\frac{1}{x} = u$ setzt:

$$\frac{\lg F\left(\frac{1}{u}\right)}{u} = \lg F\left(\frac{1}{u+1}\right) - \lg F\left(\frac{1}{u}\right)$$

für $u = \infty$ und somit:

$$[F(x)]^x = \frac{F\left(\frac{1}{u+1}\right)}{F\left(\frac{1}{u}\right)}.$$

Also, wenn $F(x) = x$ ist, für $x = 0$ oder für $u = \infty$:

$$x^x = \frac{\frac{1}{u+1}}{\frac{1}{u}}$$

d. h.:

$$x^x = 1.$$

Sei noch gesucht:

$$y = [f(x)]^{F(x)},$$

wenn für einen bestimmten Werth von $x$:

$$f(x) = 1, \quad F(x) = \infty$$

wird. Man hat also den ebenfalls unbestimmten Ausdruck $1^\infty$ zu finden. Man hat:

$$\lg y = F(x) \lg f(x) = \frac{\lg f(x)}{\frac{1}{F(x)}} = \tfrac{0}{0},$$

oder:

$$\lg y = \frac{\frac{F(x)}{x}}{\frac{1}{\lg f(x)}} = \infty.$$

Beispiele.

Sei gesucht:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = y$$

für $x = 0$;

$$\lg y = \frac{\lg(1+x)}{x} = \frac{1}{1+x} = 1,$$

also:

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = e;$$

ferner für $x = 0$:

$$y = (\cos m x)^{\frac{1}{x}},$$

also:

$$\lg y = \frac{1}{x} \lg \cos m x = -\frac{m \sin m x}{\cos(m x)} = 0.$$

Die Formel:

$$\frac{f(\alpha)}{\varphi(\alpha)} = \frac{f^{(s)}(\alpha)}{\varphi^{(s)}(\alpha)}$$

für:

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha) = 0$$

wird unzureichend, wenn alle Differenzialquotienten von $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ der Null gleich werden. In diesem Falle kann man den Ausdruck auf die Form:

$$\frac{\frac{1}{\varphi(\alpha)}}{\frac{1}{f(\alpha)}} = \frac{\infty}{\infty}$$

bringen, und nach der für solche Formen gegebenen Regel untersuchen, oder den Ausdruck direct untersuchen.

Beispiele.

Suchen wir:

$$x a^{-x} = \frac{a^{-x}}{\frac{1}{x}}$$

für $x = +\infty$. Der rechts geschriebene Werth hat hier die Form $\tfrac{0}{0}$. Setzten wir statt dessen:

$$\frac{x}{a^x} = \frac{\infty}{\infty},$$

oder wenn wir $a^x = y$ nehmen:

$$\frac{a^{-x}}{\frac{1}{x}} = \frac{\lg y}{\lg a \cdot y} = \frac{\lg(y+1) - \lg y}{\lg a}$$

für $y = \infty$. Es ist aber:

$$\lg(y+1) - \lg y = \lg \frac{y+1}{y} = \lg 1 = 0,$$

also:

$$x a^{-x} = 0,$$

woraus sich sogleich ergibt:

$$\frac{1}{x} a^x = \infty,$$

$$\frac{\lg x}{x} = 0$$

für $x = \infty$.

Ist gegeben:

$$\frac{(x-\alpha)^n}{(x^2-\alpha^2)^p},$$

wo $n$ und $p$ echte Brüche sind, so werden alle Differenzialquotienten des Zählers und Nenners für $x = \alpha$ unendlich werden.

Verfährt man direct, so hat man:

$$\frac{(x-\alpha)^n}{(x-\alpha)^p (x+\alpha)^p} = \frac{(x-\alpha)^{n-p}}{(x+\alpha)^p},$$

also für $x=\alpha$:

$$\frac{(x-\alpha)^n}{(x^2-\alpha^2)^p}=0,$$

wenn $n$, algebraisch genommen grösser als $p$ ist, und:

$$\frac{(x-\alpha)^n}{(x^2-\alpha^2)^p}=\infty,$$

wenn das Umgekehrte stattfindet. Nur für $n=p$ ergibt sich:

$$\frac{(x-\alpha)^n}{(x^2-\alpha^2)^p}=\frac{1}{2^p\alpha^p}.$$

Wenn der unbestimmte Ausdruck mehrere Variablen enthält, so muss zwischen denselben irgend ein willkürlicher oder gegebener Zusammenhang angenommen werden, um den Werth des Ausdrucks zu ermitteln.

Beispiel.

Es sei gegeben:

$$s=\frac{\lg x+\lg y}{x+2y-3},$$

ein Ausdruck, der die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, wenn man setzt:

$$x=1,\quad y=1.$$

Denkt man sich $y$ als Function von $x$, so erhält man durch Differenziiren des Zählers und Nenners:

$$s=\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}}{1+2\frac{dy}{dx}}=\frac{1+\frac{dy}{dx}}{1+2\frac{dy}{dx}},$$

wo man für $x$ und $y$ die obigen Werthe eingesetzt hat. — $\frac{dy}{dx}$ ist hier ganz unbestimmt, und es kann dafür eine beliebige Function von $x$ gesetzt werden. Es ist nämlich $y$ der einzigen Bedingung unterworfen, dass für $x=\alpha$, $y=\beta$ wird, wenn $\alpha$, $\beta$ diejenigen Werthe sind, für welche die Function unbestimmt wird. Offenbar kann man also setzen:

$$y=\varphi(x)-\varphi(\alpha)+\beta,$$

eine Function, welche diese Bedingung erfüllt, und man hat:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x),$$

also, da $\varphi$ unbestimmt, eine ebenfalls willkürliche Function.

Möglicherweise kann jedoch $\frac{dy}{dx}$ ganz verschwinden.

Beispiel.

Sei:

$$s=\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}+y^{\frac{3}{2}}-1}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}-y+1},$$

ein Ausdruck, der für $x=1$, $y=1$ die Form $\frac{0}{0}$ annimmt. — Durch Differenziiren erhält man:

$$z=\frac{\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{1}{2}}+\frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}}{3x(x^2-1)^{\frac{1}{2}}-\frac{dy}{dx}},$$

also für:

$$x=1,\quad y=1,$$

$$s=-\frac{3}{2}\,\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dy}{dx}}=-\frac{3}{2}.$$

Es kann hierbei auch der Fall eintreten, dass die Differenzialquotienten von Zähler und Nenner Null sind, und man muss dann die nächsten Differenzialquotienten nehmen.

Beispiel.

Sei:

$$z=\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2},\ x=0,\ y=0.$$

Man erhält:

$$z=\frac{2(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right)}{2x+2y\frac{dy}{dx}},$$

was für $x=y=0$ wieder $\frac{0}{0}$ gibt.

Abermaliges Differenziiren gibt:

$$\frac{2\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2+2(x+y)\frac{dy^2}{dx^2}}{2+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2y\frac{d^2y}{dx^2}}=\frac{\left(1+\frac{dy}{dx}\right)^2}{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

wo $\frac{dy}{dx}$ wieder ganz willkürlich ist.

Es ist hier kein Zufall, dass $\frac{d^2y}{dx^2}$ nicht im Resultat vorkommt, sondern dies wird immer eintreten. Denn wie auch $z$ beschaffen sei, so werden die Differenzialquotienten von Zähler und Nenner die Form haben: $\alpha+\beta\frac{dy}{dx}$, wo $\alpha$ und $\beta$ Functionen von $x$ und $y$ sind. Abermaliges Differenziiren gibt dann:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\beta\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Sollen aber, wie bier vorausgesetzt wurde, Zähler und Nenner für jeden Werth von $\frac{dy}{dx}$ der Null gleich werden, so muss sein:

$$\alpha=\beta=0,$$

und es verschwinden somit die mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ multiplicirten Glieder. Werden Zähler und Nenner unendlich, oder alle Differenzialquotienten derselben der Null gleich oder unbestimmt, so versagt diese Methode ihren Dienst, und ist dann der Fall direct zu untersuchen.

Eine Unbestimmtheit tritt, wie schon früher beiläufig erwähnt wurde, z. B. in einem gewissen Falle dann ein, wenn $y$ eine durch die Gleichung:

$$f(x,y)=0$$

bestimmte Function von $x$ ist. Man hat nämlich dann:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Ist nun für ein bestimmtes Werthpaar $x=\alpha$, $y=\beta$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0,$$

so findet Unbestimmtheit statt. Mit Anwendung der allgemeinen Methode setzt man dann:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}}{\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{dy}{dx}}.$$

Man hat dann eine nach $\frac{dy}{dx}$ quadratische Gleichung, welche $\frac{dy}{dx}$ gibt.

Zu demselben Resultate gelangt man auch direct, wenn man die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0$$

nochmals differenziirt. Dies gibt nämlich:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}=0,$$

wovon jedoch das letzte Glied verschwindet, da:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

war. Also:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0.$$

Wären auch alle zweiten partiellen Differenzialquotienten von $f$ der Null gleich, also:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0,$$

so differenziirte man abermals. Es ergäbe sich, wenn man die der Null gleichen Coefficienten wegliesse:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\frac{dy}{dx}+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3=0,$$

also eine Gleichung dritten Grades.

Allgemein, wenn alle Differenzialquotienten von $f$ nach $x$ und $y$ bis inclusive zum $n-1$ten verschwinden, hat man:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+n\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-1}\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-2}\partial y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\ldots+\frac{\partial^n f}{\partial y^n}\left(\frac{dy}{dx}\right)^n=0,$$

also eine Gleichung $n$ter Ordnung.

In diesem Falle gehören also zu einem Werthe von $y$, $n$ Werthe von $\frac{dy}{dx}$.

Da nun dem Differenzialquotienten keine grössere Mehrdeutigkeit zukommen kann als $y$ selbst, so muss $y$ wenigstens eine $n$deutige Function von $x$ sein. Die $n$ Werthe von $\frac{dy}{dx}$ aber zeigen, dass die Function $y$ von $x$ für den gegebenen Werth von $x=\alpha$ so beschaffen ist, dass sich für ein unendlich kleines $\nu$, $n$ verschiedene Werthe von:

$$y_{(x+\nu)} = y_x + \nu \frac{dy}{dx}$$

ergeben, während $y$ völlig bestimmt ist, man also das Blatt, auf welchem $y$ zu nehmen ist, angegeben hat. Es müssen also von den Werthen von $y_{(x+\nu)}$ $n$ auf continuirliche Weise aus einem Werthe von $y_{(x)}$ hervorgehen, d. h. mit andern Worten, in Punkt $x=\alpha$ $n$ Werthe von $y$ gleich werden, und $y$ für den bezeichneten Werth jedenfalls einen $n$fachen Punkt haben. Jedoch kann auch, wie wir sahen, ein $n$facher Punkt dadurch angezeigt sein, dass $\frac{dy}{dx}$ discontinuirlich wird.

**Beispiel.**

Sei gegeben:

$$f(x,\ y) = mx^2 - ny^2 + pxy = 0.$$

Man erhält durch Differenziiren:

$$2mx - 2ny\frac{dy}{dx} + px\frac{dy}{dx} + py = 0.$$

$\frac{dy}{dx}$ nimmt hier für $x=0$, wo sich mittels der Gleichung $f(x,\ y)=0$ auch $y=0$ ergibt, die Form $\frac{0}{0}$ an. Abermaliges Differenziiren aber gibt:

$$m - n\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + p\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{p}{n} \pm \sqrt{\frac{p^2}{n^2} + \frac{m}{n}},$$

also man hat in der That zwei verschiedene Werthe von $\frac{dy}{dx}$. Löst man die Gleichung $f(x,\ y)=0$ nach $y$ auf, so hat man:

$$y = \frac{px}{n} \pm \sqrt{\frac{p^2x^2}{n^2} + \frac{mx^2}{n}}$$

und für $x=0$ werden beide Wurzeln der Null gleich, so dass, wie vorauszusehen war, ein Doppelpunkt stattfindet.

Wie sich diejenigen mehrfachen Punkte, wo diese Bedingung stattfindet, von denjenigen unterscheiden, wo der Differenzialquotient unendlich wird, davon soll später die Rede sein.

Es kann aber bei der Gleichung $f(x,\ y)=0$ auch der Fall vorkommen, dass für einen bestimmten Werth von $x=\alpha$ die Gleichung identisch erfüllt wird, was auch $y$ sei. In diesem Falle würde sich also der Werth von $y$ nicht direct ergeben. Durch Differenziiren aber erhält man wieder:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx},$$

und für $x=\alpha$ wird:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

sein, weil $f(\alpha,\ y)$ identisch der Null gleich ist. Es wird also auch sein:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

eine Gleichung, welche den zu $x=\alpha$ gehörigen Werth von $y$ gibt.

Wäre auch die Gleichung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0$$

identisch erfüllt, so müsste nochmals differenziirt werden.

**Beispiel.**

Sei gegeben:

$$f(x,\ y) = mx^2 - x + \lg(1+xy) = 0.$$

Für $x=0$ wird diese Gleichung, was auch $y$ sei, identisch erfüllt. Differenziirt man aber, so ergibt sich:

$$2mx - 1 + \frac{x\frac{dy}{dx} + y}{1+xy} = 0,$$

oder da $x=0$ ist:

$$y = 1.$$

Sei ferner:

$$f(x,\ y) = (y^2-1)x^2 - y\,[\lg(1+x)]^2 = 0,$$

welche Gleichung ebenfalls für $x=0$ identisch wird. Das Differenziiren gibt:

$$2x(y^2-1) + 2x^2y\frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx}[\lg(1+x)]^2 - 2y\frac{\lg(1+x)}{1+x} = 0,$$

wo die mit $\frac{dy}{dx}$ multiplicirten Glieder für $x=0$ verschwinden müssen, also:

$$x(y^2-1)(1+x) - y\lg(1+x) = 0.$$

Auch diese Gleichung aber wird identisch für $x=0$. Differenziirt man nun abermals, so kommt:

$$(y^2-1)(1+2x)+2x(1+x)\,y\,\frac{dy}{dx}$$
$$-\frac{dy}{dx}\lg(1+x)-\frac{y}{1+x}=0,$$

also für $x=0$:

$$y^2-y-1=0.$$

Es ergeben sich also für $y$ die beiden Wurzeln dieser Gleichung.

12) Von den Integralen monogener Functionen.

Es ist bei der Betrachtung der Functionen complexer Variablen nicht thunlich, die Betrachtungen der Differenzialrechnung zu Ende zu führen und dann erst auf die umgekehrte Operation, die Integralrechnung einzugehen. Es sind also die in dem Artikel (analytische) Quadratur gegebenen Betrachtungen hier bis zu einem gewissen Grade vorausgesetzt. Namentlich wären hier die in den Abschnitten 1) bis 13) dieses Artikels gegebenen Sätze einzuflechten. — Wir erinnern namentlich an die Definition eines bestimmten Integrals:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx=\lim\left[(x_1-x_0)\,f(x_0)\right.$$
$$+(x_2-x_1)f(x_1)+\ldots$$
$$\left.+(x_n-x_{n-1})f(x_{n-1})\right],$$

wo die Zwischenwerthe zwischen $x_0$ und $x_n$, also $x_1, x_2 \ldots$ continuirlich aus einander entstehen, also irgend eine von $x_0$ und $x_n$ begrenzte Strecke ausfüllen, die im Uebrigen ganz beliebig ist. — Auf dieser Definition beruht die Theorie der Mehrdeutigkeit der Integrale, die wir jedoch hier nach Riemann in etwas veränderter Form geben wollen, um auf die mehrdeutigen Functionen in der ihnen hier gegebenen genaueren Versinnlichung Rücksicht nehmen zu können. Zu dem Ende machen wir folgende Vorbemerkungen.

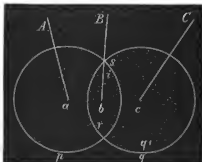
A) „Eine geschlossene Curve führt von einem Punkte $a$ zu demselben mit demselben Functionswerthe wieder zurück."

Man kann daher jede Curve, die keinen Windungspunkt enthält, als geschlossene betrachten, wenn man beide Seiten als Begrenzung auffasst. Z. B. die grade Strecke $ABC$ ist geschlossen, wenn man auf einer Seite von $A$ nach $C$, auf der andern von $C$ nach $A$ zurückgeht. Auch kann nur von einem Theil der Begrenzung die andere Seite mitgezählt werden; z. B. wenn zwei sich nicht schneidende Kreise durch eine Grade verbunden sind, so hat man eine geschlossene Curve, wenn beide Seiten der Graden gezählt werden.

B) „Eine Curve begrenzt einen Theil einer Fläche, wenn man, ohne erstere zu durchschneiden, nicht von diesem Theile zu der andern Fläche oder umgekehrt gelangen kann."

Auf einer Ebene oder Kugel begrenzt selbstverständlich jede geschlossene Curve einen Theil der Fläche. Solche Flächen nennt man einfach zusammenhängende. Unsere Flächen, welche mehrdeutige Functionen versinnlichen und welche längs der Verzweigungslinien zusammenhängen, sind dergleichen nicht. Habe z. B. eine Function drei Doppelpunkte $a$, $b$, $c$ (Fig. 73), und bilden wir die entsprechenden, ins Unendliche gehenden Verzweigungslinien, die wir mit $A$, $B$, $C$ bezeichnen. Ziehen wir dann z. B. von Punkt $p$ aus auf einem der beiden Blät-

Fig. 73.



ter eine Curve, welche $a$ und $b$ einschliesst, bis nach $p$ zurück, so ist dies eine geschlossene Curve, denn sie führt auf dem ersten Blatte von $p$ nach Linie $A$, geht hier beim Durchschneiden von $A$ auf dem zweiten Blatte nach $B$, und beim Schneiden dieser Linie wieder auf dem ersten nach $p$ zurück. Indessen kann man von Punkt $q$ auf dem ersten Blatte auf der äussern Seite der Begrenzung nach $r$ innerhalb derselben auf demselben Blatte gelangen. Man ziehe nämlich von $q$ nach $C$ auf dem ersten Blatte und durchschneide die Linie $C$, womit man ins zweite gelangt, dann kann man, ohne die von $p$ gezogene Curve zu durchschneiden, in $s$ ins Innere gelangen, da man sich ja auf dem zweiten Blatte befindet, die Curve aber im ersten gezogen ist. Durchschneidet man in $i$ Linie $B$, so gelangt man wieder ins erste Blatt und auf diesem nach $r$.

Kann man auf einer Fläche $n$ geschlossene Curven ziehen, welche keinen Flächentheil begrenzen, derart, dass jede andere eine solche Begrenzung bildet, wenn man diese $n$ zu Hülfe nimmt, so sagt man, die Fläche habe einen $n+1$ fachen Zusammenhang. Eine Function z. B. mit drei Doppelpunkten hat einen dreifachen Zusammenhang, denn es ist leicht zu sehen, dass mit Hülfe der durch $p$ und $q$ gezogenen Curven jede andere geschlossene einen Flächentheil begrenzt. Denkt man sich die äusseren und inneren Seiten der Curven $p$ und $q$ als Begrenzung der bis jetzt unbegrenzten Fläche, was auch so ausgedrückt werden kann, dass man die Fläche in diesen beiden Curven zerschneidet, so wird aus ihr eine einfach zusammenhängende.

Nach dieser Einleitung lässt sich die Theorie der Mehrdeutigkeit der Integrale (vergleiche den Artikel: Quadratur) aus dem Satze ableiten:

I. Lehrsatz.

„Der Ausdruck $\int f(z)\,dz$, ausgedehnt auf irgend eine geschlossene Curve, ist dann gleich Null, wenn letztere einen Flächentheil begrenzt, und sich innerhalb desselben kein Discontinuitätspunkt befindet."

Beweis.

Man betrachte den Ausdruck:

$$\iint\left(\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}\right)dx\,dy$$

ausgedehnt über den von der geschlossenen Curve begrenzten Ebenentheil. Da Discontinuität im Innern nicht vorhanden ist, kann die Ordnung des Integrirens umgekehrt werden. Man erhält mit Berücksichtigung der Grenzen:

$$\int(p_1-p_0)dy-\int(q_1-q_0)dx,$$

wenn man annimmt, dass die den $x$- und $y$-Axen parallelen Linien die Curven nur zweimal schneiden.

$p_1$, $p_0$ sind die Werthe von $p$, welche demselben $y$ auf der Begrenzung, $q_1$ und $q_0$ die von $q$, welche demselben $x$ entsprechen. Das erste Integral ist vom kleinsten Werth von $y$ bis zum grössten, das letztere vom kleinsten Werth von $x$ bis zum grössten zu nehmen, und da beide Wege einander entgegengesetzt sind, ist das zweite Integral mit negativem Zeichen zu nehmen. Statt dessen kann man auch setzen:

$$\int(p\,dy-q\,dx),$$

erstreckt über die ganze Begrenzung. Denn da die ganze Abscissenaxe zurückgelegt wird, indem man alle entsprechenden Werthe $q_1$, dann aber die zugehörigen $-q_0$ nimmt, so kann man statt des letztern Weges die Axe in umgekehrter Richtung mit $+q_0$, d. h. die ganze geschlossene Curve zurücklegen, indem man immer das entsprechende $q$ nimmt. Gleiches findet für $p$ statt.

Dies bleibt noch richtig, wenn die Begrenzung mehr als zweimal geschnitten wird, wenn man je zwei Punkte derselben, die demselben $x$ oder $y$ bezüglich entsprechen, als $p_1$, $p_0$ und $q_1$, $q_0$ betrachtet. Der zuerst betrachtete Ausdruck $\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}$ sei nun gleich Null, dann ist auch:

$$\int(p\,dx+q\,dy)=0.$$

Setzen wir nun:

$$f(z)=x+yi,\quad p=f(z),\quad y=i\,f(z),$$

so ist also:

$$\int f(z)\,dz=\int f(z)\,(dx+i\,dy)$$

der Null gleich, wenn man hat:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x}+\frac{i\,\partial f(z)}{\partial y}=0,$$

eine Gleichung, welche immer erfüllt wird, wenn $f(z)$ eine monogene Function ist.

Hieraus ergibt sich sogleich:

46*

II) „dass man für einen Weg des Integrals $\int f(z)\,dz$, der von $a$ nach $b$ führt, jeden andern nehmen kann, der von $a$ nach $b$ führt, wenn beide zusammen eine Curve von der eben angegebenen Eigenschaft bilden."

Denn die Summe der Integrale von $a$ nach $b$ auf dem einen Wege und von $b$ nach $a$ auf dem andern ist nach obigem Satze gleich Null, d. h.:

$$\int_a^b f(z)\,dz + \int_b^a f(z)\,dz = 0,$$

d. h.:

$$\int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz,$$

wo das erstere Integral auf dem einen, das letztere auf dem andern Wege zu nehmen ist.

Der Werth von $\int f(z)\,dz$, erstreckt über irgend eine geschlossene Curve $A$, ist gleich demselben Integral, erstreckt in demselben Sinne über eine oder mehrere geschlossene Curven $B$, wenn sich zwischen $A$ und den letzteren kein Discontinuitätspunkt befindet, und das System $A$ und $B$ einen Flächentheil begrenzt. Denn verbindet man einen Punkt von $A$ mit der ersten Curve $B$, einen Punkt dieser mit der zweiten Curve $B$ u. s. w., die letzte Curve $B$ aber wieder mit $A$, rechnet aber beide Seiten dieser Hülfslinien zur Begrenzung, so bilden $A$ und $B$ mit ihnen eine geschlossene Curve, also das über $A$ erstreckte Integral ist gleich dem über $B$ und die Hülfslinien erstreckten. Es fallen aber die letztern ganz weg, da auf der einen Seite in einem Sinne, auf der andern im entgegengesetzten über sie die Integration auszudehnen ist, und und da nur geschlossene Curven durchgegangen werden, Eindeutigkeit stattfindet.

Aus II. folgt auch augenblicklich, dass man statt eines Integrals, das sich über eine in sich zurückkehrende Curve erstreckt, auch die Summe der über die ihr entsprechenden Elementarwege erstreckten setzen kann, wenn sie keinen Discontinuitätspunkt umschliesst. Aber selbst wenn solche vorhanden ist, kann man dies noch thun, wenn man die Elementarwege hinzufügt, die diesen Discontinuitätspunkten entsprechen. Denn die Summe der so entstehenden Wege bildet mit dem gegebenen eine Curve, welche Bedingung II. erfüllt. — Ist übrigens ein Discontinuitätspunkt kein Windungspunkt, so heben sich die gradlinigen Theile der Elementarcurve weg, und sie beschränkt sich auf einen Kreis.

Ein über einen Elementarweg erstrecktes Integral heisst Elementarintegral. Ist z. B. $M$ (Fig. 74) ein Discontinuitätspunkt, so ist das Elementarintegral zu

Fig. 74.



bilden, indem man von $a$ nach $b$, um $M$ herum nach $b$ zurück und nach $a$ geht, und wenn keine Mehrdeutigkeit stattfindet, haben das von $a$ nach $b$ und das von $b$ nach $a$ erstreckte Integral die Summe Null.

Bei einem Windungspunkte verschwindet aber in der Regel der kreisförmige Theil eines Elementarintegrals, nämlich dann, wenn für den Windungspunkt $a$ der Ausdruck:

$$\int_\circ f(z)\,dz = \int f(a + \varrho e^{\varphi i})\, e^{\varphi i}\, d\varphi$$

zum Argumente Null hat, d. h. wenn sich $z f(a+z)$ mit abnehmendem $z$ der Null nähert. Dies ist also immer der Fall, wenn $f(a+z)$ endlich ist, also wenn $a$ nicht zugleich ein Discontinuitätspunkt ist, aber auch dann, wenn $f(a+z)$ zwar ein solcher, aber mit $z^{-\varepsilon}$ proportional ist, wo $\varepsilon$ ein positiver echter Bruch ist.

Diese Sätze erhalten dadurch noch eine Erweiterung, als nicht alle Discontinuitäten ihre Anwendung ausschliessen.

Ist $a$ ein Discontinuitäts-, nicht aber zugleich ein Windungspunkt, und nehmen wir an, dass sich die Function nach positiven und negativen Potenzen von $z-a$ in der Nähe von $a$ entwickeln lässt. Denke man nun in $a$ als Mittelpunkt einen kleinen Kreis $O$, der innerhalb der Begrenzung liegt, so ist das über diesen erstreckte Integral gleich dem über die Begrenzung erstreckten, wenn kein anderer Discontinuitätspunkt sich innerhalb derselben befindet. Findet letzteres statt, so ist das Integral über eine Anzahl von Kreisen, welche die Discontinuitätspunkte umgeben, gleich dem über die Begrenzung erstreckten.

Der Ausdruck $f(z)$ auf einem dieser Kreise besteht nun aus einem nach po-

sitiven Potenzen von $z-\alpha$ fortschreitenden, also continuirlichen Theile, und einem zweiten von der Form:

$$\Sigma \frac{A_p}{p\,(z-\alpha)^p},$$

wo $A_p$ eine Constante, $p$ eine ganze positive Zahl bedeutet, also:

$$f(z)\,dz = \Sigma A_p \int \frac{dz}{(z-\alpha)^p}.$$

Setzt man $z = \alpha + r e^{\varphi i}$, so ist für den Kreis $r$ constant $\varphi$ in den Grenzen 0 und $2\pi$ zu nehmen, also:

$$f(z)\,dz = \Sigma A_p \int_0^{2\pi} \frac{r i e^{\varphi i} d\varphi}{r^p e^{p\varphi i}}.$$

Jedes der Integrale ist auf beiden Grenzen gleich, verschwindet also, wenn $p>1$ ist. Nur für $p=1$ hat man:

$$i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i;$$

also:

„Die obigen Sätze finden noch statt, wenn zwar Discontinuitäten $\alpha$ innerhalb des begrenzten Raumes enthalten sind, in deren Nähe sich aber die Function nach positiven und negativen ganzen Potenzen von $z-\alpha$ entwickeln lässt, und das Glied $\frac{A}{z-\alpha}$ nicht vorkommt."

Wir werden übrigens bald zeigen, dass die erste Bedingung bei allen Discontinuitätspunkten, die nicht zugleich Windungspunkte sind, erfüllt wird.

Bei jedem Elementarintegral kommt in Betracht der Anfangswerth, die Richtung der Integration und der critische Punkt. Sei $M$ der letztere, so unterscheiden wir die positive und negative Richtung wieder durch das Vorzeichen. Ist aber $M$ ein $n$facher Windungspunkt, so ist festzustellen, von welchem Anfangswerth man in $\alpha$ ausgeht. Möge z. B. von dem $g$ten Wurzelwerthe ausgegangen sein, so brauchen wir die Bezeichnung $(\pm M_g)$ für das entsprechende Integral. Führt nach einer Umkreisung dieser Wurzelwerth zu dem $h$ten, so hat man offenbar, wenn in entgegengesetzter Richtung integrirt wird, $(\mp M_h)$, also:

$$-(\pm M_g) = (\mp M_h).$$

Ist der Punkt ein Discontinuitätspunkt und kein Windungspunkt, so ist zu setzen $g=h$, also:

$$-(+M_g) = (-M_g).$$

Aus den in Abschnitt 4) gegebenen Betrachtungen über Elementarwege folgt nun sogleich:

„Ein auf einem beliebigen Wege von $g$ nach $h$ führendes Integral:

$$\int_g^h f_s(z)\,dz$$

besteht aus dem von $g$ nach $\alpha$ führenden (und zwar auf gradlinigem Wege, wenn die Grade $g\alpha$ keinen critischen Punkt enthält, sonst auf beliebigem, z. B. gradlinigen mit einer kleinen Ausweichung), einer Anzahl Elementarintegrale, durch welche $f_s(z)$ nach $f_t(z)$ hinübergeführt werden möge, und endlich dem gradlinigen $\int_\alpha^h f_t(z)\,dz$."

Möge jetzt eine einfache, in sich zurückkehrende Curve alle critischen Punkte, natürlich mit Ausschluss des Unendlichkeitspunktes umgeben, so ist diese nach den zu Ende des Abschnitts 4) gemachten Betrachtungen als eine solche aufzufassen, welche den Unendlichkeitspunkt allein, jedoch in entgegengesetzter Richtung umkreist. Das auf sie bezogene Integral kann also einerseits ersetzt werden durch die Summe aller von einem beliebigen Punkte $\alpha$ ausgehenden Elementarintegrale, mit Ausnahme des auf den Unendlichkeitspunkt bezüglichen, andererseits durch das letztere mit umgekehrtem Vorzeichen, welche Ausdrücke somit gleich sind, d. h.:

A) Nimmt man alle Elementarintegrale von $\alpha$ aus (das des Unendlichkeitspunkts eingeschlossen) in gleicher Richtung, so ist diese Summe Null.

Das auf den Unendlichkeitspunkt bezogene Integral setzt sich aus zwei gradlinigen:

$$\int_\alpha^\infty f_s(z)\,dz - \int_\alpha^\infty f_t(z)\,dz$$

und einem auf einen Kreis bezogenen zusammen, auf welchem $f_s(z)$ nach $f_t(z)$ herübergeführt wird. Setzen wir:

$$z = -\frac{1}{y}, \quad y = \varrho e^{\varphi i},$$

wo $\varrho$ sehr klein und constant ist, so ist dies Integral von 0 bis $2\pi$ zu nehmen. Man erhält:

$$-i\int_0^{2\pi} f_s\left(\frac{1}{\varrho}e^{-\varphi i}\right)\frac{1}{\varrho}e^{-\varphi i}d\varphi.$$

Dies aber verschwindet, wenn der Ausdruck:

$$\frac{1}{\varrho e^{\varphi i}} f_s\left(\frac{1}{\varrho e^{\varphi i}}\right) = \frac{1}{y} f_s\left(\frac{1}{y}\right)$$

für verschwindendes $y$ gleich 0 wird. Offenbar ist dies der Fall, wenn $f_s\left(\frac{1}{y}\right)$ für verschwindendes $y$ sich dem Ausdrucke $a y^{1+h}$, wo $h$ positiv ist, nähert. Also:

B) Wenn $f_s\left(\frac{1}{y}\right)$ mit verschwindendem $y$ dem Ausdrucke $y^{1+h}$ proportional wird, so beschränkt sich das auf den Unendlichkeitspunkt bezogene Elementarintegral auf den gradlinigen Weg.

Ist der Unendlichkeitspunkt kein Windungspunkt, so wird in diesem Falle das Elementarintegral überhaupt verschwinden.

Wir haben schon früher angeführt und werden in den nächsten Abschnitten beweisen, dass in diesem Falle sich immer $f(z)$ nach ganzen Potenzen von $z$ (positiven und negativen), also $f\left(\frac{1}{y}\right)$ auch nach solchen von $y$ sich entwickeln lässt. Sei demnach:

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \ldots + a_{-2}y^{-2} + a_{-1}y^{-1} + a_0 + a_1 y + \ldots,$$

dann wird:

$$-i\int_0^{2\pi} f\left(\frac{1}{\varrho e^{\varphi i}}\right)\frac{1}{\varrho e^{\varphi i}}d\varphi = -i\,a_1\int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi i\,a_1.$$

Alle andern Glieder sind nämlich mit $e^{s\varphi i}$ multiplicirt, die Integrale werden also an der obern und untern Grenze gleich, ihre Differenz Null. Also:

C) Das Elementarintegral des Unendlichkeitspunktes fällt ganz weg, wenn derselbe kein Windungspunkt ist und sich in der Entwickelung von $f\left(\frac{1}{y}\right)$ für $y=0$ kein mit $y$ multiplicirtes Glied findet. Findet sich ein solches $a_1 y$, so ist das über eine geschlossene Curve, welche alle critischen Punkte im Endlichen umgibt, ausgedehnte Integral gleich $2\pi i a_1$.

Beispiel. Sei gegeben:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)\ldots(\alpha_{2s} - z)}}.$$

Für $z = \frac{1}{y}$ ergibt sich:

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y^s}{\sqrt{(\alpha_1 y - 1)(\alpha_2 y - 1)\ldots(\alpha_{2s} y - 1)}}$$

und $\frac{1}{y} f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$ für $y=0$, immer wenn $s$ grösser als Eins ist. Für $y=0$ hat man hier keinen Windungspunkt, da dann die beiden Wurzelwerthe ungleich sind; also:

Immer, wenn $s$ grösser als Eins ist, wird das über eine, alle Windungspunkte umgehende Curve erstreckte Integral verschwinden. Ist aber $s=1$, also:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{(\alpha_1 - z)(\alpha_2 - z)}},$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{y}{\sqrt{(\alpha_1 y - 1)(\alpha_2 y - 1)}},$$

so wird das mit $y$ multiplicirte Glied sein gleich 1, also das besprochene Integral gleich $-2\pi i$.

Sei ferner gegeben:

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{(\alpha_1-z)(\alpha_2-z)\ldots(\alpha_{2s-1}-z)}},$$

so ist:

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{y^{s-\frac{1}{2}}}{\sqrt{(\alpha_1 y-1)(\alpha_2 y-1)\cdot\ldots(\alpha_{2s-1}y-1)}},$$

$\frac{1}{y}f\left(\frac{1}{y}\right)=0$, wenn $s$ grösser als 1 ist. In diesem Falle ist das Elementarintegral des Unendlichkeitspunktes gleich:

$$\int_a^\infty f_1(z)\,dz-\int_a^\infty f_2(z)\,dz.$$

Der Unendlichkeitspunkt ist hier ein Windungspunkt, und da:

$$f_2(z)=-f_1(z)$$

ist, so hat man:

$$2\int_a^\infty f_1(z)\,dz$$

für das Elementarintegral.

Ist $s=1$, also:

$$f(z)=\int\frac{dz}{\sqrt{(\alpha-z)}},$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right)=\frac{1}{\sqrt{y(\alpha y-1)}}.$$

Setzt man $y=\varrho e^{\varphi i}$, so hat man für verschwindendes $\varrho$:

$$-\int_0^{2\pi}f\left(\frac{1}{\varrho e^{\varphi i}}\right)\frac{1}{\varrho e^{\varphi i}}\,d\varphi=-\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{\varrho^{\frac{3}{2}}e^{\frac{3}{2}\varphi i}}=\infty,$$

wegen des Factors $\frac{1}{\varrho^{\frac{3}{2}}}$. Es ist also das auf den Unendlichkeitspunkt bezogene Elementarintegral aus der Betrachtung auszuschliessen.

13) Perioden der Integrale.

Der Ausdruck $\int f(z)\,dz$, erstreckt über eine geschlossene Curve, wenn er nicht verschwindet, heisst Periode des Integrals. Eine Periode entsteht also, wenn eine geschlossene Curve nur einen Discontinuitätspunkt, und auch wenn sie mehrere Windungspunkte derart einschliesst, dass sie kein Flächenstück begrenzt.

Ist $K$ eine Periode, so ergibt sie eine Mehrdeutigkeit des in Rede stehenden Integrals derart, dass man zu demselben, welches auch seine Grenzen seien, ein beliebiges positives oder negatives Vielfaches von $K$ addiren kann.

Denn sei $\int_a^b f(z)\,dz$ zu bestimmen, so zieht man von $a$ nach einem Punkte der geschlossenen Curve $g$, legt dieselbe $n$ mal in einer oder der andern Richtung zurück, was den Werth $nK$ oder $-nK$ gibt, und geht schliesslich von $g$ nach $b$. Man hat dann:

$$\int_a^b f(z)\,dz=\int^{(agb)}f(z)\,dz\pm nK,$$

wo das Integral rechts auf dem Wege $agb$ genommen ist, also ein specieller Werth von $\int_a^b f(z)\,dz$ ist.

Von Perioden gelten folgende Sätze:

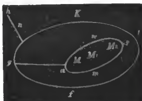
A) Zwei geschlossene Curven, welche dieselben critischen Punkte einschliessen, geben denselben Periodenwerth. Es liegt nämlich kein critischer Punkt zwischen ihnen, also gilt Satz III. des vorigen Abschnittes.

Selbstverständlich ist jede Periode eine Summe von Elementarintegralen.

B) Hat die Function $f(z)$ $n$ Werthe derart, dass man von jedem auf irgend einem Wege zu dem andern gelangen

kann (also durch Umgehen von Windungspunkten), so ist jede Periode eines Werthes $f_s(z)$ auch solche eines jeden andern $f_t(z)$. Denn sei z. B. *awsm* (Fig. 75) eine Curve, welche einer Pe-

Fig. 75.




riode von $f_s(z)$ entspricht. Geht man nun von $n$ mit Werth $f_t(z)$ aus, und beschreibt irgend einen Weg *hnKlfg*, der zu $f(z)$ führt (also Windungspunkte umkreist, wie hier nicht angegeben), geht dann von $g$ nach $a$ mit $f_s(z)$, und beschreibt eine beliebige Anzahl von Malen die Periodencurve *awsm*, geht dann den Weg *agflKnh* zurück, so kommt man mit $f_t(z)$ wieder in $h$ an; das entsprechende Integral ist also auf einer geschlossenen Curve, und somit eine Periode von $f_t(z)$. Es heben sich aber die Wege bis auf *awsm* ganz weg, so dass die Periode von $f_s(z)$ mit der eben genannten identisch ist.

Eine Curve, die alle critischen Punkte umgibt, ist dann eine geschlossene (vergleiche Abschnitt 4), wenn der Unendlichkeitspunkt kein Windungspunkt ist. In diesem Falle gibt also die fragliche Curve eine Periode.

Die Perioden einer Function können insofern von einander abhängig sein, als eine, $L$, eine Summe von andern Perioden $K$ und $K_1$ sein kann, also z. B.:

$$L = mK + nK_1.$$

Dann ist offenbar überflüssig, die Periode $L$ zu betrachten.

**Beispiele.**

1) Der Ausdruck $\int \frac{dx}{x}$ hat eine Periode, die dem Discontinuitätspunkte $x=0$ entspricht. Setzt man:

$$x = r e^{\varphi i},$$

so ergibt die Periode:

$$i \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i,$$

und somit ist:

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \int^{(ab)} \frac{dx}{x} + 2n\pi i,$$

wo das erste Integral rechts auf dem gradlinigen Wege $ab$ genommen ist. Diese Gleichung enthält also die Mehrdeutigkeit der Logarithmen.

Eine zweite Periode würde der Unendlichkeitspunkt geben; da aber für $x = \frac{1}{y}$:

$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y}$$

ist, so ist diese Periode der ersten gleich.

2) Sei $\int f(x)\,dx$ zu prüfen, wo:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

ist. Man hat zwei Discontinuitätspunkte, welche $x = +i$ und $x = -i$ entsprechen. Für $x = \frac{1}{y}$ ergibt sich:

$$\int f(x)\,dx = -\int \frac{dy}{1+y^2},$$

was keinen critischen Punkt gibt. Es haben also beide Perioden die Summe Null, die eine ist auf die andere zurückgeführt. Setzt man $x = i + \varrho e^{\varphi i}$, so wird, wenn $\varrho$ unendlich klein, $\varrho^2 = 0$ gesetzt wird:

$$\int f(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{\varrho\, d e^{\varphi i}}{2 i \varrho e^{\varphi i}} = \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi,$$

also ist $\pi$ die Periode. Das betreffende Integral stellt bekanntlich den Arcustangens vor.

3) Sei:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(\alpha_1 - x)(\alpha_2 - x)\ .\ .\ .\ (\alpha_{2n} - x)}}.$$

Nach vorigem Abschnitte ist das auf den Unendlichkeitspunkt bezogene Elementarintegral gleich 0, wenn $n$ grösser als 1 ist. Von den übrigen fallen die kreisförmigen Theile weg. Je zwei geben eine Periode, da man beim Umkreisen des einen Windungspunktes das Zeichen ändert, bei dem des andern dasselbe also wieder herstellt. Den Windungspunkten $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n}$ entsprechen die Elementarintegrale:

$$A_1=\int_0^{\alpha_1} f_1(x)\,dx-\int_{\alpha_1}^0 f_2(x)\,dx,$$

oder da $f_2(x)=-f_1(x)$ ist:

$$A_1=2\int_0^{\alpha_1} f(x)\,dx,\quad A_2=2\int_0^{\alpha_2} f(x)\,dx,$$

allgemein:

$$A_s=2\int_0^{\alpha_s} f(x)\,dx.$$

Die Perioden bilden beliebige Grössen $A_s-A_t$.

Die zweite ist negativ zu nehmen, da nach Umkreisen des ersten Windungspunktes $\alpha_s$ das Zeichen sich ändert. Alle Perioden aber entstehen durch Addition der folgenden:

$$A_1-A_2,\ A_2-A_3,\ A_3-A_4\ \ldots\ A_{2n-1}-A_{2n}.$$

Die Summe aller Elementarintegrale in der Ordnung, wie sie umkreist werden, also:

$$A_1-A_2+A_3-A_4+\ \ldots\ +A_{2n},$$

verschwindet wegen der Eigenschaft des Unendlichkeitspunktes. Es ist also eine Periode die Summe der andern, und die Anzahl derselben gleich $2n-2$.

Für $n=1$ hat man:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)}},$$

was eine Periode $A_1-A_2$ gibt.

Der Unendlichkeitspunkt (der kein Windungspunkt ist) gibt das Elementarintegral $2\pi i$. Also:

$$A_1-A_2=2\pi i$$

ist die Periode von:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)}}.$$

4) Sei:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{(\alpha_1-x)(\alpha_2-x)\ \ldots\ (\alpha_{2n-1}-x)}},$$

so ist das den Unendlichkeitspunkt, der hier ein Windungspunkt ist, betreffende Integral zu berücksichtigen. Die Elementarintegrale sind also:

$$A_s=2\int_0^{\alpha_s} f(x)\,dx,$$

wo $s$ einen der Werthe 1 bis $2n-1$ hat, und:

$$A_{2n}=2\int_0^{\infty} f(x)\,dx,$$

$$A_1-A_2+A_3-\ \ldots\ -A_{2n}=0.$$

Von den Perioden:

$$A_1-A_2,\ \ A_2-A_3\ \ldots,\ A_{2n-1}-A_{2n}$$

wird also ebenfalls eine auf die übrigen reducirt. Die Anzahl ist auch hier $2n-2$, jedoch muss $n$ grösser als 1 sein. Für $n=1$ findet keine Periode statt, da das auf den Unendlichkeitspunkt erstreckte Elementarintegral unendlich gross ist.

14) Entwickelung der Functionen in Reihen nach ganzen positiven Potenzen.

Betrachten wir das Integral $\int \frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\alpha - z}$ zunächst ausgedehnt auf eine einfache geschlossene Curve, die keinen critischen Punkt der Function $f(\alpha)$ einschliesst. Das Argument wird dann nur für $\alpha - z$ discontinuirlich, also in dem von der Curve eingeschlossenen Raum dann niemals, wenn Punkt $z$ sich ausserhalb desselben befindet. Dann ist also:

$$\int \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}\, d\alpha = 0.$$

Befindet sich dagegen $z$ innerhalb dieses Raumes, so kann man diesen Punkt mit einer beliebig kleinen geschlossenen Curve umgeben. Zwischen dieser und der gegebenen ist dann kein critischer Punkt mehr vorhanden. Bezeichnet man also durch $\int^{(z)}$ das auf die $z$ umgebende Curve bezogene Integral, so ist:

$$\int \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}\, d\alpha = \int^{(z)} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}\, d\alpha.$$

Befindet sich endlich $z$ auf der ersten Curve selbst, so ist offenbar $\int \frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\alpha - z}$ discontinuirlich, da der Nenner 0 wird.

Wir haben hier ein Beispiel einer längs einer Linie discontinuirlichen Function. Sei jetzt die innere Curve ein Kreis mit abnehmendem Radius $\varrho$, so ist das Integral in den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ zu nehmen, wenn man:

$$\alpha = z + \varrho e^{\varphi i},$$

folglich:

$$d\alpha = \varrho i e^{\varphi i} d\varphi$$

setzt, also:

$$\int^{(z)} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}\, d\alpha = i \int_0^{2\pi} f(z + \varrho e^{\varphi i})\, d\varphi.$$

Sei ferner:

$$f(z + \varrho e^{\varphi i}) = f(z) + F(\varphi),$$

also $F(\varphi)$ eine Grösse, die sich mit abnehmendem $\varrho$ der Null nähert. Sei ferner $L$ der grösste Werth des Moduls von $F(\varphi)$ für gegebenes $\varrho$, also:

$$\operatorname{mod} \int_0^{2\pi} F(\varphi)\, d\varphi < L \operatorname{mod} \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

d. h.:

$$\operatorname{mod} \int_0^{2\pi} F(\varphi)\, d\varphi < 2\pi\, L.$$

Da $L$ mit abnehmendem $\varrho$ verschwindet, so findet dies auch mit:

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi)\, d\varphi$$

statt. Aber wenn man für:

$$f(z + \varrho e^{\varphi i})$$

seinen Werth setzt:

$$\int^{(z)} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}\, d\alpha = i \int_0^{2\pi} f(z)\, d\varphi + i \int_0^{2\pi} F(\varphi)\, d\varphi,$$

d. h.:

1) $$\int^{(z)} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}\, d\alpha = 2\pi i f(z).$$

Es ist also:

2) $$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\alpha - z} = f(z),$$ oder $= 0$,

je nachdem $z$ innerhalb der einfachen Curve liegt, auf welche die Integration sich erstreckt, oder ausserhalb derselben.

Im erstern Falle können wir nun für diejenige geschlossene Curve, auf welcher das Integral genommen ist, ebenfalls einen Kreis setzen, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten liegt, und dessen Radius $r$ kleiner ist, als der Modul der kleinsten Grösse $u$, für welche $f(u)$ aufhört, eindeutig und continuirlich zu sein. Es wird dann unser Kreis keine Mehrdeutigkeit oder Discontinuität von $f(\alpha)$ umschliessen. Da $z$ innerhalb dieses Kreises liegt, so muss der Modul von $z$ kleiner als der von $\alpha$ sein.

Man hat nun:

$$\alpha = r e^{\varphi i}, \quad d\alpha = r i e^{\varphi i}, \quad d\varphi = i \alpha\, d\varphi.$$

Die Integrationsgrenzen sind:

$$\varphi = 0, \quad \varphi = 2\pi,$$

also:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha) \cdot \alpha\, d\varphi}{\alpha - z},$$

wo:

$$\alpha = r e^{\varphi i}$$

zu setzen ist. Da aber der Modul von $\alpha$ grösser als der von $z$ ist, so hat man:

$$\frac{1}{\alpha - z} = \frac{1}{\alpha\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)},$$

wo $\frac{z}{\alpha}$ einen echten Bruch zum Modul hat, und da man in diesem Falle setzen kann:

$$\frac{1}{1-\frac{z}{\alpha}} = 1 + \frac{z}{\alpha} + \frac{z^2}{\alpha^2} + \dots,$$

wo rechts eine convergente Reihe steht, so ist:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\alpha)\,[1+\frac{z}{\alpha}+\frac{z^2}{\alpha^2}+\dots]\,d\varphi,$$

oder:

3) $$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \dots,$$

eine convergente Entwickelung:

$$A_s = \int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)}{\alpha^s}\,d\varphi. \qquad \alpha = r e^{\varphi i}.$$

I. „Es lässt sich also $f(z)$ in eine convergente Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $z$ entwickeln, so lange der Modul von $f(z)$ kleiner als der kleinste Modul ist, für den diese Function aufhört, eindeutig und continuirlich zu sein, d. h. für den ein Discontinuitäts- oder Windungspunkt eintritt.“

Immer nämlich lässt sich dann ein Modul $r$ finden, der grösser als der von $z$ ist, und die gegebenen Bedingungen erfüllt.

Ist aber der Modul von $z$ grösser als der kleinste Modul $R$, für den ein critischer Punkt eintritt, so muss, da $r$ diese Grenze nicht übersteigen kann, $\frac{z}{\alpha}$ einen Modul haben, der grösser als 1 ist. Die Reihe für $\frac{1}{1-\frac{z}{\alpha}}$ wird also divergiren, und ebenso Reihe 3). Es ist also die in I. gegebene Bedingung für die Entwickelung der Functionen nothwendig und ausreichend. Es kann nur dann ein Zweifel entstehen, wenn $z$ einen Modul hat, der gleich dem kleinsten Discontinuitätsmodul $R$ ist, und dieser Fall ist dann besonders zu untersuchen. Uebrigens erleidet der Werth von $A_s$ keine Veränderung, wenn man dem Modul $R$ von $\alpha$ einen beliebigen, zwischen 0 und $R$ liegenden Werth (die Grenzen ausgeschlossen) gibt. Denn in diesen Grenzen ist $\frac{f(\alpha)}{\alpha^{s+1}}$ auch eindeutig und continuirlich. Man hat aber:

$$\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)}{\alpha^s}\,d\varphi = \frac{1}{i}\int\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\alpha^{s+1}},$$

und wenn man sich also dies Integral über jeden von zwei concentrischen Kreisperipherien ausgedehnt denkt, deren Radien $r$ und $r'$ zwischen 0 und $R$ liegen, so werden beide Integrale nach dem im vorigen Abschnitte angeführten Satze denselben Werth haben.

Es ist also in der Reihe 3) nicht nöthig, dass $r$ grösser als der Modul von $z$ sei.

Dieser merkwürdige allgemeine Satz über die Entwickelung der Functionen in Potenzreiben ist von Cauchy.

Uebrigens lässt sich aus der Grundformel:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\alpha - z},$$

worin sich das Integral über irgend eine einfache geschlossene Curve erstreckt, noch ein allgemeiner Schluss machen. Da nämlich $f(z)$ für alle Punkte innerhalb derselben continuirlich ist, kann man setzen:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{d\left(\frac{1}{\alpha - z}\right)}{dz}\,f(\alpha)\,d\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{(\alpha - z)^2},$$

und das Integral rechts bleibt eindeutig und continuirlich, so lange $z$ nicht in die Begrenzung fällt. D. h.:

II. „Ist innerhalb irgend eines einfach begrenzten Gebietes $f(z)$ eindeutig

und continuirlich, so wird dies auch mit $f'(z)$ und mithin mit allen Differenzialquotienten von $f(z)$ der Fall sein."

Das Letztere folgt nämlich, wenn man den Differenzialquotienten $f''(z)$ der endlichen und continuirlichen Function $f'(z)$ betrachtet u. s. w. Hieraus ergibt sich auch:

III. „In demselben Kreise, wo $f(z)$ sich nach ganzen positiven Potenzen von $z$ entwickeln lässt, ist dies auch mit allen Differenzialquotienten von $f(z)$ der Fall."

Fährt man zu differenziiren fort, so erhält man:

4) $$f^{(s)}(z)=\frac{1\cdot2\ldots s}{2\pi i}\int\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{(\alpha-z)^{s+1}},$$

oder wenn man die Integration über denselben Kreis wie bei $f(z)$ erstreckt:

$$f^{(s)}(z)=\frac{1\cdot2\ldots s}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\alpha f(\alpha)\,d\varphi}{(\alpha-z)^{s+1}},$$

also:

$$f^{(s)}(0)=\frac{1\cdot2\ldots s}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)\,d\varphi}{\alpha^s}=A_s\cdot1\cdot2\ldots s.$$

(Vergleiche Formel 3.) Somit kann man auch setzen:

5) $$f(z)=f(0)+f'(0)z+\frac{f''(0)}{1\cdot2}z^2+\frac{f'''(0)}{1\cdot2\cdot3}z^3+\ldots,$$

die bekannte Maclaurin'sche Reihe.

Entwickelt man $f'(z)$ aus Formel 4), so kommt:

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\alpha f(\alpha)\,d\varphi}{(\alpha-z)^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\alpha}=\left(1+\frac{2\alpha}{z}+\frac{3\alpha}{z^2}+\ldots\right)$$
$$=A_1+2A_2z+3A_3z^2+\ldots$$

$sA_sz^{s-1}$ ist aber der Differenzialquotient von $A_sz^s$.

„Die Reihe für $f'(z)$ besteht also aus den Differenzialquotienten der von $f(z)$." Dies ist nicht selbstverständlich, da die Glieder ins Unendliche gehen."

Setzen wir noch in die Formeln 3) und 5) für $f(z)$: $f(u+x)$, so erhalten wir, indem wir $f(u+x)$ als Function von $x$ betrachten:

$$f(u+x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots,$$

oder wenn man wieder $u+x=z$ setzt:

6) $$f(z)=A_0+A_1(z-u)+A_2(z-u)^2+\ldots,$$

wo man hat:

$$A_s=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(u+\alpha)}{\alpha^s}\,d\varphi.\qquad\alpha=re^{\varphi i}.$$

oder:

$$A_s=\frac{1}{1\cdot2\ldots s}f^{(s)}(u),$$

woraus sich dann ergibt:

$$f^{(s)}(u)=\frac{1\cdot2\ldots s}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(u+\alpha)}{\alpha^s}\,d\varphi.$$

Diese Entwickelungen sind gültig, so lange der Modul von $x$ kleiner als derjenige $R$ ist, für welchen die Function $f(u+x)$ discontinuirlich oder mehrdeutig wird. Da nun dem Werth von:

$$z=u+re^{\varphi i}$$

für gegebenes $r$ eine Kreisperipherie entspricht, deren Radius $r$ und dessen Mittelpunkt $u$ ist, so hat man den Satz:

IV. „Wenn $u$ eine beliebige Grösse ist, und $u$ kein Discontinuitäts- oder Windungspunkt, so lässt sich $f(z)$ nach ganzen positiven Potenzen von $z-u$ ent-

wickeln innerhalb eines Kreises, der $u$ zum Mittelpunkt hat, und dessen Peripherie durch denjenigen Discontinuitäts- oder Windungspunkt geht, welcher $u$ zunächst liegt."

Da nun, sobald $f(z)$ kein critischer Punkt ist, sich immer Punkte $u$ finden lassen, deren Entfernung von $z$ kleiner ist als die Entfernung von $u$ und dem ihm nächsten critischen Punkte, so folgt daraus:

V. „Jede Function $f(z)$ lässt sich für alle Punkte mit Ausnahme der critischen in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $z-u$ entwickeln, wo $u$ eine Constante ist, die in gewissen Grenzen willkürlich ist. Diese Grenzen aber ändern sich, wenn die Variable gewisse Grenzen überschreitet."

Setzen wir auch in die Formel 1) $f(u+x)$ für $f(z)$, so erhalten wir:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(u+\alpha)\,d\alpha}{\alpha-z-u}.$$

Durch Differenziiren dieser Form erhält man:

$$f'(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(u+\alpha)\,d\alpha}{(\alpha-z-u)^2},$$

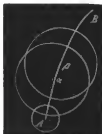
und diese zeigt, dass der in II. bewiesene Satz auch auf solche Flächenräume gilt, die nicht, wie dies die ursprüngliche Formel verlangt, den Anfangspunkt der Coordinaten, sondern einen beliebigen Punkt $u$, aber keinen der critischen Punkte einschliessen.

Aus diesen Betrachtungen aber leiten wir noch einen wichtigen Satz ab:

VI. „Eine Function ist gegeben für alle Werthe, wo sie eindeutig und continuirlich ist, wenn sie auf einer noch so kleinen Strecke, also auf einer endlichen Linie gegeben ist."

Denn sei auf einer von $A$ (Fig. 76) ausgehenden kleinen Strecke die Function $F(z)$ gegeben, so ist:

Fig. 76.




$$F(A+u)=F(A)+u\frac{F'(A)}{1\cdot 2}+\ \ldots$$

Die Coefficienten $F'(A)$, $F''(A)$ ... sind bekannt, da:

$$F'(A)=\lim\frac{F(A+\nu)-F(A)}{\nu},$$

$$F''(A)=\lim\frac{F'(A+\nu)-F'(A)}{\nu}$$

$$\begin{matrix}\cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot\end{matrix}$$

ist, und diese Ausdrücke gefunden werden können, wenn man $\nu$ auf der Strecke nimmt, wo die Function gegeben ist und die obigen Grenzwerthe aufsucht. Diese Reihe aber gilt für jeden Werth $z=A+u$ innerhalb eines Kreises, der keinen critischen Punkt einschliesst und $A$ zum Mittelpunkt hat. Sei nun der Werth von $F(z)$ für den beliebigen, nicht critischen Punkt $z=B$ zu ermitteln, der nicht von einer geschlossenen Curve umgeben ist, auf welcher $F(z)$ discontinuirlich ist.

Man verbindet $A$ mit $B$ durch irgend eine Linie $AB$, die keinen critischen Punkt enthält (wie man dies ja immer kann), von einem Punkt derselben, welcher noch innerhalb des um $A$ gezogenen Kreises liegt. Schlagen wir einen zweiten Kreis von gleicher Eigenschaft, von einem Punkt dieses letztern einen dritten u. s. w., so lassen sich diese Mittelpunkte immer nahe genug den Peripherien des vorhergehenden Kreises nehmen, dass $B$ innerhalb des letzten dieser Kreise liegt. Sei $\alpha$ einer dieser Mittelpunkte, so gilt für jeden Punkt dieses Kreises die Entwickelung:

$$F(z)=F(\alpha)+F'(\alpha)(z-\alpha)$$
$$+\frac{F''(\alpha)}{1\cdot 2}(z-\alpha)^2+\ldots,$$

also auch für den Mittelpunkt des nächsten Kreises $\beta$. Durch Differenziiren des Werthes:

$$F(\beta)=F(\alpha)+F'(\alpha)(\beta-\alpha)$$
$$\frac{F''(\alpha)}{1\cdot 2}(\beta-\alpha)^2+\ \ldots$$

lassen sich dann $F'(\beta)$, $F''(\beta)$ ... bestimmen, und die Entwickelung für den folgenden Kreis:

$$F(z)=F(\beta)+F'(\beta)(z-\beta)+\ \ldots$$

ist also ebenfalls gegeben. Da nun $F(A)$, $F'(A)$ ... für den ersten Kreis bekannt sind, so ergeben sich diese Reihen für alle Kreise, und durch successive

Entwickelung in Reihen kommt man so auf völlig eindeutige Art bis zu der, welche $F(B)$ gibt.

Aendert man den Weg $AB$, ohne die Endpunkte zu ändern, so kann die Entwickelung, mit der man nach $B$ kommt, offenbar eine andere werden, und dies muss der Fall sein, wenn beide Wege einen Windungspunkt zwischen sich haben. Immer aber ist durch die Strecke, welche von $A$ ausgeht, und den Weg $AB$ die Function in $B$ völlig bestimmt.

Wir knüpfen hieran noch einige Sätze von Functionen.

Zunächst erinnern wir an den Abschnitt 11) bewiesenen Satz.

VII. „Wenn in irgend einem Punkte $\alpha$ die Function discontinuirlich ist, so findet dies mit allen Differenzialquotienten statt."

Ferner:

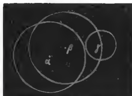
VIII. „Ist der Differenzialquotient in $\alpha$ discontinuirlich, so findet entweder Gleiches mit der Function selbst statt, oder sie ist mehrdeutig."

Denn sonst muss nach Satz II. um $\alpha$ herum der Differenzialquotient continuirlich sein.

IX. „In keinem noch so kleinen aber endlichen continuirlichen Raume, sei es Flächenstück oder Linie, kann eine Function constant sein, wenn sie nicht eben sich allgemein auf eine Constante reducirt."

Denn fände dies z. B. in $\alpha$ statt, so wären alle Differenzialquotienten (Fig. 77)

Fig. 77.




von $f(z)$ für $z=\alpha$ der Null gleich, also in einem Kreise um $\alpha$ die Function constant. Zieht man nun aus $\beta$ innerhalb dieses Gebietes einen zweiten Kreis, für den Entwickelung nach Potenzen für $(z-\beta)$ stattfindet, so ist auch $f(\beta)$ mit allen Differenzialquotienten der Null gleich, also auch in $\gamma$ innerhalb dieses Kreises die Function constant, so gelangt man, wenn die obige Ausnahme nicht stattfindet, mit constantem Werthe von $f(z)$ nach einem beliebigen Punkte, und dies findet also für den ganzen oder den Raum statt, für welchen die Function definirt ist.

Diese Schlüsse finden offenbar dann immer noch Anwendung, wenn für Punkt $\alpha$ alle Differenzialquotienten verschwinden. Also:

X. „Für irgend einen Punkt $\alpha$, wo die Function definirt ist, können nicht alle Differenzialquotienten verschwinden."

XI. „Eine Function kann in keinem endlichen Gebiete unendlich oft Null werden, wenn sie daselbst eindentig, continuirlich und nicht der Null gleich ist."

Denn sonst müssten die Nullpunkte schliesslich so zusammenzurücken, dass deren unendlich viel in der Nähe eines Punktes $\alpha$ lägen, und es wären dann, wenn man von einem $\beta$ zum nächsten $\beta+h$ ginge:

$$f(\beta)=0, \quad f(\beta+h)=0,$$

also da $h$ ins Unendliche abnimmt, in der Nähe von $h$, auch:

$$\lim \frac{f(\beta+h)-f(\beta)}{h}=f'(\beta)=0,$$

und Gleiches fände mit allen Differenzialquotienten statt.

XII. „Es kann auch eine Function innerhalb eines endlichen Gebiets mit der in IX. enthaltenen Ausnahme nicht unendlich sein."

Denn sei:

$$f(z)=\infty,$$

so ist:

$$\frac{1}{f(z)}=0,$$

also constant.

XIII. „Jede eindeutige Function nimmt wenigstens für einen Werth der Variable einen gegebenen Werth $A$ an."

Wir beweisen diesen Satz für $A=\infty$ zunächst. Sei $M$ der grösste Werth des Moduls von $f(z)$. Nun war:

$$f^{(n)}(0)=\frac{1\cdot 2\ldots n}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(r\,e^{\varphi i})\,e^{-n\varphi i}\,d\varphi.$$

Ersetzt man das Argument durch $M$, so kommt:

$$\int_0^{2\pi} M\,d\varphi=2\pi M,$$

also:

$$\operatorname{mod} f^{(n)}(0)<1\cdot 2\ldots n\frac{M}{r^n}.$$

Wird nun $f(z)$ nie unendlich, so kann man $r$ unendlich gross nehmen, und es ist:

$$f^{(n)}(0)=0,$$

was auch $n$ sei, was nach X unmöglich ist.

Beweisen wir den Satz jetzt für beliebiges $A$. Man nehme:

$$\varphi(z)=\frac{1}{f(z)-A},$$

so wird dieser Ausdruck, wie eben gezeigt, für irgend einen Punkt $\alpha$ unendlich, also:

$$f(\alpha)-A=0,\quad f(\alpha)=A.$$

Noch erwähnen wir der Ausdehnung des Taylor'schen Satzes für mehrere Variablen.

Sei zu entwickeln:

$$f(x+h,\ y+k).$$

Denkt man $y+k$ constant, so ist:

$$f(x+h,y+k)=f(x,y+k)+h\frac{\partial f(x,y+k)}{\partial x}+\frac{h^2}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 f(x,y+k)}{\partial x^2}+\ldots,$$

und wenn man jedes Glied nach Potenzen von $k$ entwickelt:

$$f(x,\ y+k)=f(x,\ y)+k\frac{\partial f}{\partial x}+\ \ldots,$$

$$\frac{\partial f(x,\ y+k)}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\ \ldots,$$

$$\frac{\partial^2 f(x,\ y+k)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+k\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\ldots,$$

also:

$$f(x+h,\ y+k)=f(x+y)+h\frac{\partial f}{\partial x}+k\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{h^2}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{2hk}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{k^2}{1\cdot 2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\ \ldots$$

Diese Entwickelung gilt offenbar so lange, als die Moduln von $h$ und $k$ kleiner sind, als der kleinste, für den:

$$f(x+h,\ y+k)$$

eindeutig und continuirlich bleibt.

Bei Functionen von mehr als zwei Variablen sind diese Schlüsse fortzusetzen. Man überzeugt sich dann sehr leicht von der symbolischen Formel:

$$f(x_1+h_1,\ x_2+h_2\ \ldots\ x_n+h_n)=e^{h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+h_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\ \ldots\ +h_n\frac{\partial}{\partial x_n}}\cdot f(x_1,\ x_2\ \ldots\ x_n),$$

wo man den Ausdruck im Exponenten zunächst sich als Zahl $\alpha$ denkt, und:

$$e^{\alpha}=1+\alpha+\frac{\alpha^2}{1\cdot 2}+\ \ldots$$

entwickelt, wobei der polynomische Satz in Anwendung kommt. Man hat dann Glieder von der Form:

$$h_1^{\,s_1}h_2^{\,s_2}\ldots\frac{\partial^{s_1+s_2+\ldots}f(x_1,x_2..x_n)}{\partial x_1^{\,s_1}\partial x_2^{\,s_2}\ \ldots}.$$

Diese Glieder sind schliesslich in ihrer Bedeutung als Differenzialquotienten aufzufassen.

15) Betrachtungen über die Functionen reeller Variablen.

Wir wollen jetzt voraussetzen, dass sowohl die Variable $x$ als auch die Function $f(x)$ reell sei. Der Zuwachs $\nu$ ist dann immer als reell zu betrachten. Sei $\nu$ positiv. Soll also $f(x+\nu)$ grösser als $f(x)$ sein, so muss man haben:

$$\frac{f(x+\nu)-f(x)}{\nu}>0.$$

Soll das Gegentheil stattfinden, so ist:

$$\frac{f(x+\nu)-f(x)}{\nu}<0.$$

Da man aber den Ausdruck links mit $f'(x)$ vertauschen kann, so hat man den Satz:

„So lange $f'(x)$ positiv ist, wird die Function $f(x)$ mit wachsendem $x$ ebenfalls wachsen, so lange $f'(x)$ negativ dagegen abnehmen. Diese Bedingung ist nothwendig und ausreichend."

Wenn $f(x)$ vom Zunehmen zum Abnehmen übergeht, sagt man, die Function habe ein Maximum, geht sie vom Abnehmen zum Zunehmen über, ein Minimum.

Für den erstern Fall ist nothwendig und ausreichend, dass $f'(x)$ vom Positiven zum Negativen, für den letztern, dass es vom Negativen zum Positiven übergehe.

Hierbei kann $f'(x)$ discontinuirlich werden, ein Fall, der besonders untersucht werden muss.

Bleibt $f'(x)$ continuirlich, so muss in beiden Fällen:

$$f'(x)=0$$

werden. — Im ersten Fall (wo $f'(x)$ vom Positiven zum Negativen übergeht) ist hierbei $f'(x)$ im Abnehmen, also $f''(x)$ negativ, im letztern $f'(x)$ im Zunehmen, also $f''(x)$ positiv.

Es kann aber $f'(x)=0$ werden, ohne

dass ein Maximum oder Minimum stattfindet, wenn es nämlich nicht sein Zeichen wechselt. Wenn aber $f'(x)$ z. B. positiv, dann Null wird und positiv bleibt, dann hat $f'(x)$ selbst ein Minimum, und wenn es erst negativ ist, ein Maximum, in beiden Fällen also ist $f''(x)=0$, und $f'''(x)$ ist im ersten Falle positiv, im zweiten negativ.

$f''(x)$ aber kann nach dem eben Gesagten gleich Null sein, ohne dass $f'(x)$ ein Maximum oder Minimum hat. Dann ändert es sein Zeichen, und $f(x)$ hat ein Maximum oder Minimum. In diesem Falle ist $f'''(x)=0$ u. s. w. Das Gesagte fasst sich in dem Satze zusammen:

„Hat $f(x)$ ein Maximum oder Minimum, so muss eine ungrade Anzahl der auf einander folgenden Differenzialquotienten verschwinden, und der erste erscheinende im ersten Falle negativ, im letztern positiv sein."

Ausgenommen ist der Fall, wo $f'(x)$ oder der erste erscheinende Differenzialquotiant discontinuirlich ist. Dieser Fall ist besonders zu untersuchen. Es muss dann:

$$f'(x+\nu)<f'(x)$$

im ersten, und:

$$f'(x+\nu)>f'(x-\nu)$$

im zweiten Falle sein, wo $\nu$ unbestimmt klein ist.

In diesen Betrachtungen ist die Theorie der Maxima und Minima der Function einer Variablen enthalten.

Beispiele gibt der Artikel: Maxima und Minima.

Wir entwickeln aus dieser Theorie noch einen wichtigen Satz.

Seien die Functionen $F$ und $\Phi$ sowie ihre Differenzialquotienten continuirlich zwischen den reellen Grenzen $a$ und $a+h$, ausserdem aber habe in diesen Grenzen $\Phi$ kein Maximum oder Minimum, werde also $\Phi'$ hier nicht gleich Null, dann hat in diesen Grenzen offenbar der Ausdruck $\frac{F'(x)}{\Phi'(x)}$ einen grössten und einen kleinsten Werth, die wir bezüglich mit $G$ und $K$ bezeichnen. Es ist also dann:

$$\frac{F'(x)}{\Phi'(x)}<G,\quad \frac{F'(x)}{\Phi'(x)}>K,$$

oder:

$$F'(x)-G\,\Phi'(x)<0,$$
$$F'(x)-K\Phi'(x)>0,$$

wenn $\Phi'(x)$ positiv ist. Ist es negativ, so ist der erste Ausdruck grösser, der zweite kleiner als Null. Beide Ausdrücke sind die Differenzialquotienten bezüglich von:

$$F(x)-G\,\Phi(x),\quad F(x)-K\Phi(x),$$

von denen also der erstere mit wachsendem $x$ abnehmen, der letztere zunehmen wird, wenn $\Phi(x)$ positiv ist. Es wird also sein:

$$F(a+h)-G\,\Phi(a+h)<F(a)-G\,\Phi(a),$$

d. h.:

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{\Phi(a+h)-\Phi(a)}<G,$$

oder grösser als $G$, wenn $\Phi'(x)$ negativ ist. Ebenso ergibt sich:

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{\Phi(a+h)-\Phi(a)}>K.$$

Dasselbe findet statt, wenn $\Phi'(x)$ negativ, da in diesem Falle:

$$\Phi(a+h)<\Phi(a),$$

also der linke Nenner negativ ist.

Da nun diese Werthe bezüglich der grösste und kleinste Werth von $\frac{F'(x)}{\Phi'(x)}$, einer continuirlichen Function von $x$ waren, so muss der Ausdruck links einem zwischen den Grenzen $a$ und $a+h$ liegenden Werthe von $\frac{F'(x)}{\Phi'(x)}$ gleich sein.

Ist $\vartheta$ ein echter positiver Bruch, so nimmt jeder dieser Werthe von $x$ den Ausdruck $a+\vartheta h$ an, und man hat also den merkwürdigen Satz:

$$1)\quad \frac{F(a+h)-F(a)}{\Phi(a+h)-\Phi(a)}=\frac{F'(a+\vartheta h)}{\Phi'(a+\vartheta h)},$$

wenn nur $\Phi'(x)$ in den Grenzen $a$ und $a+h$ nicht verschwindet.

Aus diesem Satz leiten wir den Restwerth des Taylor'schen Satzes für reelle Functionen ab.

Es kommt nämlich oft vor, dass man den Grad der Convergenz der Potenzreihen wissen muss, also wie gross der vernachlässigte Theil, der Rest ist, wenn man $n$ Glieder des Taylorschen Satzes nimmt. Diesem Reste soll hier ein allgemeiner Ausdruck gegeben werden.

Zu dem Ende setzen wir in Gleichung 1):

$$F(x)=f(a+h)-f(x)-(a+h-x)f'(x)$$
$$-\frac{(a+h-x)^2}{1\cdot 2}f''(x)-\ \ldots$$
$$-\frac{(a+h-x)^n}{1\cdot 2\ldots n}f^{(n)}(x),$$

$$\Phi(x) = \varphi(a+h) - \varphi(x) - (a+h-x)\varphi'(x) - \frac{(a+h-x)^2}{1\cdot 2}\varphi''(x) - \dots$$

$$- \frac{(a+h-x)^q}{1\cdot 2\dots q}\varphi^{(q)}(x).$$

Wir nehmen hierbei an, dass die Functionen $f$, $\varphi$, $f'$ und $\varphi'$ continuirlich seien in den Grenzen $a$ und $a+h$, und dass $\varphi^{(q+1)}$ in diesen Grenzen nicht verschwinde. Da man nun offenbar hat:

$$F(a+h) = \Phi(a+h) = 0,$$

so gibt Satz 1):

$$\frac{F(a)}{\Phi(a)} = \frac{F'(a+\vartheta h)}{\Phi'(a+\vartheta h)}.$$

Es ist aber:

$$F'(x) = -\frac{(a+h-x)^n}{1\cdot 2\dots n} f^{(n+1)}(x),$$

$$\Phi'(x) = -\frac{(a+h-x)^q}{1\cdot 2\dots q}\varphi^{(q+1)}(x).$$

Ferner:

$$F(a) = f(a+h) - f(a) - hf'(a) - \frac{h^2}{1\cdot 2}f''(a) - \dots - \frac{h^n}{1\cdot 2\dots n}f^{(n)}(a),$$

also:

2) $$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2 f''(a)}{1\cdot 2} + \dots + \frac{h^n}{1\cdot 2\dots n}\frac{f^{(n)}(a)}{1\cdot 2\dots n} + F(a),$$

und da die ersten $n+1$ Glieder mit der Taylor'schen Reihe übereinstimmen, so ist $F(a)$ der verlangte Rest. Da man aber hat:

$$F(a) = \Phi(a)\frac{F'(a+\vartheta h)}{\Phi'(a+\vartheta h)},$$

so ist, wenn man die entsprechenden Werthe einsetzt:

3) $$F(a) = \Big(\varphi(a+h) - \varphi(a) - h\varphi'(a) - \frac{h^2}{1\cdot 2}\varphi''(a) - \dots$$

$$- \frac{h^q}{1\cdot 2\dots q}\varphi^{(q)}(a)\Big)(h-\vartheta h)^{n-q}\,\frac{1\cdot 2\dots q}{1\cdot 2\dots n}\,\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{\varphi^{(q+1)}(a+\vartheta h)}.$$

$\varphi$ ist eine beliebige Function, $q$ eine beliebige ganze Zahl, nur darf $\varphi^{(q+1)}$ in den Grenzen $a$ und $a+\vartheta h$ nicht verschwinden. Durch Specialisiren kann man dem Reste leicht einfachere Ausdrücke geben.

A) Sei $\varphi(x) = (x-a)^{p+1}$, dann ist:

$$\varphi^{(q+1)}(x) = (p+1)p(p-1)\dots(p-q+1)(x-a)^{p-q},$$

und:

4) $$F(a) = \frac{h^{n+1}(1-\vartheta)^{n-q}\,1\cdot 2\dots q\, f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{\vartheta^{p-q}\,1\cdot 2\dots n\,(p+1)p(p-1)\dots(p-q+1)}.$$

Wird hierin noch $p=q$ gesetzt, so ergibt sich:

5) $$F(a) = \frac{h^{n+1}(1-\vartheta)^{n-q}}{1\cdot 2\dots n\,(q+1)} f^{(n+1)}(a+\vartheta h).$$

B) Setzt man dagegen in der allgemeinen Formel $q=0$, so ergibt sich:

6) $$F(a)=[\varphi(a+h)-\varphi(a)]\,\frac{(h-\vartheta h)^n}{1\cdot 2\ldots n}\,\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{\varphi'(a+\vartheta h)},$$

also wenn wieder $\varphi(x)=(x-a)^{p+1}$ ist:

7) $$F(a)=\frac{h^{n+1}(1-\vartheta)^n f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{1\cdot 2\ldots n\,(p+1)\,\vartheta^p},$$

oder wenn $p=0$ ist:

8) $$F(a)=\frac{h^{n+1}(1-\vartheta)^n f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{1\cdot 2\ldots n},$$

ein Ausdruck, den Cauchy zuerst gegeben hat.

Sei ferner $\varphi(x)=(a+h-x)^{p+1}$, so gibt Formel 6):

9) $$F(a)=\frac{h^{1+n}(1-\vartheta)^{n-p}}{(p+1)\,1\cdot 2\ldots n}\,f^{(n+1)}(a+\vartheta h),$$

woraus, wenn $p=n$ ist:

10) $$F(a)=\frac{h^{1+n}}{1\cdot 2\ldots(n+1)}\,f^{(n+1)}(a+\vartheta h)$$

folgt, eine Formel, die von Lagrange herrührt.

Nehmen wir an, dass $f^{(n+1)}(x)$ in den angegebenen Grenzen nicht verschwindet, so kann auch in 6) $\varphi(x)=f^{(n)}(x)$ genommen werden, also:

11) $$F(a)=[f^{(n)}(a+h)-f^{(n)}(a)]\,\frac{h^n\,(1-\vartheta)^n}{1\cdot 2\ldots n}.$$

Diese Darstellung ist von Roche.

Besonders zur Anwendung eignen sich die Formeln 8) und 10) für den **Rest.** Diese Restbestimmung hat ausser dem Zwecke, den Grad der Annäherung zu finden, noch den, dass die Reihe, selbst wenn sie divergirt, mit Hinzunahme von $F(a)$ noch einen Sinn gibt, was z. B. für die halbconvergenten Reihen wichtig ist.

An die obige Theorie der Maxima und Minima der Functionen mit einer Variablen knüpfen wir noch die Theorie derer mit mehreren Variablen an.

Damit für ein gewisses System von Werthen $x_1, x_2 \ldots x_n$ der Ausdruck $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ im Wachsen oder Abnehmen, ein Maximum oder Minimum sei, muss für beliebiges reelles und unendlich kleines $dx_1, dx_2 \ldots dx_n$:

$$f(x_1+dx_1,\ x_2+dx_2\ \ldots\ x_n+dx_n)$$

im ersten Falle kleiner, im letztern grösser als $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ sein, also der Ausdruck:

$$f(x_1+dx_1,\ x_2+dx_2\ \ldots)-f(x_1,\ x_2\ \ldots)$$

bezüglich negativ und positiv für jeden Ausdruck $dx_1, dx_2 \ldots$ Dieser Ausdruck ist gleich:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}dx_1^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}dx_1\,dx_2+\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}dx_2^2\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}dx_1\,dx_2+\ldots\right),$$

wozu Glieder dritter Dimension kommen, die gegen die hingeschriebenen verschwinden. Auch der Ausdruck zweiter Ordnung ist unendlich klein gegen den erster Ordnung, und da $dx_1, dx_2 \ldots$ positiv und negativ sein können, so muss sein:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \ . \ . \ . \ = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0,$$

Continuität der Differenzialquotienten vorausgesetzt. Es muss also die homogene Function zweiter Ordnung:

$$\Sigma_{s,\,t}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_s^{\,2}}\,dx_s^{\,2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\,\partial x_t}\,dx_s\,dx_t\right),$$

wo $s$ und $t$ alle Werthe von 1 bis $n$ annehmen, im Falle des Maximum negativ, im Falle des Minimum positiv sein.

Es ist gezeigt in dem Artikel: Quadrat, wie man eine solche Function in eine Summe von $n$ Quadraten von der Form:

$$\alpha_1\,dx_1 + \alpha_2\,dx_2 + \ . \ . \ . \ + \alpha_n dx_n$$

verwandelt. Bei dieser Verwandlung war aber jedes Glied unter dem Quadratzeichen mit einer Quadratwurzel als Factor behaftet, welche von den Coefficienten $\frac{\partial^2 f}{\partial x_s^{\,2}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_s\,\partial x_t}$ abhängt. Rückt man diesen Factor aus dem Quadrat heraus, so ist jedes mit einem Coefficienten, der positiv oder negativ sein kann, multiplicirt. Es ist klar, dass im Falle des Maximum alle diese Coefficienten negativ, im Falle des Minimum positiv sein müssen. Haben sie ungleiche Zeichen, so findet keins von beiden statt. Diese Bedingungen sind nothwendig und ausreichend, den Fall ausgenommen, wo die Grössen $\frac{\partial^2 f}{\partial x_s^{\,2}}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_s\,\partial x_t}$ alle verschwinden. Dann wäre ganz wie oben auf die Glieder höherer Dimension zurückzugreifen.

Betrachten wir z. B. die Function zweier Variablen $f(x_1, x_2)$, so muss sein:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0.$$

Sei noch:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^{\,2}} = a, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\,\partial x_2} = b, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^{\,2}} = c,$$

so ist das Glied zweiter Dimension:

$$a dx_1^{\,2} + 2b\,dx_1\,dx_2 + c dx_2^{\,2} = a\,(dx_1 + \frac{b}{a}\,dx_2)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a}\right)dx_2^{\,2},$$

also im Falle des Maximum oder Minimum bezüglich:

$$a \lesseqgtr 0, \quad c - \frac{b^2}{a} \lesseqgtr 0.$$

Wegen der ersten Bedingung ist im Falle des Maximum $ca - b^2 > 0$, und ebenso im Falle des Minimum. In beiden Fällen muss also $ca > b^2$ sein, wobei die Bedingung $a \lesseqgtr 0$ beide Fälle von einander trennt.

16) Beispiele zum Taylor'schen Satz.

Wir gehen jetzt einige Beispiele für die Benutzung der Taylor'schen Reihe.

Der Ausdruck $(x+h)^n$ soll entwickelt werden für reelles und imaginäres $n$. Es lässt sich zeigen, dass diese Entwickelung gelten muss, so lange der Modul von $h$ kleiner als der von $x$ ist, mit Ausnahme des Falles, wo $n$ eine ganze positive Zahl, also die Reihe eine endliche ist, und für jedes $h$ gilt. — Denn sei zunächst $n$ ein echter oder unechter Bruch, also $n = \frac{\alpha}{\beta}$:

$$(x+h)^n = \sqrt[\beta]{(x+h)^\alpha}.$$

Setzen wir $h = -x + r\,e^{\varphi i}$ so wird:

$$f(x+h)^n = \sqrt[\beta]{r^\alpha e^{\alpha\,\varphi\,i}},$$

also für $q=0$ und für $q=2\pi$:

$$(x+h)^n = r^{\frac{\alpha}{\beta}} \quad \text{und} \quad (x+h)^n = r^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{\frac{2\alpha\pi i}{\beta}}.$$

Man kehrt also erst nach $\beta$maligem Umkreisen des Punktes $h=-x$ zu dem Anfangswerth:

$$r^{\frac{\alpha}{\beta}} e^{\frac{2\alpha\beta\pi i}{\beta}} = r^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

zurück, und es ist dies ein Windungspunkt. Somit hört die Richtigkeit der Entwickelung auf, wenn der Modul von $h$ den von $x$ erreicht. Gleiches gilt, wenn $n$ irrational ist, da dann $r^n$ und $r^n e^{2n\pi i}$ ebenfalls ungleiche Werthe haben. Auch kann ohne Aenderung dieser Betrachtungen $n$ negativ sein.

Sei jetzt aber $n$ eine beliebige complexe Zahl, so hat man:

$$(x+h)^n = e^{n \lg (x+h)},$$

aber für $h=-x$:

$$\lg (x+h) = \lg 0 = \infty,$$

wo dann also Discontinuität eintritt.

Für:

$$f(x) = x^n$$

ist nun:

$$f'(x) = n x^{n-1}, \quad f''(x) = n(n-1) x^{n-2} \quad . \; . \; . \quad f^{(s)}(x) = n(n-1) \; . \; . \; . \; (n-s+1) x^{n-s},$$

also wenn man:

$$n_s = \frac{n(n-1) \; . \; . \; . \; (n-s+1)}{1 \cdot 2 \; . \; . \; . \; s}$$

setzt:

$$(x+h)^n = x^n + n x^{n-1} h + n_2 x^{n-2} h^2 + \; . \; . \; . + n_s x^{n-s} h^s + n_{s+1} (x+\vartheta h)^{n-s-1} h^{s+1},$$

wo man statt des letzten Gliedes auch setzen kann:

$$(n+1) n_{s+1} (1-\vartheta)^s (x+\vartheta h)^{n-s-1} h^{s+1},$$

natürlich nur dann, wenn $x$ und $h$ reell sind, und dieses letzte Glied gibt die Grenze des Fehlers an. Setzt man z. B. $x=1$, wo man dann hat:

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} h^2 + \; . \; . \; . + n_s h^s + \; . \; . \; .$$

Der Modul von $h$ muss kleiner als 1 sein. Es wird, wenn man mit $n_s h^s$ abbricht, der Fehler zwischen:

$$n_{s+1} h^{n+1} \quad \text{und} \quad n_{s+1} (1+h)^{n-s-1} h^{s+1}$$

liegen; er wird also, wenn $n$ und $h$ positiv sind, nicht grösser als der letztere Ausdruck, wenn $h$ negativ, $n$ positiv ist, nicht grösser als der erstere sein können.

Sei ferner:

$$f(x+h) = \lg (x+h).$$

Die Reihenentwickelung gilt, so lange mod $h <$ mod $x$ ist, da für $h=-x$ Discontinuität eintritt.

Man hat:

$$\frac{d \lg x}{dx} = x^{-1}, \quad \frac{d^2 \lg x}{dx^2} = -x^{-2}, \quad \frac{d^3 \lg x}{dx^3} = +2x^{-3} \ldots$$

$$\frac{d^s \lg x}{dx^s} = (-1)^{s-1}\, 2\cdot 3 \ldots (s-1)\, x^{-s},$$

also:

$$\lg(x+h) = \lg x + \frac{h}{x} - \frac{h^2}{2\cdot x^2} + \frac{h^3}{3x^3} - \ldots + (-1)^{s+1} \frac{h^s}{sx^s} + (-1)^s \frac{h^{s+1}}{(x+1)(x+\vartheta h)^{s+1}}$$

und für $x=1$ erhäit man hieraus:

$$\lg(1+h) = h - \tfrac{1}{2} h^2 + \tfrac{1}{3} h^3 + \ldots,$$

für $x=0$ dagegen wird diese Entwickelnng immer illusorisch, da dann mod $h<0$ sein müsste. Setzen wir in der letzten Entwickelnug $h=1$, so hat man:

$$\lg(2) = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \ldots$$

Die Glieder nehmen ah nnd convergiren nach Null hin. Dies ist ein Zeichen dafür, dass die Reihe convergiren mnss (siehe den Artikel: Reihen).

Ist $h=-1$, so bat man:

$$\lg(0) = -(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \ldots).$$

Diese Reibe wird divergiren, da dieselhe znr Summe:

$$\lg 0 = -\infty$$

haben würde. Es ist dies ein Beispiel für den Fall, dass in der That anf der Grenze die Fnnction convergiren oder divergiren kann.

Eindeutige Fnnctionen, welche für endliches $x$ nie discontinuirlieh werden, können, was anch $x$ sei, immer nach ganzen positiven Potenzen von $x$ entwickelt werden. Diese Eigenschaft haben z. B. die Fnnctionen:

$$e^x, \quad \sin x, \quad \cos x,$$

nnd in der That werden die entsprechenden Reiben:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots$$

Von solchen Fnnctionen sagt man, dass sie „den Charakter ganser Fnnctionen hahen,“ oder nennt sie anch kurzweg „ganze Fnnctionen.“ Sie sind aber anch die einzigen, welche sich immer nach ganzen positiven Potensen von $x$ selbst entwickeln lassen.

17) **Entwickelnng der Fnnctionen nach ganzen positiven nnd negativen Potenzen der Variablen.**

Wir nntersuchen jetzt abermals das Integral:

$$\int \frac{f(\alpha)}{\alpha - z}\, d\alpha,$$

erstrecken dasselbe jedocb über zwei geschlossene Cnrven $A$ nnd $B$, von denen die eine von der andern ganz umgehen wird (Fig. 78) Wir setzen voraus, dass sich in dem Ringe zwischen $A$ nnd $B$ nnd anf diesen Cnrven selhst keine Discontinnität oder Mehrdentigkeit finde.

Fig. 78.




Die geschlosseno Cnrve setzt vorans, dass in dem ganzen von $B$ nmschlossenen Gebiete sich entweder kein Windungspnnkt finde, oder mehrere derart,

dass beim Umkreisen derselben auf Curve $A$ die Function in jedem Punkt mit ihrem alten Werthe wieder zurückkomme.

Da dann in dem von $A$ und $B$ begrenzten Gebiete der Ausdruck $\frac{f(\alpha)}{\alpha - z}$ nur für $\alpha = z$ eine Discontinuität annehmen kann, so ist, falls Punkt $z$ in diesem Ringe liegt, nach dem am Schlusse des 11ten Abschnittes angeführten Satze:

$$\int^{(A)} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha = \int^{(B)} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha + \int^{(z)} \frac{f(\alpha) d\alpha}{\alpha - z},$$

wenn $z$ im Ringe liegt, wo $\int^{(A)}$ und $\int^{(B)}$ die über die Curven $A$ und $B$ erstreckten Integrale, $\int^{(z)}$ dasjenige auf eine kleine geschlossene Curve erstreckte bedeutet, welches den Punkt $z$ umgibt. Befindet sich aber $z$ ausserhalb des Ringes, so ist:

$$\int^{(A)} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha = \int^{(B)} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha.$$

Man beweist nun wie in 12), dass:

$$\int^{(z)} \frac{f(\alpha) d\alpha}{\alpha - z} = 2\pi i f(z)$$

ist, also:

1) $$\frac{1}{2\pi i}\left[\int^{(A)} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha - \int^{(B)} \frac{f(\alpha) d\alpha}{\alpha - z}\right] = f(z)$$

oder $= 0$,

je nachdem $z$ zwischen $A$ und $B$ liegt, oder ausserhalb dieses Raumes.

Finde das erstere statt, und substituire man den beiden Curven $A$ und $B$ concentrische Kreise, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten, und deren Radien bezüglich $r$ und $\varrho$ seien, so darf zwischen $r$ und $\varrho$ kein Radius oder Modul liegen, für welchen $f(z)$ discontinuirlich wird. Ausserdem ist zunächst zu setzen:

$$r > \text{mod}\, z > \varrho.$$

Mit dem ersten Integral kann man ganz wie in Abschnitt 12) verfahren, da $r > \text{mod}\, z$ ist, und erhält somit auch:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(A)} \frac{f(\alpha)}{\alpha - z} d\alpha = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots,$$

$$A_z = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)}{\alpha^z} d\varphi, \quad \alpha = r e^{\varphi i},$$

Was aber das zweite Integral anbetrifft, so ist:

$$\text{mod}\, z > \text{mod}\, \alpha,$$

also:

$$\frac{1}{\alpha - z} = -\frac{1}{z\left(1 - \frac{\alpha}{z}\right)} = -\left(1 + \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha^2}{z^2} + \ldots\right).$$

Da nun für:

$$\alpha = \varrho e^{\varphi i}:$$
$$f(\alpha) d\alpha = \alpha i f\alpha\, d\varphi$$

wird, so hat man:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int^{(B)}\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\alpha-z}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\alpha)\,d\varphi\left(\frac{\alpha}{z}+\frac{\alpha^2}{z^2}+\ldots\right),$$

oder:

$$-\frac{1}{2\pi i}\int^{(B)}\frac{f(\alpha)\,d\alpha}{\alpha-z}=\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{z^2}+\frac{B_3}{z^3}+\ldots,$$

$$B_s=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha^s f(\alpha)\,d\varphi,\quad \alpha=\varrho e^{\varphi i},$$

und sonach hat man für jeden Werth von $z$, der in dem bezeichneten Ringe liegt:

$$f(z)=A_0+A_1 z+A_2 z^2+\ldots+\frac{B_1}{z}+\frac{B_2}{z^2}+\ldots.$$

$A_s$ und $B_s$ haben die obigen Werthe.

„Jede Function lässt sich nach positiven und negativen ganzen Potenzen entwickeln, in dem von zwei concentrischen, in unserem Sinne geschlossenen Kreisen begrenzten Raume, durch deren Peripherien je zwei nächste Discontinuitätspunkte gehen."

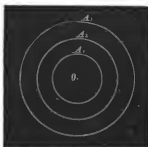



Fig. 79.

Hat also eine eindeutige Function $f(z)$ in Punkten $A_1$, $A_2$, $A_3$ (Fig. 79) Discontinuitäten, so legt man durch dieselben Kreise, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist; zwischen den durch $A_1$ und $A_2$ gehenden Kreisen, ferner zwischen den durch $A_2$ und $A_3$ gehenden u. s. f. findet dann die Entwickelung 2 statt, die immer convergirt, jedoch in den verschiedenen Gebieten $A_1 A_2$, $A_2 A_3$ . . . verschiedene Coefficienten hat, während bis zu Kreis $A_1$ nach ganzen positiven Potenzen entwickelt wird, also sämmtliche $B$ der Null gleich werden.

Die Werthe von $A_s$ und $B_s$, die man auch schreiben kann:

$$A_s=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(\alpha)}{\alpha^{s-1}}\,d\alpha,\qquad B_s=\frac{1}{2\pi i}\int f(\alpha)\,\alpha^{s+1}\,d\alpha,$$

zeigen aber, dass die Integrale rechts dieselben bleiben, wenn man $r$ und $\varrho$ beliebige Werthe gibt, welche zwischen die $r$ und $\varrho$ umschliessenden beiden nächsten Discontinuitätsmoduln fallen, denn für alle diese Werthe ist $\frac{f(\alpha)}{\alpha^{s-1}}$ und $f(\alpha)\,\alpha^{s+1}$ eindeutig und continuirlich, also das Integral dasselbe (Abschnitt 11). Die Bedingung $r>\operatorname{mod} z>\varrho$ ist also aufgehoben, für $\varrho$ und $r$ sind beliebig auch gleiche Werthe zu nehmen, welche jedoch zwischen den beiden zunächst liegenden Discontinuitätsmoduln liegen. Eben weil diese Grenzen mit dem Gebiete, worin $z$ liegt, wechseln, wechselt auch die Form der Entwickelung. Man sieht, dass man jetzt auch schreiben kann:

$$2)\qquad f(z)=\ldots+\frac{A_{-3}}{z^3}+\frac{A_{-2}}{z^2}+\frac{A_{-1}}{z}+A_0+A_1 z+A_2 z^2+\ldots,$$

$$A_s=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\alpha)}{\alpha^s}\,d\varphi,\quad \alpha=re^{\varphi i},\quad P<r<R,$$

wo $R$ der $z$ nächste grössere, $P$ der nächste kleinere Discontinuitätsmodul ist.

Es lässt sich indess noch eine andere Entwickelung nach positiven und negativen Potenzen von $z$ finden, die jedoch einen wesentlich andern und engern Charakter trägt als die vorige. Setzen wir zu dem Ende:

$$u = z - \frac{1}{z}, \quad f(z) = \varphi(u),$$

so ergibt sich sogleich:

$$z = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4}+1},$$

und:

$$\varphi(u) = f\left(\frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4}+1}\right).$$

Untersuchen wir jetzt, in welchen Grenzen von $z$ sich die Function $f(z)$ nach ganzen positiven Potenzen von $u$ entwickeln lasse. Bedingung, dass eine solche Entwickelung überhaupt möglich sei, ist die, dass $\varphi(u)$ für $u=0$ keinen critischen Punkt habe. Diesem Werthe entspricht $z=\pm 1$, je nachdem man der Wurzel das eine oder das andere Zeichen gibt. Es muss also wenigstens einer der Werthe $f(+1)$ und $f(-1)$ keinem critischen Punkte entsprechen. Je nachdem dies für einen oder den andern der Werthe stattfindet, ist das Zeichen der Wurzel von $z = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4}+1}$ positiv oder negativ zu nehmen. Erfüllen beide Werthe die Bedingung, so ist das Zeichen beliebig.

Um die Grenzen der Gültigkeit unserer Entwickelung zu finden, fragt sich, welche Werthe von $z$ einem gegebenen Modul von $u$ entsprechen. — Zu dem Ende setzen wir:

$$u = \varrho e^{\vartheta i}, \quad z = r e^{\varphi i},$$

also:

$$\varrho e^{\vartheta i} = r e^{\varphi i} - \frac{1}{r e^{\varphi i}},$$

$$\varrho e^{-\vartheta i} = r e^{-\varphi i} - \frac{1}{r} e^{\varphi i},$$

also durch Multiplication:

$$\varrho^2 = \left(r - \frac{1}{r}\right)^2 \cos\varphi^2 + \left(r + \frac{1}{r}\right)^2 \sin\varphi^2,$$

oder:

$$r^4 - 2r^2\cos 2\varphi - \varrho^2 r^2 + 1 = 0.$$

Es ist dies die Gleichung einer Curve in Polarcoordinaten $r$ und $\varphi$, $\varrho$ ist eine gegebene Constante. Führt man rechtwinklige Coordinaten:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

ein, so erhält man:

$$(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) + \varrho^2(x^2+y^2) + 1 = 0.$$

Die Curve, welche wir mit $U$ bezeichnen wollen, ist also vierten Grades. Aus der Gleichung derselben ergibt sich:

$$r^2 = \cos 2\varphi + \frac{\varrho^2}{2} \pm \sqrt{\left(\cos 2\varphi + \frac{\varrho^2}{2}\right)^2 - 1}.$$

Da $r^2$ reell und positiv sein muss, so muss:

$$\cos 2\varphi + \frac{\varrho^2}{2} > 1$$

sein, denn den negativen Werthen von $\cos 2\varphi + \frac{\varrho^2}{2}$ entspricht negatives $r^2$, denen, die kleiner als 1 sind, imaginäres. Dagegen finden für jedes $\varphi$, welches dieser Bedingung genügt, zwei positive Werthe von $r$ statt. Der grösste Werth von $\varphi$ ist von $\varrho$ abhängig. Tritt nur ein critischer Punkt von $f(z)$ ein, so entspricht diesem ein gegebener Werth von $r$ und $\varphi$, also vermöge Gleichung 1) ein ganz bestimmtes $\varrho$, welches die Curve $U$ völlig bestimmt, und diese ist es dann, innerhalb welcher unsere Entwickelung statt hat, wenn sie keinen zweiten critischen Punkt einschliesst. Es gibt aber ausser den critischen Punkten für $f(z)$ noch im Allgemeinen einen zweiten critischen Punkt für $\varphi(u)$, denjenigen nämlich, wo beide Werthe von:

$z = \frac{u}{2} \pm \sqrt{\frac{u^2}{4}+1}$ gleich werden, also:

$$\frac{u^2}{4} = -1,$$

$$u = \pm 2i, \quad z = \pm i;$$

für diesen Werth ist $\varrho = 2$, $r = 1$. Entsprechen also den critischen Punkten von $f(z)$ nur Werthe von $\varrho$, die grösser als 2 sind, so ist die Entwickelung dennoch nur für das Innere derjenigen Curve $U$, für welche $\varrho = 2$ ist, gültig. Je grösser $\varrho$, desto grösser ist auch vermöge unserer Ungleichheitsbedingung der grösste Werth von $\varphi$; für $\varrho = 2$ erhält man:

$$\cos 2\varphi > -1,$$

eine Bedingung, welche immer erfüllt ist.

Jedem kleineren $\varrho$ aber entsprechen Werthe von $\varphi$, die kleiner als $\frac{\pi}{2}$ sind.

In diesem Falle zerfällt die Curve, wie leicht zu sehen, in zwei völlig von einander getrennte Theile, deren einer den Punkt $z=1$, der andere den Punkt $z=-1$ symmetrisch umschliesst. Beide sind unter einander congruent und zerfallen in zwei congruente Stücke. In einem derselben oder in beiden findet die Entwickelung statt, je nachdem $f(+1)$ oder $f(-1)$ oder beide keine critischen Punkte sind.

Von den beiden Werthen von $r$, die gegebenem $\varphi$ entsprechen, wächst der grössere mit $\varrho$, und der kleinere nimmt wegen der Gleichung $r_1 r_2 = 1$ ab, wenn $\varrho$ wächst. Dies zeigt, dass jede Curve $U$, die grösserem $\varrho$ entspricht, alle mit kleinerem $\varrho$ völlig einschliesst.

Nachdem so das Gebiet, in welchem unsere Entwickelung gilt, völlig festgestellt ist, kann man in demselben setzen:

$$f(z)=\varphi(0)+\varphi'(0)\left(z-\frac{1}{z}\right)+\frac{\varphi''(0)}{1\cdot 2}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2+\frac{\varphi'''(0)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(z-\frac{1}{z}\right)^3+\ldots,$$

wo:

$$\varphi(u)=f(u+\sqrt{1-u^2})$$

zu setzen ist. In gewissem Sinne ist es nun möglich, hieraus eine Entwickelung nach positiven und negativen Potenzen herzustellen. Man hat nämlich:

$$\left(z-\frac{1}{z}\right)^n = z^n - n z^{n-2} + n_2 z^{n-4} + \ldots (-1)^n z^{-n},$$

wo $n, n_2 \ldots$ die Binomialcoefficienten sind. Hieraus ergibt sich, wenn man nach Potenzen von $z$ ordnet:

$$A_0 = \varphi - \varphi'' + \frac{\varphi^{(4)}}{(1\cdot 2)^2} + \frac{\varphi^{(6)}}{(1\cdot 2\cdot 3)^2} + \ldots,$$

$$A_s = \frac{1}{s!}\left(\varphi^{(s)} - \frac{\varphi^{(s+2)}}{s+1} + \frac{\varphi^{(s+4)}}{(s+1)(s+2)\,2!} - \frac{\varphi^{(s+6)}}{(s+1)(s+2)(s+3)\,3!} + \ldots\right),$$

$$f(z) = A_0 + \sum_{s=1}^{s=\infty} A_s\,[z^s + (-1)^s z^{-s}],$$

wo unter $\varphi^{(s)}$ der $s$te Differenzialquotient von $\varphi(u)$ für $u=0$, unter $s!$ der Ausdruck $1\cdot 2 \ldots s$ verstanden wird. Ihrem Ursprunge gemäss gilt diese Entwickelung nur innerhalb des einen oder andern von der Curve $U$ begrenzten Gebietes.

Bricht man die Entwickelung mit $z^n$ ab, so darf man auch nur bis zu $z^{-n}$ gehen, und in $A_n$ nur bis zu dem mit $\varphi^{(n)}$ multiplicirten Gliede vorschreiten, und kommt es dann nicht darauf an, ob die Ausdrücke für $A_s$ selbst convergiren. Nur wo dies Gebiet innerhalb des Ringes liegt, wo die Entwickelung 2) convergirt, sind beide zu identificiren.

Beispiele.

I. Sei:

$$f(z)=\frac{1}{\alpha-z}+\frac{1}{\beta-z}+\frac{1}{\gamma-z},$$

$\alpha, \beta, \gamma$ beliebige Constanten, deren Moduln jedoch der Bedingung genügen, dass $\mathrm{mod}\,\alpha < \mathrm{mod}\,\beta < \mathrm{mod}\,\gamma$ ist. Ist dann $\mathrm{mod}\,z < \mathrm{mod}\,\alpha$, so können die Brüche $\frac{1}{\alpha-z}, \frac{1}{\beta-z}, \frac{1}{\gamma-z}$ nach ganzen positiven Potenzen von $z$ entwickelt werden, und man hat:

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots,$$

$$A_s = \frac{1}{\alpha^{s+1}} + \frac{1}{\beta^{s+1}} + \frac{1}{\gamma^{s+1}}.$$

Ist jetzt mod $\alpha <$ mod $s <$ mod $\beta$, so können noch $\frac{1}{\beta - s}$ und $\frac{1}{\gamma - s}$ nach positiven, aber $\frac{1}{\alpha - s}$ nur nach negativen Potenzen von $z$ entwickelt werden. Man hat:

$$f(s) = A_0 + A_1 s + A_2 z^2 + \ldots,$$
$$+ \frac{B_1}{s} + \frac{B_2}{s^2} + \ldots,$$
$$A_s = \frac{1}{\beta^{s+1}} + \frac{1}{\gamma^{s+1}}, \quad B_s = -\alpha^{s-1}.$$

Ist mod $\beta <$ mod $z <$ mod $\gamma$, so wird nur $\frac{1}{\gamma - z}$ nach positiven Potenzen zu entwickeln sein. In der obigen Reihe ist also:

$$A_s = \frac{1}{\gamma^{s+1}}, \; B_s = -\alpha^{s-1} - \beta^{s-1}.$$

Ist endlich mod $\gamma <$ mod $z$, so tritt für alle drei Brüche Entwickelung nach negativen Potenzen ein Es ist:

$$f(z) = \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \frac{B_3}{z^3} + \ldots,$$
$$B_s = -\alpha^{s-1} - \beta^{s-1} - \gamma^{s-1}.$$

Da den Werthen $z = \alpha$, $z = \beta$, $z = \gamma$ Discontinuitätspunkte, und zwar die einzigen, welche $f(z)$ hat, entsprechen, muss in der That die Entwickelung sich viermal ändern, nämlich in dem Kreise, dessen Peripherie durch $\alpha$ geht, erfolgt sie nach positiven Potenzen, innerhalb der Ringe, deren Grenzkreise durch $\alpha$ und $\beta$, $\beta$ und $\gamma$ geben, und innerhalb des ganzen Gebietes, welches ausserhalb des letzten Kreises fällt, in Entwickelungen, welche auch negative Potenzen enthalten

Diese Entwickelung dauert so lange fort, bis ein Modul eintritt, welcher einem Windungspunkte entspricht. Findet derselbe für $z = 0$ statt, so kann man der Entwickelung von $f(z)$, indem man $z = x + u$ setzt, die von $f(x + u)$ nach Potenzen von $u$, oder von $z - x$ substituiren, wenn für $x$ kein Windungspunkt stattfindet, und diese Entwickelung gilt dann bis zu dem $x$ am nächsten liegenden Mehrdeutigkeitsmodul.

II. Sei:

$$f(z) = \sqrt{z(1+s)}.$$

Für $z = 0$ und $z = -1$ finden Windungspunkte statt. Zieht man vom Anfangspunkte aus einen Kreis $r > 1$, welcher also beide Windungspunkte einschliesst, so ist in demselben $f(z)$ eindeutig, nämlich:

$$f(z) = \sqrt{\left(\frac{1}{z} + 1\right)},$$

und für $z = r$ und $s = re^{2\pi i}$ nimmt $f(z)$ denselben Werth an. Da der Modul von $\frac{1}{z}$ kleiner als 1 ist, so kann man nach dem Binomischen Satz entwickeln

$$\left(1 + \frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2z} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2^2 z^2}$$
$$+ \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3 z^3} - \ldots,$$

also:

$$f(s) = z + \tfrac{1}{2} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 2^2} \frac{1}{z}$$
$$+ \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^3} \frac{1}{z^2} - \ldots$$

Diese Entwickelung gilt für alle Werthe von $z$, deren Modul grösser als 1 ist.

### 18) Entwickelung der Functionen nach Fourrier'schen Reihen.

Unter Fourrier'schen Reiben versteht man Entwickelungen nach Sinus und Cosinus der Vielfachen der Variablen. Ihre gewöhnliche Anwendung erfolgt bei reellen Variablen, jedoch baben sie namentlich auch für complexe Argumente sehr wichtige Eigenschaften. Sie können leicht aus den Entwickelungen des vorigen Abschnittes gefunden werden.

Sei zu dem Ende $f(z)$ eine in gewissen Gebieten oder im ganzen Raume eindeutige Function, und setzen wir:

$$f(z) = F(u),$$

wo $u$ gegeben ist durch die Gleichung:

$$u = e^{\frac{2\pi i z}{\omega}},$$

also:

$$z = \frac{\omega \lg u}{2\pi i},$$

wo $\omega$ eine beliebige Constante ist. Es wird also sein:

$$F(u) = f\left(\frac{\omega \lg u}{2\pi i}\right).$$

Wenn aber auch $f(z)$ eindentig ist, so wird dies nicht mit $f\left(\frac{\omega \lg u}{2\pi i}\right)$ im Allgemeinen der Fall sein, da $\lg u$ eine mehrdeutige Function ist. Man hat jedoch bekanntlich:

$$\lg u = l(u) + 2s\pi i,$$

wo $l$ ein bestimmter Werth des Logarithmus, $s\pi i$ eine beliebige ganze Zahl ist, und diese Formel umfasst alle Werthe von $\lg u$. Es wird also sein:

$$F(u) = f\left(\frac{\omega}{2\pi i}\,[l(u) + 2s\pi i]\right) = f\left(\frac{\omega\, l(u)}{2\pi i} + s\omega\right).$$

Damit also $F(u)$ eindeutig, d. h. von dem Werthe von $s$ unabhängig sei, muss für jeden Werth von $z$ sein:

$$f(z + s\omega) = f(z),$$

eine Gleichung, die offenbar erfüllt ist, wenn man hat:

$$f(z + \omega) = f(z),$$

denn dann ist, wenn man für $z$ nach einander setzt:

$$-z + \omega,\ z + 2\omega,\ z + 3\omega \ \ldots\ z - \omega,\ z - 2\omega \ \ldots,$$

$$f(z) = f(z - \omega) = f(z - 2\omega) \ \ldots,$$

$$f(z) = f(z + \omega) = f(z + 2\omega) \ \ldots,$$

Eine Function, welche diese Eigenschaft hat, nennt man periodisch, und sagt, sie habe die Periode $\omega$.

Die Entwickelung des vorigen Abschnittes ist also nur anwendbar auf $F(u)$, wenn $f(z) = F(u)$ in Bezug auf $z$ die Periode $\omega$ hat.

Sei dies jetzt der Fall, so hat man:

$$F(u) = \ \ldots\ \frac{A_{-3}}{u^3} + \frac{A_{-2}}{u^2} + \frac{A_{-1}}{u} + A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \ldots,$$

$$A_s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{F(re^{\varphi i})}{r^s e^{s\varphi i}}\, d\varphi.$$

$r$ ist ein zwischen zwei nächsten Discontinuitätsmoduln der Function $F(u)$ liegender Werth.

Sei $r = e^{\lambda}$. Setzt man in Formel:

$$f(z) = F(u):$$

$$u = re^{\varphi i} = e^{\lambda + \varphi i},$$

so erhält man, da:

$$u = e^{\frac{2\pi iz}{\omega}}$$

war:

$$\frac{2\pi zi}{\omega} = \lambda + \varphi i,$$

d. h.:

$$z = \frac{\omega}{2\pi}\,(\varphi - \lambda i),$$

also wenn man auch für den allgemeinen Werth von $u$ wieder $e^{\frac{2\pi iz}{\omega}}$ setzt:

1) $$f(z) = A_0 + A_1 e^{\frac{2\pi iz}{\omega}} + A_2 e^{\frac{4\pi iz}{\omega}} + A_3 e^{\frac{6\pi iz}{\omega}} + \ldots$$

$$+ A_{-1} e^{-\frac{2\pi iz}{\omega}} + A_{-2} e^{-\frac{4\pi iz}{\omega}} + A_{-3} e^{-\frac{6\pi iz}{\omega}} + \ldots,$$

$$A_s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left[\frac{\omega}{2\pi}\,(\varphi - \lambda i)\right] e^{-s(\lambda + \varphi i)}\, d\varphi.$$

Es fragt sich noch, in welchen Grenzen von $z$ diese Reihe brauchbar ist.

Zu dem Ende haben wir zu untersuchen, welche Werthe von $z$ gleichem Modul $r$ von $u$ entsprechen. Sei:

$$z=\varrho e^{\tau i},$$

so ist:

$$\varrho e^{\tau i}=\frac{\omega}{2\pi}(\varphi-\lambda i),$$

wo $\varphi$ und $\lambda$ reell sind, und $\lambda$ für denselben Modul $r$ constant bleibt, wegen $r=e^{\lambda}$. Sei ferner die im Allgemeinen complexe Grösse:

$$\omega=A e^{\delta i}.$$

Man hat also:

$$\varrho e^{\tau i}=\frac{A e^{\delta i}}{2\pi}(\varphi-\lambda i),$$

oder:

$$\frac{2\pi\varrho}{A}e^{(\tau-\delta)i}=\varphi-\lambda i,$$

und indem man die imaginären Theile vergleicht:

$$\frac{2\pi\varrho}{A}\sin(\tau-\delta)=-\lambda.$$

Damit also $r$, d. h. $\lambda$ constant bleibe, muss auch:

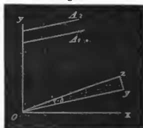
$$\varrho\sin(\tau-\delta)$$

constant sein.

Diese Bedingung ist nothwendig und ausreichend. Denkt man sich (Fig. 80) den $\omega$ und den $z$ entsprechenden Punkt mit dem Anfangspunkte $O$ verbunden, so ist offenbar:

$$Oz=\varrho,\quad \text{Winkel } zOX=\tau,$$
$$\text{Winkel } \omega OX=\delta,$$

Fig. 80.




also:

$$\text{Winkel } zO\omega=\tau-\delta,$$

und die Grösse $\varrho\sin(\tau-\delta)$ wird durch das Loth $zy$ von $z$ auf $O\omega$ vorgestellt, d. h.:

„Alle Punkte $z$, welche gleichem Modul von $u$ entsprechen, haben gleiche Entfernung von $O\omega$, liegen also in einer Parallele mit der Linie, welche den der Periode entsprechenden Punkt mit dem Anfangspunkte verbindet."

Sind also $A_1$, $A_2$ zwei beliebige, aber einander nächste Discontinuitäten von $z$, so zieht man durch dieselben zwei unendliche Linien parallel mit Richtung $O\omega$, und für alle Punkte $z$, welche zwischen denselben liegen, findet die obige Entwickelung von $f(z)$ statt. Es ist übrigens, wenn wir $h$ die Entfernung eines beliebigen Punktes $z$ zwischen diesen Parallelen, $k_1$, $k_2$ die der Punkte $A_1$ und $A_2$ von $O\omega$ nennen: $\lambda=-\frac{2\pi h}{A}$ zu nehmen, wo:

$$k_1<h<k_2,$$

sonst $h$ beliebig ist. Man hat also:

$$A_s=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left[\frac{\omega\varphi}{2\pi}+\frac{\omega h i}{A}\right] e^{\frac{2\pi s h}{A}-s\varphi i}\,d\varphi.$$

Die Integration findet in Bezug auf die reelle Grösse $\varphi$ statt, und ist also keiner Zweideutigkeit unterworfen, da $\varphi$ immer reell bleibt. — Setzen wir noch:

$$\varphi=\frac{2\pi\alpha}{A},$$

so wird, da auch $A$ reell ist, keine Zweideutigkeit eintreten. Die Grenzen der Integration werden dann $\alpha=0$ und $\alpha=A$ sein, also:

$$\text{2)}\qquad A_s=\frac{1}{A}\int_0^{A} f\left[\frac{\omega}{A}(\alpha+hi)\right] e^{\frac{2\pi s}{A}(h-\alpha i)}\,d\alpha.$$

Die Grösse $h$ braucht nur beim Uebergang über eine der Parallelen mit $O\omega$, welche durch einen Discontinuitätspunkt geht, verändert zu werden.

Diese Entwickelung lässt sich immer auf den Fall zurückführen, wo $\omega$ reell ist; denn ist:

$$f(z+\omega)=f(z),$$

so betrachte man die Function $\varphi(z)=f\left(\frac{\omega z}{A}\right)$, wo $A$ reell ist. Man hat dann:

$$\varphi(z+A)=f\left(\omega\frac{(z+A)}{A}\right)=f(\omega z+\omega)=f(\omega z)=\varphi(z).$$

Es hat also $\varphi(z)$ die Periode $A$, wo $A$ ganz beliebig, also auch positiv und gleich dem Modul von $\omega$ genommen werden kann. In diesem Falle fällt Linie $O\omega$ oder $OA$ mit der Abscissenaxe zusammen. Ist dann für reelle Werthe von $z$ die Function continuirlich, so kann man $h=0$ setzen für alle Punkte $z$, welche zwischen den beiden den Abscissenaxen parallelen Linien liegen, in welchen die ihr nächsten Discontinuitäten enthalten sind, und man hat:

3) $$A_s=\frac{1}{A}\int_0^A f(\alpha)\, e^{-\frac{2\pi s\alpha i}{A}}\, d\alpha.$$

Für dieses Gebiet nimmt die Entwickelung 1) noch eine andere Gestalt an, die besonders brauchbar ist, wenn $z$ reell ist.

Es wird nämlich das mit $A_s$ multiplicirte Glied sein, wenn man den Factor $e^{\frac{2s\pi i z}{A}}$ unter das Integral schreibt:

$$\frac{1}{A}\int_0^A f(\alpha)\, e^{\frac{2s\pi i}{A}(z-\alpha)}\, d\alpha.$$

Vereinigt man hiermit das mit $A_{-s}$ multiplicirte Glied, so hat man als Summe:

$$\frac{1}{A}\int_0^A f(\alpha)\left\{e^{\frac{2s\pi i}{A}(z-\alpha)}+e^{-\frac{2s\pi i}{A}(z-\alpha)}\right\}d\alpha$$

$$=\frac{2}{A}\int_0^A \cos\frac{2s\pi(z-\alpha)}{A}\, f(\alpha)\, d\alpha.$$

Nur für das Glied $A_0$ findet eine solche Vereinigung nicht statt. Dies Glied aber ist:

$$A_0=\frac{1}{A}\int_0^A f(\alpha)\, d\alpha,$$

und man hat:

4) $$f(z)=\frac{1}{A}\int_0^A f(\alpha)\, d\alpha\left(1+2\sum_{s=1}^{s=\infty}\cos\frac{(2s\pi)(z-\alpha)}{A}\right).$$

Da aber auch ist:

$$\cos\frac{2s\pi}{A}(z-\alpha)=\cos\frac{2s\pi z}{A}\cos\frac{2s\pi\alpha}{A}+\sin\frac{2s\pi z}{A}\sin\frac{2s\pi\alpha}{A},$$

so kann das Integral in zwei andere getheilt werden, deren eins nur Cosinus, das andere nur Sinus enthält; die Factoren $\cos\frac{2s\pi z}{A}$ und $\sin\frac{2s\pi z}{A}$ aber können ausserhalb des Integralzeichens geschrieben werden, so dass die Reihe die Gestalt annimmt:

5) $$f(z)=\frac{B_0}{2}+B_1\cos\frac{2\pi z}{A}+B_2\cos\frac{4\pi z}{A}+\ldots+C_1\sin\frac{2\pi z}{A}+C_2\sin\frac{4\pi z}{A}+\ldots,$$

$$B_s = \frac{2}{A}\int_0^A \cos\frac{2s\pi\alpha}{A} f(\alpha)\,d\alpha,$$

$$C_s = \frac{2}{A}\int_0^A \sin\frac{2s\pi\alpha}{A} f(\alpha)\,d\alpha.$$

Es ist dies die gewöhnliche Form der Reihe. — Liegt aber der betrachtete Punkt $z$ nicht in dem ersten Gebiete, welches die Abscissenaxe einschliesst, so bedient man sich der Formeln 1) und 2), welche, im Falle $\omega$ seinem Modul $A$ gleich wird, die Gestalt annehmen:

6)
$$f(z) = A_0 + A_1 e^{\frac{2\pi iz}{A}} + A_2 e^{\frac{4\pi iz}{A}} + \ldots$$
$$+ A_{-1} e^{-\frac{2\pi iz}{A}} + A_{-2} e^{-\frac{2\pi iz}{A}} + \ldots,$$
$$A_s = \frac{1}{A}\int_0^A f(\alpha + hi)\, e^{\frac{2\pi s}{A}(h-\alpha i)}\,d\alpha.^{*)}$$

Wie bei allen früheren Entwickelungen ist ein Zweifel, ob die Reihe convergire, nur an den Grenzen, also wenn $z$ in einer der Linie $O\omega$ parallelen liegt, welche eine Discontinuität enthält, vorhanden. Denkt man sich nun die beiden der Abscissenaxe nächsten Discontinuitäten derselben immer näher rücken, so wird das Gebiet, in welchem die Entwickelung 5) stattfindet, nur dann statthaft sein, wenn in $z=x+yi$ der mit $i$ multiplicirte Theil sehr klein wird. Wenn diese Discontinuitäten für reelles $s$ stattfinden, so werden die Grenzen unserer Entwickelung zusammenfallen und dieselbe entweder gar nicht, oder nur für reelles $s$ statthaben. Eine höchst merkwürdige Eigenschaft der Fourrier'schen Reihe ist nun, dass in diesem Falle die Entwickelung noch immer statt hat für reelles $z$ mit Ausnahme der Discontinuitätspunkte, und allgemein:

„Wenn auf irgend einer $O\omega$ parallelen Linie Discontinuitäten vorkommen, so gilt die Fourrier'sche Reihe noch für die andern Punkte dieser Linie, wenn man sich unter $h$ die Entfernung derselben von $O\omega$ denkt."

Der Beweis hiervon soll jetzt geführt werden.

Wir bemerken zunächst, dass sich nicht nur, wie bereits gezeigt wurde, der Fall immer auf den zurückführen lässt, wo $\omega$ reell ist, also auf die Reihe 6), sondern selbst auf den Fall, wo $z$ auf der Abscissenaxe liegt. Denn sei $z=x+yi$, so ist $y$ die Entfernung des entsprechenden Punktes von der Abscissenaxe, also nach unserer Annahme für $h$ zu setzen. — Man hat dann:

7)
$$f(x+yi) = A_0 + A_1 e^{\frac{2\pi i(x+yi)}{A}} + A_2 e^{\frac{4\pi i(x+yi)}{A}} + \ldots,$$
$$A_s = \frac{1}{A}\int_0^A f(\alpha + yi)\, e^{\frac{2\pi s}{A}(y-\alpha i)}\,d\alpha.$$

Offenbar kann man diese Reihe vertauschen mit:

8)
$$f(x+yi) = B_0 + B_1 e^{\frac{2\pi ix}{A}} + B_2 e^{\frac{4\pi ix}{A}} + \ldots,$$
$$B_s = \frac{1}{A}\int_0^A f(\alpha+yi)\, e^{-\frac{2\pi s\alpha i}{A}}\,d\alpha,$$

eine Reihe, die ganz mit 5) übereinstimmt, wenn man $y$ constant denkt, $x$ an die Stelle von $z$ setzt und:

*) Eine zweite Entwickelung ist ähnlich wie im vorigen Abschnitt zu finden.

$$f(x+yi)=F(x)$$

nach der Fourrier'schen Reihe entwickelt.

Wir beschränken uns daher darauf, den Satz für den Ausdruck 4), welcher mit 5) übereinstimmt, zu beweisen. Derselbe war:

$$\frac{1}{A}\int_0^A f(\alpha)\,d\alpha\left[1+2\sum_{s=1}^{s=\infty}\cos 2s\pi\,\frac{(s-\alpha)}{A}\right],$$

oder:

$$\frac{1}{A}\int_0^A f(\alpha)\,d\alpha\left[\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}(e^{\frac{2s\pi i(z-\alpha)}{A}}\right],$$

und wir werden direct beweisen, dass derselbe für reelles $z$ mit $f(z)$ übereinstimmt, wenn $f(z)$ die Periode $\omega$ hat.

Es ist:

$$\sum_{-n}^{+n} e^{2s\pi i\frac{(z-\alpha)}{A}}=\frac{e^{2(2n+1)\pi i\frac{(s-\alpha)}{A}}-1}{e^{2\pi i\frac{(z-\alpha)}{A}}-1}\cdot e^{-2n\pi i\frac{(z-\alpha)}{A}},$$

Die Reihe ist nämlich offenbar eine geometrische von $2n+1$ Gliedern. Der Ausdruck aber nimmt auch die Gestalt an:

$$\frac{e^{2(n+1)\pi i\frac{(s-\alpha)}{A}}-e^{-2n\pi i\frac{(s-\alpha)}{A}}}{e^{2\pi i\frac{(z-\alpha)}{A}}-1},$$

oder wenn man mit $e^{-\pi i\frac{(s-\alpha)}{A}}$ multiplicirt:

$$\frac{e^{(2n+1)\pi i\frac{(z-\alpha)}{A}}-e^{-(2n+1)\pi i\frac{(s-\alpha)}{A}}}{e^{\pi i\frac{(z-\alpha)}{A}}-e^{-\pi i\frac{(z-\alpha)}{A}}}=\frac{\sin(2n+1)\pi\frac{(z-\alpha)}{A}}{\sin\pi\frac{(z-\alpha)}{A}}.$$

Der zu untersuchende Ausdruck ist also, abgesehen vom Factor $\frac{1}{A}$, die Grenze von:

1) $$\int_0^A f(\alpha)\,d\alpha\,\frac{\sin(2n+1)\pi\frac{(z-\alpha)}{A}}{\sin\left(\pi\frac{z-\alpha}{A}\right)}$$

für wachsendes $n$. Offenbar hat dieser Ausdruck die Periode $A$ und es genügt daher, ihn für die Werthe zu untersuchen, wo $z$ zwischen 0 und $A$ liegt.

Setzen wir $z-\alpha=\beta$, so wird dies Integral:

$$\int_{z-A}^{z} f(z-\beta)\,\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi}{A}\beta}{\sin\frac{\pi}{A}\beta}\,d\beta.$$

Nehmen wir an, $a$ und $b$ wären gleichzeitig positiv oder negativ, und beide zwischen $-A$ und $+A$ liegend, aber nicht mit einem dieser Werthe zusammenfallend, so kann man setzen:

$$\int_a^b = \int_a^{\frac{kA}{2n+1}} + \int_{\frac{kA}{2n+1}}^{\frac{(k+1)A}{2n+1}} + \int_{\frac{(k+1)A}{2n+1}}^{\frac{(k+2)A}{2n+1}} + \ldots + \int_{\frac{lA}{2n+1}}^{b}.$$

$k$, $k+1$, $k+2$ . . . $l$ sind ganze Zahlen, welche so beschaffen sind, dass $k$ dasjenige Vielfache von $\frac{A}{2n+1}$ angiebt, welches zunächst grösser als $a$ ist, und $l$ dasjenige, welches zunächst kleiner als $b$ ist.

Denkt man sich unter jedes Integral als Argument die Grösse:

$$\frac{f(z-\beta)\sin\frac{\widehat{2n+1}\,\pi\beta}{A}}{\sin\frac{\pi\beta}{A}}\,d\beta$$

geschrieben, so hat offenbar innerhalb jeder Theilintegration der Ausdruck $\sin\frac{(2n+1)\beta}{A}$ dasselbe Zeichen. Man hat also für das Integral den Werth zu setzen:

$$M\int \sin\frac{(2n+1)\pi\beta}{A}\,d\beta,$$

wo $M$ ein gewisser Werth von $\frac{f(z-\beta)}{\sin\frac{\pi\beta}{A}}$ ist, in welchem $\beta$ innerhalb der Grenzen der Integration liegt. (Dies ist offenbar selbst wenn $f(z-\beta)$ complex ist, der Fall.) Seien $\frac{k'A}{2n+1}$, $\frac{(k'+1)A}{2n+1}$ die Integrationsgrenzen, so erhält man:

$$\frac{MA}{(2n+1)\pi}\left[\cos\pi k' - \cos\pi(k'+1)\right] = \pm 2\frac{MA}{(2n+1)\pi},$$

ein Ausdruck, der sich mit wachsendem $n$ der Null nähert. Gleiches findet auch mit dem ersten und letzten Integrale statt, welche geringern Werth haben als das obige.

Aus unserm Integrale verschwinden also alle die Theile, worin $\beta$ einen endlichen Unterschied von $-A$, $+A$ oder von $0$ hat, denn alle diese können in Grenzen $a$ und $b$ eingeschlossen werden, welche unsern Bedingungen genügen. Es war aber $\beta = z - \alpha$, und die verschwindenden Theile entsprechen also den Werthen von $\alpha$, die einen endlichen Unterschied von $z$, von $z+A$ oder $z-A$ haben, worin die beiden letztern nicht vorkommen, da $z$ zwischen $0$ und $A$ liegen soll. Man kann also unser Integral vertauschen mit:

$$\int_{z-\nu}^{z+\mu} f(\alpha)\,d\alpha\,\frac{\sin(2n+1)\pi\frac{z-\alpha}{A}}{\sin\pi\frac{z-\alpha}{A}},$$

wo $\nu$ und $\mu$ positive und beliebig kleine Zahlen sind. Sei noch $\alpha - z = -\lambda$, so lange $\alpha$ kleiner als $z$ ist, und $\alpha - z = +\lambda$, wenn $\alpha$ grösser als $z$ ist. Man erhält dann:

$$\int_0^{\nu} f(z-\lambda)\,d\lambda\,\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi\lambda}{A}}{\sin\frac{\pi\lambda}{A}} + \int_0^{\nu} f(z+\lambda)\,d\lambda\,\frac{\sin(2n+1)\frac{\pi\lambda}{A}}{\sin\frac{\pi\lambda}{A}}.$$

In diesem Ausdrucke sind aber folgende Aenderungen gestattet. Zunächst kann man $\nu$ unendlich klein nehmen, und dann ist es gestattet, $\sin\frac{\pi\lambda}{A}$ mit $\frac{\pi\lambda}{A}$ zu vertauschen. Dann kann man, wenn $f(z)$ in Punkt $z$ continuirlich ist, $f(z-\lambda)$ und $f(z+\lambda)$ als constant betrachten und ausserhalb der Integralzeichen schreiben.

Dies ist aber selbst dann noch der Fall, wenn $f(z)$ in $z$ discontinnirlich, jedoch nicht unendlich ist, immer werden einerseits die Werthe $f(z-\lambda)$, die kleiner als $f(z)$ sind, und anderseits diejenigen $f(z+\lambda)$, die grösser als $f(z)$ sind, continnirlich sein. Endlich kann man die Integrale, nachdem der Factor $f(z \mp \lambda)$ herausgerückt ist, also:

$$\int \frac{\sin (2n+1) \frac{\pi\lambda}{A}}{\sin \frac{\pi\lambda}{A}} d\lambda,$$

statt in den Grenzen 0 und $\nu$, sogar in den Grenzen 0 und $\infty$ nehmen, denn für alle Werthe von $\lambda$, welche einen endlichen Unterschied von 0 haben, verschwindet ja, wie wir gesehen haben, das Integral. Nun ist bekanntlich:

$$\int_0^\infty \frac{\sin h\lambda}{\lambda} d\lambda = \frac{\pi}{2},$$

wenn $h$ positiv ist, also:

$$\int_0^\infty \frac{\sin (2n+1) \frac{\pi\lambda}{A}}{\sin \frac{\pi\lambda}{A}} d\lambda = \frac{A}{2},$$

und somit unser Ausdruck 1) gleich:

$$\frac{A}{2}\,[f(z-\lambda)+f(z+\lambda)].$$

Wird mit $A$ dividirt, so kommt die Fourrier'sche Reihe in 4) oder 5) des vorigen Abschnitts, und es ist somit direct bewiesen, dass die Summe derselben für jedes reelle $z$, wo $f(z)$ nicht unendlich ist, beträgt:

$$\tfrac{1}{2}[f(z-\lambda)+f(z+\lambda)].$$

$\lambda$ ist eine verschwindend kleine, aber positive Grösse. Findet also Continuität statt, so hat man:

$$f(z-\lambda)=f(z+\lambda)=f(z),$$

und die Summe der Reihe ist, wie im allgemeinen Falle, $f(z)$. Findet Discontinnität in $f(z)$ statt, so sind $f(z-\lambda)$ und $f(z+\lambda)$ die beiden Werthe, welche in $z$ sprungweise aus einander hervorgehen. Die Fourrier'sche Reihe hört denn nicht auf zu convergiren, gibt aber die aritbmetische Mitte beider Werthe.

Diese Betrachtungen geben höchst wichtige Aufschlüsse über die Natur unserer Reihe für den betrachteten Grenzfall.

I) Man kann in dem Integral 1) die darin vorkommende Function $f(\alpha)$ innerhalb der Grenzen 0 und $A$ mit jeder andern identificiren, sie möge die Periode $A$ haben oder nicht. Immer wird das Integral mit $\frac{1}{A}$ multiplicirt also die Fourrier'sche Reihe $f(z)$ vorstellen, wenn $z$ reell ist (oder allgemeiner, alle Werthe annimmt, welche auf einer $OA$ oder $O\omega$ parallelen Graden liegen), so lange $z$ zwischen 0 und $A$ ist. Da aber die Entwickelung periodisch ist, so wird für $z'=z+sA$, wo $s$ eine ganze Zahl ist, die Reihe wieder $f(z)$ geben. Es ist also für alle in Frage kommenden Werthe von $z$ die Summe der Reihe $\varphi(z)$ bestimmt durch die Gleichungen:

$$\varphi(z)=f(z),$$
$$0<z<A,$$
$$\varphi(z)=f(z-sA),$$
$$(s+1)A>z>sA.$$

Es hat also $\varphi(z)$ die Periode $A$.

II) Da innerhalb der Grenzen 0 und $A$ auch keinerlei Stetigkeitsbedingungen in Bezug auf $f(\alpha)$ gegeben sind, so ist es selbst nicht nöthig, dass $f(\alpha)$ innerhalb 0 $A$ gerade dieselbe irgend wie gegebene Function vorstelle. Es kann z. B., wenn:

$$0<a<b<A$$

ist, von 0 bis $a$ $f(\alpha)$ irgend eine Function $F(\alpha)$, von $a$ bis $b$ eine andere $\psi(\alpha)$, und von $b$ bis $A$ eine dritte $\chi(\alpha)$ vorstellen, und alle diese Bedingungen kann man beliebigen Discontinuitätsbedingungen unterwerfen. Es wird dann die Summe der Reihe $\varphi(z)$ immer eine der drei Functionen $F(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ geben, je nachdem $z$ in den einen oder andern Grenzen enthalten ist. In den Discontinuitätspunkten aber wird der Werth der Reihe die aritbmetische Mitte beider Grenzwerthe geben, welche in dem bezeichneten Punkt stattfinden. Ausserhalb der Grenzen 0 und $A$ ist die Summe der Reihe dadurch bestimmt, dass dieselbe periodisch ist.

Indessen darf die Function $\varphi(z)$ im Allgemeinen in irgend einem Punkte nicht derart unendlich werden, dass das auf eine grade Linie zu erstreckende Integral 1) bedeutungslos wird. Ist aber eine der Functionen $F(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ für einen Punkt bezüglich zwischen 0 und $a$, oder $a$ und $b$, oder $b$ und $A$ so beschaffen, so vermeidet man dies dadurch, dass man annimmt, die Function stelle in dem bezeichneten Punkt eine andere nicht unendlich werdende Function vor, $\vartheta(u)$, wo dann der unbestimmt werdende Theil des Integrals eliminirt ist.

Die obengemachten Schlüsse lassen sich aber auch in Bezug auf die Reihe 2) des vorigen Abschnittes machen. Identificirt man darin $r$ mit dem obern Modul, wo die Function aufhört, continuirlich oder eindeutig zu sein, und setzt $z = re^{\vartheta i}$, so wird:

$$f(re^{\vartheta i}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{\varphi i}) \sum_{s=-\infty}^{s=+\infty} e^{s(\vartheta-\varphi)i} d\varphi,$$

und für $2\pi = A$ stimmt diese Reihe mit der hier untersuchten überein, wo:

$$f(re^{\vartheta i}) = \varphi(\vartheta)$$

gedacht wird. Hieraus folgt also:

„In der Peripherie, wo $z$ aufhört, eindeutig und continuirlich zu sein, gilt die Entwickelung 2) des vorigen Abschnittes, wenn $r$ der Radius dieser Peripherie ist, und diejenigen Discontinuitäten, welche $f(z)$ unendlich machen, eliminirt werden, indem man $f$ durch eine beliebige Function ersetzt. Für den Discontinuitätspunkt stellt dann die Entwickelung wieder das arithmetische Mittel beider Grenzwerthe dar."

Da nun immer eine Entwickelung nach ganzen positiven und negativen Potenzen in solchen Peripherien stattfindet, so kann eben darum keine Entwickelung nach positiven Potenzen allein stattfinden, die Maclaurin'sche Reihe also ist auf der Peripherie des Grenzkreises im Allgemeinen nicht anwendbar. Nur einzelne Werthe des Arguments $\vartheta$ können möglicherweise eine Ausnahme machen, indem für eine solche beide Reihen übereinstimmen.

Wir wollen hierzu ein Beispiel geben.

Geben wir zunächst der Function die Periode $2\pi$, so ist in Formel 5) des vorigen Abschnittes:

$$f(z) = \frac{B_0}{2} + B_1 \cos z + B_2 \cos 2z + \ldots,$$
$$+ C_1 \sin z + C_2 \sin 2z + \ldots,$$
$$B_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \cos s\alpha f(\alpha)\, d\alpha,$$
$$C_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \sin s\alpha f(\alpha)\, d\alpha.$$

Nehmen wir ferner an, die Function $f(z)$ möge in den Grenzen 0 und $\pi$ einer andern $\varphi(z)$, und zwischen $\pi$ und $2\pi$ dadurch bestimmt werden, dass in diesen Grenzen:

$$f(z) = \varphi(2\pi - z)$$

sei. Offenbar ist dann:

$$B_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos s\alpha \varphi(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \cos s\alpha \varphi(2\pi-\alpha)\, d\alpha,$$

$$C_s = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin s\alpha \varphi(\alpha)\, d\alpha + \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \sin s\alpha \varphi(2\pi-\alpha)\, d\alpha.$$

Setzt man in $B_s$ und $C_s$ in den zweiten Integralen $2\pi - \alpha = \beta$, so nehmen diese bezüglich die Gestalt an:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos s\beta \varphi(\beta)\, d\beta, \quad -\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin s\beta \varphi(\beta)\, d\beta.$$

Es werden sich also in $C_s$ beide Theile heben, also sein:

$$C_s = 0,$$

dagegen in $B_s$ addiren, und man hat für alle Werthe von $z$ zwischen 0 und $\pi$:

2)
$$\varphi(z) = \frac{B_0}{2} + B_1 \cos z + B_2 \cos 2z + \ldots,$$
$$B_s = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \cos s\alpha\, \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

Stellt man dagegen die Bedingung, dass zwischen 0 und $\pi$:
$$f(z) = \varphi(z),$$
zwischen $\pi$ und $2\pi$:
$$f(z) = \varphi(2\pi - z)$$
sei, so werden alle $B_s$ verschwinden, und man hat, wenn $z$ zwischen 0 und $\pi$ liegt:

3)
$$\varphi(z) = C_1 \sin z + C_2 \sin 2z + \ldots,$$
$$C_s = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin s\alpha\, \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

Ausserhalb der Grenzen 0 und $\pi$ ist der Werth der Reihe vollständig bestimmt durch die gegebenen Bedingungen, und durch den Umstand, dass sie die Periode $2\pi$ hat. Es kann aber innerhalb der Grenzen 0 und $\pi$ die Function $\varphi(z)$ noch beliebig bestimmt werden. — Sei z. B. Figur *ABCD* (Fig. 81) ein Trapez, die Winkel bei *A* und *B* untereinander beide gleich 45°, die Projectionen *AE* und

Fig. 81.



*BF* von *AC* und *BD* auf die Grundlinie sollen beide gleich $a$ sein, und der Linie *AB* geben wir der Einfachheit wegen die Länge $\pi$. Es ist dann, wenn wir *A* als Anfangspunkt der Coordinaten, *AB* als Abscissenaxe betrachten, die Ordinate jedes Punktes der gebrochenen Linie *ACDB* offenbar eine Function $\varphi(x)$ der Abscisse $x$, welche folgenden Bedingungen unterworfen ist.

Für $0 < x < a$ ist $\varphi(x) = x$, da $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ ist,

für $a < x < \pi - a$: $\varphi(x) = a$,

für $\pi - a < x < \pi$ ist $\varphi(x) = \pi - x$,

Man kann also $\varphi(x)$ nach Reihe 3) entwickeln, da der Verlauf von $\varphi(x)$ willkürlich ist, wenn $x$ grösser als $\pi$ wird. Wir haben:

$$C_s = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin s\alpha\, \varphi(\alpha)\, d\alpha = \frac{2}{\pi}\int_0^a \alpha \sin s\alpha\, d\alpha + \frac{2}{\pi}\int_a^{\pi - a} a \sin s\alpha\, d\alpha$$
$$+ \frac{2}{\pi}\int_{\pi - a}^{\pi} (\pi - \alpha) \sin s\,\alpha\, d\alpha.$$

Im letzten Integrale setzen wir $\pi - \alpha = \beta$, und erhalten:
$$\pm \frac{2}{\pi}\int_0^a \beta \sin s\beta\, d\beta,$$
wo das positive Zeichen zu nehmen ist, wenn $s$ ungrade ist, das negative, wenn $s$ grade. Im erstern Falle werden sich das erste und dritte Integral summiren, also:
$$\frac{4}{\pi}\int_0^a \alpha \sin s\alpha\, d\alpha$$

geben, im letztern heben sie sich. Das mittlere Integral gibt:

$$\frac{2a}{s\pi}\,[\cos s\alpha - \cos s\,(\pi - \alpha)] = \frac{4a}{s\pi}\cos s\alpha,$$

wenn $s$ ungrade ist, und Null, wenn $s$ grade ist. — Aus der Reihe:

$$\varphi\,(x) = C_1 \sin x + C_2 \sin 2x + C_3 \sin 3x + \ldots$$

fallen also die mit graden Vielfachen der Sinus behafteten Glieder ganz weg. Man hat nun:

$$\int \alpha \sin s\alpha \, d\alpha = -\frac{s}{\alpha}\cos s\alpha + \int \frac{\cos s\alpha}{s}\,d\alpha = -\frac{\alpha\cos s\alpha}{s} + \frac{\sin s\alpha}{s^2},$$

oder wenn man das Integral in den Grenzen 0 und $\alpha$ nimmt und mit $\frac{4}{\pi}$ multiplicirt: $\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin s\alpha}{s^2} - \frac{\alpha\cos s\alpha}{s}\right)$, und dies mit dem Werthe des mittleren Integrals vereinigt, gibt für ungrade $s$:

$$C_s = \frac{4}{\pi s^2}\sin s\alpha.$$

Es wird also die Ordinate $\varphi\,(x)$ vorgestellt durch die Reihe:

$$\varphi\,(x) = \frac{4}{\pi}\,(\sin\alpha\sin x + \frac{\sin 3\alpha\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5\alpha\sin 5x}{5^2} + \frac{\sin 7\alpha\sin 7x}{7^2} + \ldots).$$

Setzt man noch $\alpha = \frac{\pi}{2}$, wo sich dann das Trapez in ein gleichschenkliges Dreieck verwandelt, so hat man:

$$\varphi\,(x) = \frac{4}{\pi}\,(\sin x - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \ldots).$$

Die Fourrier'schen Reihen sind zuerst in Bezug auf reelle Werthe der Variablen in Anwendung gekommen, und zwar bei Gelegenheit des Problems der schwingenden Saite (siehe den Artikel: Schwingungen elastischer Körper) durch Lagrange, obgleich Euler diese Reihen schon kannte. Ihre hohe Wichtigkeit für den Zweck, willkürliche und discontinuirliche Functionen anszudrücken, wurde zuerst vollständig von Fourrier erkannt (*théorie analytique de chaleur*). Die Convergenz der Reihen für reelle Variablen bewies zuerst Dirichlet (Crelle's Journal, Bd. 4). Ihre grosse Wichtigkeit für die Theorie der complexen Variabien ist in der neuesten Zeit erst völlig erkannt worden.

Noch bemerken wir, dass sich eine zweite Entwickelung nach Potenzen von $e^{\alpha x i}$ analog der zweiten im vorigen Abschnitte finden lässt.

19) Grundzüge der Residuenrechnung.

Wir haben noch eine Entwickelung zu geben, welche alle eindeutigen Functionen in einer nicht von Gebiet zu Gebiet wechselnden Entwickelung darstellt. Es sind dazu jedoch noch einige andere Betrachtungen nöthig, welche die von Cauchy so genannte Residuenrechnung bilden.

Hat eine Function $f(x)$ die Eigenschaft, für $x = \alpha$ discontinuirlich zu werden, ohne dass $\alpha$ ein Windungspunkt ist, so lässt sich, wenn man Punkt $\alpha$ mit einem beliebig kleinen Kreise umgibt, zwischen der Peripherie dieses Kreises und derjenigen concentrischen, welche durch die $\alpha$ nächste Discontinuität oder Mehrdeutigkeit geht, die Function:

$$f(x) = f(\alpha + y)$$

nach ganzen positiven und negativen Potenzen von $y = x - \alpha$ entwickeln, wie wir gesehen haben.

Es ist also:

$$f(x) = a_0 + a_1\,(x-\alpha) + a_2\,(x-\alpha)^2 + \ldots,$$
$$+ \frac{b_1}{x-\alpha} + \frac{b_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots$$

Die Coefficienten dieser Entwickelung sind Abschnitt 17) gegeben. Da der erste $\alpha$ umgebende Kreis beliebig klein sein kann, so gilt diese Entwickelung für alle Werthe von $x$, welche im zweiten Kreise liegen. Es lässt sich nun folgender Satz beweisen.

I. Ist die Discontinuität in $f(x)$ für $x = \alpha$ erster Gattung, so ist in der Entwickelung nach Potenzen von $x - \alpha$ die Anzahl der mit negativen Potenzen von $x - \alpha$ behafteten Glieder immer eine endliche.

Offenbar nämlich ist in diesem Falle:

$$\frac{1}{f(\alpha)} = 0,$$

und bleibt continnirlich. Man kann daher in den angegebenen Grenzen $\frac{1}{f(\alpha)}$ nach positiven Potenzen von $(x-\alpha)$ entwickeln, also:

$$\frac{1}{f(x)} = a_0 + a_1 (x-\alpha) + a_2 (x-\alpha)^2 + \dots$$

Wegen:

$$\frac{1}{f(\alpha)} = 0$$

wird aber $a_0 = 0$. Es kann ausserdem noch eine beliebige Anzahl der Coefficienten $a_1, a_2 \dots$ verschwinden. Wir nehmen daher an, dass $a_s$ der erste sei, wo dies nicht stattfinde, und erhalten:

$$\frac{1}{f(x)} = a_s (x-\alpha)^s + a_{s+1} (x-\alpha)^{s+1} + \dots,$$

$$f(x) = \frac{1}{a_s (x-\alpha)^s + a_{s+1} (x-\alpha)^{s+1} + \dots}.$$

In diesem Falle sagt man auch:

„$f(x)$ habe in Pnnkt $\alpha$ eine Unendlichkeit von der $s$ ten Ordnnng.“

Es ist dann:

$$f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)^s} \left[ \frac{1}{a_s + a_{s+1}(x-\alpha) + a_{s+2}(x-\alpha)^2 + \dots} \right] = \frac{1}{(x-\alpha)^s} \varphi(x),$$

und $\varphi(x)$ ist eine Function, die für $x = \alpha$ continuirlich bleibt und nicht Null wird. Man kann also setzen:

$$\varphi(x) = b_0 + b_1 (x-\alpha) + b_2 (x-\alpha)^2 + \dots,$$

woraus sich ergibt:

1) $$f(x) = \frac{b_0}{(x-\alpha)^s} + \frac{b_1}{(x-\alpha)^{s-1}} + \dots + \frac{b_{s-1}}{x-\alpha} + b_s + b_{s+1}(x-\alpha),$$

womit unser Satz erwiesen ist.

Zur Bestimmung der Grössen $b$ hat man dann die Gleichungen:

2) $$\varphi(x) = (x-\alpha)^s f(x).$$

$$b_0 = \varphi(\alpha), \quad b_1 = \varphi'(\alpha), \quad b_2 = \frac{\varphi''(\alpha)}{1 \cdot 2} \dots$$

„Eine Unendlichkeit $s$ ter Ordnnng der Function $f(x)$ in Pnnkt $\alpha$ kann man also als eine solche definiren, die so beschaffen ist, dass $(x-\alpha)^s$ für $x = \alpha$ continuirlich und von Null verschieden ist.“

Bei Discontinnitäten zweiter Gattung findet selbstverständlich keine solche Grenze in der Anzahl der mit negativen Potenzen behafteten Glieder statt; die Reihe geht ins Unendliche.

„In jedem Falle nennt man den Coefficienten von $\frac{1}{x-\alpha}$ in der Entwickelung von $f(x)$ das Residuum von $f(x)$ für Pnnkt $\alpha$.“

Die Bezeichnung dafür soll sein:

$$\text{Res}_\alpha f(x).$$

„Unter:

$$\Sigma \, \text{Res} \, f(x)$$

verstehen wir die Summe aller Residuen, welche den Discontinnitäten von $x$, $\alpha, \beta \dots$ im ganzen Raume oder innerhalb eines angegebenen Gebietes entsprechen.“

Bei einer Discontinnität $s$ ter Ordnung von $f(x)$ ist also das Residuum:

$$\text{Res}_\alpha f(x) = b_{s-1},$$

oder:

3)
$$\operatorname{Res}_\alpha f(x) = \frac{\varphi^{(s-1)}(\alpha)}{1\cdot 2 \ldots (s-1)},$$

und:

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^s f(x).$$

Sei jetzt $\alpha$ wieder eine beliebige Discontinuität, jedoch keine Mehrdeutigkeit von $f(x)$, und untersuchen wir das Integral:

$$\int^{(A)} f(\lambda)\, d\lambda,$$

welches sich erstrecken soll über eine einfache geschlossene Curve $A$, welche $\alpha$ umgibt und keinen zweiten critischen Punkt enthält. Man kann dann, da für alle diese Bedingung erfüllenden Umfänge der Werth des Integrals derselbe ist, demselben die Peripherie eines Kreises substituiren, dessen Mittelpunkt $\alpha$ und dessen Radius beliebig klein ist. Man hat dann als Werth des Integrals, wenn $\varrho$ der Radius ist:

$$i\int_0^{2\pi} f(\alpha+\varrho e^{\varphi i})\varrho e^{\varphi i} d\varphi.$$

$$f(\alpha+\varrho e^{\varphi i}) = A_0 + A_1 \varrho e^{\varphi i} + A_2 \varrho^2 e^{2\varphi i} + \ldots,$$
$$+ B_1 \varrho^{-1} e^{-\varphi i} + B_2 \varrho^{-2} e^{-2\varphi i} + \ldots,$$

wo also:

$$B_1 = \operatorname{Res}_\alpha f(x)$$

ist. Führt man die Integration aus, so sieht man leicht, dass alle Glieder, welche nicht $B_1$ entsprechen, also mit Potenzen von $e^{\varphi i}$ behaftet sind, Integrale geben, die für 0 und $2\pi$ gleich werden, also verschwinden, und es bleibt nur der Theil:

$$i\int_0^{2\pi} B_1\, d\varphi = 2\pi i B_1$$

übrig.

II. Der Werth des Integrales:

$$\int^{(A)} f(\lambda)\, d\lambda,$$

ausgedehnt über eine den Discontinuitätspunkt $\alpha$, der jedoch kein mehrfacher Punkt ist, umgebende geschlossene Curve, welche keinen zweiten critischen Punkt enthält, ist gleich $2\pi i \operatorname{Res}_\alpha f(x)$.

Möge aber jetzt eine einfache geschlossene Curve mehrere Discontinuitäten umschliessen, so wird der Werth des über sie zu erstreckenden Integrals gleich dem der Summe derjenigen Integrale sein, welche sich über Curven erstrecken, die von der ersten umschlossen sind, und jede einen Discontinuitätspunkt umgehen, also:

III. Erstreckt sich $\int^{(A)} f(\lambda)\, d\lambda$ über eine einfache Curve, die mehrere Discontinuitäten umschliesst, so ist:

4)
$$\int^{(A)} f(\lambda)\, d\lambda = 2\pi i\, \Sigma \operatorname{Res} f(x)$$

die Residuensumme ausgedehnt auf alle umschlossenen Discontinuitäten.

Leicht ergibt sich hieraus auch:

IV. Erstrecken sich die Integrale $\int^{(A)} f(\lambda)\, d\lambda$, $\int^{(B)} f(\lambda)\, d\lambda$ über zwei geschlossene einfache Curven derart, dass Curve $B$ von Curve $A$ ganz umschlossen wird; sind ferner in dem Ringe zwischen $B$ und $A$ nur Discontinuitäten, die nicht mehrfache Punkte sind, vorhanden, so hat man:

5)
$$\int^{(A)} f(\lambda)\, d\lambda = \int^{(B)} f(\lambda)\, d\lambda + 2\pi i\, \Sigma \operatorname{Res} f(x).$$

Die Residuensumme erstreckt sich über alle zwischen $A$ und $B$ liegenden Discontinuitäten.

Diese wichtigen Sätze geben unter Anderm Methoden zur Berechnung bestimmter Integrale. (Vergleiche den Artikel: Quadratur, analytische, Abschnitt 42).

Es sollen hier einige andere Anwendungen dieser wichtigen Theorie folgen.

Selbstverständlich kann die Function $f(x)$ auch rational und endlich sein. Sei demnach gegeben $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, wo $\varphi$ und $\psi$ Polynome bezüglich vom $m$ten und $n$ten Grade sind. Jeder Wurzel der Gleichung

$\psi(x)=0$ entspricht dann ein Residuum. Die Anzahl derselben ist aber der Anzahl der ungleichen Wurzeln gleich, also nur $n$, wenn diese Wurzeln alle ungleich sind. Die Summe der allen Wurzeln entsprechenden Residuen ist nun offenbar $\frac{1}{2\pi}\int^{(A)}\frac{\varphi(\lambda)}{\psi(\lambda)}d\lambda$ erstreckt auf eine Curve, die alle Wurzeln von $\psi(x)=0$ einschliesst; machen wir die Substitution $\lambda=\frac{1}{\mu}$, so kommt: $\frac{1}{2\pi i}\int^{(B)}\frac{\varphi\left(\frac{1}{\mu}\right)d\mu}{\mu^2\psi\left(\frac{1}{\mu}\right)}$, erstreckt auf eine Curve, die den Punkt $\mu=0$ allein umgibt, für die also auch ein Kreis mit abnehmendem Radius substituirt werden kann. Ist nun $m$ kleiner als $n$, so hat man, wenn man $n=m+h$ setzt:

$$\frac{\varphi\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\mu^2\psi\left(\frac{1}{\mu}\right)}=\frac{a_0+\frac{a_1}{\mu}+\ldots+\frac{a_m}{\mu^m}}{\mu^2\left(b_0+\frac{b_1}{\mu}+\ldots+\frac{b_{m+h}}{\mu^{m+h}}\right)}=\frac{\mu^{h-2}(a_m+a_{m-1}\mu+\ldots)}{b_{m+h}+b_{m+h-1}\mu+\ldots}$$

$$=\mu^{h-2}\left\{\frac{a_m}{b_{m+h}}+\beta\mu+\ldots\right\},$$

wenn man, wie für abnehmendes $\mu$ immer geschehen kann, den Bruch in eine Reihe entwickelt, also wenn man statt der Curve $B$ einen Kreis mit abnehmendem Radius $r$ nimmt, und demgemäss die höhern Potenzen von $r$ vernachlässigt:

$$\Sigma\,\mathrm{Res}\,\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{1}{2\pi}\frac{a_m}{b_{m+h}}r^{h-1}\int_0^{2\pi}e^{(h-1)\varphi i}d\varphi,$$

ein Ausdruck, welcher verschwindet, wenn $h$ grösser als 1 ist, und für $h=1$ übergeht in $\frac{a_m}{b_{m+h}}$. Also:

V. Die Summe aller Residuen des Bruches $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ ist gleich Null, wenn $\psi(x)$ ein Polynom ist, das um mehr als einen Grad höher als $\varphi(x)$ ist. Die Residuensumme ist gleich dem Verhältniss des Coefficienten der höchsten Potenz von $\varphi(x)$ zu dem der höchsten von $\psi(x)$, wenn letzteres um einen Grad höher ist als ersteres.

Nach Formel 3) ist noch, wenn $a$ eine $s$fache Wurzel der Gleichung $\psi(x)=0$ ist:

$$6)\qquad \mathrm{Res}_a\,\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{1}{1\cdot 2\ldots(s-1)}\frac{d^{s-1}}{dx^{s-1}}\left(\frac{(x-a)^s\varphi(x)}{\psi(x)}\right),$$

wo nach dem Differenziiren $x=a$ zu setzen ist. Für $s=1$ ist noch:

$$6\text{a})\qquad \mathrm{Res}_a\,\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{(x-a)\varphi(a)}{\psi(a)}=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}.$$

Da nämlich Zähler und Nenner Null werden, kann man dafür ihre Differenzialquotienten für den Werth $x=a$ substituiren.

Einer der Hauptvortheile der Residuenrechnung ist der, dass sie oft dann allgemeine Ausdrücke gibt für Formeln, deren Beschaffenheit sich ändert, je nachdem gewisse Gleichungen mehr oder weniger gleiche Wurzeln haben.

Wir wollen dies an einem Beispiele zeigen, welches die Theorie der linearen Differenzialgleichungen betrifft, und zwar stellen wir uns eine ganz allgemeine Aufgabe.

20) **Digression auf die linearen Differenzialgleichungen.**

„Ein beliebiges System linearer Differenzialgleichungen ist gegeben. Es sollen allgemeine Ausdrücke für die Integrale gefunden werden, welche gegebenen Anfangsbedingungen genügen."

Bekanntlich hängt die Gestalt der Integrale bei Anwendung der gewöhnlichen Methode von der Anzahl der gleichen Wurzeln einer algebraischen Gleichung ab. Sei:

$$1)\qquad b^{(s)}\frac{dx_s}{dt}+a_0^{(s)}x_0+a_1^{(s)}x_1+\ldots+a^{(s)}_{n-1}x_{n-1}=0$$

das Symbol für die $n$ Gleichungen; die $b$ und $a$ sind beliebige Constanten und für $s$ sind alle Werthe von 0 bis $n-1$ zu setzen.

Sei ferner:

$$2)\qquad x_s=\xi_s\quad\text{für}\quad t=0.$$

Setzen wir:

$$3)\qquad x_s=\frac{1}{2\pi i}\int\varphi_s(u)\,e^{ut}\,du,$$

wo $\varphi_0, \varphi_1 \ldots$ zu bestimmende Functionen von $u$ sind, und die Grenzen der Integration nachher festgestellt werden sollen. Durch Einsetzen von 3) in 1) erhält man:

$$\int\Big(b^{(s)}u\,\varphi_s(u)+a_0^{(s)}\varphi_0(u)+a_1^{(s)}\varphi_1(u)+\ldots+a^{(s)}_{n-1}\varphi_{n-1}(u)\Big)e^{ut}du=0.$$

Offenbar ist diese Bedingung erfüllt, wenn das Integral sich über eine geschlossene Curve erstreckt, und das Argument eine beliebige ganze Function von $u$, also, da $e^{ut}$ immer den Charakter einer solchen hat, wenn z. B. der Ausdruck in der Klammer eine Constante ist. Dies führt zu den Gleichungen:

$$4)\ a_0^{(s)}\varphi_0(u)+a_1^{(s)}\varphi_1(u)+\ldots+a^{(s)}_{s-1}\varphi_{s-1}(u)+\Big(a_s^{(s)}+b^{(s)}u\Big)\varphi_s(u)$$
$$+a^{(s)}_{s+1}\varphi_{s+1}(u)+\ldots+a^{(s)}_{n-1}\varphi_{n-1}(u)=c_s,$$

wo die Grössen $c_s$ zu bestimmende Constanten sind. Aus diesen Gleichungen ergibt sich sogleich durch Elimination:

$$5)\qquad \varphi_s(u)=\frac{c_0\dfrac{\partial\triangle(u)}{\partial a_s^{(0)}}+c_1\dfrac{\partial\triangle(u)}{\partial a_s^{(1)}}+\ldots+c_{n-1}\dfrac{\partial\triangle(u)}{\partial a_s^{(n-1)}}}{\triangle(u)},$$

wenn man setzt:

$$6)\ \triangle(u)=\begin{vmatrix} a_0^{(0)}+b^{(0)}u, & a_1^{(0)}, & a_2^{(0)} & \ldots & a^{(0)}_{n-1}\\ a_0^{(1)}, & a_1^{(1)}+b^{(1)}u, & a_2^{(1)} & \ldots & a^{(1)}_{n-1}\\ a_0^{(2)}, & a_1^{(2)}, & a_2^{(2)}+b^{(2)}u & \ldots & a^{(2)}_{n-1}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_0^{(n-1)}, & a_1^{(n-1)}, & a_2^{(n-1)} & \ldots & a_{n-1}^{(n-1)}+b^{(n-1)}u\end{vmatrix}.$$

Um die Grössen $c_0, c_1 \ldots c_{n-1}$ zu bestimmen, wollen wir das Integral in 3) über eine Curve ausdehnen, welche alle Discontinuitäten, d. h. alle Wurzeln der Gleichung $\triangle(u)=0$ einschliesst. Bemerken wir dann, dass von den Grössen

$\frac{\partial \triangle(u)}{\partial a_s^{(t)}}$ alle von der zweiten Ordnung sind, wo $s$ und $t$ verschieden, dass dagegen $\frac{\partial \triangle(u)}{\partial a_s^{(s)}}$ von der $n-1$ten Ordnung ist, so sieht man nach dem am Ende des vorigen Abschnittes Gesagten, dass für $t=0$ sich $x_s$ reducirt auf den Ausdruck $\frac{c_s}{b_s}$. Es ist nämlich $b_0\, b_1 \ldots b_{s-1}\, b_{s+1} \ldots b_{n-1}$ der Coefficient der höchsten Potenzen von $\frac{\partial \triangle(u)}{\partial a_s^{(s)}}$, $b_0\, b_1 \ldots b_{n-1}$ der der höchsten Potenz von $\triangle(u)$, das Verhältniss beider also $\frac{1}{b_s}$. Den gegebenen Anfangsbedingungen wird also genügt, wenn man setzt:

$$c_s = b_s\, \xi_s,$$

und somit ist:

7) $$x_s = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{\sum\limits_{\varrho=0}^{\varrho=n-1}\left\{\xi_t \frac{\partial \triangle(u)}{\partial a_s^{(\varrho)}}\right\}}{\triangle(u)} e^{ut}\, du,$$

das Integral auf eine geschlossene Curve bezogen, welche alle Wurzeln der Gleichung $\triangle(u)=0$ umgibt, oder was dasselbe ist:

7a) $$x_s = \Sigma\, \mathrm{Res}\, \frac{\sum\limits_{\varrho=0}^{\varrho=n-1} \xi_t \frac{\partial \triangle(u)}{\partial a_s^{(\varrho)}} e^{ut}}{\triangle(u)}.$$

Diese Formel soll noch für den Fall specialisirt werden, dass eine Gleichung $n$ter Ordnung gegeben ist. Dieselbe sei:

$$b\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}} + a_{n-2}\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}} + \ldots + a_0\, x = 0.$$

Sie ist identisch mit dem System:

$$\frac{dx}{dt} = x_1,\ \frac{dx_1}{dt} = x_2 \ldots \frac{dx_{n-2}}{dt} = x_{n-1},$$

$$b\frac{dx_{n-1}}{dt} + a_0 x + a_1 x_1 + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} = 0.$$

In den Gleichungen 7) und 7a) kommt es dann nur auf den Werth $x_s = x_0$ an.

Ferner ist, wenn $s$ ungleich $n-1$ ist, $a_p^{(s)} = 0$ wenn $p$ ungleich $s+1$ ist, und $a^{(s)}_{s+1} = -1$, $b_s = 1$, aber $a_p^{(n-1)} = a_p$, $b^{(n-1)} = b$; dann ergibt sich:

$$\triangle(u) = \begin{vmatrix} u, & -1, & 0 & 0 & \ldots & 0, & 0 \\ 0, & u, & -1, & 0 & \ldots & 0, & 0 \\ 0, & 0, & u, & -1 & \ldots & 0, & 0 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ 0, & 0 & 0, & 0 & \ldots & u, & -1 \\ a_0, & a_1, & a_2, & a_3 & \ldots & a_{n-2}, & a_{n-1}+bu \end{vmatrix},$$

oder:

$$\triangle(u) = bu^n + a_{n-1} u^{n-1} + a_{n-2} u^{n-2} + \dots + a_1 u + a_0$$

Die Unterdeterminanten nehmen ebenfalls eine einfachere Form an. Es ergibt sich nämlich sehr leicht:

$$\frac{\partial \triangle(u)}{\partial a_0^{(n-1)}} = 1, \qquad \frac{\partial \triangle(u)}{\partial a_0^{(n-2)}} = a_{n-1} + bu,$$

$$\frac{\partial \triangle(u)}{\partial a_0^{(n-3)}} = \begin{vmatrix} u, & -1 \\ a_{n-2}, & a_{n-1} + bu \end{vmatrix} = bu^2 + a_{n-1} u + a_{n-2},$$

$$\frac{\partial \triangle(u)}{\partial a_0^{(n-4)}} = \begin{vmatrix} u, & -1, & 0 \\ 0, & u, & -1 \\ a_{n-3}, & a_{n-2}, & a_{n-1} + bu \end{vmatrix} = bu^3 + a_{n-1} u^2 + a_{n-2} n + a_{n-3}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

Das Gesetz des Fortschreitens dieser Ausdrücke ist leicht ersichtlich. Man erhält auf diese Weise:

$$\Sigma_q \xi_q b_q \frac{\partial \triangle(u)}{\partial a_0^{(q)}} = b(\xi_0 u^{n-1} + \xi_1 n^{n-2} + \dots + \xi_{n-1})$$
$$+ a_{n-1}(\xi_0 u^{n-2} + \xi_1 n^{n-3} + \dots + \xi_{n-2}) + \dots + a_2(\xi_0 n + \xi_1) + a_1 \xi_0.$$

Diesem Werthe lässt sich ein bequemer symbolischer Ansdruck geben. Vertauscht mag nämlich die Index der $\xi$ mit Exponenten, so kommt:

$$\Sigma_q \xi_q b_q \frac{\partial \triangle(u)}{\partial a_0^{(q)}} = \frac{u^n - q + a_{n-1}(n^{n-1} - \xi^{n-1}) + \dots + a_0(u^0 - \xi^0)}{u - \xi}$$
$$= \frac{\triangle(u) - \triangle(\xi)}{n - \xi}.$$

Es ist also:

8) $$x = \Sigma \operatorname{Res} \left( \frac{\triangle(u) - \triangle(\xi)}{n - \xi} \frac{e^{ut}}{\triangle(u)} \right).$$

Nach der Entwickelnng von $\frac{\triangle(u) - \triangle(\xi)}{n - \xi}$ nach ganzen Potenzen von $\xi$ sind die Exponenten mit Indices zu vertauschen.

Die Formel 8) wollen wir aber noch anf den Fall ausdehnen, wo die Differenzialgleichung ein von $x$ nnabhängiges Glied enthält, also die Form hat:

$$b \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t).$$

Setzen wir znnächst nngleiche Wnrzeln voraus, nnd sei:

$$\frac{\Sigma_q \xi_q b_q}{\triangle'(u_p)} \frac{\partial \triangle u_p}{\partial a_p^{(q)}} = c_p,$$

so können die Grössen $c_0, c_1 \dots c_{n-1}$ als willkürliche Constanten betrachtet, und der Variation der Constanten nnterzogen werden. Dies führt zu den Gleichungen:

$$\Sigma_p \frac{dc_p}{dt} e^{u_p t} = 0, \quad \Sigma_p u_p \frac{dc_p}{dt} e^{u_p t} = 0 \ldots \Sigma_p u_p^{n-2} \frac{dc_p}{dt} e^{u_p t} = 0,$$

$$b \, \Sigma_p u_p^{n-1} \frac{dc_p}{dt} e^{u_p t} = f(t),$$

woraus sich leicht ergibt:

$$c_p = \frac{1}{\triangle'(u_p)} \int f(t) \, e^{-u_p t} \, dt.$$

Soll für $t=0$ sein:

$$x = \xi_0, \quad \frac{dx}{dt} = \xi_1, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = \xi_2 \ldots,$$

so ist offenbar das Integral in den Grenzen 0 und $t$ zu nehmen, dazu aber der constante Werth von $c_p$ zu addiren, wie er sich vor der Variation der Constanten ergab, also mit Berücksichtigung des Werthes der Residuensumme (6a des vorigen Abschnittes):

$$c_p = \frac{1}{\triangle'(u_p)} \int_0^t f(\lambda) \, e^{-u_p \lambda} \, d\lambda + \Sigma_q \frac{\xi_q}{\triangle'(u_p)} \frac{\partial \triangle(u_p)}{\partial a_0(q)}.$$

Der Werth von $x$ zerfällt dann in zwei Theile, deren einer das Integralzeichen enthält, der andere aber wie 8) ist, also:

$$x = \Sigma_p \Sigma_q \left\{ \frac{\xi_q^t b_q}{\triangle'(u_p)} \frac{\partial \triangle(u_p)}{\partial a(q)} e^{u_p t} + \frac{1}{\triangle'(u_p)} e^{u_p t} \int_0^t f(\lambda) \, e^{-u_p \lambda} \, d\lambda \right\},$$

oder:

9)
$$x = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{e^{ut} \left( \frac{\triangle(u) - \triangle(\xi)}{u - \xi} + \int_0^t f(\lambda) \, e^{-u\lambda} d\lambda \right)}{\triangle(u)},$$

d. h.:

9a)
$$x = \Sigma \, \mathrm{Res} \, \frac{e^{ut} \frac{\triangle(u) - \triangle(\xi)}{u - \xi} + \int_0^t f(\lambda) \, e^{-u\lambda} dx}{\triangle(u)}.$$

Um den Beweis für diese Formel zu führen, wenn nicht alle Wurzeln von $\triangle(u)=0$ ungleich sind, bemerke man, dass für $t=0$ das Integral in 9a) verschwindet, also derselbe Ausdruck wie in 8) erscheint, und somit die Anfangsbedingungen verificirt sind. Die Differenzialgleichung $n$ter Ordnung aber wird noch erfüllt, wie man leicht durch Einsetzen des Ausdruckes 9) in dieselbe ersieht.

21) **Allgemeingültige Entwickelung der eindeutigen Functionen in Reihen, welche Partialbrüche enthalten.**

Die Formel 4) des Abschnittes 19) wird angewandt auf die Function $\frac{f(\lambda)}{\lambda - z}$, wo $f(\lambda)$ eindeutig ist. Man sieht, da sich ausser den Discontinuitäten von $f(\lambda)$ in dieser Function noch diejenige befindet, welche $\lambda = z$ entspricht, wenn Punkt $z$ innerhalb der Curve $A$ liegt, und da:

$$\int \frac{f(\lambda) \, d\lambda}{\lambda - z} = 2\pi i \, f(z)$$

für die $z$ umgebende Curve ist, wie schon in den früheren Abschnitten gezeigt wurde, so hat man:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(A)}\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda - z} + \Sigma \operatorname{Res}\left(\frac{f(u)}{z-u}\right) = f(z),$$
$$\text{oder} \quad = 0,$$

je nachdem Punkt $z$ innerhalb oder ausserhalb des von $A$ begrenzten Raumes liegt. — Die Residuensumme geht auf alle von $A$ umschlossenen Discontinuitäten von $f(u)$. Diese Summe ist positiv genommen, da man statt $\frac{f(u)}{u-z}$, $\frac{f(u)}{z-u}$ geschrieben hat, wodurch die Function und offenbar auch die Residuen derselben das Zeichen ändern.

Lässt man die Curve $A$ sich ins Unendliche ausdehnen, so ist die linke Seite immer für jedes $z$ gleich $f(z)$, also:

$$1) \qquad f(z) = \Sigma \operatorname{Res}\frac{[f(u)]}{z-u} + \frac{1}{2\pi i}\int^{(A)}\frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda - z},$$

die Summe auf alle Discontinuitäten von $f(z)$ erstreckt.

Beschäftigen wir uns jetzt noch mit dem zweiten Gliede rechts. — Da $\lambda$ immer grösser als $z$ ist, so kann man:

$$\frac{1}{\lambda - z} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \frac{z}{\lambda} + \frac{z^2}{\lambda^2} + \ldots\right)$$

setzen, und dies Glied gibt also eine nach positiven Potenzen geordnete Reihe. Man kann nun statt der geschlossenen Curve $A$ (vergleiche Abschnitt 4), welche alle Discontinuitäten umgibt, eine andere setzen, welche den Unendlichkeitspunkt allein einschliesst, oder genauer gesagt, man kann in $\int^{(A)}\frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda$ für $\lambda$ setzen $\frac{1}{\mu}$, und da $\lambda$ bis ins Unendliche wächst, wird $\mu$ unendlich klein werden. Man erhält auf diese Weise:

$$-\int^{(B)}\frac{f\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\mu(1-z\mu)}\,d\mu,$$

wo $B$ die neue Curve vorstellt.

Was die Gleichung dieser Curve anbetrifft, so lässt sie sich leicht aus der von $A$ ableiten. Denn wie auch letztere beschaffen sei, so lässt sich setzen:

$$z = re^{\varphi i}, \quad r = F(\varphi),$$

wo $z$ ein beliebiger Punkt dieser Curve ist, und $\varphi$ von 0 bis $2\pi$, wenn sie einfach gewunden, sonst von 0 bis $2n\pi$ zu nehmen ist. Jedenfalls ist dann:

$$F(\varphi \pm 2n\pi) = F(\varphi).$$

Dies ist die Bedingung, dass die Curve geschlossen sei. Für $B$ ist nun zu setzen:

$$u = \frac{1}{z} = \varrho e^{\vartheta i},$$

wo:

$$\varrho = \frac{1}{r}, \vartheta = -\varphi$$

ist, also:

$$\varrho = \frac{1}{F(-\vartheta)}.$$

Dies ist die Gleichung von $B$. Es ist aber:

$$F(-\vartheta \mp 2n\pi) = F(-\vartheta),$$

also die Curve ebenfalls geschlossen. Da aber $\vartheta$ das entgegengesetzte Zeichen von $\varphi$ hat, so findet die Windung von $B$, also die Richtung der Integration im entgegengesetzten Sinne von $A$ statt. Man kann also, indem man beide Integrationen im gleichen Sinne vollzieht, setzen:

$$\int^{(A)}\frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda = \int^{(B)}\frac{f\left(\frac{1}{\mu}\right)d\mu}{\mu(1-z\mu)},$$

indem man mit der Umkehrung der Integrationsrichtung das Minuszeichen compensirt.

Ist die Curve $A$ ein Kreis, so ist auch $B$ ein solcher (vergleiche Abschnitt 4). Man darf aber nicht schliessen, dass man immer für $A$ und $B$ jede beliebige geschlossene (bezüglich unendlich grosse und unendlich kleine) Curve $A'$ und $B'$ setzen könne.

Es sind hierbei nämlich zwei Fälle zu unterscheiden:

I) $f(z)$ ist für jedes unendliche $z$ discontinuirlich, wie dies z. B. bis $\frac{1}{z^n}$ der Fall ist.

II) $f(z)$ ist nur für gewisse Werthe von $z$ discontinuirlich. Z. B. bei $\operatorname{tg} z$ ist dies der Fall, wenn $z = \frac{2s+1}{2}\pi$, und $s = \infty$ genommen wird; für jedes andere unendliche $z$ aber findet noch Continuität statt.

Beschäftigen wir uns mit dem letzteren Falle zuerst. Dann ist die Annahme eines Unendlichkeitspunktes eigentlich gar nicht gestattet. Lässt man Curve $A$ sich in $A'$ ändern, so befinden sich zwischen beiden Discontinuitäten, und damit eine Curve für die andere gesetzt werden kann, ist es nicht allein nöthig, dass das Residuum einer jeden einzelnen davon in Gleichung 1), sondern dass auch die Summen aller sich der Null nähern. Was die Curve $B$ anbetrifft, so werden sich die Discontinuitäten von $f(s)=f\left(\frac{1}{u}\right)$ im Punkte $u$ gleich 0 mit zunehmender Dichtigkeit schaaren.

Um bei diesem wichtigen Gegenstande noch einen Augenblick zu verweilen, denken wir uns für $A$ einen Kreis mit zunehmendem Radius, und die darin enthaltenen Discontinuitäten etwa nach concentrischen Kreisen geordnet, in die Summe in 1) aufgenommen. Andererseits sei $A'$ ein Parallelogramm mit zunehmenden Seiten, und die Discontinuitäten innerhalb desselben etwa einer Seite parallel geordnet. Da nun Parallelogramm und Kreis sich nicht decken, so stimmt ein Theil der Discontinuitäten, freilich nur die ins Unendliche fallenden, in der Entwickelung von $f(z)$ in Gleichung 1) nicht mit einander überein, obgleich beide Entwickelungen convergiren. Man sagt dann gewöhnlich, wiewohl mit Unrecht, dass die Entwickelung von der Anordnung abhänge. Sie hängt in der That von den Gliedern selbst ab, die nicht alle übereinstimmen.

Finde jetzt Fall I. statt. Da $f(z)$ für jedes unendliche $z$ discontinuirlich ist, so findet mit $f\left(\frac{1}{u}\right)$ für $u=0$ dies statt, jede abnehmende Curve $B$ oder $B'$, die $u=0$ umgibt, schliesst also nur einen Discontinuitätspunkt, den Unendlichkeitspunkt, ein, und das Vertauschen beider Curven ist gestattet. Also immer, wenn Fall II. gilt, können wir für $B$ einen Kreis setzen, dessen Radius abnimmt, und es ist das Integral:

$$\frac{1}{2\pi i}\int (B) \frac{f\left(\frac{1}{\mu}\right)}{\mu(1-z\mu)} d\mu$$

auf denselben auszudehnen. Der Werth dieses Integrals ist:

$$\text{Res}\left(\frac{f\left(\frac{1}{v}\right)}{v(1-zv)}\right).$$

Unter dieser Bezeichnung ist das Residuum des eingeklammerten Ausdruckes für die Discontinuität $v=0$ verstanden.

Man kann aber immer setzen:

$$f\left(\frac{1}{v}\right)=\frac{a_0}{v^s}+\frac{a_1}{v^{s-1}}+\frac{a_2}{v^{s-2}}+\ldots+\frac{a_{s-1}}{v}+a_s+a_{s+1}v+\ldots,$$

wo für $s=0$ eine Discontinuität $s$ ter Ordnung vorausgesetzt ist.

Keiner Discontinuität entspricht $s=0$, einer zweiter Gattung $s=\infty$. Setzt man noch, da $v$ abnimmt:

$$\frac{1}{v(1-zv)}=\frac{1}{v}+z+z^2v+z^3v^2+\ldots,$$

so erhält man, indem man diese Entwickelung mit der von $f\left(\frac{1}{v}\right)$ multiplicirt, aber nur das mit $\frac{1}{v}$ behaftete Glied nimmt:

$$\text{Res}_0\left(\frac{f\left(\frac{1}{v}\right)}{v(1-zv)}\right)=a_s+a_s+z+a_{s-2}z^2+\ldots+a_0z^s,$$

d. h. dieser Ausdruck ist gleich dem nicht mit negativen Potenzen behafteten Theile der Entwickelung von $f(z)$, welche für wachsendes $z$, d. h. für $z=\frac{1}{v}$ in der Nähe von $v=0$ gilt.

Diesen Theil der Entwickelung bezeichnen wir mit $B'_\infty f(z)$ und haben also:

$$\text{Res}_0\left(\frac{f\left(\frac{1}{v}\right)}{v(1-zv)}\right)=B'_\infty f(z).$$

Ist für $v=0$ keine Discontinuität vorhanden, so beschränkt sich dieser Ausdruck auf eine Constante $a_0$. Ist die Discontinuität zweiter Gattung, so hat man:

$$B'_{\infty} f(z) = a_s + a_{s-1} z + a_{s-2} z^2 + \ldots,$$

also eine unendliche Reihe.

Wir wollen auch das allgemeine Glied der Summe in 1) auf ähnliche Art ausdrücken. Sei dasselbe auf den Discontinuitätspunkt $\alpha$ bezogen, der von $s$ter Ordnung sein möge, so hat man in dessen Nähe:

$$f(u) = \frac{b_0}{(u-\alpha)^s} + \frac{b_1}{(u-\alpha)^{s-1}} + \frac{b^2}{(u-\alpha)^{s-2}} + \ldots + \frac{b_{s-1}}{u-\alpha}$$
$$+ b_s + b_{s+1}(u-\alpha) + \ldots,$$

ferner:

$$\frac{1}{z-u} = \frac{1}{z-\alpha-(u-\alpha)} = \frac{1}{z-\alpha} + \frac{u-\alpha}{(z-\alpha)^2} + \frac{(u-\alpha)^2}{(z-\alpha)^3} + \ldots$$

Nimmt man aus dem Product beider Entwickelungen das mit $\frac{1}{u-\alpha}$ behaftete Glied, so ergibt sich:

$$\operatorname{Res}_{\alpha} \frac{[f(\alpha)]}{z-u} = \frac{b_0}{(z-\alpha)^s} + \frac{b_1}{(z-\alpha)^{s-1}} + \frac{b_2}{(z-\alpha)^{s-2}} + \ldots + \frac{b_{s-1}}{z-\alpha},$$

also gleich dem mit negativen Potenzen behafteten Theil der Entwickelung von $f(z)$, welche in der Umgebung von $z=\alpha$ gilt. Bezeichnen wir diesen Theil der Entwickelung mit $B_{\alpha} f(z)$, so kommt:

$$\operatorname{Res}_{\alpha} \frac{f(u)}{z-u} = B_{\alpha} f(z).$$

(Die Zeichen $B$ und $B'$ ergänzen also einander insofern, dass das erste auf alle negativen, das zweite auf alle nicht negativen Potenzen geht.)

Ist die Discontinuität $\alpha$ von der ersten Ordnung, so ist offenbar:

$$B_{\alpha} f(z) = \frac{b_0}{z-\alpha} = \frac{1}{z-\alpha} \operatorname{Res}_{\alpha} f(z).$$

Ist sie zweiter Gattung, so ist:

$$B_{\alpha} f(z) = \frac{b_{s-1}}{z-\alpha} + \frac{b_{s-2}}{(z-\alpha)^2} + \ldots$$

Man hat also für jede eindeutige Function, wenn Fall I. Anwendung findet:

2) $$f(z) = \Sigma B_{\alpha} f(z) + B'_{\infty} f(z),$$

oder:

3) $$f(z) = \Sigma \operatorname{Res} \frac{[f(u)]}{z-u} + \operatorname{Res}_0 \left\{ \frac{f\left(\frac{1}{v}\right)}{v(1-zv)} \right\}.$$

In jedem Falle aber gilt Formel 1), wo man die Residuensumme ebenfalls durch $\Sigma B_{\alpha} f(z)$ ersetzen kann.

Uebrigens ist nach dem Maclaurinschen Satze;

$$b_{\varrho} = \frac{\varphi^{(\varrho)}(\alpha)}{1 \cdot 2 \ldots \varrho},$$

wo:

$$\varphi(x) = (x-\alpha)^s f(x),$$

und $\varphi^{(\varrho)}$ der $\varrho$te Differenzialquotient ist, ferner:

$$a_{\varrho} = \frac{\psi^{(\varrho)}(0)}{1 \cdot 2 \ldots \varrho}$$

wo:

$$\psi(x) = x^s f\left(\frac{1}{x}\right)$$

zu setzen ist.

Aus Gleichung 2) und 3) folgt nun: Jede eindeutige Function lässt sich als ganze Function vermehrt um eine Anzahl Partialbrüche $\frac{b_s}{(z-\alpha)^s}$ ausdrücken, d. h.:

Jede eindeutige Function hat entweder den Charakter einer ganzen Function oder den eines rationalen Bruches.

Die Formeln 1), 2) und 3) enthalten die Theorie der algebraischen und transcendenten Partialbrüche. Im ersten Falle ist die Summe eine endliche. Sie lässt sich in diesem Falle bekanntlich auch auf anderm Wege herleiten.

Für Fall II. wollen wir uns noch mit der Umwandlung des von $A$ abhän-

gigen Integrals beschäftigen. — Man kann nämlich, da die Curve ins Unendliche wächst, der Modul von $z$ also immer kleiner als der von $\lambda$ ist, die schon angeführte Entwickelung annehmen:

$$\int^{(A)} \frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda - z} = \int^{(A)} \frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda^2}\left(s + \frac{s^2}{\lambda} + \frac{z^3}{\lambda^2} + \ldots\right) + \int^{(A)} \frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda}.$$

Ist nun die Curve derart, dass auf ihr $f(\lambda)$ immer endlich bleibt, wie dies in dem bezeichneten Falle immer geschehen kann, da man nur in $A$ die Discontinuitäten zu umgehen braucht, so ist:

$$\mathrm{mod} \int^{(A)} \frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda^2}\left(s + \frac{z^2}{\lambda} + \ldots\right) < a \,\mathrm{mod} \int^{(A)} \frac{d\lambda}{\lambda^2}\left(s + \frac{z^2}{\lambda} + \ldots\right),$$

wo $a$ der grösste Modul ist, den $f(\lambda)$ annehmen kann. Das Integral, dessen Modul mit $a$ multiplicirt ist, hat zum allgemeinen Gliede des Argumentes $\frac{z^s}{\lambda^{s+1}}$;

das Integral ist $-\frac{1}{s}\frac{z^s}{\lambda^s}$, ein Ausdruck, der für eine geschlossene Curve verschwindet, da Anfangs- und Endpunkt zusammenfallen. Man kann also in diesem Falle das Integral in 1) ersetzen durch das einfachere: $\frac{1}{2\pi i}\int^{(A)} \frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda}$. In dem hier hingestellten Falle wird die Reihe der Glieder mit positiven Potenzen sich auf eine Constante beschränken. Also statt 1) erhält man:

1 a) $$f(s) = \Sigma B_\alpha f(z) + \frac{1}{2\pi i}\int^{(A)} \frac{f(\lambda)\,d\lambda}{\lambda}.$$

Man kann aber auch leicht entsprechende Formeln finden, die nur für einen Theil der Ebene gelten.

Seien $A$ und $B$ einfache geschlossene Curven, die keinen Windungspunkt einschliessen, die letztere ganz innerhalb der ersten, $z$ ein zwischen beiden enthaltener Punkt, so giebt Formel 5) des vorigen Abschnitts:

$$\frac{1}{2\pi i}\int^{(A)} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda - \frac{1}{2\pi i}\int^{(B)} \frac{f(\lambda)}{\lambda - z}\,d\lambda + \Sigma\,\mathrm{Res}\,\frac{[f(u)]}{s-u} = f(s).$$

Die Summe geht auf alle zwischen $A$ und $B$ liegenden Discontinuitäten. Es tritt nämlich das $s = u$ entsprechende Residuum, welches gleich $f(z)$ ist, hinzu, ganz wie oben.

Ersetzt man $A$ und $B$ durch concentrische Kreise, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt ist, so wird, wie in Abschnitt 17), sich das erste Integral nach positiven, das zweite nach negativen Potenzen von $z$ entwickeln lassen, und man erhält:

4) $$f(s) = \Sigma\,\mathrm{Res}\,\frac{[f(u)]}{z-u} + A_0 + A_1 s + A_2 s^2 + \ldots + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{s^2} + \ldots,$$

wo:

$$A_s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha)\,d\varphi}{\alpha^s}, \qquad \alpha = r e^{\varphi i},$$

$$B_s = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \beta^s f(\beta)\,d\varphi, \qquad \beta = \varrho e^{\varphi i}.$$

$r$ ist der Radius des grössern, $\varrho$ der des kleinern Kreises. Es ist wohl zu bemerken, dass man hier nicht wie in Abschnitt 17) $r$ und $\varrho$ mit einer zwischen ihnen liegenden Grösse vertauschen, eben so wenig beide identificiren kann, da der Ring Discontinuitäten enthält, und mit dem Ueberschreiten einer solchen die Integrale sich ändern.

Ist der Anfangspunkt kein Windungs- oder Discontinuitätspunkt, so fällt der Ausdruck $\int^{(B)}$ weg, für einen Raum bis zum nächsten critischen Punkte, und man hat in 4) $B_s = 0$.

Beispiele.
I. Sei:

$$f(z)=\frac{1}{\sin z}=\operatorname{cosec} z.$$

Um das vom Summenzeichen freie Glied zu finden, denken wir zwei Grade parallel der Axe der $y$, deren Abscissenwerthe sein sollen: $s\pi+\frac{\pi}{2}$ und $-\left(s\pi+\frac{\pi}{2}\right)$, ferner zwei Grade, parallel der Axe der $x$ und in wachsender Entfernung. Auf beiden erstern ist:

$$\operatorname{cosec} z=\operatorname{cosec}\left(\pm s\pi\pm\frac{\pi}{2}+yi\right)=\pm\frac{1}{\cos yi}=\pm\frac{2}{e^{y}+e^{-y}},$$

ein Werth, der immer endlich bleibt. Für die letztern Graden ist:

$$\operatorname{cosec} z=\operatorname{cosec}(x\pm hi)=\frac{zi}{e^{xi\mp h}-e^{-xi\pm h}},$$

ein Ausdruck, der mit wachsendem $h$ verschwindet.

Es ist also hier $\int\frac{\operatorname{cosec}\lambda\, d\lambda}{\lambda}$ auf dies Rechteck zu erstrecken. Dies Integral aber verschwindet, da zweien vom Mittelpunkt des Rechtecks aus symmetrisch liegenden Punkten des Umfanges gleiche Werthe von $\frac{\operatorname{cosec}\lambda}{\lambda}$ entsprechen, und die Integration bei beiden in entgegengesetzter Richtung fortschreitet. Somit ist:

$$\operatorname{cosec} z=\Sigma \operatorname{Res}\frac{\operatorname{cosec} u}{z-u}=\Sigma_{\alpha}\, B_{\pi}(\operatorname{cosec} z).$$

Discontinuitäten treten für $\alpha=s\pi$ ein, und es ist:

$$\operatorname{cosec}(s\pi+\mu)=\frac{(-1)^{s}}{\sin u}.$$

Da nun $\frac{u}{\sin u}$ für $u=0$ sich der Null nähert, hat man:

$$B_{s\pi}\, f(z)=\frac{(-1)^{s}}{z-s\pi},$$

also:

$$\operatorname{cosec} z=\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}\frac{(-1)^{s}}{z-s\pi}=\frac{1}{z}+2z\sum_{s=1}^{s=\infty}\frac{(-1)^{s}}{z^{2}-s^{2}\pi^{2}},$$

wie man erhält, wenn man je zwei Werthe, die $s=t$, $s=-t$ entsprechen, vereint.

Ersetzt man $z$ durch $\frac{\pi}{2}-z$, so erhält man:

$$\sec z=\sum_{s=-\infty}^{s=+\infty}\frac{(-1)^{s-1}}{z-\frac{2s-1}{2}\pi}=\pi\sum_{s=0}^{s=\infty}\frac{(2s+1)(-1)^{s}}{(2s+1)^{2}\frac{\pi^{2}}{4}-z^{2}}.$$

II. Sei:

$$f(z)=\cot z.$$

Dass das vom Summenzeichen freie Glied verschwindet, ist wie im vorigen Beispiele darzuthun. Discontinuitäten finden für $z=s\pi$ statt.

$$\cot(s\pi+\mu)=\cot\mu,$$

und da:

$$\mu\cot\mu=\frac{\mu\cos\mu}{\sin\mu}$$

sich für $u=0$ der Einheit nähert, so ist:

$$B_{s\pi} f(z) = \frac{1}{z - s\pi},$$

$$\cot z = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - s\pi} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{1}{z^2 - s^2\pi^2},$$

und wenn man $z$ mit $\frac{\pi}{2} - z$ vertauscht:

$$\operatorname{tg} z = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - \frac{2s+1}{2}\pi} = 2z \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{1}{(2s+1)^2\frac{\pi^2}{4} - z^2}.$$

Bei diesen Beispielen galt Formel 1). Um Formel 2) anzuwenden, wollen wir noch das Beispiel eines rationalen Bruches nehmen.

III. Sei:

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-\alpha_1)^{a_1}(z-\alpha_2)^{a_2} \dots (z-\alpha_p)^{a_p}},$$

wo $\varphi(z)$ eine ganze Function ist. — Die Function hat für $z=\alpha_s$ eine Unendlichkeit $a_s$ ter Ordnung, und somit ist:

$$\operatorname{Res}_{\alpha_s} \frac{[f(u)]}{z-u} = \frac{b_0}{(z-\alpha_s)^{a_s}} + \frac{b_1}{(z-\alpha_s)^{a_s-1}} + \dots + \frac{b_{a_s-1}}{z-\alpha_s},$$

wo:

$$b_\varrho = \frac{1}{\varrho!} \frac{d^\varrho}{dz^\varrho} [(z-\alpha_s)^{a_s} f(z)]$$

für $z=\alpha_s$, und:

$$\operatorname{Res}_0 \left( \frac{f\left(\frac{1}{v}\right)}{v(1-zv)} \right) = c_s + c_{s-1} z + c_{s-2} z^2 + \dots + c_0 z^s,$$

und:

$$c_\varrho = \frac{1}{\varrho!} \frac{d^\varrho}{dz^\varrho} z^s f\left(\frac{1}{z}\right)$$

für $z=0$.

$s$ gibt an, um wieviel Einheiten der höchste Exponent des Zählers von $f(z)$ das des Nenners, also den Ausdruck $c_1 + c_2 + \dots + c_p$ übertrifft.

22) Entwickelung eindentiger Functionen in Producte.

Wir nehmen an, dass die zu untersuchende eindeutige Function $f(z)$ entweder keine Discontinuität zweiter Gattung oder eine solche nur im Unendlichkeitspunkte habe. — Untersuchen wir jetzt den Ausdruck:

$$\frac{d \lg f(z)}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Derselbe hat im Zähler und Nenner dieselben Discontinuitäten, da $f'(z)$ in jedem Gebiete eindeutig und continuirlich ist, wo dies für $f(z)$ stattfindet. Diesen und den Nullwerthen von $f(z)$ können allein Discontinuitäten von unserm Ausdrucke entsprechen. Wir beweisen:

„dass für jede Null und Discontinuität von $f(z)$ eine solche von $\frac{f'(z)}{f(z)}$ stattfindet, und dass alle diese von der ersten Ordnung sind.“

Denn sei $\alpha$ eine Discontinuität von $f(z)$, so ist:

$$f(z) = \frac{b_0}{(z-\alpha)^s} + \frac{b_1}{(z-\alpha)^{s-1}} + \frac{b_2}{(z-\alpha)^{s-2}} + \ldots + \frac{b_{s-1}}{z-\alpha} + \varphi(z),$$

wo $\varphi(z)$ für $z = \alpha$ continuirlich ist, also:

$$f'(z) = -\left(\frac{s\,b_0}{(z-\alpha)^{s+1}} + \frac{(s-1)\,b_1}{(z-\alpha)^s} + \ldots + \frac{b_{s-1}}{(z-\alpha)^2} + \varphi'(z)\right),$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{s}{z-\alpha}\,\frac{b_0 + \frac{s-1}{s}\,b_1(z-\alpha) + \ldots + \frac{b_{s-1}}{s}(z-\alpha)^{s-1} + \varphi'(z)(z-\alpha)^s}{b_0 + b_1(z-\alpha) + \ldots + b_{s-1}(z-\alpha)^{s-1} + \varphi(z)(z-\alpha)^s}.$$

Der Ausdruck in der Klammer wird für $z = \alpha$ nicht unendlich, also ist in der That die Discontinuität erster Ordnung, und:

$$\operatorname{Res}_\alpha\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = -s, \quad B_\alpha\,\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{s}{z-\alpha}.$$

Sei ferner $f(z) = 0$ für $z = \beta$, so ist:

$$f(z) = a_n(z-\beta)^n + a_{n+1}(z-\beta)^{n+1} + \ldots,$$

denn jedenfalls verschwindet das von $z-\beta$ freie Glied. Ausserdem mögen noch $n-1$ Anfangsglieder verschwinden; wir sagen dann, $f(z)$ habe für $z = \beta$ eine Null von $n$ter Ordnung. Es ist dann:

$$f'(z) = n\,a_n(z-\beta)^{n-1} + (n+1)\,a_{n+1}(z-\beta)^n + \ldots,$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-\beta}\,\frac{a_n + \frac{n+1}{n}\,a_{n+1}(z-\beta) + \ldots}{a_n + a_{n+1}(z-\beta) + \ldots},$$

und da der Ausdruck in der Klammer für $z = \beta$ die Einheit gibt, so ist die Discontinuität erster Ordnung, und:

$$\operatorname{Res}_\beta\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right) = n, \quad B_\beta\,\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-\beta}.$$

Die Residuen sind also diejenigen Zahlen, welche die Ordnung der Null oder Unendlichkeit von $f(z)$ anzeigen, im letztern Falle negativ genommen. Man hat also:

$$\frac{d \lg f(z)}{dz} = \Sigma_\beta\,\frac{n}{z-\beta} - \Sigma_\alpha\,\frac{s}{z-\alpha} + U,$$

wo der Ausdruck $U$ eine nach ganzen Potenzen von $z$ fortschreitende Reihe angibt, und man hat, je nachdem Fall I. oder II. für die Function $\frac{f'(z)}{f(z)}$ stattfindet, entweder:

$$U = B'\infty\,\frac{f'(z)}{f(z)},$$

oder:

$$U = \frac{1}{2\pi i}\int^{(A)} \frac{d \lg f(\lambda)}{\lambda - z}.$$

Den eben gefundenen Werth von $\frac{d \lg f(z)}{dz}$ integriren wir in den Grenzen $z$ und $z_0$, derart, dass $z_0$ keiner Unendlichkeit und Null von $f(z)$ entspreche. Man erhält:

$$\lg\frac{f(z)}{f(z_0)}=\lg \Pi\frac{(z-\beta)^n(z_0-\alpha)^s}{(z_0-\beta)^n(z-\alpha)^s}+V,$$

wo $\Pi$ das Product aller der $\beta$ und $\alpha$ entsprechenden Ausdrücke anzeigt. Hier ist:

$$V=\int_{z_0}^{z} U dz;$$

es ergibt sich also:

1) $$V=-\frac{1}{2\pi i}\int^{(A)}\lg\frac{\lambda-z}{\lambda-z_0}\,d\lg f(\lambda),$$

oder:

$$V=\int_{z_0}^{z} B'_\infty\, d\lg f(z).$$

Setzen wir:

$$\frac{d\lg f(z)\,dz}{dz}=\ldots+\frac{a_{-2}}{z^2}+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots,$$

also:

$$B'_\infty\frac{d\lg f(z)}{dz}=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots,$$

so ist:

$$\int d\lg f(z)=\ldots-\frac{a_{-2}}{z}+a_{-1}\lg z+a_0z+a_1z^2+\ldots=\lg f(z),$$

$$\int B'_\infty\frac{d\lg f(z)}{dz}\,dz=a_0z+a_1z^2+\ldots=B'_\infty\lg f(z).$$

jedoch mit der Bemerkung, dass in der Entwickelung von $\lg f(z)$ nicht allein der mit negativen Potenzen von $z$ behaftete, sondern auch der mit $\lg z$ multiplicirte Theil bei der Bildung von $B'_\infty \lg f(z)$ wegbleibt, dass daher dieser Ausdruck kein constantes Glied hat; so wird also:

2) $V=B'_\infty\lg f(z)-B'_\infty\lg f(z_0)$.

Nun hat man:

3) $$f(z)=f(z_0)\,\Pi\left(\frac{z-\beta}{z_0+\beta}\right)^n\left(\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right)^s e^V.$$

In Fall II. (siehe vorigen Abschnitt) kann man die Begrenzung $A$ wieder so wählen, dass $\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)}$ auf der ganzen Curve $A$ endlich bleibt, und dann ist:

$$U=\frac{1}{2\pi i}\int^{(A)}\frac{f'(\lambda)}{\lambda f(\lambda)}d\lambda,$$

4) $$V=\frac{z-z_0}{2\pi i}\int^{(A)}\frac{f'(\lambda)}{\lambda f(\lambda)}d\lambda,$$

$$=\frac{z-z_0}{2\pi i}\int^{(A)}\frac{d\lg f(\lambda)}{\lambda}.$$

Welchen Werth von $V$ man auch nehme, so ist dies eine nach ganzen positiven Potenzen von $z$ geordnete Reihe, da der Differenzialquotient $U$ von $V$ eine solche war; es wird also $V$ nicht unendlich für endliches $z$, und mithin $e^V$ weder Null noch unendlich, also:

„Jede eindeutige Function $f(z)$, welche im Endlichen keine Discontinuitäten zweiter Gattung enthält, ist gleich einem Producte, das im Zähler alle Werthe $z-\beta$, die den Nullen, im Nenner alle Werthe $z-\alpha$, die den Unendlichkeiten entsprechen, als Factoren enthält. Die Exponenten geben die Ordnung dieser Nullen und Discontinuitäten an; ausserdem kann noch eine Exponentialgrösse als Factor vorkommen, welche eine ganze Function von $z$ im Exponenten hat."

Ist $z=0$ keine Discontinuität oder Null von $f(z)$, so kann man auch $z_0=0$ setzen, und hat:

1a) $$V=-\frac{1}{2\pi i}\int^{(A)}\lg\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)d\lg f(\lambda)$$

oder:

2a) $V=B'_\infty\lg f(z)$.

Da $B'_\infty\lg f(z)$ kein von $z$ freies Glied hat, so ist:

$$B'_\infty\lg f(0)=0,$$

3a) $$f(z) = f(0)\, \Pi \frac{\left(1 - \frac{z}{\beta}\right)^n}{\cdot \left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)^s} e^V,$$

und unter der obigen Bedingung:

4 a) $$\frac{z}{2\pi i} \int^{(A)} \frac{f'(\lambda)}{\lambda f(\lambda)} d\lambda.$$

Aus diesen Entwickelungen folgen aber einige wichtige Resultate.

Da das Product $V$ in Formel 1) durch die Nullen und Discontinuitäten völlig bestimmt ist, so folgt unmittelbar:

I. Jede eindeutige Function, die im Endlichen nur Discontinuitäten erster Gattung enthält, ist bis auf einen Factor bestimmt durch die Lage und Ordnung ihrer Discontinuitäten und Nullen. Zwei Functionen, die in diesen Punkten übereinstimmen, sind also bis auf einen Factor identisch. Dieser Factor ist constant, wenn der Unendlichkeitspunkt kein Discontinuitätspunkt ist, im andern Falle ist er eine Exponentialgrösse, deren Exponent eine ganze Function ist.

Ebenso lehrt Formel I. und II. des Abschnitts 20):

II. Jede eindeutige Function ist eine Summe von andern solchen, deren jede mit der gegebenen eine Discontinuität in gleicher Gattung und Ordnung gemein hat, im Uebrigen aber stets continuirlich ist.

Offenbar hat nämlich jedes Glied $B_\alpha f(s)$ diese Eigenschaft für $s = \alpha$.

Hieraus folgt dann sogleich:

Eine eindeutige Function, die nur Discontinuitäten erster Gattung und in endlicher Anzahl enthält, ist gleich einer ganzen Function vermehrt um eine Bruchreihe, also schliesslich ein echter oder unechter Bruch.

Hat sie nur eine Discontinuität und zwar für $z = \infty$, so ist sie eine ganze Function (dies ist schon früher gezeigt). Ist diese Discontinuität erster Gattung, so ist sie eine endliche Reihe.

III. Die Discontinuitäten zweiter Gattung einer eindeutigen Function sind immer so beschaffen, dass wenn man $\alpha$ einen unendlich kleinen Zuwachs gibt, derselbe wenigstens in einer Richtung bewirkt, dass die Function unendlich wird.

Denn das Glied $\frac{b_{s-1}}{z-\alpha} + \frac{b_{s-2}}{(z-\alpha)^2} + \ldots$ welches dieser Discontinuität entspricht, muss, wie jede eindeutige Function, doch einmal unendlich werden, und dies kann nur für $z = \alpha$ geschehen.

Wir wollen jetzt den Discontinuitäten zweiter Gattung noch eine wichtige Form geben.

Das einer solchen $\alpha$ entsprechende Glied in $f(z)$ ist:

$$\varphi_\alpha(z) = \psi(u) = b_{s-1} u + b_{s-2} u^2 + \ldots,$$

wenn man $u = \frac{1}{z-\alpha}$ setzt.

Dies Glied hat also die Form einer ganzen Function, und indem man dieselbe in ein Product verwandelt, erhält man nach Formel 3) dieses Abschnittes, da eine Discontinuität nur für $u = \infty$ vorhanden ist:

$$\varphi_\alpha(u) = H u^s (u - \beta_1)^{s_1} (u - \beta_2)^{s_2} \ldots e^{V(u)},$$

$H$ ist eine Constante, $0, \beta_1, \beta_2$ die Nullen von $\varphi_\alpha(u)$, $V(u)$ eine nach ganzen Potenzen von $u$ geordnete Reihe. Je nach dem Charakter der Discontinuität ist diese Entwickelung entweder von der Form der Curve $A$, welche $V$ gibt, abhängig oder nicht, im erstern Falle kann dann $V(u)$ auf eine Constante reducirt werden (vergleiche Abschnitt 20). Man hat also:

5) $$\varphi_\alpha(z) = B(z-\alpha)^{-s} \left(1 - \frac{b_1}{z-\alpha}\right)^{s_1} \left(1 - \frac{b_2}{z-\alpha}\right)^{s_2} \ldots e^{a_0 + \frac{a_1}{z-\alpha} + \frac{a_2}{(z-\alpha)^2} + \ldots}$$

Dagegen tritt für die Discontinuität, welche $z = \infty$ entspricht, das Glied ein:

6) $$\psi(z) = A(z - \beta_1)^{t_1} (z - \beta_2)^{t_2} \ldots e^{c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots}$$

Für alle Glieder, welche Discontinuitäten erster Gattung entsprechen, bleibt die Exponentialgrösse weg, und das Product ist ein endliches.

Man hat also für alle eindeutigen Functionen jetzt die allgemeine Form:

7) $$f(z) = \Sigma_\alpha \varphi_\alpha(z) + \psi(z) + \frac{C(z-e_1)^{h_1} (z-e_2)^{h_2} \ldots}{(z-g_1)^{k_1} (z-g_2)^{k_2} \ldots},$$

wo das erste Glied rechts auf alle Discontinuitäten zweiter Gattung geht. Das Schlussglied entsteht aus allen Discontinuitäten erster Gattung.

Es bleibt für die Entwickelung in Producte noch der Fall zu erörtern, wo $f(z)$ Discontinuitäten zweiter Gattung für andere Punkte als für $z=\infty$ enthält. Da in diesem Falle der Ausdruck: $\frac{d \lg f(z)}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)}$ noch Glieder enthält, welche diesen Discontinuitäten von $f(z)$, die wir mit $\gamma$ bezeichnen wollen, entsprechen, und für diesen Fall die Betrachtung ausgeschlossen ist, dass jeder Unendlichkeit von $f(z)$ eine solche erster Ordnung von $\frac{f'(z)}{f(z)}$ entspricht, so ist jetzt:

$$\frac{d \lg f(z)}{dz} = \Sigma_\beta \frac{n}{z-\beta} - \Sigma_\alpha \frac{s}{z-\alpha} - \Sigma_\gamma \left(\frac{A}{z-\gamma} + \frac{a_1}{(z-\gamma)^2} + \frac{a_2}{2(z-\gamma)^3} + \dots\right),$$

also:

$$\lg \frac{f(z)}{f(z_0)} = \lg \Pi \left[\left(\frac{z-\beta}{z_0-\beta}\right)^n \left(\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right)^s \left(\frac{z_0-\gamma}{z-\gamma}\right)^A + \Sigma_\gamma \left(\frac{a_1}{z-\gamma} + \frac{a_2}{(z-\gamma)^2} + \dots - \frac{a_1}{z_0-\gamma} - \frac{a_2}{(z_0-\gamma)^2} - \dots\right) + V,\right.$$

also schliesslich:

8) $$f(z) = f(z_0)\, \Pi \left(\frac{z-\beta}{z_0-\beta}\right)^n \left(\frac{z_0-\alpha}{z-\alpha}\right)^s \left(\frac{z_0-\gamma}{z-\gamma}\right)^A e^{\Sigma_\gamma \left(\frac{a_1}{z-\gamma} - \frac{a_1}{z_0-\gamma} + \frac{a_2}{(z-\gamma)^2} - \frac{a_2}{(z_0-\gamma)^2} + \dots\right)} + V.$$

$A$, $a_1$, $a_2$ ... sind Constanten, die übrigen Grössen haben dieselbe Bedeutung wie in 3). Wird $f(z)$ nicht discontinuirlich für $z=0$, so ist noch:

$$f(z) = f(0)\, e^{\Sigma_\gamma \left(\frac{a_1}{\gamma} - \frac{a_2}{\gamma^2} + \frac{a_3}{\gamma^3} - \dots\right)}\, \Pi \frac{\left(1-\frac{z}{\beta}\right)^n}{\left(1-\frac{z}{\alpha}\right)^s \left(1-\frac{z}{\gamma}\right)^A} e^{\Sigma_\gamma \left(\frac{a_1}{z-\gamma} + \frac{a_2}{(z-\gamma)^2} + \dots\right)} + V.$$

Je nach der Natur der Discontinuität, welche $\frac{f'(z)}{f(z)}$ für $z=\gamma$ hat, wird übrigens der $\gamma$ entsprechende Theil der Exponentialgrösse sich auf eine Constante reduciren, dann aber die Wahl derselben einen Einfluss auf die übrige Entwickelung ausüben können oder nicht. Uebrigens kann $A$ auch unendlich gross werden; dann muss dieser Factor sich mit denen im Zähler derart vereinigen, dass ein endlicher Quotient entsteht.

**Beispiele.**

I. Sei:

$$f(z) = \cos z.$$

Es ist dann:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{\sin z}{\cos z} = -\operatorname{tg}(z),$$

und da das vom Summenzeichen freie Glied $U$ in der Entwickelung von $\operatorname{tg}(z)$ verschwindet (vergleiche den vorigen Abschnitt), so ist $U=0$. $f(z)$ hat keine Unendlichkeiten, die Nullen:

$$z = (2m+1)\frac{\pi}{2}$$

sind also von erster Ordnung. Nimmt man noch $z_0=0$, so gibt 3a):

$$\cos z = \Pi_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left\{1 - \frac{z}{(2m+1)\frac{\pi}{2}}\right\},$$

oder:

$$\cos \Pi = \prod_{m=1}^{m=+\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2m+1)^2 \pi^2}\right).$$

II. Sei:

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

Man hat:

$$f'(z) = \frac{z \cos z - \sin z}{z \sin z} = \cot z - \frac{1}{z}.$$

Der zu $\cot z$ gehörige Theil von $V$ verschwindet, und da $\frac{1}{z}$ für $z = \infty$ verschwindet, so ist dies auch mit dem übrigen Theile der Fall.

Die Nullen von $\frac{\sin z}{z}$ sind erster Ordnung und finden für:

$$z = m\pi$$

statt, wo $m$ jedoch nicht gleich 0 ist, also:

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{m=-\infty}^{m=+\infty} \left(1 - \frac{z}{m\pi}\right),$$

oder:

$$\sin z = z \prod_{m=1}^{m=+\infty} \left(1 - \frac{z^2}{m^2 \pi^2}\right).$$

III. Um noch eine Function zu betrachten, die Discontinuitäten zweiter Gattung enthält, setzen wir:

$$f(z) = e^{\frac{z-a}{z-\alpha}} - e^{\frac{z-b}{z-\beta}}.$$

Solche Discontinuitäten finden hier für $z = \alpha$ und $z = \beta$ statt. Es ist:

$$e^{\frac{z-a}{z-\alpha}} = \cos\left(i\,\frac{z-a}{z-\alpha}\right) - i \sin\left(i\,\frac{z-a}{z-\alpha}\right),$$

$$e^{\frac{z-b}{z-\beta}} = \cos\left(i\,\frac{z-b}{z-\beta}\right) - i \sin\left(i\,\frac{z-b}{z-\beta}\right),$$

also:

$$f(z) = 2 \cos iu \cos iv - 2 i \sin iu \cos iv,$$

wo:

$$u = \tfrac{1}{2}\left(\frac{z-a}{z-\alpha} + \frac{z-b}{z-\beta}\right), \quad v = \tfrac{1}{2}\left(\frac{z-a}{z-\alpha} - \frac{z-b}{z-\beta}\right)$$

gesetzt ist, also:

$$f(z) = 2 \cos iv\, e^{-ui},$$

und somit nach der vorigen Entwickelung:

$$f(z) = 2 e^{-ui} \prod_{m=1}^{m=\infty} \left(1 + \frac{4v^2}{(2m+1)^2 \pi^2}\right).$$

Es lässt sich aber leicht zeigen, dass diese Ausdrücke die in 8) angegebene Form haben. Es ist nämlich:

$$u = 1 + \frac{\alpha - a}{2(z-\alpha)} + \frac{\beta - b}{2(z-\beta)},$$

$$v = \tfrac{1}{2}\,\frac{(z-a)(z-\beta) - (z-b)(z-\alpha)}{(z-\alpha)(z-\beta)}.$$

Jeder Factor des Productes $\Pi$ lässt sich auf diese Weise in einen Quotienten von je zwei Factoren im Zähler und zweien im Nenner zerlegen.

23) Entwickelung mehrdeutiger Functionen.

Es ist wichtig, zu untersuchen, in welcher Weise sich eine Function in der Nähe eines Windungspunktes entwickeln lässt, einen Fall, den wir bis jetzt ausgeschlossen haben.

Zunächst ist klar, dass wenn $f(z)$ eine $n$deutige Function ist, und für einen Punkt $A$ $p$ Werthe von $f(z)$ gleich werden, deshalb noch $A$ kein Windepunkt $p$ter Ordnung zu sein braucht. Sei nämlich:

$$p = p_1 + p_2 + \ldots + p_s,$$

wo $p_1, p_2 \ldots$ ganze positive Zahlen sind, so können von den ersten $p_1$ Werthen von $f(z)$ bei jeder Umkreisung von $A$ jeder in den folgenden, und der letzte wieder in den ersten übergehen; Gleiches kann mit den folgenden $p_2$ stattfinden u. s. w. Der Punkt ist dann für die ersten $p_1$ Werthe ein Windepunkt von der Ordnung $p_1$, für die folgenden $p_2$ von der Ordnung $p_2$ u. s. w. Ist $p_t = 1$, so ist der Punkt für diesen Werth kein Windepunkt, und ebenso für die übrigen $n-p$ Werthe von $f(z)$, welche in $A$ nicht gleich werden.

Es fragt sich nun noch, wie diejenigen Werthe von $f(z)$ zu bestimmen sind, die in der Nähe von $A$ in einander übergehen. Sei $q$ ihre Anzahl, $f_1(z), f_2(z) \ldots f_q(z)$ die entsprechenden Functionswerthe, $r$ eine beliebige Grösse, deren Modul jedoch kleiner ist als die Entfernung zwischen $A$ und dem ihm nächsten Windungspunkte. Dann ist:

$$f_1(A + r e^{2\pi i}) = f_2(A+r),$$
$$f_2(A + r e^{2\pi i}) = f_3(A+r)$$
$$\vdots$$
$$f_{q-1}(A + r e^{2\pi i}) = f_q(A+r),$$
$$f_q(A + r e^{2\pi i}) = f_1(A+r).$$

Sei jetzt:

$$y = (z-A)^{\frac{1}{q}}, \; f_s(z) = \varphi(y),$$

wo $s$ eine der Zahlen 1 bis $q$ anzeigt. In allen Gebieten, wo $f_s(z)$ eindeutig ist, findet Gleiches mit $\varphi(y)$ statt, denn jedem $y$ entspricht nur ein Werth von $z$, nämlich:

$$z = A + y^q.$$

Sei jetzt:

$$z = A + r, \text{ also } y = r^{\frac{1}{q}}.$$

Aus den Relationen zwischen $f_1, f_2 \ldots f_q$ ergibt sich aber sogleich:

$$f_s(A + r e^{2q\pi i}) = f_s(A+r),$$

welchen der Werthe 1 bis $q$ auch $s$ vorstelle, also auch:

$$f_s[A + y(e^{2\pi i})^q] = f_s(A + y^q),$$

oder:

$$\varphi(y e^{2\pi i}) = \varphi(y),$$

d. h.:

„Bei einer Windung um den Punkt $y=0$ ändert $\varphi(y)$ seinen Werth nicht. Die Function ist also in diesem Punkte eindeutig."

Es lässt sich also in der Nähe des Windungspunktes $A$ die Function $f_s(z)$ nach ganzen positiven Potenzen von $y = (z-A)^{\frac{1}{q}}$ nach dem Taylor'schen Satze entwickeln. Die $q$ Werthe von $y$ geben hierbei die $q$ Ausdrücke $f_1(z), f_2(z) \ldots f_q(z)$ und diese Entwickelung findet innerhalb eines Kreises statt, dessen Radius gleich der Entfernung zwischen $A$ und dem nächsten Windungspunkte ist.

Es ist hierbei vorausgesetzt, dass für $z = A$ die Function nicht discontinuirlich sei. Fände dies aber auch statt, so ist leicht zu sehen, dass die Werthe $f_1(z), f_2(z) \ldots f_q(z)$ in convergirenden Reihen nach positiven und negativen ganzen Potenzen von $\sqrt[q]{(z-A)}$ entwickelt werden. Beide Entwickelungen gelten bis zu demjenigen Discontinuitäts- oder Windungspunkte, der $A$ am nächsten ist. Es gibt aber auch eine Entwickelung nach ganzen positiven Potenzen und Partialbrüchen von $y = \sqrt[q]{(z-A)}$, wie in Abschnitt 17) Formel 8) gezeigt wurde, und diese erstreckt sich über beliebige Discontinutäten, jedoch nur bis zum näch-

sten Windungspunkte. — Alle diese Entwickelungen geben vermöge der verschiedenen Werthe von $\sqrt[q]{(z-A)}$ alle $q$ in einander übergehenden Functionen. In der letzten Form der Entwickelung ist noch namentlich der Fall zu beachten, wo $A$ selbst ein Discontinuitätspunkt ist. Dann sind in der Reihe der Partialbrüche Glieder, die $y=0$ entsprechen, also von der Form:

$$\frac{B_1}{\sqrt[q]{(z-A)}}+\frac{B_2}{\left(\sqrt[q]{(z-A)}\right)^2}+\frac{B_3}{\left(\sqrt[q]{(z-A)}\right)^3}+\dots$$

vorhanden.

Noch ist indessen zu bemerken, dass alle diese Betrachtungen für den Fall illusorisch werden, wenn die Function unendlich vielwerthig ist, und der Windungspunkt derart, dass der erste Werth in den zweiten, der zweite in den dritten und so fort ins Unendliche übergeht. Dergleichen Windungspunkte kann man als solche von der zweiten Gattung bezeichnen, während wir die, wo die Functionen wieder nach einer Anzahl Windungen auf den anfänglichen Werth zurückkommen, als erste Gattung bezeichnen. — Ist $A$ für $q$ Werthe ein Windungspunkt $q$ter Ordnung, für $r$ andere ein solcher $r$ter Ordnung, so gilt für die letzteren ganz dasselbe, die Entwickelung findet nach Potenzen von $\sqrt[r]{(z-A)}$ statt.

24) **Allgemeingültige Darstellung derjenigen mehrdentigen Functionen, welche nicht unendlich viel Werthe haben.**

Wie die Windungspunkte können auch die mehrdeutigen Functionen selbst in zwei Klassen gebracht werden, von denen die erste alle umfasst, welche eine bestimmte endliche Anzahl Werthe für jeden Punkt haben, die zweite die unendlich vieldeutigen. — Die erste Klasse nun ist einer für den ganzen Raum gültigen Darstellungsweise fähig. — Seien nämlich $u_1, u_2 \dots u_n$ die $n$ Werthe der $n$deutigen Function $u=f(x)$, so ist leicht einzusehen, dass jede rationale Verbindung der Grössen $u_1, u_2 \dots u_n$ nur insofern mehrdeutig sein kann, als man zwischen diesen Grössen beliebige Vertauschungen kann eintreten lassen. Diese Vertauschungen bringen aber keine Aenderung hervor, wenn die Function von $u_1, u_2 \dots u_n$ eine symmetrische ist, d. h.:

I. „Jede symmetrische und rationale Function der $n$ Werthe einer $n$deutigen Function $f(x)$ ist eine eindeutige Function von $x$.“

Betrachten wir sonach folgende eindeutige Functionen von $x$:

1)
$$\begin{aligned} v_1&=u_1+u_2+\dots+u_n,\\ v_2&=u_1u_2+u_1u_3+\dots+u_{n-1}u_n,\\ v_3&=u_1u_2u_3+u_1u_2u_4+\dots+u_{n-2}u_{n-1}u_n\\ &\ \ \vdots\\ v_n&=u_1u_2\dots u_n,\end{aligned}$$

so sind $u_1, u_2 \dots u_n$ bekanntlich die Wurzeln der Gleichung:

2)
$$u^n-v_1u^{n-1}+v_2u^{n-2}-\dots\pm v_n=0,$$

deren Coefficienten also eindeutig sind. Also:

II. „Die $n$ Werthe einer $n$deutigen Function sind jedenfalls darstellbar als die Wurzeln einer Gleichung, deren Coefficienten eindeutige Functionen von $x$ sind, also den Charakter ganzer Functionen oder rationaler Brüche haben.“

Es ist nöthig, die Coefficienten $v_1, v_2 \dots v_n$ der Gleichung 2) noch näher zu untersuchen.

Zunächst ist aus den Formeln 1) klar, dass keiner derselben in einem Punkte unendlich werden kann, ohne dass wenigstens eine der Functionen $u_1, u_2 \dots u_n$ in demselben Punkte unendlich wird, und daraus folgt der Satz:

III. „Jede $n$deutige Function muss wenigstens einmal unendlich werden."

Es lässt sich aber auch Folgendes beweisen:

IV. „Wenn in irgend einem Punkte einer der Werthe von $f(x)$ unendlich wird, so muss dies auch mit einem der Coefficienten der Gleichung 2) stattfinden."

Denn angenommen, es würde $u_1$ unendlich, während $v_1, v_2 \ldots v_n$ endlich blieben. Es könnte dann die letzte der Gleichungen 1) nur dann stattfinden, wenn gleichzeitig ein anderer Factor $u_n$ der Null gleich würde. Ist dieses aber der Fall, so wird die vorletzte Gleichung die Gestalt annehmen:

$$u_1 u_2 u_3 \ldots u_{n-1} = v_{n-1},$$

indem alle andern Glieder verschwinden. Es muss also, wenn $v_{n-1}$ endlich sein soll, ein Factor $u_{n-1}$ verschwinden. Man hat dann:

$$u_1 u_2 \ldots u_{n-2} = v_{n-2},$$

also auch:

$$u_{n-2} = 0$$

u. s. w., so dass schliesslich die Gleichung:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = v_1$$

sich verwandelt in:

$$u_1 = v_1,$$

also $u_1$ müsste endlich sein, was der Annahme widerspricht.

Es ist also jede Discontinuität der Functionen $u$ durch eine Discontinuität in den Coefficienten der Gleichung $n$ten Grades angedeutet. Da nun ganze Functionen nur für $x = \infty$ discontinuirlich werden, so ergibt sich:

V. „Wenn in der Gleichung $n$ten Grades, welche die Function $u$ definirt, alle Coefficienten den Charakter ganzer Functionen von $x$ haben, so kann keiner der Werthe von $u$ für endliches $x$ discontinuirlich werden."

Mögen jetzt die Coefficienten für endliches $x$ nur Discontinuitäten erster Gattung enthalten, so lassen sich dieselben immer durch Formel 1), Abschnitt 18) darstellen. Finde z. B. für $x = \alpha$ eine solche Discontinuität statt, die in einem oder mehreren Coefficienten vorkommen kann, aber in keinem von einer höhern als von der $s$ten Ordnung sein möge. Die Coefficienten $V$ erhalten dann im Nenner einen Factor $(x-\alpha)^t$, wo $t$ in keinem derselben grösser als $s$ sein kann. Man setze dann:

$$u = \frac{U}{(x-\alpha)^{sn}},$$

und die Gleichung 2) nimmt die Gestalt an:

$$U^n - v_1 (x-\alpha)^s U^{n-1} + v_2 (x-\alpha)^{2s} U^{n-2} + \ldots \pm v_n (x-\alpha)^{ns},$$

und es werden die Coefficienten der neuen Gleichung:

$$\ldots v_1 (x-\alpha)^s, \quad v_2 (x-\alpha)^{2s} \ldots$$

jedenfalls den Factor $x-\alpha$ nicht mehr im Nenner haben.

VI. „Durch eine Transformation kann die Gleichung 2) auf eine Gestalt gebracht werden, wo jede beliebige Discontinuität aus den Coefficienten verschwindet, also schliesslich auf eine solche, wo dieselben ganze Functionen sind, falls nicht die Coefficienten für endliches $x$ Discontinuitäten zweiter Gattung enthalten."

Neben dieser allgemeinen Form für die $n$deutigen Functionen geben wir noch eine andere Form, welche in der Umgebung der Windungspunkte gilt. Mögen in Punkt $A$ die Functionen $u_1, u_2 \ldots u_p$ in einander übergehen, so ist wie oben zu zeigen, dass die symmetrischen und rationalen Functionen dieser $p$ Grössen in der Umgebung von $A$ eindeutig bleiben, d. h. so lange, bis kein zweiter Windungspunkt überschritten wird, wo eine Function aus der Reihe $u_1, u_2 \ldots u_p$ in eine andere $u_q$, die nicht darin enthalten ist, übergeben kann. Es wird sich also eine Gleichung bilden lassen:

$$3) \quad u^p + \alpha_1 u^{p-1} + \alpha_2 u^{p-2} + \ldots + \alpha_p = 0,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ Functionen von $x$ sind, welche eindeutig bleiben, so lange kein zweiter Windungspunkt überschritten wird. Ist der Windungspunkt nicht gleichzeitig ein Discontinuitätspunkt, so werden innerhalb des Convergenzkreises um Punkt $A$ sich diese Coefficienten nach ganzen positiven Potenzen von $x$ entwickeln lassen. D. h.:

VII. „Die $p$ Functionen $u_1, u_2 \ldots u_p$, welche in der Nähe eines Windungspunktes in einander übergehen, sind die Wurzeln einer Gleichung $p$ten Grades."

Indess ist es offenbar besser und bequemer, sich diese $p$ Functionen, wie oben gezeigt wurde, als Reihen vorzustellen, die nach Potenzen von $\sqrt[p]{(u-A)}$ fortschreiten.

25) Untersuchung der mehrfachen Punkte einer $n$deutigen Function vermittels der Gleichung $n$ter Ordnung, welcher sie genügt.

Wir geben in diesem Abschnitte einen Auszug der schönen Arbeit von Puiseux, welche sich damit beschäftigt, aus den algebraischen Gleichungen die Anzahl und Art der mehrfachen Punkte, welche die ihnen genügenden Functionen haben, zu ermitteln (*Liouville, Journal de Mathématiques etc. Tome XV.*)

Sei:

$$f(u, z) = 0$$

die gegebene Gleichung. Wir setzen voraus, dass die Coefficienten der Potenzen von $u$ den Charakter ganzer Functionen haben, was sich ja, wie wir gesehen haben, durch Transformation erreichen lässt. Es wird dann $u$ für endliches $z$ niemals unendlich werden.

In Punkt $a$ mögen die Functionen $u_1, u_2 \ldots u_p$ einander gleich und gleich $b$ werden.

Die Bedingungen dafür sind:

$$\frac{\partial f(u, a)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 f(u, a)}{\partial u^2} = 0 \ldots$$

$$\frac{\partial^{p-1} f(u, a)}{\partial u^{p-1}} = 0,$$

wenn man $u = b$ setzt. Denn da das Glied links der Gleichung $f(u, z) = 0$ die Form annimmt:

$$(u-u_1)(u-u_2) \ldots (u-u_n),$$

so wird man, falls:

$$u_1 = u_2 \ldots = u_p = b$$

ist, dafür setzen:

$$(u-b)^p (u-u_{p+1}) \ldots (u-u_n),$$

und die $p-1$ ersten Differenzialquotienten dieser Grösse nach $u$ genommen, geben den Factor $u-b$, verschwinden also in Punkt $a$, wenn man $u = b$ setzt. Dagegen muss $\frac{\partial^p f(u, a)}{\partial u^p}$ einen von Null verschiedenen Werth haben. Setzen wir also:

$$z = a + \alpha, \quad u = \beta + b,$$

so verschwinden, wenn man $f(u, z)$ nach Potenzen von $\alpha$ und $\beta$ entwickelt, die mit $\beta^0, \beta, \beta^2 \ldots \beta^{p-1}$ multiplicirten Glieder, deren Coefficienten aber:

$$f(u, a), \ \frac{\partial f}{\partial u}, \ \ldots \ \frac{\partial^{p-1} f}{\partial u^{p-1}}$$

sind, und man hat:

$$1) \qquad A\beta^p + \Sigma B \beta^q \alpha^r = 0,$$

wo in allen Gliedern, in welchen $r = 0$ ist, $q$ grösser als $p$ sein muss. — Wir setzen jetzt noch voraus, dass die Gleichung $f(u, z) = 0$ irreductibel sei, dass sie mithin auch keinen Factor $u - \lambda$ enthalten, wo $\lambda$ constant ist, welcher sich übrigens leicht würde absondern lassen.

Unter dieser Voraussetzung muss wenigstens in einem Gliede von Gleichung 1), in welchem $q$ gleich Null ist, $r$ von Null verschieden sein, da sich sonst Factor $\beta = u - b$ absondern liesse.

Möge zunächst in dem betreffenden Punkte $a$ $\frac{\partial f}{\partial z}$ nicht der Null gleich sein; es muss dann in 1) ein Glied $B\alpha$ vorkommen. Sucht man also die Glieder niedrigster Dimension in Gleichung 1), so haben diese die Form:

$$A\beta^p + B\alpha,$$

und wenn man $\alpha$ und somit auch $\beta$ ins Unendliche abnehmen lässt, ergibt sich:

$$A\beta^p + B\alpha = 0,$$

$$\beta = \frac{B}{A} \alpha^{\frac{1}{p}}.$$

„Es wird sich in diesem Falle $\beta$ oder $u-b$ in eine Reihe nach ganzen positiven Potenzen von $\alpha^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{(z-a)}$ entwickeln lassen, wo das mit $\alpha^{\frac{1}{p}}$ multiplicirte Glied nicht verschwindet."

Denn in jedem Falle wird $\frac{B}{A}\alpha^{\frac{1}{p}}$ doch das erste Glied der Entwickelung von $\beta$ sein. Nach dem in Abschnitt 21) Ge-

sagten kann aber $z$ sich nur nach Potenzen von $\sqrt[q]{(z-a)}$, wo $q$ nicht grösser als $p$ ist, entwickeln lassen. Wäre nun $q$ von $p$ verschieden, so müsste, falls eine Entwickelung nach ganzen Potenzen von $\alpha^{\frac{1}{q}}$ stattfinden soll:

$$\frac{1}{p}=\frac{s}{q},\ p=\frac{q}{s},$$

und $s$ eine ganze Zahl sein, was unmöglich ist, wenn $q$ kleiner als $p$ ist.

Möge nun $\frac{\partial f}{\partial z}$ beliebig sein, und suchen wir in Gleichung 1) die Glieder niedrigster Ordnung. Zu dem Ende sondern wir den Theil des Ausdruckes links in 1) ab, wo die Exponenten $q$ und $r$ die aus den kleinsten vorkommenden Zahlen bestehenden Combinationen bilden. Diesen Theil nennen wir $\lambda$. Sind also z. B. 2, 1 — 1, 2 — 1, 3 — 3, 4 — 3, 1 — 3, 0 die Combinationen, in denen $q$ und $r$ vorkommen, so ist nur zu nehmen 2, 1 — 1, 2 — 3, 0, da in allen übrigen entweder beide Zahlen der Combination grösser sind, als in einer der hier vorkommenden Verbindungen, oder die eine gleich der entsprechenden, die andere grösser ist.

Der Theil $\lambda$ enthält dann jedenfalls alle Glieder niedrigster Ordnung, und wenn die zu ihnen gehörigen $q$ eine absteigende Reihe bilden, so werden die $r$ eine aufsteigende bilden, weil ja sonst in einem Gliede beide Exponenten grösser sein würden als in dem vorhergehenden, dies Glied also nicht zu $\lambda$ gehörte. Es ist also:

$$\lambda=A\beta^{p}+A_1\beta^{p_1}\alpha^{q_1}+A_2\beta^{p_2}\alpha^{q_2}+\ \ldots\ +A_i\alpha^{q_i},$$

Die Reihe $p,\ p_1,\ p_2\ \ldots\ p_{i-1}$ fällt, während die Reihe $q_1,\ q_2\ \ldots\ q_i$ steigt. — Man hat nun, um die Glieder niedrigster Ordnung zu bilden, nichts zu thun, als aus $\lambda$ solche Klassen von Gliedern, und zwar auf alle möglichen Arten zu bilden, welche von gleicher und zwar niedrigerer Ordnung als die andern sind, wenn $\beta$ als eine (ganze oder gebrochene) Potenz von $\alpha$ betrachtet wird. Eine solche Klasse ist dann der Null gleich zu setzen, da für unendlich kleines $\alpha$ die Gleichung 1) derselben zu identificiren ist.

Sind nun:

$$A_f\beta^{p_f}\alpha^{q_f},$$

und:

$$A_g\beta^{p_g}\alpha^{q_g}$$

zwei Glieder niedrigster Ordnung, und ist:

$$\beta=x\alpha^{\mu},$$

so hat man:

$$\mu p_f+q_f=\mu p_g+q_g,$$

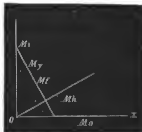
und für jedes andere Glied:

$$A_h\beta^{p_h}\alpha^{q_h},$$

$$\mu p_h+q_h\geqq\mu p_f+q_f.$$

Um diesen Bedingungen Anschaulichkeit zu geben, gebrauchte Puiseux folgende sinnreiche Construction. $p_h$ und $q_h$ seien bezüglich Abscisse und Ordinate eines Punktes $M_h$ (Fig. 82), so

Fig. 82.




dass Punkt $M_0$ auf der Abscissenaxe, $M_i$ auf der Ordinatenaxe, alle übrigen Punkte $M_k$ aber innerhalb des von den positiven Theilen beider Axen gebildeten Winkels liegen. Auch werden die Verbindungslinien jeder zwei Punkte $M_h$ und $M_k$ beide Axen auf den positiven Seiten schneiden, und zwar aus dem Grunde, weil, wenn $p_h>p_k$ ist, $q_h<q_k$ sein muss. Mache nun Linie $OM_h$ den Winkel $\vartheta$ mit der Axe der $x$, dann ist die Projection von $OM_k$ auf $OM_h$ gegeben durch die Formel:

$$p_k\cos\vartheta+q_k\sin\vartheta,$$

oder wenn man:

$$\cot \vartheta = \mu$$

setzt:

$$\frac{\mu p_k + q_k}{\sqrt{(1+\mu^2)}}.$$

Es drückt also die Gleichnng:

$$\mu p_f + q_f = \mu p_y + q_y$$

aus, dass $OM_f$ nnd $OM_y$ anf irgend einer Linie $OL$ gleiche Projectionen haben, oder was dasselbe ist, dass die Verbindnngslinie $M_f M_y$ anf $OL$ senkrecht steht. Die Bedeutung der Ungleichheit:

$$\mu p_h + q_h \geqq \mu p_f + q_f$$

aber ist, dass die Projection von $OM_h$ grösser als die von $OM_f$ oder gleich sei, d. h. dass der Punkt $M_h$ in Bezng anf $O$ jenseits $M_f M_y$ oder auf dieser Linie selbst liege.

Man muss also nnter den Pnnkten, welche den Gliedern von $\lambda$ entsprechen, auf alle möglicbe Weise zwei ermitteln, welche so beschaffen sind, dass ihre Verbindnngslinie alle nicht in ihr enthaltenen Punkte $M$ vom Anfangspnnkte $O$ trennt. Die anf dieser Linie enthaltenen $M_f$, $M_g$, $M_k$, $M_l$ ... geben dann mittels der Formel:

$$K = A_f \beta^{p_f} \alpha^{q_f} + A_g \beta^{p_g} \alpha^{q_g} + A_k \beta^{p_k} \alpha^{q_k} + A_l \beta^{p_l} \alpha^{q_l} + \dots$$

die Glieder niedrigster Ordnnng, nnd die Gleichnng:

$$\mu p_f + q_f = \mu p_g + q_g$$

gibt:

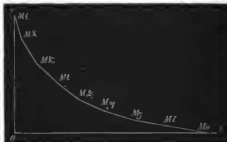
$$\mu = \frac{q_g - q_f}{p_f - p_g},$$

zeigt also an, von welcher Potenz von $\alpha$ die Grösse $\beta$ proportional ist, wenn man $\alpha$ unendlich klein annimmt.

Die Art, wie verfahren werden muss, damit keine der Klassen $K$ ausgeschlossen werde, ist die folgende.

In Pnnkt $M_0$ (Fig. 83) wird eine Linie angenommen, die anfänglich mit der Abscissenaxe zusammenfällt. Diese dreht man nm $M_0$ so, dass sie immer die

Fig. 83.




positive Seite der Ordinatenaxe schneidet, bis sie dnrch einen andern der Pnnkte $M$ geht. Sie kann gleichzeitig dnrcb mehrere $M_\varepsilon$, $M_\zeta$, $M_\eta$ gehen. In diesem Falle sei $M_\eta$ der von $M_0$ entfernteste, $M_0, M_\varepsilon, M_\zeta, M_\eta$ bilden dann die erste Klasse $K$.

Nun dreht man die Linie um $M_\eta$, bis sie wieder einen oder mehrere Punkte $M$ aufnimmt; diese in Verbindung mit $M_\eta$ bilden die zweite Klasse $K$ u. s. w., bis man zum letzten Punkte $M_i$ kommt. Man hat also die Klassen:

$$K_1 = A\beta^p + A_\iota \beta^{p_\iota} \alpha^{q_\iota} + \ldots + A_\eta \beta^{p_\eta} \alpha^{q_\eta},$$

$$K_2 = A_\eta \beta^{p_\eta} \alpha^{q_\eta} + A_\vartheta \beta^{p_\vartheta} \alpha^{q_\vartheta} + \ldots + A_\iota \beta^{p_\iota} \alpha^{q_\iota},$$

$$K_3 = A_\iota \beta^{p_\iota} \alpha^{q_\iota} + A_\varkappa \beta^{p_\varkappa} \alpha^{q_\varkappa} + \ldots + A_\lambda \beta^{p_\lambda} \alpha^{q_\lambda}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$K_\omega = A_\sigma \beta^{p_\sigma} \alpha^{q_\sigma} + \ldots + A_s \alpha^{q_s}.$$

Das erste Glied der ersten Klasse enthält kein $\alpha$, das letzte der letzten Klasse kein $\beta$. Das letzte Glied einer jeden Klasse ist das erste der folgenden. Der Werth $\mu = \frac{q_g - q_f}{p_f - p_g}$ zeigt die Potenz von $\beta$ an, wo man $p_g, p_f, q_g, q_f$ irgend zwei Gliedern von $K_1$, $K_2$ ... entnimmt. Also in $K_1$ ist $\beta$ von der Ordnung $\frac{q_\eta}{p - p_\eta}$, in $K_2$ von der Ordnung $\frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota}$ u. s. w.

Zähler und Nenner dieser Brüche sind ganze Zahlen, der Nenner gibt also an, wieviel Werthe die Bruchpotenz $\beta = x\alpha^\mu$ hat, und somit ergibt die erste Klasse $p - p_\eta$ Werthe, die zweite $p_\eta - p_\iota$ ..., also im Ganzen:

A) $$p - p_\eta + p_\eta - p_\iota + p_\iota - p_\lambda + \ldots + p_\sigma = p,$$

so dass sich auf diese Weise alle Wurzelwerthe für die dem mehrfachen Punkte benachbarten ergeben. Gegen den Anfangspunkt der Coordinaten muss die in der letzten Figur construirte gebrochene Linie convex sein, und dies zeigt, dass in $\cot \vartheta = \mu$ also der Winkel $\vartheta$, welchen die auf $M_f M_g$ senkrechte Linie mit der Axe $OX$ macht, abnimmt, so dass $\mu$ immer wächst, woraus dann folgt:

$$\frac{q_\eta}{p - p_\eta} < \frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota} < \frac{q_\lambda - q_\iota}{p_\iota - p_\lambda} < \ldots \frac{q_s - q_\sigma}{p_\sigma - p_s},$$

also:

„Jede der Klassen gibt immer Werthe von $\beta$, die von einer höhern Ordnung sind als die vorhergehenden."

Betrachten wir jetzt eine der Gleichungen, etwa:

$$K_2 = 0,$$

oder:

$$A_\eta \beta^{p_\eta - p_\iota} + A_\vartheta \beta^{p_\vartheta - p_\iota} \alpha^{q_\vartheta - q_\eta} + \ldots + A_\iota \alpha^{q_\iota - q_\eta} = 0,$$

wo die Ordnung der Werthe von $\beta$ also ist:

$$\mu = \frac{q_\iota - q_\eta}{p_\eta - p_\iota}.$$

Mögen Zähler und Nenner den grössten gemeinschaftlichen Factor $\varphi$ haben, und sei:

$$q_\iota - q_\eta = \varphi r,\ p_\eta - p_\iota = \varphi s,\ \mu = \frac{r}{s}.$$

Alle Glieder der Gleichung sind ferner von derselben Ordnung, also:

$$\mu(p_\eta - p_\iota) = \mu(p_\vartheta - p_\iota) + q_\vartheta - q_\eta = \ldots = q_\iota - q_\eta,$$

oder wenn man mit $s$ multiplicirt:

$$r(p_\eta - p_\iota) = r(p_\vartheta - p_\iota) + s(q_\vartheta - q_\eta) = \ldots, = s(q_\iota - q_\eta) = rs\varphi.$$

Jeder der gleichen Ausdrücke ist also durch $s$ theilbar, also auch z. B. $r(p_\vartheta - p_\iota)$, und da $r$ und $s$ keinen Factor gemein haben, auch $p_\vartheta - p_\iota$. Sei:

$$\frac{p_\vartheta - p_\iota}{s} = \psi,$$

wo also $\psi$ eine ganze Zahl ist; man hat dann:

$$rs\psi + s(q_\vartheta - q_\eta) = rs\varphi,$$

also:

$$q_\vartheta - q_\eta = r(\varphi - \psi),$$

und die Gleichung:

$$K_1 = 0$$

verwandelt sich in eine von der Form:

$$A_\eta \beta^{s\varphi} + A_\vartheta \beta^{s\psi} \alpha^{r(\varphi - \psi)} + \ldots + A_\iota \alpha^{r\varphi} = 0.$$

Setzen wir hierin:

$$\beta^s = x\alpha^r,$$

so ergibt sich:

$$A_\eta x^\varphi + A_s x^\psi + \ldots + A_\iota = 0. \tag{2}$$

Wir nehmen zunächst an, es möge diese Gleichung nur ungleiche Wurzeln haben. Sie sind sämmtlich von Null verschieden, und seien $x_1, x_2 \ldots x_\varphi$. Setzt man z. B. die erste Wurzel $x_1$ ein, so ergibt sich:

$$\beta = (x_1 \alpha^r)^{\frac{1}{s}},$$

ein Ausdruck, welcher $s$ Werthe hat, und indem man so mit jedem $x$ verfährt, hat man schliesslich:

$$s\varphi = p_\eta - p_\iota$$

Werthe. So mit jeder Klasse verfahrend, ergeben sich alle $p$.

„Diese angenäherten Werthe von $\beta = (x_\alpha \alpha^r)^{\frac{1}{s}}$ zeigen, dass die entsprechende Gruppe von Werthen $\beta$ auch für endliche Entfernungen von dem mehrfachen Punkte gefunden werden kann, durch eine Reihe, die nach ganzen positiven Potenzen von $\alpha^{\frac{1}{s}}$ fortschreitet, und $(x_1 \alpha^r)^{\frac{1}{s}}$ ist eben das erste Glied der Entwickelung.“

Letzteres ist nämlich an sich klar, da mit der Abnahme von $\alpha$ alle übrigen Glieder verschwinden. Ersteres folgt daraus, dass nothwendig $\beta$ nach Potenzen von $\alpha^{\frac{1}{m}}$ entwickelt werden kann (vergleiche Abschnitt 21), wo $m$ kleiner als $p$ oder gleich $p$ ist. Die verschiedenen den $K$ entsprechenden Klassen können nun wegen der Gleichung $A$ höchstens aus $p - \eta$, $p_\eta - p_\iota$ u. s. w. Werthen bestehen, da sonst ihre Gesammtzahl $p$ überschreiten würde.

Es ist also in Bezng auf die einer Gleichnng, etwa:

$$K_2=0,$$

entsprechenden $\beta$ der Pnnkt ein Windungspnnkt von höchstens $p_\eta - p_s$ oder $q\,s$ter Ordnnng.

Da aher in den Entwickelnngen der $\beta$, die hierhin gehören, die Coefficienten der Anfangsglieder $x_\alpha^{\frac{1}{s}}$ von einander verschieden sind (es war angenommen, dass diese nngleich seien), so theilt sich diese Klasse wieder in $q$ Gruppen, nnd für jede derselhen kann der mehrfache Pnnkt höchstens ein Windepnnkt $s$ter Ordnnng sein. Das ist er aher anch in der That, denn wäre dies nicht der Fall, so müssten sich die $s$ zngehörigen Werthe von $\beta$ noch in andere Gruppen zerlegen lassen. Möge eine solche aus $s'$ Grössen $\beta$ hestehen, wo $s'$ also kleiner als $s$ ist, so fände Entwickelnng nach Potenzen von $\alpha^{\frac{1}{s'}}$ statt, und es müsste $\frac{r}{s}$ ein Vielfaches von $\frac{1}{s'}$ sein, also:

$$\frac{r}{s}=\frac{h}{s'},$$

was, da $r$ nnd $s$ keinen Factor gemein hahen, nnr möglich wäre, wenn $p=mr$, $s'=ms$ wäre, also $s'$ grösser als $s$, was der Voranssetznng widerspricht.

„Es zeigt nnsere Betrachtnng also. dass der mehrfache Pnnkt in Besug anf je $q$ der Gleichnng $K_2=0$ entsprechenden Wnrzelwerthe ein Windnngspnnkt $s$ter Ordnnng ist. Er ist für alle diese Wnrseln ein Windnngspnnkt von Ordnnng $p_\eta - p_s$, wenn $q=1$ ist; er ist gar kein Windnngspnnkt in Bezng auf diese Klasse der $\beta$, wenn $s=1$ ist. Gleiches gilt für alle ührigen Klassen."

Es ist aher jetzt noch der Fall sn nntersnchen, wo einige der Wnrzeln der Gleichnng 2) gleich sind. Möge sie $t$ gleiche Wnrzeln $x_1$ hahen.

Dann gibt jeder von ihnen herrührende Ausdruck $t$ Werthe von $\beta$: $(x_1\alpha^r)^{\frac{1}{s}}$ dnrch dieselhe Näherungsformel. Diese entsprechenden $t$ Werthe von $\beta$ können sich also nur in dem folgenden Gliede der Entwickelnng von einander nnterscheiden, nnd es mnss zu diesem vorgeschritten werden. Man setzt somit in die Gleichnng 1):

$$\alpha=\alpha_1^{s}, \quad \beta=x_1^{\frac{1}{s}}\alpha_1^{r}+\beta_1.$$

Es ergiht sich dann eine Gleichnng zwischen $\alpha_1$ nnd $\beta_1$, die der Gleichung 1) gans analog ist; sie wird $st$ unendlich kleine Werthe von $\beta_1$ gehen, denn zn jedem $x_1$ gehören ja $s$ Werthe von $\beta$, die Ordnnng dieser $\beta_1$ aher mnss höher als die $r$te sein ln Bezug auf $\alpha_1$. Diese nene Gleichnng wird gans wie Gleichung 1) behandelt, führt also sn Gleichnngen, die:

$$K_1=0,\ K_2=0\ \ldots$$

analog sind. Von letzteren aber sind nur die sn herücksichtigen, welche Werthe von $\beta_2$ ergehen, die in Bezng auf $\alpha_1$ von höherer Ordnnng als der $r$ten sind. In eine dieser Gleichnngen $K'=0$ wird nnn gesetzt:

$$\beta_1^{s_1}=\alpha_1^{r_1}x_1,$$

für passend gewählte ganze Zahlen $r_1$ nnd $s_1$ ganz wie oben, nnd man erhält die der Gleichung 2) analoge:

$$3) \qquad A_1\xi^{q_1}+B_1\xi^{\psi_1}+\ldots=0.$$

Von dieser setzen wir voraus, sie enthalte keine gleichen Wurzeln, nnd sei $\xi_1$ eine derselben, so hat man wie ohen:

$$x_1=\xi_1^{\frac{1}{s_1}}\alpha_1^{\frac{r_1}{s_1}},$$

also:

$$\beta=x_1^{\frac{1}{s}}\alpha_1^{r}+\xi_1^{\frac{1}{s_1}}\alpha_1^{\frac{r_1}{s_1}}=x_1^{\frac{1}{s}}\alpha^{\frac{r}{s}} + \xi_1^{\frac{1}{s_1}}\alpha^{\frac{r_1}{ss_1}}.$$

Es findet also, da:

$$\frac{r}{s}=\frac{rs_1}{ss_1}$$

ist, in der That ein Fortschreiten nach Potensen von $\alpha^{\frac{1}{ss_1}}$ statt, nnd $\beta$ muss nach dem Taylor'schen Satze nach dieser Grösse entwickelt werden. Man erhält anf diese Weise wegen der Vieldentigkeit von $\alpha^{\frac{1}{ss_1}}$ $ss_1$ Werthe $\beta$; eine zweite der nenen Gleichnngen:

$$K'=0$$

wird $ss_2$ Werthe $\beta$ gehen, so dass:

$$s_1+s_2+\ldots+s_n=t$$

ist. Denn da alle übrigen Wurzeln bestimmt sind, so bleiben nur noch $s\,t$ übrig. Der Windungspunkt ist also in unserm Falle von der Ordnung $s\,s_1$. — Hätte auch Gleichung 3) gleiche Wurzeln, so wäre das eben gegebene Verfahren zu wiederholen; man erhielte in der Entwickelung der $\beta$ ein drittes Glied, und es würden sich $s\,s_1\,s_2$ Werthe von $\beta$ nach Potenzen von $\alpha^{\frac{1}{s\,s_1\,s_2}}$ entwickeln lassen.

Beispiele.

I. Sei gegeben:

$$u^m-(z-a)(z-a_1)(z-a_2)\ \ldots=0,$$

wo $a$, $a_1$, $a_2$ ungleich sein sollen. Für $z=a$ ergibt sich ein $m$facher Punkt, wo $u=0$ ist. Da für diesen Werth aber $\frac{\partial f}{\partial z}$ nicht verschwindet, bilden alle $m$ Werthe einen Cyclus. Der Punkt ist ein $m$facher Windepunkt, in dessen Nähe $u$ sich nach ganzen positiven Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{m}}$ entwickeln lässt.

II. Sei gegeben:

$$u^m-(z-a)^l(z-a_1)^{l_1}(z-a_2)^{l_2}\ \ldots=0,$$

wo ebenfalls $a, a_1, a_2 \ldots$ ungleich, und $l$ grösser als Eins ist. Für $z=a$ findet ebenfalls ein $m$facher Punkt statt, aber $\frac{\partial f}{\partial z}$ verschwindet in diesem Falle. Man setzt also:

$$z=a+\alpha,\quad u=\beta,$$

und erhält:

$$\beta^m-\alpha^l(a-a_1+\alpha)^{l_1}(a-a_2+\alpha)^{l_2}\ \ldots=0.$$

Die Glieder $\lambda$, welche zu nehmen sind, beschränken sich auf:

$$\beta^m-B\alpha^l,$$

wenn man setzt:

$$(a-a_1)^{l_1}\,(a-a_2)^{l_2}\ \ldots=B.$$

Es ergibt sich also auch nur eine Klasse:

$$K=\beta^m-B\alpha^l=0.$$

Ist $\varphi$ der grösste gemeinschaftliche Factor von $m$ und $l$, $s=\frac{m}{\varphi}$, so hat man also:

$$x^\varphi-B=0.$$

Die Werthe von $u$ zerfallen in $\varphi$ Systeme von je $s$ Wurzelwerthen, die sich innerhalb des Convergenzkreises nach Potenzen von $(z-a)^{\frac{1}{s}}$ entwickeln lassen.

III. Sei gegeben:

$$u^3-u+z=0.$$

Diese Gleichung hat für $z=\frac{2}{3\sqrt{3}}$ eine doppelte Wurzel $u=\frac{1}{\sqrt{3}}$ und eine einfache $u=-\frac{2}{\sqrt{3}}$; es findet also ein Doppelpunkt statt.

$$\frac{\partial f}{\partial z}=1.$$

Der Punkt ist also für zwei Werthe $u_1\,u_2$ ein doppelter Windepunkt, für $u_3$

keiner, und die beiden erstern lassen sich nach Potenzen von $\left(z-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$ entwickeln. In der That, setzt man:

$$s=\frac{2}{3\sqrt{3}}+\alpha, \quad u=\frac{1}{\sqrt{3}}+\beta,$$

so ergibt sich:

$$\sqrt{3}\,\beta^2+\beta^3+\alpha=0,$$

oder wenn man $\alpha=\alpha_1^2$, $\beta=\alpha_1 v$ annimmt:

$$\sqrt{3}v^2+1+\alpha_1 v^3=0.$$

Wird:

$$v=a_0+a_1\alpha_1+a_2\alpha_1^2+\ldots$$

hierin eingesetzt, und die Coefficienten der verschiedenen Potenzen gleich Null genommen, so bekommt man:

$$v_1=\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{6}\alpha_1-\frac{5i}{24\sqrt[4]{3^3}}\alpha_1^2-\frac{1}{9\sqrt{3}}\alpha_1^3+\ldots,$$

für $v_2$ denjenigen Werth, welcher entsteht, wenn man $i$ mit $-i$ vertauscht. Also:

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{i}{\sqrt[4]{3}}\left(z-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{6}\left(s-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)-\frac{5i}{24\sqrt[4]{3^3}}\left(z-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{3}{2}}-\ldots;$$

$u_2$ wird hieraus gewonnen, wenn man das Zeichen von $i$ ändert. — Nur für $s=-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ findet noch ein mehrfacher Punkt statt. Die Entwickelung gilt also so lange, als der $s$ entsprechende Punkt innerhalb des um den Doppelpunkt mit Radius $\frac{4}{3\sqrt{3}}$ geschlagenen Kreises liegt. In demselben Gebiete kann $u_3$ nach ganzen Potenzen von $s-\frac{2}{3\sqrt{3}}$ entwickelt werden. Man erhält:

$$u_3=-\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{3}\left(s-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)+\frac{2}{9\sqrt{3}}\left(s-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^2-\frac{z}{81}\left(z-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)^3-\ldots$$

IV. Sei endlich gegeben die Gleichung:

$$A(u-b)^7+B(u-b)^5(s-a)+C(u-b)^4(z-a)^4+D(u-b)^2(z-a)^5$$
$$+E(u-b)(z-a)^7+F(s-a)^9+G(u-b)^8+H(u-b)^4(s-a)^8+I(s-a)^{13}=0,$$

wo die Coefficienten $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ nicht gleich Null sind. Für $z=a$ ergeben sich sieben gleiche Wurzeln $u=b$, und es wird für diese Werthe $\frac{\partial f(u,\,z)}{\partial z}$ der Null gleich. Somit ist zu setzen:

$$s=a+\alpha, \quad u=b+\beta,$$

wo sich dann ergibt:

$$A\beta^7+B\beta^5\alpha+C\beta^4\alpha^4+D\beta^2\alpha^5+E\beta\alpha^7+F\alpha^9+G\beta^8+H\beta^4\alpha^8+I\alpha^{10}=0.$$

Das Polynom $\lambda$ aber besteht aus den Gliedern:

$$A\beta^7+B\beta^5\alpha+C\beta^4\alpha^4+D\beta^2\alpha^5+E\beta\alpha^7+F\alpha^9.$$

Denkt man sich die gleichen Gliedern gehörigen Exponenten von $\beta$ und $\alpha$ bezüglich als Abscissen $X$ und Ordinaten $Y$, so ist:

$$X=7,\ 5,\ 4,\ 2,\ 1,\ 0$$
$$Y=0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9$$

zu setzen.

Wenn man in der angegebenen Weise die mit der Abscissenaxe zusammenfallenden Linien um Punkt (7, 0) dreht, so wird man zuerst auf Punkt (5, 1) kommen. Es ist nämlich, wenn $X_1$, $Y_1$ die Coordinaten desjenigen Punktes sind, durch welchen die gedachte Linie zuerst geht, die Tangente des Drehungs-

winkels gleich $\frac{Y_1 - Y}{X - X_1}$, nnd diese Grösse ist so klein als möglich zn nehmen. Für Punkt (5, 1) ist sie gleich $\frac{1}{2}$; dies ist der kleinste Werth, da in der Reihe der $Y$ alle Werthe wachsen, in der Reihe der $X$ ahnehmen.

Um den nächsten Pnnkt zn finden, müssen $X_2$, $Y_2$ so gewählt werden, dass $\frac{Y_2 - Y_1}{X_1 - X_2}$ möglichst klein wird. Dem genügt Pnnkt (2, 5), wo diese Grösse $\frac{4}{3}$ beträgt; es folgen dann gleichzeitig die Pnnkte (1, 7) nnd (0, 9), denn heide gehen den Werth $\frac{Y_3 - Y_2}{X_2 - X_3} = 2$. Es sind also drei Klassen $K$ vorhanden:

$$K_1 = A\beta^7 + B\beta^5\,\alpha,$$
$$K_2 = B\beta^5\,\alpha + D\beta^3\,\alpha^3,$$
$$K_3 = D\beta^3\,\alpha^3 + E\beta\,\alpha^7 + F\alpha^8.$$

Für $K_1$ hat man:

$$s = 2, \quad q = 1,$$

nnd die Gleichnng 2) wird:

$$Ax + B = 0.$$

Es entsprechen ihr zwei Functionen $u_1$ und $u_2$, welche sich nach Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ entwickeln lassen. — Für $K_2$ ist:

$$s = 3, \quad q = 1.$$

Die Gleichnng 2) giht:

$$Bx + D = 0.$$

Es entsprechen ihr 3 Fnnctionen $u_3, u_4, u_5$, die nach Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{3}}$ fortschreiten. Endlich giht die dritte Klasse $K_3$:

$$s = 1, \quad q = 2.$$

Man erhält:

$$Dx^2 + Ex + F = 0,$$

Wenn diese Gleichnng zwei nngleiche Wnrzeln hat, so entsprechen ihr zwei Wnrzeln $u_6$, $u_7$, die nach ganzen Potenzen von $z-\alpha$ entwickelt werden können. — Hat dagegen die Gleichung zwei gleiche Wnrzeln, so ist in die Gleichnng 1) zu setzen: $\alpha = \alpha'$, $\beta = x\,\alpha'^2 + \beta'$. Bringen wir dieselhen zuvor auf die Form:

$$\alpha^3(D\beta^2 + E\beta\,\alpha^2 + F\alpha^4) + A\beta^7 + B\beta^5\,\alpha + C\beta^3\,\alpha^3 + G\beta^3 + H\beta^4\,\alpha^5 + I\,\alpha^{10} = 0,$$

und herücksichtigen, dass, wenn Gleichnng:

$$Dx^2 + Ex + F = 0$$

zwei gleiche Wnrzeln hat,

$$2Dx + E = 0$$

sein mnss, so ergiht sich:

$$D\beta'^2\,\alpha^3 + A(x^7\,\alpha^{14} + \ldots) + B(x^5\,\alpha^{15} + \ldots) + C(x^3\,\alpha^{13} + \ldots) + G(x^3\,\alpha^{10} + \ldots)$$
$$+ H(x^4\,\alpha^{13} + \ldots) + I\,\alpha^{10} = 0.$$

Die Klassen $K'$ rednciren sich auf eine einzige:

$$D\beta'^2\,\alpha^3 + I\,\alpha^{10},$$

wenn $I$ nicht gleich Null ist. Man erhält:

$$r_1 = 5, \quad s_1 = 2, \quad q_1 = 1,$$

nnd es wird die Gleichnng:

$$D\xi + I = 0,$$

die nnr eine Wnrzel hat. Da $s\,s_1 = 2$ ist, so vereinen sich in diesem Falle die Wurzeln $u_6$ nnd $u_7$ zu einem System, nnd sind heide nach Potenzen von $(z-\alpha)^{\frac{1}{2}}$ zu entwickeln. — Ist dagegen $I$ gleich Null, so hat man:

$$K_1 = D\xi'^2 \alpha^8 + Bx^3 \alpha^{11},$$
$$r_1 = 3, \quad s_1 = 1, \quad q_1 = 2,$$

und:

$$D\xi^2 + Bx^3 = 0,$$

eine quadratische Gleichung in Bezug auf $\xi$, und wegen:

$$s s_1 = 1$$

würden $u_6$ und $u_7$ von einander getrennt und nach ganzen Potenzen von $z - a$ entwickelbar erscheinen.

26) Historische Betrachtungen.

Die allgemeinere Anwendung der imaginären Quantitäten in der Functionentheorie, namentlich in der Differenzial- und Integralrechnung haben in neuester Zeit diese Disciplinen derart umgestaltet, dass es unthunlich ist, dieselben von einander und von der Theorie des Imaginären abgesondert vorzutragen. Es war daher nöthig, einestheils die Elemente der Differenzialrechnung mit in diesem Artikel zu geben, andererseits auf den Artikel: „analytische Quadraturen" öfter zurückzuweisen.

Was die Geschichte dieser Theorie anbetrifft, so hat namentlich die Theorie der elliptischen Functionen Veranlassung gegeben, sich in allgemeinerer Weise als bis dahin geschehen, mit den Functionen complexer Variablen zu beschäftigen. Da nämlich die elliptischen Functionen zunächst aus der Integralrechnung hervorgegangen sind, und die Umkehrungen von Integralen bilden, welche unendlich viel Bedeutungen haben, so führte dies auf die Betrachtung der Mehrdeutigkeit der Integrale, welche, wie wir gesehen haben, von den Betrachtungen der Wege, auf welche sich die Integrale erstrecken, unzertrennlich sind. Dieser Punkt, sowie die Theorie der homogegenen Functionen, welche den Betrachtungen über Functionen mit complexen Variablen zu Grunde liegt, ist hauptsächlich von Cauchy erledigt. Ihm danken wir auch die Betrachtungen über die allgemeine Entwickelbarkeit der Functionen in Reihen, den Residuencalcul und anderes dahin Gehöriges, womit eigentlich der Functionentheorie erst eine feste Grundlage gewonnen ist. Die frühere Anwendung z. B. der Taylor'schen Reihe, gewöhnlich ohne Rücksicht auf das Imaginäre, hat selbst bedeutende Mathematiker zu Trugschlüssen und falschen Resultaten geführt. Unter den Anwendungen und Ausführungen dieser Theorieen ist besonders zu beachten die von Puiseux herrührende Anwendung auf die Theorie der algebraischen Gleichungen, die hier Abschnitt 23 bis 25 berücksichtigt ist, ferner die auf die Eigenschaften der Integrale mit complexen Variablen gestützte Theorie der elliptischen Functionen von Briot und Bouquet *(theorie des fonctions doublement périodiques etc.)*, worin sich auch eine gut geschriebene Theorie der Functionen mit complexen Variablen befindet. Als Gründer dieser Betrachtungsweise der elliptischen Functionen ist wohl Liouville anzusehen. Namentlich ist zu beachten die Riemann'sche Arbeit: Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen von einer veränderlichen complexen Grösse. Hauptsächlich der Schlusssatz, das von Riemann so genannte Dirichlet'sche Prinzip (hier mitgetheilt in dem Artikel: Quadraturen — Zurückführung der partiellen Differenzialgleichungen auf —), ist darum von so grosser Wichtigkeit geworden, weil Riemann es seiner: „Theorie der Abel'schen Functionen" (aus Crelle's Journal auch besonders abgedruckt) zu Grunde gelegt hat. Es ist hier mit einiger Ausführlichkeit auf die Functionen von imaginären Variablen und auf die verschiedenen Theorieen des Imaginären selbst eingegangen, weil dieser Gegenstand mit dem Fortschreiten der Wissenschaft immer wichtiger wird, und in der Analysis eine Epoche herbeizuführen scheint, die sich eben nur mit den durch Erfindung der höheren Analysis geschehenen Fortschritten in den verschiedenen Theilen der Mathematik vergleichen lässt, und deren sorgfältiges Studium daher Jedem unentbehrlich ist, welcher sich überhaupt mit der Mathematik beschäftigt.

**Quantität (geometrische oder räumliche).** Siehe Raum und Raumlehre.

**Quantität der Bewegung** wird das Product aus Masse und Geschwindigkeit eines Punktes oder Körpers genannt.

## Quart.

Ein Hohlmaass, hauptsächlich bestimmt zur Messung von Flüssigkeit. Ein preussisches Quart enthält 1,145031 Litre, und ist gleich 64 Kubikzoll preussisch.

## Quartier.

Ein Hohlmaass, gebräuchlich in Braunschweig. Es enthält 0,9368438 Litre, 0,8181818 preussische Quart oder $52\frac{4}{11}$ preussische Kubikzoll.

**Quaterne.**

Verbindung von 4 Elementen aus einer beliebigen Anzahl. Beim Lotto wird darunter derjenige Gewinn verstanden, bei welchem von den 5 gezogenen Nummern und von den 5 auf dem Zettel des Spielers befindlichen 4 übereinstimmen. Die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn einer Quaterne ist:

$$\frac{5}{511038} = 0{,}0000098 \ldots,$$

also etwas geringer als die Wahrscheinlichkeit, dass in der preussischen Klassenlotterie der Hauptgewinn auf ein bestimmtes Loos falle, welche letztere Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{1}{92000} = 0{,}0000109$$

ist. Vergleiche den Artikel: Wahrscheinlichkeit.

**Quent, Quentchen, Quentlein.**

Ein in verschiedener Weise bestimmter Gewichtstheil. Er ist ein Bruchtheil des Lothes. Nach dem alten preussischen Gewichtssystem wurde das Loth in 4, das Pfund in 128, der Centner in 14080 Quentchen getheilt. Nach dem neuen preussischen Gewichtssystem hat das Loth 10 Quentchen, das Pfund deren 300 und der Centner deren 30000.

**Querhaupt (Maschinenlehre).**

Eine Vorrichtung, welche an einer Kolbenstange angebracht wird, die den Uebergang einer drehenden oder schwingenden Bewegung in eine gradlinige oder umgekehrt, vermittelt. Es ist hierbei nöthig, dem Kopfe der Stange eine feste Führung zu geben, *EF*, *EF* (Fig. 84), innerhalb deren sich das auf die Kolbenstange aufgesetzte Querhaupt *DD* entweder gleitend, oder wie hier angedeutet, mittels zweier Frictionsräder bewegt. An das Querhaupt ist dann die Kurbelstange *AC* angebracht, welche mit dem Krummzapfen verbunden ist, von dem die drehende Bewegung ausgeht, oder auf welches sie übergehen soll. Auch kann man (Fig. 85) das Querhaupt mit einem Schlitz zur Aufnahme eines Warzenkopfes *A* versehen, welcher sich unmittelbar an den Krummzapfen *AC* anschliesst, und so die Kurbelstange entbehrlich machen. Diese letztere Construction wird öfter bei Dampfpumpen angewandt.

Fig. 84.

Fig. 85.

**Querprofil, Breitenprofil (Hydraulik).**

Wenn man senkrecht gegen die Bewegungsrichtung eines fliessenden Wassers eine Ebene sich denkt, so bildet dieselbe einen Querschnitt des Wassers. Der Umfang desselben wird Querprofil genannt, und zerfällt in das Wasserprofil, d. h. den von Grund und Ufern begrenzten Theil, und in Luftprofil, d. h. den freiliegenden obern Theil.

**Querschwingungen (Dynamik)** werden solche Schwingungen genannt, welche senkrecht auf der Längenrichtung des schwingenden Körpers stattfinden, wie z. B. die Schwingungen eines Pendels und einer Saite. Bei Wellenbewegungen versteht man darunter solche Schwingungen, welche senkrecht auf der Fortpflanzungsrichtung der Wellenbewegung stattfinden, wie z. B. die Schwingungen, welche bei der Wellenbewegung des Wassers stattfinden, wo die Welle sich in der Richtung der Oberfläche des Wassers, also in horizontaler verbreitet, während die Schwingung in senkrechter Richtung stattfindet. Sie heissen auch

Transversalschwingungen. Vergleiche den Artikel: Schwingungen.

**Querschnitt.**

Der Durchschnitt eines Körpers senkrecht auf seine Längenrichtung. Nur die prismatischen Körper haben einen unveränderlichen Querschnitt.

**Querschnitt (gefährlicher), Brechungsquerschnitt (section de rupture)** heisst bei denjenigen Körpern, die einen veränderlichen Querschnitt haben, diejenige Stelle, welche der grössten Spannung ausgesetzt ist. (Siehe den Artikel: Elasticität.)

**Quersumme.**

Die Summe der Ziffern einer Zahl. Von 3792 ist $3+7+9+2=21$ die Quersumme.

**Quetschhammer (Dynamik),** auch Putschhammer. Ein Hammer, welcher langsam und schwer arbeitet. Er unterscheidet sich in der Fabrikation von andern dadurch, dass er mit Stiel oder Helm und Hülse aus einem Stücke gegossen werden, während die übrigen gewöhnlich einen hölzernen Stiel und eine Hülse von Schmiedeeisen haben.

**Quetschwerk, cingleur (Dynamik),** dient zum Ausschneiden grosser Maschinentheile, sowie zum Zängen und Zusammenschlagen der aus dem Puddelofen kommenden Luppen.

**Quinte, Quinterne.**

Eine Verbindung von 5 Elementen aus einer beliebigen Anzahl. Beim Lotto heisst derjenige Gewinn so, wo sämmtliche gezogene Nummern mit den auf dem Zettel des Spielers befindlichen übereinstimmen. Die Wahrscheinlichkeit des Gewinns einer Quinte ist:

$$\frac{1}{52739102160}=0{,}000000000019\ldots$$

Siehe den Artikel: Wahrscheinlichkeit.

**Quirl (Maschinenlehre).**

Ein dem Drilling ähnliches Maschinenstück. Es hat 7 bis 10 Triebstöcke, und wird gewöhnlich an der Welle angebracht.

**Quotient.**

1) Definition und Bildung der Quotienten.

Quotient heisst das Resultat einer Division. Ist $a$ der Dividendus, $b$ der Divisor, so bezeichnet man den Quotienten durch das Zeichen:

$$\frac{a}{b}, \text{ auch } a:b,$$

(gelesen $a$ durch $b$). Ist:

$$\frac{a}{b}=c,$$

so hat man:

$$a=b\cdot c,$$

d. h.:

„Quotient und Divisor multiplicirt geben als Product den Dividendus." (Vergleiche den Artikel: Quantität.)

Sind $a$ und $b$ ganze Zahlen, so kann der Quotient eine ganze Zahl sein, und dazu ist erforderlich, dass der Dividendus $a$ ein Vielfaches des Divisor $b$ sei. Der Quotient ist ein Bruch, wenn dies nicht stattfindet, und zwar ein echter, wenn der Dividendus kleiner, ein unechter, wenn er grösser als der Divisor ist.

Die Hauptsätze über Bildung der Quotienten sind:

I. „Der Quotient einer Summe oder Differenz, getheilt durch irgend einen Divisor, ist gleich der Summe oder Differenz derjenigen Quotienten, welche man erhält, wenn man jedes Glied durch den gemeinschaftlichen Divisor theilt."

Also:

$$\frac{a\pm b\pm c\pm\ldots}{e}=\frac{a}{e}\pm\frac{b}{e}\pm\frac{c}{e}\pm\ldots$$

II. „Ein Quotient bleibt ungeändert, wenn man Divisor und Dividendus mit derselben ganz beliebigen Zahl multiplicirt oder dividirt."

Also:

$$\frac{a}{b}=\frac{ae}{be},$$

und:

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{a}{e}}{\frac{b}{e}}.$$

III. „Sind Divisor und Dividendus selbst Quotienten oder Brüche, so vertauscht man im Divisor Zähler und Nenner, und verfährt wie beim Multipliciren."

Also:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Auf diesem Satze, dessen Beweis wie der der vorigen im Artikel: „Quantität"

zu suchen ist, beruht die Division von echten und unechten Brüchen mit einander oder mit ganzen Zahlen. Hat man nämlich $\frac{a}{b}$ durch die ganze Zahl $c$ dividirt, so gibt man letzterer den Nenner 1, also:

$$\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}.$$

IV. „Sind Divisor und Dividendus mit Vorzeichen versehen, so ist der Quotient positiv, wenn beide Vorzeichen gleich, negativ, wenn sie ungleich sind.“

Also:

$$a : b = \frac{a}{b}, \quad -a : b = -\frac{a}{b},$$

$$a : -b = -\frac{a}{b}, \quad -a : -b = \frac{a}{b}.$$

2) Division ganzer Zahlen.

Bei der Division ganzer Zahlen handelt es sich darum, den Quotienten als ganze Zahl zu ermitteln, wenn dies möglich ist, oder denselben als ganze Zahl, vermehrt um einen echten Bruch darzustellen. Das letztere kann immer geschehen, wenn der Divisor kleiner als der Dividendus ist. Denn in diesem Falle wird, wenn $b$ der Divisor ist, der Dividendus immer dargestellt werden können durch den Ausdruck:

$$a = nb + c,$$

wo $n$ eine ganze Zahl und $c$ kleiner als $b$ ist. Man hat also nach Satz I. des vorigen Abschnittes:

$$\frac{a}{b} = \frac{nb+c}{b} = \frac{nb}{b} + \frac{c}{b} = n + \frac{c}{b},$$

wo $\frac{c}{b}$ ein echter Bruch ist. Der Zähler desselben $c$ wird auch Divisionsrest genannt. Was nun die gewöhnliche Regel des Dividirens anbetrifft, so beruht dieselbe ganz auf den Eigenschaften des regelmässigen Ziffernsystems, und war in dieser Weise vor Erfindung desselben, also z. B. bei den Griechen und Römern, nicht zu leisten. Dieser Umstand namentlich erklärt das geringe Geschick im Rechnen, welches diese Völker besassen.

Die Gründe, auf welchen unser Dividiren beruht, wollen wir an einem Beispiel verdeutlichen.

```
5792 | 709351856 | 122470 5616/5792
       579200000
       ---------
       130150000
       115840000
       ---------
        14311000
        11584000
        --------
         2727800
         2316800
         -------
          411050
          405440
          ------
            5616
```

Man dividirt mit dem Divisor 5792 zunächst in die höchsten Ziffern des Dividendus, 7093, und merkt den höchsten ganzen Quotienten, hier 1; es ist dies die erste Ziffer des Quotienten. Ferner subtrahirt man $1 \cdot 5792$ von 7093 und fügt zum Reste 1301 die nächste Ziffer des Dividendus, 5, hinzu. 5792 in 13015 geht dann 2mal, diese 2 ist die zweite Ziffer des Quotienten; $13015 - 2 \cdot 5792$ ist gleich 1431. Zu diesem Rest kommt die folgende Ziffer 1 des Dividendus. So wird fortgefahren, bis alle Ziffern des Dividendus erschöpft sind. Der letzte Rest 5616 ist dann der Divisionsrest. Gibt man ihm den Divisor als Nenner, so ergänzt der dadurch entstehende Bruch den vollständigen Quotienten.

Man sieht die Richtigkeit des Verfahrens leicht, wenn man alle Subtrahenden 5792, 11584 u. s. w., und Reste 13015, 14311 u. s. w. durch Nullen ergänzt, wie oben geschehen ist. Da dann diese nach und nach vom Dividendus abgezogen sind, so müssen sie, zum letzten Rest addirt, den Dividendus wiedergeben. Es ist also:

$$709351856 = 579200000 + 11584000 + 2316800 + 405450 + 5616.$$

Nun war aber:

$$5792 = 1 \cdot 5792, \quad 11584 = 2 \cdot 5792,$$
$$23168 = 4 \cdot 5792, \quad 40544 = 7 \cdot 5792,$$

also:

$$709351856 = 100000 \cdot 5792 + 20000 \cdot 5792 + 2000 \cdot 5792 + 400 \cdot 5792 + 70 \cdot 5792 + 5616$$
$$= 5792\,(100000 + 20000 + 2000 + 400 + 70)\,5616 = 122470 \cdot 5792 + 5616,$$

und wenn man mit 5792 dividirt:

$$\frac{709351856}{5792} = 122570 + \frac{5615}{5792},$$

womit die Richtigkeit der Rechnung erwiesen ist.

3) Ermittelung der gemeinschaftlichen Factoren von Dividendus und Divisor.

Die Bildung der Quotienten wird erleichtert, wenn Divisor und Dividendus einen gemeinschaftlichen Factor haben; nach Satz II. des ersten Abschnitts kann derselbe nämlich ohne Weiteres unterdrückt werden.

Man kann das Auffinden dieser gemeinschaftlichen Factoren durch Zerlegung von Divisor und Dividendus in ihre einfachen Factoren erreichen, wo dann die in beiden vorkommenden zu unterdrücken sind.

Die gewöhnliche Methode, den gemeinschaftlichen Factor zweier Zahlen zu finden, ist nämlich hier nicht anwendbar, weil diese Methode ja eben die vollständig ausgeführte Division der grössern Zahl durch die kleinere als einen ersten Schritt voraussetzt.

Zur Ermittelung der kleinern Factoren einer Zahl:

$$2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11$$

gibt es einfache Regeln, die wir hier mittheilen.

I. Eine Zahl ist durch 2 theilbar, je nachdem ihre letzte Ziffer durch 2 theilbar ist oder nicht.

Offenbar zerfällt jede Zahl 711 oder 814 in eine durch 10 theilbare und in eine, die der letzten Ziffer gleich, also:

$$711 = 710 + 1, \quad 814 = 810 + 4.$$

Das erste Glied dieser Summe ist immer durch 2 theilbar ist; je nachdem dies bei dem letzten Gliede stattfindet, ist es also bei der ganzen Zahl der Fall.

II. Eine Zahl ist durch 4 theilbar, je nachdem die aus ihren beiden letzten Ziffern gebildete durch 4 theilbar ist oder nicht.

Denn jede Zahl:

$$7951 = 7900 + 51$$

zerfällt in ein Vielfaches von 100 und in die aus ihren beiden letzten Ziffern gebildete Zahl. Da nun 100 durch 4 theilbar ist, so kommt es nur auf die letztere Zahl an.

III. Eine Zahl ist durch 8 theilbar, je nachdem die aus ihren drei letzten Ziffern gebildete Zahl durch 8 theilbar ist oder nicht.

Dies ist ganz wie in I. und II. ersichtlich. Z. B.:

$$793824 = 793000 + 824.$$

Die erste durch 1000 theilbare Zahl muss es auch durch 8 sein; es kommt also auf 824 an.

IV. Eine Zahl ist durch 3 oder durch 9 theilbar, je nachdem die Quersumme, d. h. die Summe ihrer Ziffern, durch 3 oder 9 theilbar ist oder nicht.

Z. B. die Quersumme von 8792 ist:

$$8 + 7 + 9 + 2 = 23,$$

also die Zahl nicht durch 3 theilbar. 6942 hat zur Quersumme 21, ist also durch 3, nicht aber durch 9 theilbar. 7938 hat zur Quersumme 27, ist also durch 9 theilbar.

Der Beweis ist leicht zu führen. Es ist z. B.:

$$7938 = 7000 + 900 + 30 + 8 = 7 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8.$$

Die Potenzen von 10:

$$10, 100, 1000 \ldots$$

sind gleich einer nur aus den Ziffern 9 zusammengesetzten Zahl, vermehrt um die Einheit, also:

$$10 = 9 + 1, \quad 100 = 99 + 1, \quad 1000 = 999 + 1,$$

also demgemäss:

$$7938 = 7\,(999+1) + 9\,(99+1) + 3\,(9+1) + 8 = 7 \cdot 999 + 9 \cdot 99 + 3 \cdot 9 + 7 + 9 + 3 + 8.$$

Die letzten vier Zahlen geben die Quersumme von 7938. Da nun 9, 99, 999 ... Vielfache von 9 sind, so setzt sich jede Zahl aus einem Vielfachen von 9, also auch von 3, vermehrt um die Quersumme, zusammen. Ist letztere auch durch 3 oder 9 theilbar, so ist es somit die ganze Zahl.

V. Eine Ziffer ist durch 10 theilbar, wenn sie mit einer Null endet.

Offenbar endet jedes Vielfache von 10 nämlich mit einer Null.

VI. Eine Zahl ist durch 5 theilbar, wenn sie mit einer 5 oder 0 endet.

Denn jede Zahl, z. B. 7935 oder 7937, kann man schreiben:

$$7930 + 5, \quad 7930 + 7,$$

der erstere Theil ist durch 10, also auch durch 5 theilbar, der letztere einzifferige kann, wenn er durch 5 theilbar sein soll, nur 5 oder 0 sein.

VII. Ob eine Zahl durch 11 theilbar sei, wird auf folgende Weise geprüft. — Man bildet die Quersumme der Ziffern von grader Ordnung und der von ungrader, die Ziffern von der Rechten zur Linken gezählt. Die erstere Summe wird von der zweiten abgezogen, nachdem man nöthigenfalls die letztere um ein Vielfaches von 11 vermehrt hat. Ist der Rest 0 oder durch 11 theilbar, so findet letzteres bei der ganzen Zahl statt.

Beispiel. Sei gegeben:

87390251443.

Die Summe der Ziffern von grader Ordnung ist:

$$4+1+2+9+7=23,$$

die der von ungrader Ordnung:

$$3+4+5+0+3+8=23,$$
$$23-23=0,$$

also die Zahl ist durch 11 theilbar.

Der Beweis beruht auf folgenden Betrachtungen.

„Fügt man zur Einheit eine grade Anzahl von Nullen hinzu, so hat man ein Vielfaches von 11, vermehrt um die Einheit."

Denn:

$$100=99+1,\ 10000=9999+1\ \ldots,$$

wo 99, 9999 ... offenbar durch 11 theilbar sind. Hieraus folgt:

„Wenn zu irgend einer Ziffer eine grade Zahl von Nullen hinzugefügt wird, so hat man ein Vielfaches von 11, vermehrt um diese Ziffer."

Z. B.:

$$70000=7\,(9999+1)=7\cdot 9999+7$$

ist also gleich einem Vielfachen von 11, vermehrt um 7.

„Fügt man zur Einheit dagegen eine ungrade Anzahl von Nullen hinzu, so erhält man ein Vielfaches von 11, vermindert um die Einheit."

Es ist nämlich:

$$10=11-1,1000=990+10=990+11-1,$$
$$100000=99990+11-1\ \ldots,$$

und es folgt hieraus wie oben:

„Jede Ziffer, zu der man eine ungrade Anzahl von Nullen hinzufügt, gibt ein Vielfaches von 11, vermindert um den Betrag der Ziffer."

Sei nun $p$ die Summe der Ziffern von grader Ordnung, die also, wenn man sie ihrem wahren Werthe nach nimmt, eine ungrade Anzahl von Nullen hinter sich haben, so ist der wahre Werth derselben $n\cdot 11-p$, wo $n$ eine ganze Zahl ist. Denn in unserm Beispiel ist:

$$40+1000+200000+90000000$$
$$+7000000000$$

der wahre Werth der Ziffern, also einem Vielfachen von 11, weniger $4+2+9+7$ gleich. Ebenso ist $s\cdot n+q$ der Betrag der Ziffern von ungrader Ordnung, wenn $s$ eine ganze Zahl, und $q$ die Quersumme der Ziffern ist.

Die ganze gegebene Zahl hat also den Werth:

$$11s+q+11n-p=n\,(s+n)+q-p.$$

Ist also $q-p$ durch 11 theilbar, so ist es die ganze Zahl ebenfalls, da der übrige Theil ein Vielfaches von 11 ist. $q-p$ aber bildeten wir, indem wir die erste Quersumme von der letztern abzogen.

Es ist leicht ersichtlich, dass man mittels der hier gegebenen Regeln in IV. und VII. auch die Divisionsreste findet, die bezüglich bei der Division mit 9 und 11 bleiben.

Behandelt man nämlich die bezügliche Quersumme, wenn man durch 9, oder den Rest von zwei Quersummen, wenn man durch 11 dividiren will, ganz in derselben Weise, so wird sich schliesslich eine Zahl ergeben, die kleiner als 9 oder 11 ist, und dies ist der Divisionsrest. Z. B. 9871672 hat zur Quersumme 40, die Quersumme von 40 ist 4, also 4 der Divisionsrest von $\frac{9871672}{9}$.

Da diese Regeln für die Ermittelung grösserer gemeinschaftlicher Divisoren zweier Zahlen nicht ausreichen, so ist eine „Factorentafel", welche die einfachen Factoren der ganzen Zahlen enthält, zuweilen sehr nützlich. Eine solche ist z. B. in „Vegas Sammlung mathematischer Tafeln, herausgegeben von J. A. Hülsse" enthalten, und gibt die einfachen Factoren der Zahlen bis 102000, mit Ausnahme der durch 2, 3, 5 theilbaren an.

4) Quotienten in der Gestalt von Decimalbrüchen.

Einen immer gleichmässigen Ausdruck für alle Quotienten, mögen dieselben ganze Zahlen, echte oder unechte Brüche sein, gewährt die Form der Decimalbrüche. Diese Ausdrücke beruhen auf folgenden Betrachtungen.

Sei zu dividiren 798126 durch 6913, so kann man den Quotienten $\frac{798126}{6913}=a$ mit einer beliebigen Zahl, etwa mit 10000, multipliciren, indem man den Dividendus mit 10000 multiplicirt. Man wird dann haben:

$$\frac{7991270000}{6913}=10000\,a,$$

und indem man die Division wirklich ausführt:

```
6913 | 7991270000 | 1155977 999/6913
       6913
       10782
        6913
        38697
        34565
         41320
         34565
          67550
          62217
           53330
           48391
            49390
            48391
              999
```

also:

$$10000\,a = 1155977 + \frac{999}{6913}.$$

Um den Quotienten $a$ selbst su haben, mnss durch 10000 dividirt werden. Man erhält:

$$a = \frac{1155977}{10000} + \frac{\frac{999}{6913}}{10000}.$$

Das erste Glied rechts ist gleich:

$$115\frac{5977}{10000} = 115{,}5977\ \ldots$$

Bei Brüchen, die eine Potenz im Nenner baben, nnd die man bekanntlich Decimalbrüche nennt, dentet man nämlich den Nenner nnr durcb ein Komma an, welcbes binter den Einern stebt, nnd so viel Stellen hinter sich hat, als dieser Nullen baben würde. Was den Bruch $\frac{999}{6913}$ anbetrifft, so ist dieser kleiner als 1, da immer der Divisionsrest ein echter Bruch sein mnss, also da derselbe dnrcb 10000 dividirt ist, so begebt man, indem man ihn weglässt, einen Febler, der kleiner als $\frac{1}{10000} = 0{,}0001$, oder kleiner als eine Einbeit der letzten Stelle des Quotienten 115,5977 sein würde, folglich anf die Stellen desselben keinen Einfluss ausübt. Man kann also auf diese Weise die Quotienten, wenn ancb nicht genau, doch auf jeden beliebigen Grad der Näherung finden, wenn man nnr an den Dividendns die gehörige Anzahl Nnllen anhängt.

Beachten wir noch die Stellnng des Komma im Quotienten, so tritt dies offenbar dann ein, ebe die erste der angehängten Nullen zum Rest binzugefügt wird

Merkt man also die Regel so, dass, wenn die Stelleu des Dividendns erschöpft sind, das Komma dem Qnotienten zngefügt wird, so kann man das anfängliche Anhängen der Nnllen an den Dividenden ersparen, nnd nacb Setzung des Kommas im Qnotienten den Divisionsresten nacb nnd nach soviel Nnllen, als erfordert werden, gehen.

Es kann hierbei der Dividendns ancb ein Decimalbruch sein. Sei derselbe 657,913. Derselbe wird s. B. mit 1000 mnltiplicirt, indem man das Komma drei Stellen nach rechts, also ans Ende rückt, denn beim Rücken nm eine Stelle verwandeln sich die Einer in Zehner, bei der zweiten in Hunderte, bei der dritten in Tansende. Somit bat man eine ganze Zahl zn dividiren, nnd der Qnotient wird tansendmal zn gross. Er müsste also mit 1000 dividirt, also das Komma wieder drei Stellen nach links gcrückt werden. Statt dessen kann man also im Dividendus das Komma an seiner Stelle lassen, nnd im Qnotienten ein solches dann anbringen, wenn man hei der Division bis sum Komma des Dividendus gelangt ist. Ein Beispiel wird dies klar machen.

```
27 | 657,913 | 24,367
     54
     117
     108
       99
       81
      181
      162
       193
       189
         4
```

Nachdem der Rest 11 gebildet nnd 7 binzugefügt ist, ist man beim Komma des Dividendus angelangt; da 27 in 117 4mal gebt, ist binter die 4 im Quotienten cin Komma zn setzen.

Die Rechnung bleibt dieselbe, wenn der Divisor grösser als der Dividendns ist. Z. B:

```
8911 | 2,37913 | 0,000266 . . .
       1 7822
        59693
        53466
         62270
         53466
          8804
```

8911 in 2 geht 0mal; in den Quotienten ist eine Null nnd dann ein Komma zn setzen, weil die Division bis zum

Komma des Dividenden gelangt ist. Aus diesem Grunde darf man bei der ersten Theildivision nie über das Komma des Dividendus hinausgehen, wenn derselbe auch kleiner als der Divisor ist. 2 bleibt Divisionsrest; 8911 in 23 geht ebenfalls 0 mal, eben so in 237 und in 2379. Es kommen also in den Quotienten noch drei Nullen hinter das Komma, 8911 in 23791 geht zweimal; es ist dann wie oben fortzufahren.

Leicht lässt sich dies Verfahren noch anwenden, wenn auch der Divisor ein Decimalbruch ist. Sucht man z. B. den Quotienten:

$$a = \frac{27{,}953}{611{,}24}.$$

Um den Divisor in eine ganze Zahl zu verwandeln, ist derselbe mit 100 zu multipliciren.

Der Bruch bleibt aber ungeändert, wenn dies auch mit dem Dividendus geschieht.

Es ist:

$$a = \frac{27{,}953}{611{,}24} \cdot \frac{100}{100} = \frac{2795{,}3}{61124}.$$

Es ergibt sich hieraus folgende Regel:

„Man lässt im Divisor das Komma ganz weg, und rückt es im Dividendus so viel Stellen (hier 2) nach rechts, als der Divisor Bruchstellen hatte, indem man, wenn nicht hinreichend Stellen im Dividendus vorhanden sind, dieselben durch Nullen ergänzt. Da der Divisor nun eine ganze Zahl ist, wird wie oben verfahren."

Beispiele.

Sei gegeben:

7,9216 | 63,52.

Das Komma ist im Dividenden 4 Stellen einzurücken, da soviel der Divisor hat. Der Dividendus hat nur zwei Stellen, man fügt also zwei Nullen hinzu.

79216 | 635200 | 8,018 . . .
633728
147200
79216
679840
633728
46112

Sei ferner gegeben:

18,253 | 0,0056125.

Das Komma ist drei Stellen einzurücken, also:

18253 | 5,6125 | 0,000307 . . .
5 4759
136600
127771
8829

Bei allen diesen Rechnungen erhöht man die letzte Stelle des Quotienten dann um Eins, wenn der Divisionsrest grösser als die Hälfte des Divisors ist, denn dann ist der weggelassene Theil des Quotienten grösser als die Hälfte der letzten Stelle desselben, also einer Eins näher als einer Null. In unserm ersten Beispiel also wäre statt der letzten 8 in 8,018 eine 9 zu setzen, wenn man die Rechnung hier abbricht, da der Divisionsrest 46112 grösser als die Hälfte von 79216 ist.

In unserer Methode ist als besonderer Fall die Verwandlung der gemeinen Brüche in Decimalbrüche enthalten.

Z. B. sei $\frac{2}{17}$ zu finden.

2
17 | 20 = 0,11764705 . . .
17
30
17
130
119
110
102
80
68
120
119
100
85
15

17 in 2 geht Null. Es kommt also im Quotienten eine Null und ein Komma, 2 ist Divisionsrest; man fügt eine Null hinzu, da der Dividendus erschöpft ist. 17 in 20 geht einmal u. s. w.

Periode eines Decimalbruchs heisst die Stelle, wo die Ziffern desselben sich wiederholen, entweder von Anfang oder von einer bestimmten Ziffer an. Auch nennt man die wiederkehrenden Ziffern selbst Periode.

Es ist klar, dass jeder Decimalbruch, der aus einem gemeinen Bruche, d. h. durch Division einer ganzen Zahl in eine andere entsteht eine Periode hat, wenn er nicht vollständig sich berechnen lässt. Denn ist z. B. 17 der Divisor, so können, da der Rest immer kleiner als 17 sein muss, nur 16 von einander verschiedene Reste vorkommen,

und da an jeden eine Null angehängt wird, so sind nur höchstens 16 von einander verschiedene Reste möglich. Sind alle dieselben dagewesen, so muss sich einer derselben, und mithin die ganze Rechnung wiederholen.

Beispiele.

$$\frac{9}{25} = 0{,}36.$$

Dieser Bruch ist vollständig zu berechnen.

$$\frac{5}{11} = 0{,}454545\ \ldots$$

Der Bruch hat eine Periode von zwei Ziffern 45, die von Anfang an wiederkehren.

$$\frac{5}{12} = 0{,}416666\ \ldots$$

Der Bruch hat eine Periode von einer Ziffer 6, die aber nicht von Anfang an vorkommt u. s. w.

Bei solchen Rechnungen, wo der Dividendus nicht sehr gross ist, namentlich wenn mehrere Zahlen durch denselben Divisor zu theilen sind, kann man auch zweckmässig die Division in eine Multiplication verwandeln. Seien $a$ und $b$ ganze Zahlen, so ist:

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}.$$

Verwandelt man nun $\frac{1}{b}$ in einen Decimalbruch $c$, so hat man also das Product $a \cdot c$ zu bilden.

Beispiel.

$$\frac{7}{131} = 7 \cdot \frac{1}{131},$$

$$\frac{1}{131} = 0{,}007633587\ \ldots,$$

$$7 \cdot 0{,}007633587 = 0{,}053435109\ \ldots$$

Um solche Rechnungen mit Vortheil auszuführen, ist eine Tafel zweckmässig, welche die Brüche enthält, deren Zähler die Einheit und der Nenner eine beliebige ganze Zahl ist. — Der Bruch $\frac{1}{a}$ wird bekanntlich der umgekehrte oder reciproke Werth der Zahl $a$ genannt. — Wir fügen hier eine solche Tafel hinzu.

5) Tafel der umgekehrten Werthe der Zahlen von 1 bis 1000.

| Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | ,5 | 30 | ,033333333 | 58 | ,017241379 | 86 | ,011627907 |
| 3 | ,333333333 | 31 | ,032258065 | 59 | ,016949153 | 87 | ,011494253 |
| 4 | ,25 | 32 | ,03125 | 60 | ,016666667 | 88 | ,011363636 |
| 5 | ,2 | 33 | ,030303030 | 61 | ,016393443 | 89 | ,011235955 |
| 6 | ,166666667 | 34 | ,029411765 | 62 | ,016129032 | 90 | ,011111111 |
| 7 | ,142857143 | 35 | ,028571429 | 63 | ,015873016 | 91 | ,010989011 |
| 8 | ,125 | 36 | ,027777778 | 64 | ,015625 | 92 | ,010869565 |
| 9 | ,111111111 | 37 | ,027027027 | 65 | ,015384615 | 93 | ,010752688 |
| 10 | ,1 | 38 | ,026315789 | 66 | ,015151515 | 94 | ,010638298 |
| 11 | ,090909091 | 39 | ,025641026 | 67 | ,014925373 | 95 | ,010526316 |
| 12 | ,083333333 | 40 | ,025 | 68 | ,014705882 | 96 | ,010416667 |
| 13 | ,076923077 | 41 | ,024390244 | 69 | ,014492754 | 97 | ,010309278 |
| 14 | ,071428571 | 42 | ,023809524 | 70 | ,014285714 | 98 | ,010204082 |
| 15 | ,066666667 | 43 | ,023255814 | 71 | ,014084517 | 99 | ,01010101 |
| 16 | ,0625 | 44 | ,022727273 | 72 | ,013888889 | 100 | ,01 |
| 17 | ,058823529 | 45 | ,222222222 | 73 | ,01369863 | 101 | ,00990099 |
| 18 | ,055555556 | 46 | ,02173913 | 74 | ,013513514 | 102 | ,009803922 |
| 19 | ,052631579 | 47 | ,0212766 | 75 | ,013333333 | 103 | ,009708738 |
| 20 | ,05 | 48 | ,020833333 | 76 | ,013157895 | 104 | ,009615385 |
| 21 | ,047619048 | 49 | ,020408163 | 77 | ,012987013 | 105 | ,00952381 |
| 22 | ,045454545 | 50 | ,02 | 78 | ,012820513 | 106 | ,009433962 |
| 23 | ,043478261 | 51 | ,019607843 | 79 | ,012658228 | 107 | ,009345794 |
| 24 | ,041666667 | 52 | ,019230769 | 80 | ,0125 | 108 | ,009259259 |
| 25 | ,04 | 53 | ,018867925 | 81 | ,012345679 | 109 | ,009174312 |
| 26 | ,038461538 | 54 | ,018518519 | 82 | ,012195122 | 110 | ,009090909 |
| 27 | ,037037037 | 55 | ,018181818 | 83 | ,012048193 | 111 | ,009009009 |
| 28 | ,035714286 | 56 | ,017857143 | 84 | ,011904762 | 112 | ,008928571 |
| 29 | ,034482759 | 57 | ,01754386 | 85 | ,011764706 | 113 | ,008849558 |

| Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 114 | ,00877193 | 172 | ,005813953 | 230 | ,004347826 | 288 | ,003472222 |
| 115 | ,008695652 | 173 | ,005780347 | 231 | ,004329004 | 289 | ,003460208 |
| 116 | ,00802096 | 174 | ,005747126 | 232 | ,004310345 | 290 | ,003448276 |
| 117 | ,008547009 | 175 | ,005714286 | 233 | ,004291845 | 291 | ,003436426 |
| 118 | ,008474576 | 176 | ,005681818 | 234 | ,004273504 | 292 | ,003424658 |
| 119 | ,008403361 | 177 | ,005649718 | 235 | ,004255319 | 293 | ,003412969 |
| 120 | ,008333333 | 178 | ,005617978 | 236 | ,004237288 | 294 | ,003401361 |
| 121 | ,008264463 | 179 | ,005586592 | 237 | ,004219409 | 295 | ,003389831 |
| 122 | ,008196721 | 180 | ,005555556 | 238 | ,004201681 | 296 | ,003378378 |
| 123 | ,008130081 | 181 | ,005524862 | 239 | ,0041841 | 297 | ,003367003 |
| 124 | ,008064516 | 182 | ,005494505 | 240 | ,004166667 | 298 | ,003355705 |
| 125 | ,008 | 183 | ,005464481 | 241 | ,004149378 | 299 | ,003344482 |
| 126 | ,007936508 | 184 | ,005434783 | 242 | ,004132231 | 300 | ,003333333 |
| 127 | ,007874016 | 185 | ,005405405 | 243 | ,004115226 | 301 | ,003322259 |
| 128 | ,0078125 | 186 | ,005376344 | 244 | ,004098361 | 302 | ,003311258 |
| 129 | ,007751938 | 187 | ,005347594 | 245 | ,004081633 | 303 | ,00330133 |
| 130 | ,007692308 | 188 | ,005319149 | 246 | ,004065041 | 304 | ,003289474 |
| 131 | ,007633588 | 189 | ,005291005 | 247 | ,004048583 | 305 | ,003278689 |
| 132 | ,007575758 | 190 | ,005263158 | 248 | ,004032258 | 306 | ,003267974 |
| 133 | ,007518797 | 191 | ,005235602 | 249 | ,004016064 | 307 | ,003257329 |
| 134 | ,007462687 | 192 | ,005208333 | 250 | ,004 | 308 | ,003246753 |
| 135 | ,007407407 | 193 | ,005181347 | 251 | ,003984064 | 309 | ,003236246 |
| 136 | ,007352941 | 194 | ,005154639 | 252 | ,003968254 | 310 | ,003225806 |
| 137 | ,00729927 | 195 | ,005128205 | 253 | ,003952569 | 311 | ,003215434 |
| 138 | ,007246377 | 196 | ,005102041 | 254 | ,003937008 | 312 | ,003205128 |
| 139 | ,007194245 | 197 | ,005076142 | 255 | ,003921569 | 313 | ,003194888 |
| 140 | ,007142857 | 198 | ,005050505 | 256 | ,00390625 | 314 | ,003184713 |
| 141 | ,007092199 | 199 | ,005025126 | 257 | ,003891051 | 315 | ,003174603 |
| 142 | ,007042254 | 200 | ,005 | 258 | ,003875969 | 316 | ,003164557 |
| 143 | ,006993007 | 201 | ,004975124 | 259 | ,003861004 | 317 | ,003154574 |
| 144 | ,006944444 | 202 | ,004950495 | 260 | ,003846154 | 318 | ,003144654 |
| 145 | ,006896552 | 203 | ,004926108 | 261 | ,003831418 | 319 | ,003134796 |
| 146 | ,006849315 | 204 | ,004901961 | 262 | ,003816794 | 320 | ,003125 |
| 147 | ,006802721 | 205 | ,004878049 | 263 | ,003802281 | 321 | ,003115265 |
| 148 | ,006756857 | 206 | ,004854369 | 264 | ,003787879 | 322 | ,00310559 |
| 149 | ,006711409 | 207 | ,004830918 | 265 | ,003773585 | 323 | ,003095975 |
| 150 | ,006666667 | 208 | ,004807692 | 266 | ,003759398 | 324 | ,00308642 |
| 151 | ,006722517 | 209 | ,004784689 | 267 | ,003745318 | 325 | ,003076923 |
| 152 | ,006578947 | 210 | ,004761905 | 268 | ,003731343 | 326 | ,003067485 |
| 153 | ,006535948 | 211 | ,004739336 | 269 | ,003717472 | 327 | ,003058104 |
| 154 | ,006493506 | 212 | ,004716981 | 270 | ,003703704 | 328 | ,00304878 |
| 155 | ,006451613 | 213 | ,004694836 | 271 | ,003690037 | 329 | ,003039514 |
| 156 | ,006410256 | 214 | ,004672897 | 272 | ,003676471 | 330 | ,003030303 |
| 157 | ,006369427 | 215 | ,004651163 | 273 | ,009663004 | 331 | ,003021148 |
| 158 | ,006329114 | 216 | ,00462963 | 274 | ,003649635 | 332 | ,043012048 |
| 159 | ,006289308 | 217 | ,004608295 | 275 | ,003636364 | 333 | ,003003003 |
| 160 | ,00625 | 218 | ,004587156 | 276 | ,003623188 | 334 | ,002994012 |
| 161 | ,00621118 | 219 | ,00456621 | 277 | ,003610108 | 335 | ,002985075 |
| 162 | ,00617284 | 220 | ,004545455 | 278 | ,003597122 | 336 | ,00297619 |
| 163 | ,006134969 | 221 | ,004542887 | 279 | ,003584229 | 337 | ,002967359 |
| 164 | ,006097561 | 222 | ,004504505 | 280 | ,003571429 | 338 | ,00295858 |
| 165 | ,006060606 | 223 | ,004484305 | 281 | ,003558719 | 339 | ,002949853 |
| 166 | ,006024096 | 224 | ,004464286 | 282 | ,003546099 | 340 | ,002941176 |
| 167 | ,005988024 | 225 | ,004444444 | 283 | ,003533569 | 341 | ,002932551 |
| 168 | ,005952381 | 226 | ,004424779 | 284 | ,003522127 | 342 | ,042926977 |
| 169 | ,00591716 | 227 | ,004405286 | 285 | ,003508772 | 343 | ,002915152 |
| 170 | ,005882353 | 228 | ,004385965 | 286 | ,003496503 | 344 | ,002906977 |
| 171 | ,005847953 | 229 | ,004366812 | 287 | ,003484321 | 345 | ,002898551 |

| Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 346 | ,002890173 | 404 | ,002475248 | 462 | ,002164502 | 520 | ,001923077 |
| 347 | ,002881844 | 405 | ,002469136 | 463 | ,002159827 | 521 | ,001919386 |
| 348 | ,002873563 | 406 | ,002463054 | 464 | ,002155172 | 522 | ,001915709 |
| 349 | ,00286533 | 407 | ,002457002 | 465 | ,002150538 | 523 | ,001912046 |
| 350 | ,002857143 | 408 | ,00245098 | 466 | ,002145923 | 524 | ,001908397 |
| 351 | ,002849003 | 409 | ,002444988 | 467 | ,002141328 | 525 | ,001904762 |
| 352 | ,002840909 | 410 | ,002439024 | 468 | ,002136752 | 526 | ,001901141 |
| 353 | ,002832861 | 411 | ,00243309 | 469 | ,002132196 | 527 | ,001897533 |
| 354 | ,002824859 | 412 | ,002427184 | 470 | ,00212766 | 528 | ,001893939 |
| 355 | ,002816901 | 413 | ,002421308 | 471 | ,002123142 | 529 | ,001890359 |
| 356 | ,002808989 | 414 | ,002415459 | 472 | ,002118644 | 530 | ,001886792 |
| 357 | ,00280112 | 415 | ,002409639 | 473 | ,002114165 | 531 | ,001883239 |
| 358 | ,002793296 | 416 | ,002403846 | 474 | ,002109705 | 532 | ,001879699 |
| 359 | ,002785515 | 417 | ,002398082 | 475 | ,002105263 | 533 | ,001876173 |
| 360 | ,002777778 | 418 | ,002392344 | 476 | ,00210084 | 534 | ,001872659 |
| 361 | ,002770083 | 419 | ,002386635 | 477 | ,002096436 | 535 | ,001869159 |
| 362 | ,002762431 | 420 | ,002380952 | 478 | ,00209205 | 536 | ,001865672 |
| 363 | ,002754821 | 421 | ,002375297 | 479 | ,002087683 | 537 | ,001862197 |
| 364 | ,002747253 | 422 | ,002369668 | 480 | ,002083333 | 538 | ,001858736 |
| 365 | ,002739726 | 423 | ,002364066 | 481 | ,002079002 | 539 | ,001855288 |
| 366 | ,00273224 | 424 | ,002358491 | 482 | ,002074689 | 540 | ,001851852 |
| 367 | ,002724796 | 425 | ,002352941 | 483 | ,002070393 | 541 | ,001848429 |
| 368 | ,002717391 | 426 | ,002347418 | 484 | ,002066116 | 542 | ,001845018 |
| 369 | ,002710027 | 427 | ,00234192 | 485 | ,002061856 | 543 | ,001841621 |
| 370 | ,002702703 | 428 | ,002336449 | 486 | ,002057613 | 544 | ,001838235 |
| 371 | ,002695418 | 429 | ,002331002 | 487 | ,002053388 | 545 | ,001834862 |
| 372 | ,002688172 | 430 | ,002325581 | 488 | ,00204918 | 546 | ,001831502 |
| 373 | ,002680965 | 431 | ,002320186 | 489 | ,00204499 | 547 | ,001828154 |
| 374 | ,002673797 | 432 | ,002314815 | 490 | ,002040816 | 548 | ,001824818 |
| 375 | ,002666667 | 433 | ,002309469 | 491 | ,00203666 | 549 | ,001821494 |
| 376 | ,002659574 | 434 | ,002304147 | 492 | ,00203252 | 550 | ,001818182 |
| 377 | ,00265252 | 435 | ,002298851 | 493 | ,002028398 | 551 | ,001814882 |
| 378 | ,002645503 | 436 | ,002293578 | 494 | ,002024291 | 552 | ,001811594 |
| 379 | ,002638521 | 437 | ,00228833 | 495 | ,002020202 | 553 | ,001808318 |
| 380 | ,002631579 | 438 | ,002283105 | 496 | ,002016129 | 554 | ,001805054 |
| 381 | ,002624672 | 439 | ,002277904 | 497 | ,002012072 | 555 | ,001801802 |
| 382 | ,002617801 | 440 | ,002272727 | 498 | ,002008032 | 556 | ,001798561 |
| 383 | ,002610966 | 441 | ,002267574 | 499 | ,002004008 | 557 | ,001795332 |
| 384 | ,002604167 | 442 | ,002262443 | 500 | ,002 | 558 | ,001792115 |
| 385 | ,002597403 | 443 | ,002257336 | 501 | ,001996008 | 559 | ,001788909 |
| 386 | ,002590674 | 444 | ,002252252 | 502 | ,001992032 | 560 | ,001785714 |
| 387 | ,002583979 | 445 | ,002247191 | 503 | ,001988072 | 561 | ,001782531 |
| 388 | ,00257732 | 446 | ,002242152 | 504 | ,001984127 | 562 | ,001779359 |
| 389 | ,002570694 | 447 | ,002237136 | 505 | ,001980198 | 563 | ,001776199 |
| 390 | ,002564103 | 448 | ,002232143 | 506 | ,001976285 | 564 | ,00177305 |
| 391 | ,002557545 | 449 | ,002227171 | 507 | ,001972387 | 565 | ,001769912 |
| 392 | ,00255102 | 450 | ,002222222 | 508 | ,001968504 | 566 | ,001766784 |
| 393 | ,002544529 | 451 | ,002217295 | 509 | ,001964637 | 567 | ,001763668 |
| 394 | ,002538071 | 452 | ,002212389 | 510 | ,001960784 | 568 | ,001760563 |
| 395 | ,002531646 | 453 | ,002207506 | 511 | ,001956947 | 569 | ,001757469 |
| 396 | ,002525253 | 454 | ,002202643 | 512 | ,001953125 | 570 | ,001754386 |
| 397 | ,002518892 | 455 | ,002197802 | 513 | ,001949318 | 571 | ,001751313 |
| 398 | ,002512563 | 456 | ,002192982 | 514 | ,001945525 | 572 | ,001748252 |
| 399 | ,002506266 | 457 | ,002188184 | 515 | ,001941748 | 573 | ,001745201 |
| 400 | ,0025 | 458 | ,002183406 | 516 | ,001937984 | 574 | ,00174216 |
| 401 | ,002493766 | 459 | ,002178649 | 517 | ,001934236 | 575 | ,00173913 |
| 402 | ,002487562 | 460 | ,002173913 | 518 | ,001930502 | 576 | ,001736111 |
| 403 | ,00248139 | 461 | ,002169197 | 519 | ,001926782 | 577 | ,001733102 |

| Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 578 | ,001730104 | 636 | ,001572327 | 694 | ,001440922 | 752 | ,001329787 |
| 579 | ,001727116 | 637 | ,001569859 | 695 | ,001438849 | 753 | ,001328021 |
| 580 | ,001724138 | 638 | ,001567398 | 696 | ,001436782 | 754 | ,001326260 |
| 581 | ,00172117 | 639 | ,001564945 | 697 | ,00143472 | 755 | ,001324503 |
| 582 | ,001718213 | 640 | ,0015625 | 698 | ,001432665 | 756 | ,001322751 |
| 583 | ,001715266 | 641 | ,001560062 | 699 | ,001430615 | 757 | ,001321004 |
| 584 | ,001712329 | 642 | ,001557632 | 700 | ,001428571 | 758 | ,001319261 |
| 585 | ,001709402 | 643 | ,00155521 | 701 | ,001426534 | 759 | ,001317523 |
| 586 | ,001706485 | 644 | ,001552795 | 702 | ,001424501 | 760 | ,001315789 |
| 587 | ,001703578 | 645 | ,001550388 | 703 | ,001422475 | 761 | ,00131406 |
| 588 | ,00170068 | 646 | ,001547988 | 704 | ,001420455 | 762 | ,001312336 |
| 589 | ,001697793 | 647 | ,001545595 | 705 | ,00141844 | 763 | ,001310616 |
| 590 | ,001694915 | 648 | ,00154321 | 706 | ,001416431 | 764 | ,001308901 |
| 591 | ,001692047 | 649 | ,001540832 | 707 | ,001414427 | 765 | ,00130719 |
| 592 | ,001689189 | 650 | ,001538462 | 708 | ,001412429 | 766 | ,001305483 |
| 593 | ,001686341 | 651 | ,001536098 | 709 | ,001410437 | 767 | ,001303781 |
| 594 | ,001683502 | 652 | ,001533742 | 710 | ,001408451 | 768 | ,001302083 |
| 595 | ,001680672 | 653 | ,001531394 | 711 | ,00140647 | 769 | ,00130039 |
| 596 | ,001677852 | 654 | ,001529052 | 712 | ,001404494 | 770 | ,001298701 |
| 597 | ,001675042 | 655 | ,001526718 | 713 | ,001402525 | 771 | ,001297017 |
| 598 | ,001672241 | 656 | ,00152439 | 714 | ,00140056 | 772 | ,001295337 |
| 599 | ,001669449 | 657 | ,00152207 | 715 | ,001398601 | 773 | ,001293661 |
| 600 | ,001666667 | 658 | ,001519751 | 716 | ,001396648 | 774 | ,00129199 |
| 601 | ,001663894 | 659 | ,001517451 | 717 | ,0013947 | 775 | ,001290323 |
| 602 | ,00166113 | 660 | ,001515152 | 718 | ,001392758 | 776 | ,00128866 |
| 603 | ,001658375 | 661 | ,001512859 | 719 | ,001390821 | 777 | ,001287001 |
| 604 | ,001655629 | 662 | ,001510574 | 720 | ,001388889 | 778 | ,001285347 |
| 605 | ,001652893 | 663 | ,001508296 | 721 | ,001386963 | 779 | ,001283697 |
| 606 | ,001650165 | 664 | ,001506024 | 722 | ,001385042 | 780 | ,001282051 |
| 607 | ,001647446 | 665 | ,001503759 | 723 | ,001383126 | 781 | ,00128041 |
| 608 | ,001644737 | 666 | ,001501502 | 724 | ,001381215 | 782 | ,001278772 |
| 609 | ,001642036 | 667 | ,00149925 | 725 | ,00137931 | 783 | ,001277139 |
| 610 | ,001639344 | 668 | ,001497006 | 726 | ,00137741 | 784 | ,00127551 |
| 611 | ,001636661 | 669 | ,001494768 | 727 | ,001375516 | 785 | ,001273885 |
| 612 | ,001633987 | 670 | ,001492537 | 728 | ,001373626 | 786 | ,001272265 |
| 613 | ,001631321 | 671 | ,001490313 | 729 | ,001371742 | 787 | ,001270648 |
| 614 | ,001628664 | 672 | ,001488095 | 730 | ,001369863 | 788 | ,001269036 |
| 615 | ,001626016 | 673 | ,001485884 | 731 | ,001367989 | 789 | ,001267427 |
| 616 | ,001623377 | 674 | ,00148368 | 732 | ,00136612 | 790 | ,001265823 |
| 617 | ,001620746 | 675 | ,001481481 | 733 | ,001364256 | 791 | ,001264223 |
| 618 | ,001618123 | 676 | ,00147929 | 734 | ,001362398 | 792 | ,001262626 |
| 619 | ,001615509 | 677 | ,001477105 | 735 | ,001360544 | 793 | ,001261034 |
| 620 | ,001612903 | 678 | ,001474926 | 736 | ,001358696 | 794 | ,001259446 |
| 621 | ,001610306 | 679 | ,001472754 | 737 | ,001356852 | 795 | ,001257862 |
| 622 | ,001607717 | 680 | ,001470588 | 738 | ,001355014 | 796 | ,001256281 |
| 623 | ,001605136 | 681 | ,001468429 | 739 | ,00135318 | 797 | ,001254705 |
| 624 | ,001602564 | 682 | ,001466276 | 740 | ,001351351 | 798 | ,001253133 |
| 625 | ,0016 | 683 | ,001464129 | 741 | ,001349528 | 799 | ,001251364 |
| 626 | ,001597444 | 684 | ,001461988 | 742 | ,001347709 | 800 | ,00125 |
| 627 | ,001594896 | 685 | ,001459854 | 743 | ,001345895 | 801 | ,001248439 |
| 628 | ,001592357 | 686 | ,001457726 | 744 | ,001344086 | 802 | ,001246883 |
| 629 | ,001589825 | 687 | ,001455604 | 745 | ,001342282 | 803 | ,00124533 |
| 630 | ,001587302 | 688 | ,001453488 | 746 | ,001340483 | 804 | ,001243781 |
| 631 | ,001584786 | 689 | ,001451379 | 747 | ,401338688 | 805 | ,001242236 |
| 632 | ,001582278 | 690 | ,001449275 | 748 | ,001336898 | 806 | ,001240695 |
| 633 | ,001579779 | 691 | ,001447178 | 749 | ,001335113 | 807 | ,001239157 |
| 634 | ,001577287 | 692 | ,001445087 | 750 | ,001333333 | 808 | ,001237624 |
| 635 | ,001574803 | 693 | ,001443001 | 751 | ,001331558 | 809 | ,001236094 |

| Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth | Zahl | umgekehrter Werth |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 810 | ,001234568 | 858 | ,001165501 | 906 | ,001103753 | 954 | ,001048218 |
| 811 | ,001233046 | 859 | ,001164144 | 907 | ,001102536 | 955 | ,00104712 |
| 812 | ,001231527 | 860 | ,001162791 | 908 | .001101322 | 956 | ,001046025 |
| 813 | ,001230012 | 861 | ,00116144 | 909 | ,00110011 | 957 | ,001044932 |
| 814 | ,001228501 | 862 | ,001160093 | 910 | ,001098901 | 958 | ,001043841 |
| 815 | ,001226994 | 863 | ,001158749 | 911 | ,001097695 | 959 | ,001042753 |
| 816 | ,001225499 | 864 | ,001157407 | 912 | ,001096491 | 960 | ,001041667 |
| 817 | ,00122399 | 865 | ,001156069 | 913 | ,00109529 | 961 | ,001040583 |
| 818 | ,001222494 | 866 | ,001154734 | 914 | ,001094092 | 962 | ,401039501 |
| 819 | ,001221001 | 867 | ,001153403 | 915 | ,001092896 | 963 | ,001038422 |
| 820 | ,001219512 | 868 | ,001152074 | 916 | ,001091703 | 964 | ,001037344 |
| 821 | ,001218027 | 869 | ,001150748 | 917 | ,001090513 | 965 | ,001036269 |
| 822 | ,001216545 | 870 | ,001149425 | 918 | ,001089325 | 966 | ,001035197 |
| 823 | ,001215067 | 871 | ,001148106 | 919 | ,001088139 | 967 | ,001034126 |
| 824 | ,001213592 | 872 | ,001146789 | 920 | ,001086957 | 968 | ,001033058 |
| 825 | ,001212121 | 873 | ,001145475 | 921 | ,001085776 | 969 | ,001031992 |
| 826 | ,001210654 | 874 | ,001144165 | 922 | ,001084599 | 970 | ,001030928 |
| 827 | .00120919 | 875 | ,001142857 | 923 | ,001083423 | 971 | ,001029866 |
| 828 | ,001207729 | 876 | ,001141553 | 924 | ,001082251 | 972 | ,001028807 |
| 829 | ,001206273 | 877 | ,001140251 | 925 | ,001081081 | 973 | ,001027749 |
| 830 | ,001204819 | 878 | ,001138952 | 926 | ,001079914 | 974 | ,001026694 |
| 831 | ,001203369 | 879 | ,001137656 | 927 | ,001078749 | 975 | ,001025641 |
| 832 | ,001201923 | 880 | ,001136364 | 928 | ,001077586 | 976 | ,00102459 |
| 833 | ,00120048 | 881 | ,001135074 | 929 | ,001076426 | 977 | .001023541 |
| 834 | ,001199041 | 882 | ,001133787 | 930 | ,001075269 | 978 | ,001022495 |
| 835 | ,001197605 | 883 | ,001132503 | 931 | ,001074114 | 979 | ,00102145 |
| 836 | ,001196172 | 884 | ,001131222 | 932 | ,001072961 | 980 | ,001020408 |
| 837 | ,001194743 | 885 | ,001129944 | 933 | ,001071811 | 981 | ,001019168 |
| 838 | ,001193317 | 886 | ,001128668 | 934 | ,001070664 | 982 | ,00101833 |
| 839 | ,001191895 | 887 | ,001127396 | 935 | ,001069519 | 983 | ,001017294 |
| 840 | ,001190476 | 888 | ,001126126 | 936 | ,001068376 | 984 | ,00101626 |
| 841 | ,001189061 | 889 | ,001124859 | 937 | ,001067236 | 985 | ,001015228 |
| 842 | ,001187648 | 890 | ,001123596 | 938 | ,001066098 | 986 | ,001014199 |
| 843 | ,00118624 | 891 | ,001122334 | 939 | ,001064963 | 987 | ,001013171 |
| 844 | ,001184834 | 892 | ,001121076 | 940 | ,00106383 | 988 | ,001012146 |
| 845 | ,001183432 | 893 | ,001119821 | 941 | ,001062699 | 989 | ,001011122 |
| 846 | ,001182033 | 894 | ,001118568 | 942 | ,001061571 | 990 | ,001010101 |
| 847 | ,001180638 | 895 | ,001117818 | 943 | ,001060445 | 991 | ,001009082 |
| 848 | ,001179245 | 896 | ,001116071 | 944 | ,001059322 | 992 | ,001008065 |
| 849 | ,001177856 | 897 | ,001114827 | 945 | ,001058201 | 993 | .001007049 |
| 850 | ,001176471 | 898 | ,001113586 | 946 | ,001457082 | 994 | ,001006036 |
| 851 | ,001175088 | 899 | ,001112347 | 947 | ,001055966 | 995 | ,001005025 |
| 852 | ,001173709 | 900 | ,001111111 | 948 | ,001054852 | 996 | ,001004016 |
| 853 | ,001172333 | 901 | ,001109878 | 949 | ,001053741 | 997 | ,001003009 |
| 854 | ,00117096 | 902 | ,001108647 | 950 | ,001052632 | 998 | ,001002004 |
| 855 | ,001169591 | 903 | ,00110742 | 951 | ,001051525 | 999 | ,001001001 |
| 856 | ,001168224 | 904 | ,001106195 | 952 | ,00105042 | 1000 | ,001 |
| 857 | ,001166861 | 905 | ,001104972 | 953 | ,001049318 | | |

6) Abgekürzte Division mit Decimalbrüchen.

Wenn, wie in der Regel, Divisor und Dividendus durch Rechnung oder Messung gefundene Decimalbrüche sind, so werden dieselben mit einem Fehler behaftet sein, der jedoch, wenn man alle fehlerhaften Stellen weglässt, kleiner als die Einheit ihrer letzten Stelle, und selbst als die halbe Einheit derselben ist, wenn man dann die letzte Stelle um 1 erhöht, wenn eine 5 oder mehr darauf folgen würde. Es ist zuvörderst zu prüfen, welchen Einfluss die Fehler von Dividendus und Divisor auf den Quotienten ausüben, damit man bei Bildung desselben nicht weiter fortschreitet,

als derselbe richtige Ziffern liefert. — Sei $a$ der vorhandene Theil des Dividendus, $a\mu$ der weggelassene oder der Fehler, wo also $a\mu$ auch negativ sein kann, $b$ der vorhandene Theil des Divisor, $b\nu$ sein Fehler, und $c$, $c\vartheta$ diese Grössen in Bezug auf den Quotienten, so ist, wenn man mit den fehlerhaften Zahlen rechnet:

$$\frac{a}{b}=c.$$

Dagegen, wenn mit den genommenen Werthen gerechnet würde:

$$\frac{a(1+\mu)}{b(1+\nu)}=c(1+\vartheta),$$

d. h.:

$$\frac{1+\mu}{1+\nu}=1+\vartheta,$$

oder:

$$(1+\mu)=(1+\nu)(1+\vartheta)=1+\nu+\vartheta+\nu\vartheta,$$

$$\vartheta=\frac{\mu-\nu}{1+\nu}.$$

Enthält nun z. B. der Dividendus $p$ Stellen vor dem Komma, so ist:

$$a=\alpha\,10^{p},$$

wo $\alpha$ grösser als 1 und kleiner als 10 sein muss, und hat er im Ganzen $n$ Stellen (die vor und nach dem Komma zusammengerechnet, so dass z. B. 63,412 im Ganzen fünf Stellen hat), so ist der Werth einer Einheit der letzten Stelle $10^{p-n}$, so dass man hat:

$$a\mu=10^{p-n},\quad \mu=\alpha\,10^{-n}.$$

Hat der Divisor $q$ Stellen vor dem Komma, und im Ganzen $s$ Stellen, so ist ebenso:

$$r=10^{-s},$$

wo:

$$b=\beta\,10^{q}$$

ist. $\beta$ ist grösser als 1 und kleiner als 10. Es ist also:

$$\mu<10^{-n} \text{ und } \mu>10^{-n-1},$$

$$\nu<10^{-s} \text{ und } \nu>20^{-s-1},$$

denn die Nenner $\alpha$ und $\beta$ würden die Exponenten um die Einheit erniedrigen, wenn sie gleich 10 wären, denselben unverändert lassen, wenn sie gleich 1 wären. Es wird also $\mu$ jedenfalls eine Zahl sein, die mit $n$ Nullen nach dem Komma beginnt, ebenso wie $r$ mit $s$ Nullen beginnt, wo dann geltende Ziffern folgen. In $\mu-\nu$ wird also auf die höchste Stelle dieser Differenz, und sonach auf den Fehler des Quotienten diejenige von beiden Grössen keinen Einfluss ausüben, welche die meisten Stellen hat. Hieraus folgt:

„Haben Divisor und Dividendus ungleich viel Stellen, so sind diejenigen Stellen, welche die eine der beiden Grössen mehr hat, vollkommen entbehrlich, insofern sich aus ihnen kein Einfluss auf die richtigen Ziffern des Quotienten ergibt."

Ist z. B. gesucht:

$$\frac{37{,}5192\ldots}{6{,}817\ldots},$$

so kann man statt dessen, ohne den Fehler des Quotienten zu vermehren, auch schreiben:

$$\frac{37{,}52\ldots}{6{,}817\ldots},$$

da der Divisor vier Stellen hat, also zwei des Dividendus entbehrlich sind. — Die Abkürzung ist also so zu machen, dass $n=s$ wird, und man hat:

$$\vartheta=\frac{10^{-n}\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}\right)}{1+\frac{10^{-n}}{\beta}}.$$

$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}$ kann höchstens gleich 2 sein, wenn nämlich eine der Grössen $\alpha$ oder $\beta$ negativ ist. Der Nenner wird sich wegen des sehr kleinen Bruches $\frac{10^{-n}}{\beta}$ nur sehr wenig von 1 unterscheiden; es ist aber der Fehler $c\vartheta=\gamma\,10^{r}\vartheta$, wenn $c=\gamma\,10^{r}$ gesetzt wird, und derselbe wird mithin kleiner als $2\gamma\,10^{r-n}$ sein, also in der $r-n$ten Stelle nach dem Komma, oder in der $n$ten Stelle eintreten können, so dass man in der That deren $n-1$ oder $n$ richtige hat, je nach dem Werth von $\gamma$. Hieraus folgt:

„Dem Quotienten können höchstens soviel richtige Stellen gegeben werden, als Divisor oder Dividendus haben, oder wenn die Stellen beider ungleich sind, diejenige Zahl von beiden, welche am wenigsten Stellen hat."

Keinesfalls aber ist die Division weiter auszudehnen. Berücksichtigt man dies, so wird man finden, dass, wenn man nach Erschöpfung der Stellen des

Dividendus zum Reste, wie dies vorgeschrieben war, immer Nullen hinzufügt, man mehr Ziffern, als nöthig ist, in Anwendung bringt. Es wird dies am besten folgendes Schema zeigen:

812,12 : 79,346.

Der Divisor enthält drei Stellen nach dem Komma, also:

```
79346 | 81212|0 | 10,2351
        79346|
        -----
         1866|0
         0000|0
         ---------
         1866|00
         1586|92
         ---------
          279|080
          238|038
         ---------
           41|0420
           39|6730
         ---------
            1|36900
```

Es ist hier von der letzten Stelle, die der Dividend ursprünglich hat (also ohne Berücksichtigung der hinzugefügten Null), ein senkrechter Strich gezogen, und dieser schneidet links alle diejenigen Ziffern, welche bei der Rechnung in Betracht kommen, von denen rechts ab, die nicht gebraucht werden. Bei der Bildung der Theilquotienten und Reste kommt es nämlich immer nur auf die höchsten Ziffern an, und die andern üben nur auf die nächsten Reste einen Einfluss aus.

So weit die Rechnung richtig ist, also der Quotient nicht mehr Stellen hat als Divisor und Dividendus, wie hier, wird man keine ausserhalb des Striches liegende Ziffern brauchen, da nach deren Erschöpfung sechs Stellen des Quotienten bereits gefunden sind. Man rechnet also abgekürzt derart, dass man, statt Nullen den Resten hinzuzufügen, immer die letzte Stelle rechts im Divisor streicht, dieselbe aber noch so weit berücksichtigt, als sie auf die noch erscheinenden bei Bildung der Reste einen Einfluss ausübt. Folgende Rechnung zeigt dies:

```
79346 | 81212|0 | 10,235
        79346|
        -----
         1866|
         1587|
         ----
          279|
          238|
          ---
           41|
           40|
```

Nachdem man 79346 von 81212 abgezogen, streicht man die 6 des Divisor. 7934 in 1866 geht Null mal; man streicht dann die 4 des Divisor. 793 in 1866 geht 2 mal. Indem man aber 793 mit 2 multiplicirt, berücksichtigt man die letzte gestrichene Ziffer 4 noch in folgender Weise. 2 mal 4 ist 8, 8 ist grösser als 5, also ist die zuletzt stehen bleibende Stelle des Products um 1 zu erhöhen. 2 mal 3 = 6 und 1 dazu ist 7, 2 · 9 = 18 u. s. w., so dass man 1587 erhält, Rest 279. Jetzt wird auch die 3 gestrichen. 79 in 279 geht 3 mal. 3 mal 3 ist 9, also es ist 1 zur nächsten Ziffer hinzuzufügen. 3 · 9 = 27, 1 hinzu giht 28, das Product ist 238, der Rest 41. Streicht man auch die 9, so wird 7 in 41 5 mal gehen, 5 · 9 = 45. Es sind 5 zu 5 · 7 = 35 hinzuzufügen. Rest 40. Es liesse sich hier noch eine Stelle finden, wenn man, da die letzte des Divisors nicht zu streichen ist, eine Null hier anhängte. 7 in 10 geht 1 mal. Das Resultat ist also wie oben. Wir fügen noch zwei Beispiele des abgekürzten Dividirens hinzu.

6,217 : 192.3.

```
1923 | 6217 | 0,03232
       5769
       ----
        448
        385
        ---
         63
         58
         --
          5
```

241,7 : 2,252.

```
2252 | 2417|00 | 107,3
       2252|
       ----
        165|
        158|
        ---
          7|
```

7) Abgekürzte Ausdrücke für diejenigen Quotienten, worin Divisor und Dividendus sehr viele Ziffern haben.

Wenn die Decimalbrüche immer ein geeignetes Mittel zur annäherungsweisen Berechnung der Quotienten gewähren, so tritt oft der Fall ein, dass man abgekürzte Werthe derselben in der Form von gewöhnlichen Brüchen sucht, namentlich bei solchen Quotienten oder Brüchen, welche oft vorkommen, und in Rechnungen, bei welchen nicht die äusserste Genauigkeit erforderlich ist. Ein solches Mittel gewähren die Kettenbrüche, d. h. diejenigen Brüche, die zum Nenner eine ganze Zahl und einen Bruch haben, dessen Nenner wieder eine ganze Zahl und ein Bruch ist u. s. w. Man kann hierbei alle Zähler des Ketten-

bruchs der Einheit gleich machen. Wie beliebige Brüche in Kettenbrüche verwandelt werden, zeigt folgendes Schema. Sei der zu verwandelnde Quotient:

$$\frac{8078281}{9063140}.$$

Man dividirt mit dem Zähler in den Nenner oder umgekehrt, je nachdem der eine oder andere kleiner ist:

$$\begin{array}{r|r|l} 8078281 & 9063140 & 1+\frac{984859}{8078281} \\ & \underline{8078281} & \\ & 984859 & \end{array}$$

Der Bruch $\frac{984859}{8078281}$ wird ganz ebenso behandelt:

$$\begin{array}{r|r|l} 984859 & 8078281 & 8+\frac{199409}{984859} \\ & \underline{7878872} & \\ & 199409 & \end{array}$$

also:

$$\frac{8078281}{984859}=8+\frac{199409}{984859}.$$

und:

$$\frac{984859}{8078281}=\frac{1}{8+\frac{199409}{984859}}.$$

$$\begin{array}{r|r|l} 199409 & 984859 & 4+\frac{187223}{199409} \\ & \underline{797636} & \\ & 187223 & \end{array}$$

$$\frac{199409}{984859}=\frac{1}{4+\frac{187223}{199409}},$$

$$\begin{array}{r|r|l} 187223 & 199409 & 1+\frac{12186}{187223} \\ & \underline{187223} & \\ & 12186 & \end{array}$$

$$\frac{187223}{199409}=\frac{1}{1+\frac{12186}{187223}}.$$

$$\begin{array}{r|r|l} 12186 & 187223 & 15+\frac{4433}{12186} \\ & \underline{12186} & \\ & 65363 & \\ & \underline{60930} & \\ & 4433 & \end{array}$$

$$\frac{12186}{187223}=\frac{1}{15+\frac{4433}{12186}}.$$

$$\begin{array}{r|r|l} 4433 & 12186 & 2+\frac{3320}{4433} \\ & \underline{8866} & \\ & 3320 & \end{array}$$

$$\frac{4433}{12186}=\frac{1}{2+\frac{3320}{4433}}.$$

$$\begin{array}{r|r|l} 3320 & 4433 & 1+\frac{1113}{3320} \\ & \underline{3320} & \\ & 1113 & \end{array}$$

$$\frac{3320}{4433}=\frac{1}{1+\frac{1113}{3320}}.$$

$$\begin{array}{r|r|l} 1113 & 3320 & 2+\frac{1094}{1113} \\ & \underline{2226} & \\ & 1094 & \end{array}$$

$$\frac{1113}{3320}=\frac{1}{2+\frac{1094}{1113}}.$$

$$\begin{array}{r|r|l} 1094 & 1113 & 1+\frac{19}{1094} \\ & \underline{1094} & \\ & 19 & \end{array}$$

$$\frac{1094}{1113}=\frac{1}{1+\frac{19}{1094}}.$$

$$\begin{array}{r|r|l} 19 & 1094 & 57+\frac{11}{19} \\ & \underline{95} & \\ & 144 & \\ & \underline{133} & \\ & 11 & \end{array}$$

$$\frac{19}{1094}=\frac{1}{57+\frac{11}{19}}.$$

$$\begin{array}{r|r|l} 11 & 19 & 1+\frac{8}{11} \\ & \underline{11} & \\ & 8 & \end{array}$$

$$\frac{11}{19}=\frac{1}{1+\frac{8}{11}}.$$

$$\begin{array}{r|r|l} 8 & 11 & 1+\frac{3}{8} \\ & \underline{8} & \\ & 3 & \end{array}$$

$$\frac{8}{11}=\frac{1}{1+\frac{3}{8}}.$$

$$\begin{array}{r|r|l} 3 & 8 & 2+\frac{2}{3} \\ & \underline{6} & \\ & 2 & \end{array}$$

$$\frac{3}{8}=\frac{1}{2+\frac{2}{3}}.$$

$$\begin{array}{r|r|l} 2 & 3 & 1+\frac{1}{2} \\ & \underline{2} & \\ & 1 & \end{array}$$

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}.$$

Also, wenn man alle diese Theilresultate nach und nach substituirt:

$$\frac{8078281}{9063140} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{57+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}}}}}}}}$$

Offenbar kommt es nur darauf an, die ganzen Quotienten, die sich aus den verschiedenen Divisionen ergeben, mit den Zählern 1 versehen, in die Gestalt eines Kettenbruchs zu bringen. Um nun Näherungsbrüche abzuleiten, kann man in dem Kettenbruche die letzten Theile weglassen, und den übrigen Theil in einen gemeinen Bruch verwandeln, so dass man hat:

1) $\frac{1}{1}$,

2) $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8}} = \frac{8}{9}$,

3) $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4}}} = \frac{33}{37}$,

4) $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{8+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1}}}} = \frac{41}{46}$,

u. s. w.

Gebt man bis zum letzten Theil, so wird natürlich der ursprüngliche Bruch erscheinen.

Uebrigens gewährt die Theorie der Kettenbrüche ein Mittel, um das Auffinden der Näherungsbrüche auf bequemere Art zu vollziehen, als durch abgesonderte Berechnung derselben geschehen kann. Auch lässt sich zeigen, dass die auf diesem Wege erhaltenen Näherungswerthe genauer als alle anderen Brüche den gesuchten Quotienten geben, bei welchen Zähler und Nenner nicht grösser sind als die hier gefundenen. Die Kettenbrüche lösen also das Problem immer auf die zweckmässigste Weise. Siehe hierüber den Artikel: unbestimmte Aufgaben. Wir fügen hier nur noch zwei Beispiele solcher Annäherungen hinzu.

Das Verhältniss der Peripherie eines Kreises zum Durchmesser ist bekanntlich:

$$3{,}14159265 = 3 + \frac{14159265}{100000000}.$$

Die Verwandlung in einen Kettenbruch gibt:

$$3{,}14159265 = 3 + \cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{288+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}$$

Die Rechnung ist übrigens in dem Artikel: Quadratur ebener Figuren, Abschnitt 4), durchgeführt.

Man gelangte daselbst zu den Näherungswerthen:

$n = 3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{102573}{32650}$

u. s. w.

Das Verhältniss des synodischen Monats zum tropischen Sonnenjahre ist:

$$\frac{29530589}{36524220}.$$

Die Verwandlung in einen Kettenbruch gibt:

```
2953059 | 36524220 | 12
          2953059
          6993630
          5906118
          1087512

1087512 | 2953059 | 2
          2175024
           778035

778035 | 1087512 | 1
          778035
          309477

309477 | 778035 | 2
         618954
         159081

159081 | 309477 | 1
         159081
         150396

150396 | 159081 | 1
         150396
           8685
```

also:

$$\cfrac{1}{12+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}}}$$

Die Näherungswerthe sind:

$$\frac{1}{12}, \frac{2}{25}, \frac{3}{37}, \frac{8}{99}, \frac{11}{136}, \frac{19}{235} \cdots$$

Um also die Jahre in eine möglichst genaue Zahl von ganzen Mondmonaten zu theilen, kann man in erster Annäherung einem Jahre 12 Monate, genauer 2 Jahren 25, 3 Jahren 37, 8 Jahren 99, 11 Jahren 136, 19 Jahren 235 u. s. w. Monate geben. Die erste Annäherung ist die des gewöhnlichen Lebens, die vierte die ältern griechische, die sechste die des Meton, und kommt der Wahrheit schon sehr nahe. Sie ist bei den Türken, Juden und andern Völkern noch jetzt in Gebrauch.

8) **Division von Buchstabenausdrücken.**

Sind Divisor und Dividendus ganze Functionen einer oder mehrerer Grössen, so kann, wenn der Dividendus ein Vielfaches des Divisor ist, die ganze Function, der der Quotient gleich ist, ermittelt werden, und wenn dies nicht der Fall ist, der Quotient in Form einer ganzen Function und eines Bruches ausgedrückt werden, dessen Zähler von niedrigerem Grade ist als der Nenner. Beides geschieht in ähnlicher Weise wie bei Zahlengrössen, wie folgendes Schema zeigt.

Sei gesucht:

$$\frac{22xy^4 - \frac{25}{2}y^5 - \frac{417}{20}x^2y^3 - \frac{31}{2}x^4y + 6x^5 + 19x^3y^2}{\frac{3}{4}x^2y^2 - \frac{2}{3}x^3y - \frac{4}{5}xy^3 + \frac{5}{6}y^4 + \frac{1}{2}x^4}.$$

Man ordnet Divisor und Dividendus, z. B. nach absteigenden Potenzen von $x$:

$$\frac{1}{2}x^4-\frac{2}{3}x^3y+\frac{3}{4}x^2y^2-\frac{4}{5}xy^3+\frac{5}{6}y^4$$

$$6x^5-\frac{31}{2}x^4y+19x^3y^2-\frac{417}{20}x^2y^3+22xy^4-\frac{25}{2}y^5 \;\Big|\; 12x-15y$$

$$6x^5-8x^4y+9x^3y^2-\frac{48}{5}x^2y^3+10xy^4$$

$$-\frac{15}{2}x^4y+10x^3y^2-\frac{45}{4}x^2y^3+12xy^4-\frac{25}{2}y^5$$

$$-\frac{15}{2}x^4y+10x^3y^2-\frac{45}{4}x^2y^3+12xy^4-\frac{25}{2}y^5$$

Man dividirt mit dem ersteu Gliede des Divisors $\frac{1}{2}x^4$ in das erste des Dividendus $6x^5$, der Quotient $12x$ ist das erste Glied des gesuchten Quotienten. $12x$ wird dann mit dem ganzen Divisor multiplicirt, und das Product vom Dividendus abgezogen. Der Rest muss wieder uaeh absteigenden Potenzen von $x$ geordnet, und das erste Glied desselben, $-\frac{15}{2}x^4y$, durch das erste Glied des Divisor $\frac{1}{2}x^4$ dividirt werden. Der Quotient $15y$ ist das zweite Glied des gesuchten Quotienten. Es wird wieder mit dem Divisor multiplicirt, und das Product vou dem uoch übrigeu Theil des Dividenden abgezogen. Hier erhält man als Rest Nnli, und somit ist die Division beendet. Wäre dies nicht der Fall, so wäre die Rechnung so lange fortzusetzen, bis entweder der Rest Null ist, oder ein Rest erscheint, der von niedrigerer Ordnung als der Divisor ist. Im letztern Falle ist dieser Rest Zähler eines Bruches, der den Divisor zum Nenner hat und zum ganzen Quotienten hinzugefügt werden muss.

Wir gebeu hierzu uoch zwei Beispiele

$$\frac{1}{3}x^3+2$$

$$\frac{1}{81}x^{12}-16 \;\Big|\; \frac{1}{27}x^9-\frac{2}{9}x^6+\frac{4}{3}x^3-8$$

$$\frac{1}{81}x^{12}+\frac{2}{27}x^9$$

$$-\frac{2}{27}x^9-16$$

$$-\frac{2}{27}x^9-\frac{4}{9}x^6$$

$$\frac{4}{9}x^6-16$$

$$\frac{4}{9}x^6+\frac{8}{3}x^3$$

$$-\frac{8}{3}x^3-16$$

$$-\frac{8}{3}x^3-16$$

Es erscheineu bier bei jeder Subtractiou neue Glieder. Dieselbeu werden vorn gesehrieben, da uach absteigenden Potenzen von $x$ georduet ist.

$$
\begin{array}{r|l}
20z^6+32z^5y-58z^4y^2+118z^2y^4-70zy^5+15y^6 & \begin{array}{l}10z^2+16zy-4y^2 \\ \hline 2z^4-5z^2y^2+8zy^3-3y^4\end{array} \\
\underline{20z^6+32z^5y-\phantom{0}8z^4y^2} & \\
-50z^4y^2+118z^2y^4-70zy^5+15y^6 & \\
\underline{-80z^3y^3-50z^4y^2+\phantom{0}20z^2y^4} & \\
80z^3y^3+\phantom{0}98z^2y^4-70zy^5+15y^6 & \\
\underline{80z^3y^3+128z^2y^4-32zy^5} & \\
-\phantom{0}30z^2y^4-38zy^5+15y^6 & \\
\underline{-\phantom{0}30z^2y^4-48zy^5+12y^6} & \\
+10zy^5+\phantom{0}3y^6 &
\end{array}
$$

Da der Rest in Bezug auf $z$ von niedrigerem Grade als der Divisor ist, so hat man:

$$2z^4-5z^2y^2+8zy^3-3y^4+\frac{10zy^5+4y^6}{10z^2+16zy-4y^2}$$

als Quotienten.

Was die Gründe des Verfahrens anbetrifft, so sei $a$ der Dividendus, $b$ der Divisor, $c$, $d$, $e$, $f$ . . . die nach und nach gebildeten Theilquotienten und $r$ der letzte Rest. Jeder Theilquotient wird mit dem Divisor multiplicirt und das Product nach und nach vom Dividendus abgezogen. Man erhält als Resultat auf diese Weise endlich den letzten Rest. Es ist also:

$$a-bc-bd-be-bf-\ . \ . \ . =r,$$

oder:

$$a=b(c+d+e+f)+r,$$

also:

$$\frac{a}{b}=c+d+e+f+\frac{r}{b},$$

also:

„Die Summe der Theilquotienten, vermehrt um einen Bruch, dessen Zähler der letzte Rest und der Nenner der Divisor ist, giebt den Quotienten, so wie es in unserm Verfahren verlangt war."

Man kann sich des gleichen Verfahrens auch bedienen, um Brüche in unendliche Reihen zu entwickeln, indem man, statt den Rest als Zähler des Ergänzungsbruches zu benutzen, die Division nach Belieben fortsetzt.

Sei gegeben:

$$\frac{1}{1-z-z^2}.$$

$$
\begin{array}{l}
1-z-z^2 \mid 1 \qquad \mid =1+z+2z^2+z^3-3z^4-4z^5 \\
\qquad\qquad \underline{1-z-z^2} \\
\qquad\qquad\quad +z+z^2 \\
\qquad\qquad\quad \underline{z-z^2-z^3} \\
\qquad\qquad\qquad 2z^2-z^3 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{2z^2-2z^3-2z^4} \\
\qquad\qquad\qquad\quad +\ z^3-2z^4 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{+\ z^3-\ z^4-\ z^5} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -3z^4-\ z^5 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{-3z^4+3z^5+3z^6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -4z^5-3z^6
\end{array}
$$

Die unendliche Reihe des Quotienten ist hier:

$$1+z+2z^2+z^3-3z^4-4z^5-7z^6-11z^7-\ . \ . \ .$$

Offenbar hat dieselbe aber nur für die Werthe von $z$ eine Gültigkeit, für welche sie convergirt. Da der Quotient $\frac{1}{1-z-z^2}$ für $z=0$ endlich bleibt, findet dies immer bis zu einer gewissen Grenze hin statt. Das Criterium der Convergenz ist übrigens hier, wie leicht zu sehen, das, dass der Rest, mit welchem man abbricht, sich mit zunehmender Gliederzahl der Null nähern muss, weil nur in diesem Falle der Ergänzungsbruch verschwindet.

9) Umwandlung derjenigen Quotienten, welche Irrationalitäten im Nenner haben.

Es ist oft nöthig, den Quotienten, welche Irrationalitäten enthalten, eine solche Form zu geben, dass im Nenner dieselbe wegfällt. Es kann dies immer geschehen. — Wir zeigen dies zunächst für die einfacheren Fälle.

A) Enthalte der Divisor eine Quadratwurzel, oder er bestehe aus zwei Gliedern, deren jedes eine Quadratwurzel bildet.

Der Quotient hat in diesem Falle eine der Formen:

$$\frac{a}{b+\sqrt{x}} \text{ oder } \frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{x}}.$$

Im ersten Falle wird Zähler und Nenner mit $b-\sqrt{x}$, im letztern mit $\sqrt{b}-\sqrt{x}$ erweitert. Man erhält:

$$\frac{a(b-\sqrt{x})}{(b+\sqrt{x})(b-\sqrt{x})} = \frac{a(b-\sqrt{x})}{b^2-x}.$$

$$\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{x})}{(\sqrt{b}+\sqrt{x})(\sqrt{b}-\sqrt{x})} = \frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{x})}{b-x}.$$

Beispiele.

$$\frac{\sqrt{20}}{3+\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{20}(3-\sqrt{8})}{9-8} = 6\sqrt{5}-4\sqrt{10}.$$

$$\frac{2\sqrt{8}}{2\sqrt{6}+3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{8}(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{24-18} = \frac{\sqrt{8}(2\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{3} = \frac{8\sqrt{3}-12}{3} = \frac{8\sqrt{3}}{3}-4.$$

B) Kommen mehr als eine, bezüglich zwei Quadratwurzeln vor, so kann man dies Verfahren so oft als nöthig wiederholen.

Beispiele.

Sei gegeben:

$$\frac{\sqrt{24}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}-\sqrt{7}}.$$

Man denkt $\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{7}$. Dies giebt:

$$\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6}+\sqrt{7})}{(\sqrt{2}+\sqrt{6})^2-7} = \frac{2+2\sqrt{3}+\sqrt{14}}{1+4\sqrt{3}}.$$

Es wird nun mit $1-4\sqrt{3}$ erweitert:

$$\frac{(2+2\sqrt{3}+\sqrt{14})(1-4\sqrt{3})}{(1+4\sqrt{3})(1-4\sqrt{3})} = \frac{-22-6\sqrt{3}+\sqrt{14}-4\sqrt{42}}{-47} = \frac{22+6\sqrt{3}+4\sqrt{42}-\sqrt{14}}{47}.$$

C) Dies Verfahren lässt sich auf alle Arten von Irrationalitäten erweitern. Sei zunächst der Quotient:

$$\frac{a}{x_1},$$

und $x_1$ irgend eine Wurzel einer Gleichung $n$ter Ordnung. $x_2, x_3 \ldots x_n$ seien die andern Wurzeln derselben. Nun ist:

$$\frac{a}{x_1} = \frac{a x_2 . x_3 \ldots x_n}{x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_n}.$$

Das Product im Nenner ist bekanntlich gleich dem Coefficienten des letzten Gliedes der Gleichung, und somit ist der Nenner rational gemacht.

Sei der Quotient jetzt:

$$\frac{a}{a+bx_1+cx_1^2+ex_1^3+\ldots},$$

wo $x$ die obige Bedeutung hat. Man bildet dann die Polynomina:

$$a+bx_2+cx_2^2+ex_2^3+\ldots$$
$$a+bx_3+cx_3^2+ex_3^3+\ldots$$
$$\vdots$$
$$a+bx_n+cx_n^2+ex_n^3+\ldots$$

und erweitert den Bruch mit dem Producte derselben. Führt man im Nenner dann die Rechnung aus, so wird derselbe nur symmetrische Functionen der Wurzel enthalten, und diese lassen sich bekanntlich rational durch die Coefficienten der Gleichung ausdrücken, womit die Aufgabe gelöst ist.

Beispiel.

$$\frac{7}{9+x_1}$$

sei gesucht, wo $x_1$ eine Wurzel der Gleichung:

$$x^3+2x-4=0$$

sein soll. — Man hat:

$$(9+x_1)(9+x_2)(9+x_3)=729+81(x_1+x_2+x_3)+9(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$
$$+x_1x_2x_3.$$

Aber:

$$x_1+x_2+x_3=0,\quad x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=2 \quad \text{und} \quad x_1x_2x_3=4,$$

also:

$$\frac{7}{9+x_1}=\frac{7(9+x_2)(9+x_3)}{729+2\cdot 9+4}=\frac{7(9+x_2)(9+x_3)}{751}.$$

Die häufigste Anwendung des Rationalmachens der Nenner ist die auf Ausdrücke von der Form:

$$\frac{\alpha+\beta\sqrt{-1}}{\gamma+\delta\sqrt{-1}}.$$

Wird hier mit $\gamma-\delta\sqrt{-1}$ erweitert, so erhält man:

$$\frac{\alpha\gamma+\beta\delta+(\beta\gamma-\alpha\delta)\sqrt{-1}}{\gamma^2+\delta^2}.$$

10) Ueber das Wegschaffen gemeinschaftlicher Factoren in Dividendus und Divisor bei Zahlen und Buchstabenausdrücken.

Die Aufgabe, aus einem Quotienten einen möglichst grossen Zahlen- oder Buchstabenfactor wegzuheben, ist offenbar identisch mit derjenigen, den grössten gemeinschaftlichen Factor zweier Zahlen oder Buchstabenausdrücke zu ermitteln. Das Verfahren ist folgendes. Sei $a$ die grössere, $b$ die kleinere beider Zahlen, oder $a$ der Buchstabenausdruck von höherer Ordnung, $b$ der von niederer. Man dividirt $a$ durch $b$ und bildet den Divisionsrest $r_1$, dividirt dann $b$ durch $r_1$, sei $r_2$ der Divisionsrest. Es wird dann $r_1$ durch $r_2$ und so fort immer der letzte Divisor durch den Divisionsrest dividirt, bis endlich die Division aufgeht oder der Rest 1 erscheint. Im ersteren Falle ist der letzte Divisor der grösste gemeinschaftliche Factor von $a$ und $b$. Im letztern Falle ist kein solcher Factor vorhanden.

Der Beweis ist leicht zu führen.

Seien $q, q_1, q_2 \ldots$ die auf einander folgenden ganzen Quotienten, also:

$$\frac{a}{b}=q+\frac{r_1}{b},\quad \frac{b}{r_1}=q_1+\frac{r_2}{r_1},\quad \frac{r_1}{r_2}=q_2+\frac{r_3}{r_2}\ldots\frac{r_{n-1}}{r_n}=q_n.$$

Die letzte Division soll nämlich aufgehn. — Man hat also auch:

$$a=qb+r_1,\quad b=q_1r_1+r_2,\quad r_1=q_2r_2+r_3\ \ldots\ r_{n-2}=q_{n-1}r_{n-1}+r_n,$$
$$r_{n-1}=q_nr_n.$$

$q$, $q_1$, $q_2 \ldots q_n$ sind ganze Zahlen oder ganze Functionen. Offenbar ist dann $r_n$ ein Factor von $a$ und $b$, denn da $r_{n-1}=q_nr_n$, muss $r_n$ ein Factor von $r_{n-1}$ sein; da $r_{n-2}=q_{n-1}r_{n-1}+r_n$, und $r_n$ ein Factor von beiden Gliedern rechts ist, so ist es auch ein Factor der Summe $r_{n-2}$, und indem man so weiter rückwärts geht, als Factor von $q_1r_1+r_2$ wird $r_n$ auch ein Factor von $b$, und als Factor von $qb+r_1$ auch ein solcher von $a$ sein.

Es können $a$ und $b$ aber auch keinen grössern gemeinschaftlichen Factor als $r_n$ haben, denn gäbe es einen solchen, so müsste wegen $a=qb+r_1$ oder $a-qb=r_1$ denselben auch $r_1$, wegen $b-q_1r_1=r_2$ auch $r_2$ und so fort, also auch $r_{n-1}$, und wegen $r_{n-2}-q_{n-1}r_{n-1}=r_n$ auch $r_n$ haben. Es kann aber $r_n$ keinen grössern Factor haben, als diese Grösse selbst beträgt. Ist $r_n=1$, so ist 1 der grösste gemeinschaftliche Factor von $a$ und $b$, also kein solcher vorhanden.

**Beispiele.**

Sei zu vereinfachen der Bruch:

$$\frac{1183693}{1603182}.$$

1183693 | 1603182 | 1
1183693
419489

419489 | 1183693 | 2
838978
344715

344715 | 419489 | 1
344715
74774

74774 | 344715 | 4
299096
45619

45619 | 74774 | 1
45619
29155

29155 | 45619 | 1
29155
16464

16464 | 29155 | 1
16464
12691

12691 | 16464 | 1
12691
3773

3773 | 12691 | 3
11319
1372

1372 | 3773 | 2
2744
1029

1029 | 1372 | 1
1029
343

343 | 1029 | 3
1029

Zu bemerken ist, dass die Rechnung ganz dieselbe ist, als die bei der Verwandlung in Kettenbrüche anzuwendende.

Sei ferner gegeben:

$$\frac{4135590}{4311591}.$$

4135590 | 4311591 | 1
4135590
176001

176001 | 4135590 | 23
352002
615570
528003
87567

87567 | 176001 | 2
175134
867

867 | 87567 | 101
867
867

867 ist der grösste gemeinschaftliche Factor. In der That ist:

867 | 4135590 | 4770
3468
6675
6069
6069
6069

$$\begin{array}{r|l|l} 867 & 4311591 & 4973 \\ & \underline{3468} & \\ & 8435 & \\ & \underline{7803} & \\ & 6329 & \\ & \underline{6069} & \\ & 2601 & \\ & 2601 & \end{array}$$

also:

$$\frac{4135590}{4311591} = \frac{4770}{4973}.$$

Sei ferner gegeben:

$$\frac{30z^5 - 75a^2z^3 - 30az^4 + 135a^3z^2}{52a^2z^3 - 52a^3z^2 - 130a^4z + 234a^5}.$$

$$52a^2z^3 - 52a^3z^2 - 130a^4z + 234a^5$$

$$30z^5 - 30az^4 - 75a^2z^3 + 135a^3z^2 \;\Big|\; \frac{15z^2}{26a^2}$$

$$30z^5 - 30az^4 - 75a^2z^3 + 135a^3z^2$$

Der Qnotient ist $\frac{15z^2}{26a^2}$.

Sei endlich gegeben:

$$\frac{81a^4c^4 + 16b^4 - 72a^2b^2c^2}{45a^3c^3 + 60a^2c^2b + 20acb^2}.$$

$$45a^3c^3 + 60a^2c^2b + 20acb^2$$

$$81a^4c^4 - 72a^2b^2c^2 + 16b^4 \;\Big|\; \frac{9}{5}ac - \frac{12}{5}b$$

$$81a^4c^4 + 108a^3c^3b + 36a^2b^2c^2$$

$$-108a^3c^3b - 108a^2b^2c^2 + 16b^4$$

$$-108a^3c^3b - 144a^2b^2c^2 \qquad -48ab^3c$$

$$36a^2b^2c^2 + 48ab^3c + 16b^4$$

$$36a^2b^2c^2 + 48ab^3c + 16b^4$$

$$45a^3c^3 + 60a^2c^2b + 20acb^2 \;\Big|\; \frac{5}{4}\frac{ac}{b^2}$$

$$45a^3c^3 + 60a^2c^2b + 20acb^2$$

Es ist also gemeinschaftlicher Factor:

$$36a^2b^2c^2 + 48ab^3c + 16b^4.$$

In der That ist:

$$81a^4c^4 + 16b^4 - 72a^2b^2c^2 = (9a^2c^2 - 4b^2)^2 = (3ac - 2b)^2(3ac + 2b)^2.$$

Ferner:

$$45a^3c^3 + 60a^2c^2b + 20acb^2 = 5ac(9a^2c^2 + 12abc + 4b^2) = 5ac(3ac + 2b)^2.$$

Es ist also gemeinschaftlicher Factor:

$$(3ac + 2b)^2 = 9a^2c^2 + 12abc + 4b^2,$$

ein Ausdruck, welcher mit dem obigen übereinstimmt, wenn derselbe mit $4b^2$ dividirt wird.

In der That ist $4b^2$ nicht als Factor in unserm Quotienten enthalten, obgleich er sich bei der Division ergab. Der Grund davon ist folgender.

Bei der ganzen Rechnung wurden Zähler und Nenner als ganze Functionen von $a$, nicht aber als solche von $b$ betrachtet, indem man Zähler und Nenner durch $4b^2$ dividirt, hören also diese Ausdrücke nicht auf, ganze Functionen zu sein. Dieser Factor ist also ganz zufällig, und kann sich bei unserm Verfahren einstellen, was freilich der Anwendung unserer Methode auf Buchstabenausdrücke, wenn dieselben einigermaassen complicirt sind, eigenthümliche Schwierigkeiten bereitet.

Wenn es also geschehen kann, bedient man sich bei dem Heben von Buchstabenbrüchen am liebsten directer Methoden.

Hier führte, wie wir gesehen haben, eine solche auf den Ausdruck:

$$\frac{(3ac-2b)^2(3ac+2b)^2}{5ac(3ac+2b)^2} = \frac{(3ac-2b)^2}{5ac},$$

Zum Schlusse dieses Artikels erwähnen wir noch der Quotienten von der Form $\frac{0}{0}$. Dieser wichtige Gegenstand ist in dem Artikel: Quantitäten (imaginäre, in ihrer Anwendung auf die Functionenrechnung), Abschnitt 10, abgehandelt.

# Inhaltsverzeichniss.



---

Druck von J. F. Starcke in Berlin.

# Berichtigungen zum fünften Bande.

S. 34 vor Zeile 11 links von unten sind die Worte einznschalten: Nehmen wir jetzt an, dass $r^n > \varrho_1 r^{n-1} + \varrho_2 r^{n-2} + \cdots + \varrho_n$ sei, wie dies von einem gewissen Werthe von $r$ an doch geschehen mnss.

S. 35 Zeile 3 links, nach schreiben, ist einzuschalten: wo $\sigma$ nicht reell zu sein braucht.

S. 335 letzte Zeile ist der ganze Ansdruck hinter $e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$ in Klammern einzn-schliessen, nnd am Ende für $(1-\varepsilon)^t$ zn schreiben: $(1-\varepsilon)t$.


SAVELLI & CAPPEL


005269599

